

## リング上の非線形シュレディンガー方程式の解析

著者	中村 孝明
発行年	2018-03
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10173/1882">http://hdl.handle.net/10173/1882</a>

平成 29 年度

リング上の非線形シュレディンガー方程式の解析

平成 30 年 3 月 31 日

全研究室

1205014 中村孝明

# 目次

1	緒論	3
2	NLS の局所的な Well-Posedness と保存則	5
3	閉じた系での NLS	6
3.1	点欠陥のあるリング上の NLS	6
3.2	楕円関数解	7
3.3	相空間	9
3.4	固有値の数値解析	10
3.4.1	非線形性とエネルギー準位	10
3.4.2	接続条件パラメータとエネルギー準位:線形	11
3.4.3	接続条件パラメータとエネルギー準位:非線形	12
3.5	量子ホロノミー	14
3.5.1	ベリー位相の存在	14
3.5.2	エキゾチックな量子ホロノミー	15
3.6	固有状態の安定性	16
4	開放系での NLS	18
4.1	点欠陥のある線上の NLS	18
4.2	固有状態の存在	18
4.3	固有状態の特徴	19
4.4	固有状態の安定性	20
5	結論	22

## 要旨

非線形シュレディンガー方程式 (Nonlinear Schrödinger equation) はその非線形性により解析が困難である。グロス=ピタエフスキー方程式 (上記の方程式の  $\mu = 1$  のとき) は非線形方程式であるが可積分系であり、Fülöp Tsutsui  $-\delta$  型相互作用する希薄な多体ボソン系や光ソリトンなどを記述する。今回、欠陥のあるリング上におけるグロス=ピタエフスキー方程式の固有値を数値計算した。点欠陥の接続条件として、Fülöp Tsutsui  $-\delta$  型 ( $\psi_+ = t\psi_-, t\psi'_+ - \psi'_- = v\psi_-$ ) を選んだ。固有値の準位は3種類に分類でき、線形の方程式と同様に準位の交差、反発、ベリー位相、アンホロノミーが観察された。線形にはみられない準位の消失、分岐も観察されたが、相空間を調べることで準位の消失は固有関数の変化、分岐は固定点からの湧き出しであると理解できた。また、得られた固有値の安定性をソボレフ空間  $H^2$  上での一次摂動論、作用汎関数解析により安定であることを示した。欠陥のある開放系での NLS の ground state の存在とその安定性についても作用汎関数解析で議論し、解が存在するパラメータの範囲と安定性を示した。断熱過程における準位反転も線形の場合と同様にグロス=ピタエフスキー方程式で確認した。

# 1 緒論

非線形シュレディンガー方程式 (Nonlinear Schrödinger equation) は、その非線形性から数学的な解析が困難である。しかし、非線形方程式であるが可積分な方程式も存在し、グロス＝ピタエフスキー方程式 (Gross-Pitaevskii equation) はその一つである。この方程式はハートリー＝フォック近似を用いてグロスとピタエフスキーによって導出され [1, 2]、短距離相互作用する希薄ボソン多体系を記述している。GP 方程式はボーズ＝アインシュタイン凝縮系のモデル方程式であると同時に、渦糸の運動 [4]、スピンの歳差運動 [5]、光ファイバー中ソリトン波の運動 [6] 等の様々な物理系に現れる。NLS は通常量子力学で扱われる線形方程式と異なる性質を持つと思われる、近年実験技術の向上もあり [3]、一次系での研究が盛んになっている。先行研究により、GP 方程式は物理的、数学的に判明しているいくつかのことがある。まず、GP 方程式はソリトン解を持つソリトン方程式の一つであるということである。ソリトンとは互いに衝突しても波形が崩れることなく進行する性質を備えた波動であり、物理現象としては 1834 年に J. S. Russell によって報告され、数学的には 1965 年に N. Zabusky と M. D. Kruskal によって発見された。また、具体的に  $N$  個のソリトンを重ね合わせたような解、 $N$ -ソリトンの具体的な構成法として、I. M. Gelfand や B. M. Levitan らによって完成された逆散乱法と、広田良吾が提唱したソリトン方程式の双線形化法がある。ソリトン方程式は無限の保存量を持ち、佐藤幹夫によってソリトン方程式の解は Grassmann 多様体上に存在するということがわかっている。1次元線上のソリトン解の安定性については Cazenave らが議論し、詳細な結果が得られている [8, 9, 10, 11]。

無限に長い線上での NLS の解についてはいくつか研究がなされていたが、一次元の有限の線と点からなる *graphs* 上での NLS の研究は近年まで行われていなかった。いくつかの興味深い性質が先行研究で知られており [12, 13, 14, 15, 16]、大半の研究は様々なグラフのトポロジーに集中している。グラフ上の点での一般的な接続条件はすでに線形シュレディンガー方程式で一部例外はあるものの [19, 20]、非常によく知られている [17, 18]。

この論文では、NLS の解説とともに、フロップ筒井デルタ (Fülöp Tsutsui  $-\delta$ ) 型点欠陥を課したリング、線上での系の固有値とその安定性の議論を紹介する。またこの系の数値的な解析から得られた、順位交差や反発、新奇量子ホロノミーやベリー位相の存在について論じ、さらには線形系には見られないエネルギー準位の一部消滅といった現象についても解説する。 $FT-\delta$  型は Fülöp Tsutsui スケール因子と  $\delta$  ポテンシャル強度の 2 パラメータで表される点欠陥の接続条件である。 $FT-\delta$  型は Fülöp Tsutsui スケール因子は点欠陥での波動関数を自己共役に接続し、スケール不変の興味深い性質を持つ [21]。一般的な自己共役接続条件は 4 パラメータで記述されるが、今回はスタートアップとして  $FT-\delta$  型を選択した。グラフ上における点欠陥の接続条件の詳細な議論はこの本 [22] の 5 章を読むと良い。非線形系でも線形系と同じようにベリー位相 [23] と新奇なタイプ [24] の量子ホロノミーが現れることが分かった。また、接続パラメータ空間上で非線形系特有の泡構造準位を持つことが分かった。

時間依存する NLS 方程式は

$$\begin{cases} i\partial_t\psi(t, x) = -\partial_{xx}\psi(t, x) + g|\psi(t, x)|^{2\mu}\psi(t, x) \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases} \quad (1)$$

で表される。ここで、 $\psi_0$  は初期値、 $\mu > 0$  とする。方程式 (1) を積分型で表すと、

$$\psi(t, x) = e^{iHt} \phi_0 + i\lambda \int_0^t e^{iH(t-s)} |\psi(s)|^{2\mu} \psi(s) ds, \quad \psi_0 \in D(H) \quad (2)$$

となる。方程式 (1) の解として定常状態は、

$$\psi(t, x) = e^{-iEt} \phi(x) \quad (3)$$

であり、 $\phi_\omega(x)$  は以下の方程式を満たす。

$$-\phi''(x) + g|\phi|^{2\mu} \phi = E\phi \quad (4)$$

また、作用汎関数は境界条件が自由接続のとき、以下のように定義する。

$$S_\omega(\phi) = \frac{1}{2} \|\phi'\|_2^2 + \frac{g}{2\mu+2} \|\phi\|_{2\mu+2}^{2\mu+2} - \frac{\omega}{2} \|\phi\|_2^2 = E(\phi) - \frac{\omega}{2} M(\phi) \quad (5)$$

ただし、 $\|\psi\|_p$  は

$$\|\psi\|_p = \left( \int_D (\phi^* \phi)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

である。また、内積を  $(f, g)$  と表現する。

本論文では、方程式 (4) の解を Grillakis-Shatah-Strauss 理論を用いて安定性の議論を行う。Grillakis-Shatah-Strauss 理論とはノルム  $M$  の制約条件下でのエネルギー  $E$  の最小化を考える、つまりラグランジュの未定乗数法である。

## 2 NLS の局所的な Well-Posedness と保存則

この章では、NLS の基本的な定理、初期値に対する解の一意性と質量 (チャージともいう) とエネルギーの保存則を示す。

定理 1 初期値に対する局所的な解の一意性

任意の初期値  $\psi_0$  に対して、ある時刻  $T > 0$  が存在して、方程式 (1) を満たす唯一の解  $\psi(x, t)$  が存在する。

例えば、[19] に証明が載っている。

定理 2 マスとエネルギーの保存則

方程式 (1) を満たす任意の解  $\psi(x, t)$  と時刻  $t$  に対して、(5) で定義されたエネルギー  $E$ 、質量  $M$  が保存される。つまり、 $M(\psi(t)) = M(\psi_0)$ 、 $E(\psi(t)) = E(\psi_0)$  となる。

証明

エネルギー  $E$ 、質量  $M$  を時間  $t$  で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} M(\psi) &= 2\operatorname{Re}[(\psi, \frac{\partial}{\partial t} \psi)] = 2\operatorname{Re}[(\psi, i\psi'' + ig|\psi|^{2\mu}\psi)] = 2\operatorname{Re}[(\psi', -i\psi')] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} E(\psi) &= \operatorname{Re}[(\frac{\partial}{\partial t} \psi, -\psi'')] - \frac{g}{\mu+1} \operatorname{Re}[(\frac{\partial}{\partial t} \psi^{\mu+1}, \psi^{\mu+1})] = \operatorname{Re}[(\frac{\partial}{\partial t} \psi, -\psi'')] - g\operatorname{Re}[(\psi^\mu \frac{\partial}{\partial t} \psi, \psi^{\mu+1})] \\ &= \operatorname{Re}[(\frac{\partial}{\partial t} \psi, i\frac{\partial}{\partial t} \psi)] = 0\end{aligned}$$

となる。よって、 $M(\psi(t)) = M(\psi_0)$ 、 $E(\psi(t)) = E(\psi_0)$  となる。

証明終了

### 3 閉じた系での NLS

#### 3.1 点欠陥のあるリング上の NLS

以下のような、長さ  $L = 2\pi$  の有限リング上の系  $R$  を考える。

$$R = [0, L) \quad (7)$$

ここで、 $x = 0$  と  $x = L$  がリングの端点であり同一視する。リングの端点に下記のような  $FT - \delta$  型の接続条件を課す。

$$\begin{aligned} t\Psi'(0_+, t) - \Psi'(L_-, t) &= v\Psi(L_-, t) \\ \Psi(0_+, t) - t\Psi(L_-, t) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $v$  と  $t$  は実数とする [21]。さらに、質量保存則を満たすため質量制約を課す。

$$M = \int_0^L dx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t), \quad (9)$$

$FT - \delta$  相互作用を記述するハミルトニアン演算子を領域

$$D(H_{FT-\delta}) = \{\Psi \in H^2(R - \{0\}) \mid \Psi(0_+) = t\Psi(L_-), \ t\Psi'(0_+) - \Psi'(L_-) = v\Psi(L_-)\} \quad (10)$$

で定義する。ここで、端点  $x = 0, L$  以外の作用は  $H_{FT-\delta}\Psi = -\Psi''$  とする。このとき、三次の NLS は

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t, x) = -\partial_{xx} \Psi(t, x) + \delta_{(x,t)}^{FT-\delta} \Psi(t, x) + g|\Psi(t, x)|^2 \Psi(t, x) \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases} \quad (11)$$

となる。ただし、 $g$  は実数、 $\Psi_0$  は初期値である。定常波解  $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i(Et - \eta_0)}$  を仮定すると、以下の固有値方程式を得る。ただし、 $E$  は実数で、 $\psi$  は実関数とする。

$$H_{FT-\delta}\psi(x) + g\psi^3(x) = E\psi(x) \quad (12)$$

定常波解を仮定することにより、接続条件 (8) と質量制約 (9) は時間に依存しない波動関数  $\psi(x)$  を用いて、

$$\begin{aligned} t\psi'(0_+) - \psi'(L_-) &= v\psi(L_-) \\ \psi(0_+) - t\psi(L_-) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$M = \int_0^L dx \psi^*(x) \psi(x) \quad (14)$$

と表される。

固有値方程式 (12) と質量制約 (14) を満たす  $\psi(x)$  に対して、スケール変換  $\tilde{\psi} = \sqrt{\alpha}\psi$ 、 $\tilde{g} = \frac{g}{\alpha}$  を行なうと、 $\tilde{\psi}$  は

$$-\tilde{\psi}''(x) + \tilde{g}\tilde{\psi}^3(x) = E\tilde{\psi}(x) \quad (15)$$

と  $\int_0^L dx \tilde{\psi}^*(x) \tilde{\psi}(x) = \alpha M$  を満たす。故に、一般性を失わず質量  $M = 1$  と設定できる。



### 3.2 楕円関数解

固有値方程式 (12) は可積分であり、両辺に  $\psi'(x)$  をかけて  $x$  で積分すると、

$$\psi'^2(x) = \frac{g}{2}\psi^4(x) - E\psi^2(x) + 2c \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(\psi^2 - k_+^2)(\psi^2 - k_-^2)}} d\psi = \pm \sqrt{\frac{g}{2}}(x - x_0) \quad (17)$$

ここで、 $k_{\pm}$  は

$$k_{\pm} = \sqrt{\frac{E}{g}} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4gc}{E^2}}}, \quad (18)$$

で定義され、 $c, x_0 \in \mathbb{R}$  は任意積分定数である。左辺の積分は楕円積分と呼ばれ、最終的に  $\psi$  はヤコビの楕円関数  $sn$ 、 $cn$  と  $dn$  を用いて表される。 $g > 0$ 、 $E > 0$  のときの固有関数は

$$\psi(x) = k_- sn\left[\sqrt{\frac{g}{2}}k_+(x - x_0), \frac{k_-^2}{k_+^2}\right] \quad (0 \leq c), \quad (19)$$

$$\psi(x) = \frac{k_+}{sn\left[\sqrt{\frac{g}{2}}k_+(x - x_0), \frac{k_-^2}{k_+^2}\right]} \quad (0 \leq c \leq \frac{E^2}{4g}) \quad (20)$$

と

$$\psi(x) = \frac{k_+}{cn\left[\sqrt{\frac{g(k_+^2 - k_-^2)}{2}}(x - x_0), -\frac{k_-^2}{k_+^2 - k_-^2}\right]} \quad (c \leq 0) \quad (21)$$

のいずれかで表される。 $g > 0$ 、 $E < 0$  のときの固有関数は

$$\psi(x) = k_- sn\left[\sqrt{\frac{g}{2}}k_+(x - x_0), \frac{k_-^2}{k_+^2}\right] \quad (\frac{E^2}{4g} \leq c), \quad (22)$$

$$\psi(x) = \frac{k_-}{sn\left[\sqrt{\frac{g}{2}}k_-(x - x_0), \frac{k_+^2}{k_-^2}\right]} \quad (0 \leq c \leq \frac{E^2}{4g}) \quad (23)$$

と

$$\psi(x) = \frac{k_+}{cn\left[\sqrt{\frac{g(k_+^2 - k_-^2)}{2}}(x - x_0), -\frac{k_-^2}{k_+^2 - k_-^2}\right]} \quad (c \leq 0) \quad (24)$$

のいずれかで表される。 $g < 0$ 、 $E > 0$  のときの固有関数は

$$\psi(x) = k_+ sn\left[\sqrt{\frac{g}{2}}k_-(x - x_0), \frac{k_+^2}{k_-^2}\right] e^{in_0} \quad (0 \leq c) \quad (25)$$

だけであり、 $c > 0$  のときは解がない。 $g < 0$ 、 $E < 0$  のときの固有関数は

$$\psi(x) = k_+ cn\left[\sqrt{\frac{-g(k_+^2 - k_-^2)}{2}}(x - x_0), \frac{k_+^2}{k_+^2 - k_-^2}\right] \quad (0 \leq c) \quad (26)$$

もしくは、

$$\psi(x) = k_+ dn\left[\sqrt{\frac{-g}{2}} k_+(x - x_0), \frac{k_+^2 - k_-^2}{k_+^2}\right] \quad \left(\frac{E^2}{4g} \leq c \leq 0\right) \quad (27)$$

で表され、 $c < \frac{E^2}{4g}$  のときは解がない。最後に、 $g < 0$ 、 $E = 0$  のときの固有関数は

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{1}{x - x_0} \quad (28)$$

を得る。妥当な自己制約として接続条件 (13)、質量制約  $M = 1$  (14) を課す、つまり  $t$ 、 $v$ 、 $M$  を与えることにより、非線形強度  $g$  に対して数値的に取りうる  $x_0$ 、 $c$  と  $E$  の組み合わせを得ることを次章以降で考える。また、線形極限  $g = 0$  は三角関数を用いて可解であり、

$$\psi(x) = \sin k(x - x_0) \quad (29)$$

ここで、初期位相は

$$x_0 = -\frac{1}{k} \arctan \frac{\sin kL}{t - \cos kL}, \quad (30)$$

$k = \sqrt{E}$  である。解は

$$t \cos kL = 1 \pm \sqrt{1 - \cos kL \left( \cos kL + \frac{v}{k} \sin kL \right)} \quad (31)$$

となる。(31) より、関数として  $t = t(k, v)$  つまり、 $E = E(t, v)$  が得られる。

### 3.3 相空間

図1は方程式(16)から $|g| = 1$ 、 $|E| = 1$ に固定し、いくつかの積分定数 $c$ を固定して $\{\psi, \psi'\}$ 空間を描いた。一つ一つの滑らかな曲線が固有値方程式(12)の固有関数であり、方程式(16)から $\psi = 0$ と $\psi' = 0$ に対して対称な曲線は同一視する。 $g > 0$ 、 $E > 0$ のとき、固有関数は左右に”く”の字の曲線、原点付近の楕円と上下に”W”の3種類存在する。また、 $c = \frac{E^2}{4g}$ のとき3種類の解が接合して、特解であるダークソリトンやハートリー解を表している。 $g > 0$ 、 $E < 0$ のとき、固有関数は左右に”く”の字の曲線、原点付近の楕円と上下に”U”の3種類存在する。このときも $c = \frac{E^2}{4g}$ のとき2種類の解が接合している。 $g < 0$ 、 $E > 0$ のとき、固有関数は原点付近の楕円の1種類のみ存在する。 $g < 0$ 、 $E < 0$ のとき、固有関数は $(\psi, \psi') = (\pm 1, 0)$ 付近の楕円と瓢箪型の2種類存在し、 $(\psi, \psi') = (\pm 1, 0)$ から楕円型の解が湧き出しているように観察される。このときも $c = 0$ のとき2種類の解が接合している。

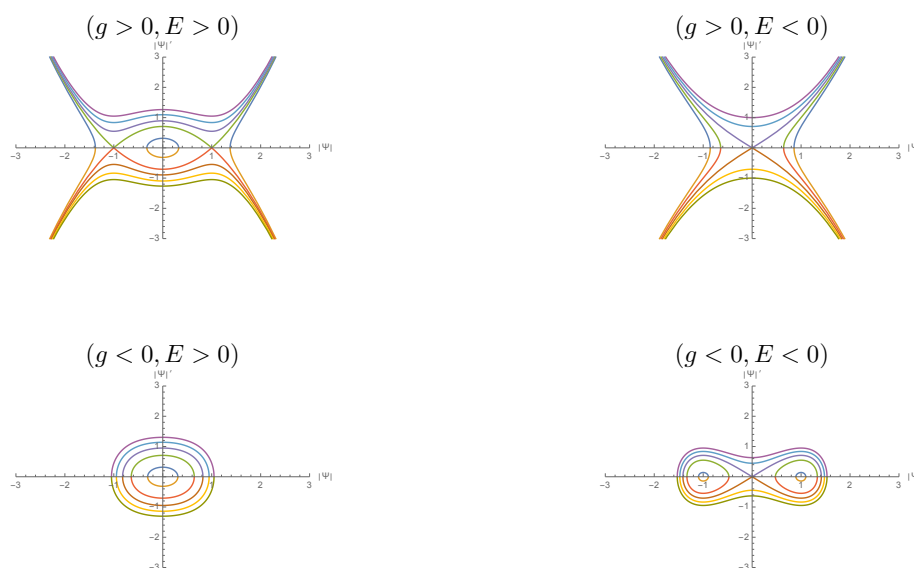


図1 それぞれの $(g, E)$ における相空間 $\{\psi, \psi'\}$

### 3.4 固有値の数値解析

#### 3.4.1 非線形性とエネルギー準位

これまでの章で詳説した方法により、ニュートン法を用いてエネルギー固有値を数値計算した。図2は欠陥の接続条件パラメータを  $t = 1, v = 0$ 、つまり自由接続の条件で非線形強度  $g$  の関数としてエネルギー固有値を表している。全てのエネルギー準位が  $g$  に対して単調に増加している。非線形系の特徴として、エネルギー準位の交差と分岐が見られる。図中のエネルギー準位は2パターンに分けられる。一つは固有関数 (19)、(22)、(25) と (26)、もう一方は固有関数 (20)、(21)、(23)、(24) と (27) で得られる。図2の原点を通る直線は前者に属し、 $g = -\pi$  で分岐が発生する。非線形性  $g$  が増加するにつれてエネルギー固有値も増加しているので、二倍振動、三倍振動の波動関数も接続条件 (13) と質量制約  $M = 1$  を満たす、つまり図2の任意の非線形強度とエネルギー ( $g, E$ ) に対して、 $(n^2g, n^2E)$  も条件 (13) と  $M = 1$  を満たす。

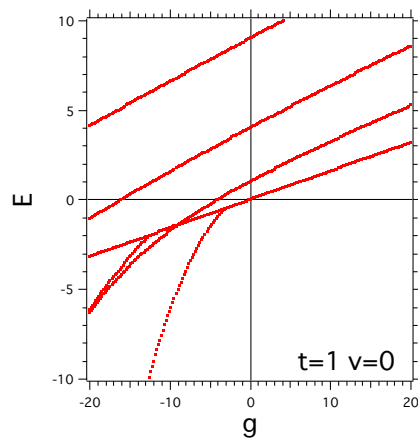


図2 自由接続条件 ( $t = 1, v = 0$ ) でのエネルギー準位

自由接続条件でのエネルギー固有値を、複素数値関数まで方程式 (12) の解を広げて計算結果を図3に示した。図3に示した青いエネルギー準位は複素数値固有関数であるハートリー解を持ち、確率密度流速を持つ。また、図3から3つのエネルギー準位列が存在することがみて取れる。

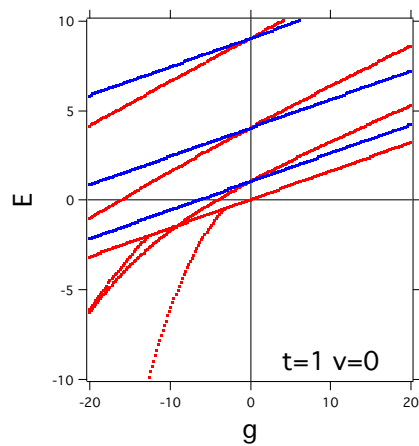


図3 (赤線:流速無 青線:流速有) 自由接続条件 ( $t = 1, v = 0$ ) でのエネルギー準位

### 3.4.2 接続条件パラメータとエネルギー準位:線形

非線形強度  $g$  と  $\delta$  強度パラメータ  $v$  を固定して、接続条件パラメータ  $t$  の関数としてエネルギー固有値  $E$  を計算した。まずは、非線形の場合と比較するために線形 ( $g = 0$ ) の場合のエネルギー構造をみる。結果は図4に示した。ただし、縦軸は  $\text{sgn}(E)\sqrt{|E|}$  にスケール変換したエネルギー固有値、横軸は  $2 \arctan(t)$  にスケール変換した接続条件パラメータとする。 $\delta$  強度パラメータ  $v$  はそれぞれ左図、右図、中央図と  $v = -1, 0, 1$  に固定した。 $v = 0$  のとき、 $t = -1$  と  $t = 1$  で準位交差が起きている。準位交差は流速の向きが右回りと左回りがあるため起きている。 $v \neq 0$  のとき、 $t = -1$  と  $t = 1$  付近で準位反発が起きている。

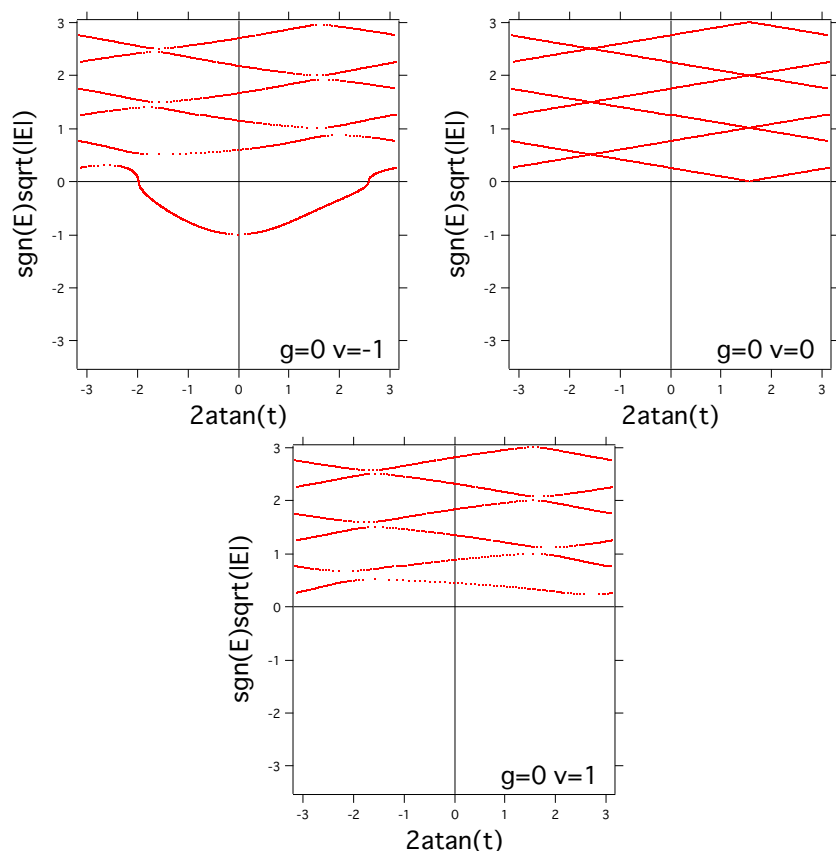


図4 線形系 ( $g = 0$ ) でのそれぞれの  $v$  におけるエネルギー準位

### 3.4.3 接続条件パラメータとエネルギー準位:非線形

非線形系において、接続条件パラメータ  $t$  の関数としてエネルギー固有値  $E$  を計算した。 $g = 5$  における結果を図5に、 $g = -5$  における結果を図6に示した。図の様式は図4と同じ様式で描かれている。それぞれ  $\delta$  強度  $v = -1$ (左図)、 $0$ (中央図)、 $1$ (右図) における  $t - E$  平面上のエネルギー固有値を描いた。

非線形強度  $g = 5$  のとき (図5)、エネルギー準位が線形するとき (図4) と比べて少し崩れ全体的に上方にシフトしている。すべての解は  $E > 0$  の範囲にあるため、固有関数 (19)、(20) と (21) から得られる。 $(t, v) = (1, 0)$  と  $(-1, 0)$  での準位交差は変わらず存在し、 $v \neq 0$  のとき、準位交差点周りでの準位反発も見られた。線形系 ( $g=0$ ) と大きく異なる点はエネルギー準位が突然消失することである。固有関数 (19) から計算したエネルギー固有値は消失しており、消失した点に対応する  $t$  を超えると、条件が  $c > \frac{E^2}{4g}$  となり解が存在しない。図6は  $g = -5$  のときのエネルギー準位を示している。エネルギー準位が線形するとき (図4) と比べて少し崩れ、全体的に下方にシフトしている。この系でも、 $(t, v) = (1, 0)$  と  $(-1, 0)$  での準位交差は変わらず存在し、 $v \neq 0$  のとき、準位交差点周りでの準位反発も見られた。 $g$  が正のときとは違い、 $g = -5$  のときは準位消失は存在しない。代わりに  $v < 0$  のとき、 $t - E$  平面上で特徴的なリング状のエネルギー準位が見られた。リング状のエネルギー準位は図3の原点を通る準位に対応していて方程式 (27) から得られる。一方で、他のエネルギー準位は固

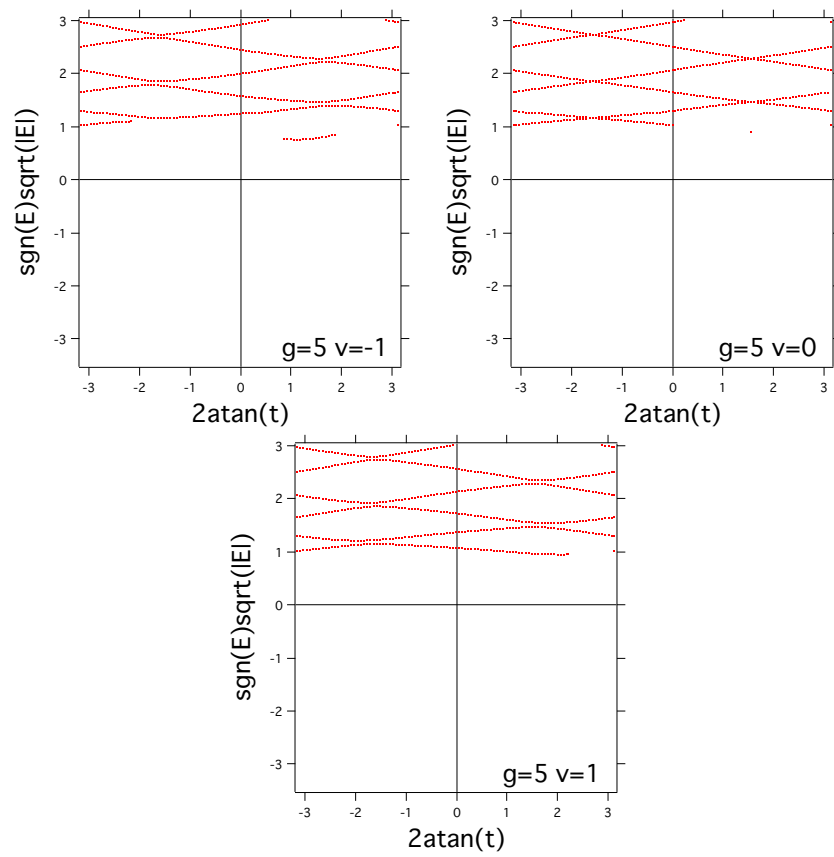


図5 非線形系 ( $g = 5$ ) でのそれぞれの  $\nu$  におけるエネルギー準位 図中の  $t \sim 1$  &  $t \sim \infty$  の付近に孤立点があることに注意

有関数 (25) と (26) から得られる。三次元空間  $t - \nu - E$  上で、リング状のエネルギー準位は泡状構造をしており、その他通常のエネルギー準位と一点  $(t, \nu) = (1, 0)$  で接続している。最後に注目すべき構造として、最も低いエネルギー準位は  $t = 0$  軸に対してほぼ対称に現れている。ほぼ対称であり、右側の準位がわずかに低い。

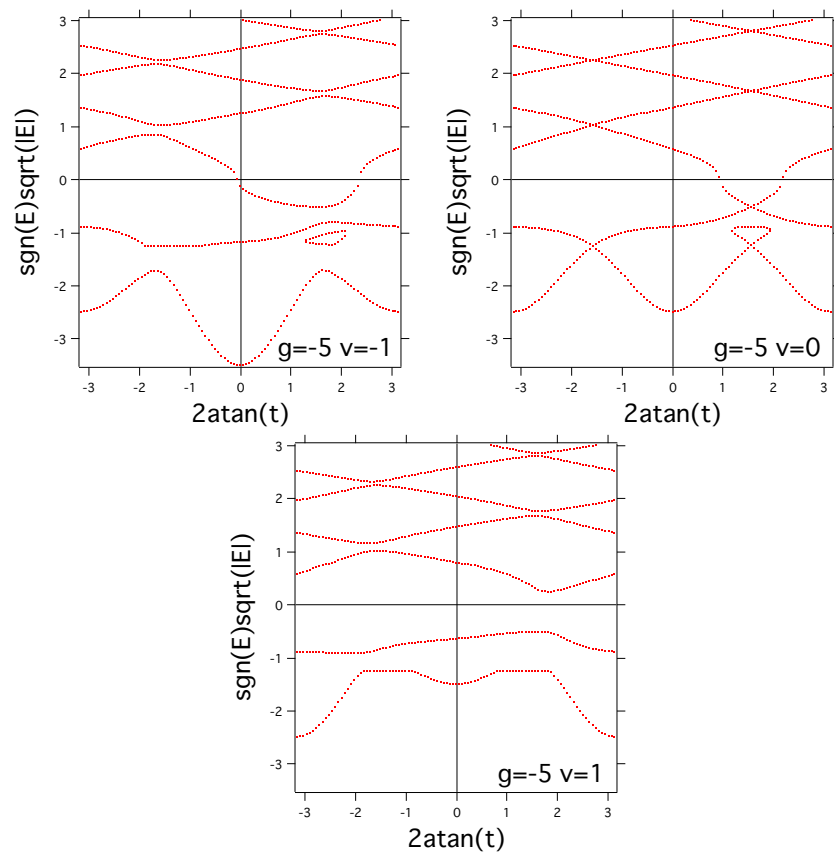


図6 非線形系 ( $g = -5$ ) でのそれぞれの  $v$  におけるエネルギー準位

### 3.5 量子ホロノミー

#### 3.5.1 ベリー位相の存在

パラメータ空間  $\{t, v\}$  上でエネルギーが縮退している点周りの閉じた経路を考える。シュレディンガー方程式が与える系において、パラメータサイクルを経路に沿って断熱的に動かし初期の点に帰ってきたとき、波動関数に関して非自明な位相が現れることをベリーが証明している [23]。NLS でも類似現象が起こるかどうかを確かめた。それぞれ縮退点  $(t, v) = (1, 0)$  と  $(t, v) = (-1, 0)$  周りの波動関数の断熱変化図 (図7、図8) によりベリー位相が存在することが示せた。しかし、通常エネルギー準位とリング上のエネルギー準位との縮退点周りでは、ベリー位相は存在しなかった。



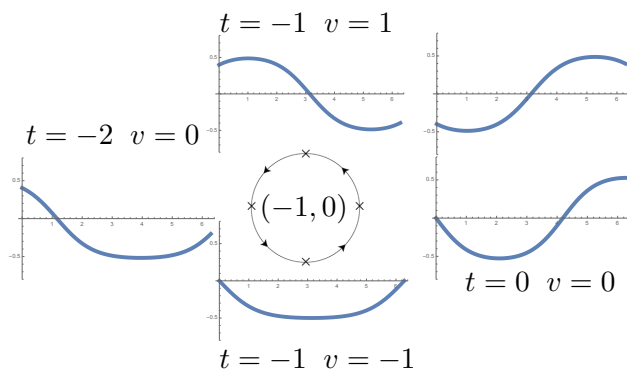


図7  $g = 5$  での  $(t, v) = (-1, 0)$  周りの様々なパラメータでの波動関数 ベリー位相  $e^{i\pi}$  が存在することが示されている。

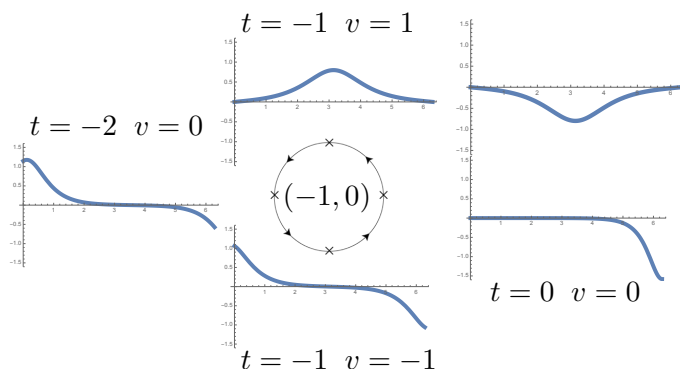


図8  $g = -5$  での  $(t, v) = (-1, 0)$  周りの様々なパラメータでの波動関数 ベリー位相  $e^{i\pi}$  が存在することが示されている。

### 3.5.2 エキゾチックな量子ホロノミー

パラメータサイクルに沿った断熱過程によって引き起こされるのはベリー位相だけでなく、異なるエネルギー固有値への遷移も引き起こされることが知られている。この現象はエキゾチックな量子ホロノミーとして知られている [24]。図9では異なる非線形強度  $g$  に対して、スケール不変パラメータを  $t = 1$  固定して  $\delta$ -強度  $v$  の関数として、NLSの数値計算したエネルギー固有値を示した。条件  $v = \infty$  と  $v = -\infty$  は特別な値で、切断されたディリクレ境界条件を意味している。故に、図9の左と右の端は同一視でき、左端  $v = -\infty$  から右端  $v = \infty$  への過程はサイクルとみなせる。それぞれのグラフでエキゾチックな量子ホロノミーの存在を確認できる。異なる非線形強度  $g$  における3系で、Ground state と第一、第三、第五励起状態は断熱過程  $v = -\infty \rightarrow v = \infty$  によりエネルギー遷移を得る。故に、通常の線形シュレディンガー方程式と同じようにエキゾチックな量子ホロノミーが存在することを示した。

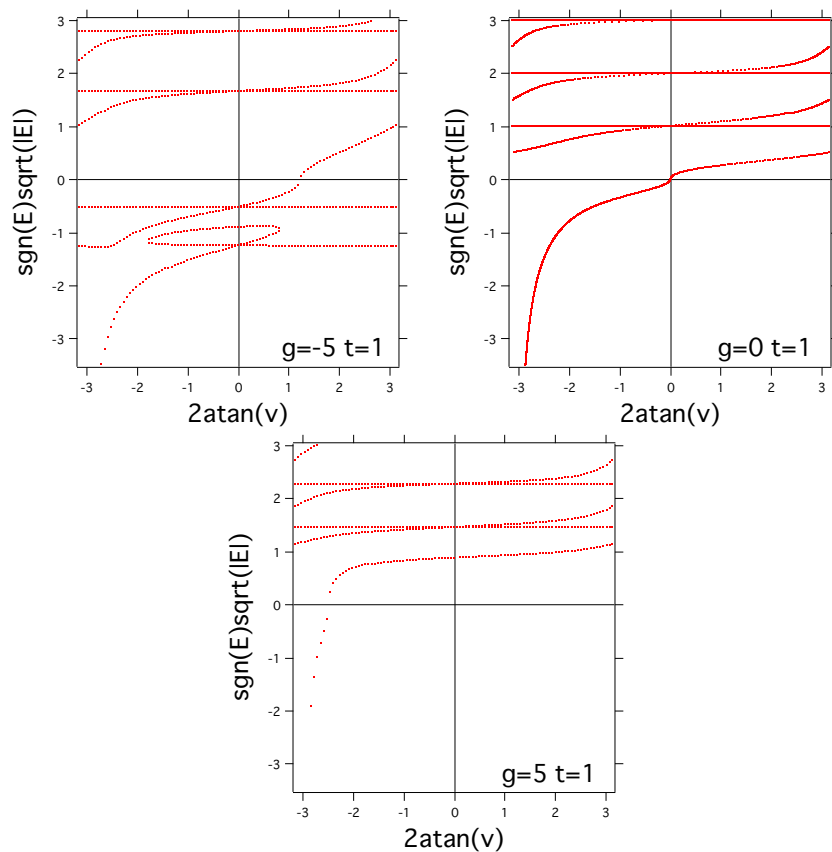


図9  $t = 1$  に固定したそれぞれの  $g$  での非線形系のエネルギー準位

### 3.6 固有状態の安定性

前章までに計算したエネルギー固有値に対応する固有関数の安定性を Grillakis-Shatah-Strauss 理論で議論する。Grillakis-Shatah-Strauss 理論は質量制約条件下でエネルギー最小値問題を扱う、つまりラグランジュ未定乗数法である。作用汎関数  $S_\omega$  を

$$S_\omega(\psi) = \frac{1}{2}(\|\psi'\|_2^2 + v|\psi(L_-)|^2) + \frac{g}{4}\|\psi\|_4^4 - \frac{\omega}{2}\|\psi\|_2^2 = E(\psi) - \frac{\omega}{2}M(\psi). \quad (32)$$

で定義する。 $-\frac{\omega}{2}$  が未定乗数である。 $\psi$  が  $S'_\omega(\psi) = 0$  を満たすとき、 $\psi$  は方程式 (12) の固有関数であり、 $\omega$  はエネルギー固有値となる。よって、方程式 (12) を満たす  $\psi$  は作用汎関数の極値となる。 $S'_\omega(\psi)$  は Nehari 多様体  $I_\omega(\psi)$  とも呼ばれる。ここで微分はフレチェット微分とする。

$$I_\omega(\psi) = (H_{FT-\delta}\psi + g|\psi|^2\psi - \omega\psi, \psi) \quad (33)$$

$S_\omega$  を二回微分すると、

$$S''_\omega = (w, w'') - \omega(w, w) + 2g(\psi w, \psi w) + g\text{Re}[(\psi^{\mu+1}, w^2\psi^{\mu-1})] \quad (34)$$

となる。しかし、質量制約から  $\psi$  近傍の  $\psi + sw$  は  $(\psi + sw, \psi + sw) = (\psi, \psi)$  を満たしている。質量変化のない方向の近傍で計算すると、以下を得る。

$$S''_\omega = (w, w'') - \omega(w, w) + g(\psi w, \psi w). \quad (35)$$

さらに計算を行うと、

$$S''_{\omega} = \int_0^L \psi^2 \left( \left( \frac{p}{\psi} \right)'^2 + \left( \frac{q}{\psi} \right)'^2 \right) dx \geq 0, \quad (36)$$

となる。ただし、 $w=p+iq$  であり、 $p, q$  は実関数とする。被積分関数は発散しないので、 $\psi(x) = 0$  となる  $x$  があっても上記は成り立つ。故に、Grillakis-Shatah-Strauss から前節までで求めた固有関数は作用汎関数の極小値となり、方程式 (12) を満たす  $\psi$  は安定である。

## 4 開放系での NLS

### 4.1 点欠陥のある線上の NLS

以下のような、長さ無限線上の系  $\mathbb{R}$  を考える。ここで、原点に下記のような  $FT - \delta$  型の接続条件を課す。

$$\begin{aligned} t\Psi'(0_+, t) - \Psi'(0_-, t) &= v\Psi(0_-, t) \\ \Psi(0_+, t) - t\Psi(0_-, t) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$v$  と  $t$  は実数とする [21]。さらに、質量保存則を満たすため質量制約を課す。

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t), \quad (38)$$

$FT - \delta$  相互作用を記述するハミルトニアン演算子を領域

$$D(H_{FT-\delta}) = \{\Psi \in H^2(\mathbb{R} - \{0\}) \mid \Psi(0_+) = t\Psi(0_-), \ t\Psi'(0_+) - \Psi'(0_-) = v\Psi(0_-)\} \quad (39)$$

で定義する。ここで、原点  $x = 0$  以外の作用は  $H_{FT-\delta}\Psi = -\Psi''$  とする。このとき、NLS は

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(t, x) = -\partial_{xx} \Psi(t, x) + \delta_{(x,t)}^{FT-\delta} \Psi(t, x) + g|\Psi(t, x)|^{2\mu} \Psi(t, x) \\ \Psi(0) = \Psi_0 \end{cases} \quad (40)$$

となる。ただし、 $g$  は実数、 $\Psi_0$  は初期値である。定常波解  $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i(Et-\eta_0)}$  を仮定すると、以下の固有値方程式を得る。ただし、 $E$  は実数で、 $\psi$  は実関数とする。

$$H_{FT-\delta}\psi(x) + g|\psi|^{2\mu}(x) = E\psi(x) \quad (41)$$

定常波解を仮定することにより、接続条件 (37) と質量制約 (38) は時間に依存しない波動関数  $\psi(x)$  を用いて、

$$\begin{aligned} t\psi'(0_+) - \psi'(0_-) &= v\psi(0_-) \\ \psi(0_+) - t\psi(0_-) &= 0 \end{aligned} \quad (42)$$

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \psi(x) \quad (43)$$

と表される。

### 4.2 固有状態の存在

固有値方程式 (41) は可積分であり、両辺に  $\psi'(x)$  をかけて  $x$  で積分すると、

$$\psi'^2(x) = \frac{g}{2}\psi^4(x) - E\psi^2(x) + 2c \quad (44)$$

となる。 $c \in \mathbb{R}$  は積分定数とする。ここで、方程式 (44) から線 ( $\mathbb{R}$ ) 上でノルムを定義するためには、 $g < 0$ 、 $E < 0$ 、 $c = 0$  でなければならないことがわかる。さらに計算を進めると固有関数は  $\omega = -E$ 、 $\lambda = -g$  とすると、

$$\psi_\omega(x) = \begin{cases} \pm \lambda^{-\frac{1}{2\mu}} (\mu + 1)^{\frac{1}{2\mu}} \omega^{\frac{1}{\mu}} \cosh^{-\frac{1}{\mu}} [\mu\sqrt{\omega}(x - x_+)] & x > 0 \\ \lambda^{-\frac{1}{2\mu}} (\mu + 1)^{\frac{1}{2\mu}} \omega^{\frac{1}{\mu}} \cosh^{-\frac{1}{\mu}} [\mu\sqrt{\omega}(x - x_-)] & x < 0. \end{cases} \quad (45)$$

のみであることがわかる。

### 4.3 固有状態の特徴

前説で定義した  $\psi_\omega$  は方程式 (42) と (43) を満たすので、

$$\begin{cases} -\psi'' - \lambda|\psi|^{2\mu}\psi + \omega\psi = 0, & x \neq 0, \quad \psi \in H^2(\mathbb{R} - \{0\}) \\ \psi(0_+) = t\psi(0_-) & t \neq 0 \\ t\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = v\psi(0_-). \end{cases} \quad (46)$$

つまり、

$$\begin{cases} T_+ = \frac{1}{t^2} (T_- + \frac{v}{\sqrt{\omega}}) \\ \frac{T_-^2}{1 - \frac{1}{t^{2\mu}}} - \frac{T_+^2}{t^{2\mu} - 1} = 1 \end{cases} \quad (47)$$

となる。ただし、 $T_\pm = \tanh(\mu\sqrt{\omega}x_\pm)$  である。

$|t| > 1$  のとき、

- もし  $\omega \leq \frac{v^2}{(t^2+1)^2}$  であれば、系 (47) は解を持たない。;
- もし  $\frac{v^2}{(t^2+1)^2} < \omega \leq \frac{v^2}{(t^2-1)^2}$  であれば、系 (50) は解を一つ持ち、;  
 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  が存在し、以下のようなになる。

$$x_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2} \frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2} \frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (48)$$

$$x_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (49)$$

- もし  $\frac{v^2}{(t^2-1)^2} < \omega$  であれば、系 (47) は解を二つ持ち、;  
 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  と  $\psi_\omega^{x'_+, x'_-}$  が存在し、以下のようなになる。

$$x_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2} \frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2} \frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (50)$$

$$x_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu} \frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (51)$$

$$x'_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (52)$$

$$x'_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right). \quad (53)$$

$|t| < 1$  のとき、

- もし  $\omega \leq \frac{v^2}{(t^2+1)^2}$  であれば、系 (47) の解は存在しない。;
- もし  $\frac{v^2}{(t^2+1)^2} < \omega \leq \frac{v^2}{(t^2-1)^2}$  であれば、系 (47) は解を一つ持ち、;  
 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  が存在し、以下のようになる。

$$x_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (54)$$

$$x_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right). \quad (55)$$

- もし  $\frac{v^2}{(t^2-1)^2} < \omega$  であれば、系 (47) は解を二つ持ち、;  
 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  と  $\psi_\omega^{x'_+, x'_-}$  が存在し、以下のようになる。

$$x_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (56)$$

$$x_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (57)$$

$$x'_+ = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} + \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + t^{2\mu+2}\frac{v}{\sqrt{\omega}} - \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right) \quad (58)$$

$$x'_- = \frac{1}{2\mu\sqrt{\omega}} \log\left(\frac{1 - t^{2\mu+4} - \frac{v}{\sqrt{\omega}} + t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}{1 - t^{2\mu+4} + \frac{v}{\sqrt{\omega}} - t^2 \sqrt{(1 - t^{2\mu+4})(1 - t^{2\mu}) + t^{2\mu}\frac{v^2}{\omega}}}\right). \quad (59)$$

#### 4.4 固有状態の安定性

3.6 と同じように固有関数の安定性を Grillakis-Shatah-Strauss 理論で議論する。作用汎関数  $S_\omega$  を

$$S_\omega(\psi_\omega) = \frac{1}{2}(\|\psi'_\omega\|_2^2 + v|\psi_\omega(0_-)|^2) - \frac{\lambda}{2\mu+2}\|\psi_\omega\|_{2\mu+2}^{2\mu+2} + \frac{\omega}{2}\|\psi_\omega\|_2^2 = E(\psi_\omega) + \frac{\omega}{2}M(\psi_\omega) \quad (60)$$

で定義する。今、 $S_\omega$  を計算すると、

$$S_\omega(\psi_\omega^{x_+, x_-}) = \frac{\omega^{\frac{1}{2}+\mu}(\mu+1)^{\frac{1}{\mu}}}{2\lambda^{\frac{1}{\mu}}} \left[ \int_{-1}^1 (1-\tau^2)^{\frac{1}{\mu}} d\tau + \int_{T_-}^{T_+} (1-\tau^2)^{\frac{1}{\mu}} d\tau \right] \quad (61)$$

となる。

$\frac{v^2}{(t^2-1)^2} < \omega$  のとき、系 (47) は二つの解、二つのエネルギー準位を持つ。

また、 $T_+ - T_- < T'_+ - T'_-$  より、 $S_\omega(\psi_\omega^{x_+, x_-}) < S_\omega(\psi_\omega^{x'_+, x'_-})$  となり、 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  が Ground state となる。ただし、 $T'_\pm = \tanh(\mu\sqrt{\omega}x'_\pm)$  である。

定理 3

$\omega > \frac{v^2}{(t^2+1)^2}$ 、 $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  のとき、定義された  $\psi_\omega$  が質量制約  $M[\psi_\omega] = M_0$  を満たすような  $\omega$  がただ一つ存在する。

証明

$M[\psi_\omega]$  を  $\omega$  で微分すると以下を得る。

$$\frac{dM}{d\omega} = \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{\omega^{\frac{1}{\mu}-\frac{3}{2}}}{\mu} \left( \left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right) \left( \int_{T_+}^1 (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT + \int_{-1}^{T_-} (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT \right) - \frac{v}{2\sqrt{\omega}} \left( (1-T_-^2)^{\frac{1}{\mu}-1} \left( \frac{|t|^2 t^{2\mu} - t^2}{\frac{T_+}{T_-} - |t|^2 t^{2\mu}} + 1 \right) \right) \right). \quad (62)$$

このとき  $|t| > 1$ 、 $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  ならば、

$$\frac{dM}{d\omega} > \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{\omega^{\frac{1}{\mu}-\frac{3}{2}}}{\mu} \left( \left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right) \left( \int_{T_+}^1 (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT + \int_{-1}^{T_-} (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT \right) - \frac{v}{2\sqrt{\omega}} \left( (1-T_-^2)^{\frac{1}{\mu}-1} \left( \frac{t^2-1}{|t|^2 t^{2\mu}-1} \right) \right) \right) > 0 \quad (63)$$

となり、 $|t| < 1$ 、 $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  ならば、

$$\frac{dM}{d\omega} > \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{\omega^{\frac{1}{\mu}-\frac{3}{2}}}{\mu} \left( \left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{2}\right) \left( \int_{T_+}^1 (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT + \int_{-1}^{T_-} (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT \right) - \frac{v}{2\sqrt{\omega}} \left( (1-T_-^2)^{\frac{1}{\mu}-1} \left( \frac{1-t^2}{1-|t|^2 t^{2\mu}} \right) \right) \right) > 0 \quad (64)$$

となる。よって、(63)、(64) より質量  $M[\psi_\omega]$  は  $\omega$  に対して単調増加関数となる。

つまり、 $\omega > \frac{v^2}{(t^2+1)^2}$ 、 $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  のとき、定義された  $\psi_\omega$  が質量制約  $M[\psi_\omega] = M_0$  を満たすような  $\omega$  がただ一つ存在する。

証明終了

ただし、 $\frac{dM}{d\omega} > 0$  が示せば良いので、条件  $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  は緩くすることができる。ここで、

$\lim_{\omega \rightarrow \frac{v^2}{(t^2+1)^2} + 0} M[\psi_\omega^{x_+, x_-}] = 0$  より、

$\lim_{\omega \rightarrow \frac{v^2}{(t^2-1)^2} + 0} M[\psi_\omega^{x'_+, x'_-}] = \left(\frac{\mu+1}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\mu}} \frac{1}{\mu\sqrt{\omega}} \int_{-1}^1 (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT + \int_{T_-}^{T_+} (1-T^2)^{\frac{1}{\mu}-1} dT = M^*$  とおくと、任意の  $0 < M_0 < M^*$  に対して、 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  が  $M[\psi_\omega] = M_0$  を満たすような  $\omega$  が唯一存在し、任意の  $M_0 > M^*$  に対して、 $\psi_\omega^{x_+, x_-}$  が  $M[\psi_\omega] = M_0$  を満たすような  $\omega$  が二つ存在する。

節 3.6 と同じように方程式 (46) は作用汎関数  $S_\omega$  の極値となっている。 $S_\omega$  を二回微分すると、

$$S''_\omega = (w, w'') + \omega(w, w) + 2g(\psi w, \psi w) + gRe[(\psi^{\mu+1}, w^2 \psi^{\mu-1})] \quad (65)$$

となるが、質量制約から  $\psi$  近傍の  $\psi + sw$  は  $(\psi + sw, \psi + sw) = (\psi, \psi)$  を満たしている。質量変化のない方向の近傍で再計算すると、以下を得る。

$$S''_{\omega} = (w, w'') + \omega(w, w) + g(\psi w, \psi w). \quad (66)$$

さらに計算を行うと、

$$S''_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 \left( \left( \frac{p}{\psi} \right)^2 + \left( \frac{q}{\psi} \right)^2 \right) dx \geq 0, \quad (67)$$

ただし、 $w = p + iq$  であり、 $p, q$  は実関数とする。故に、Grillakis-Shatah-Strauss から前節までに求めた固有関数は作用汎関数の極小値となり、方程式 (46) を満たす  $\psi$  は安定である。

## 5 結論

本論文では、点欠陥に 2 パラメータで表される  $FT - \delta$  型の接続条件を課したリング、線上における NLS の固有値をニュートン法により数値計算した。自由接続を課したリングでは、任意の非線形強度  $g$  において点  $(t, v) = (1, 0)$  と  $(t, v) = (-1, 0)$  で縮退が起きていることが分かった。縮退点周りの断熱接続パラメータサイクルではベリー位相  $e^{i\pi}$  が存在した。また、 $\delta$ -強度  $v$  の  $v = -\infty$  から  $v = \infty$  の断熱サイクルではエネルギー準位のがシフトする新奇量子アンホロノミーが現れた。接続パラメータ空間でのエネルギー準位の一部消失や泡状構造という線形系には現れない非線形系特有の現象も特定できた。Grillakis-Shatah-Strauss 理論により、リング上で数値計算した固有関数は安定であることも示した。開放系である線上の NLS の固有関数はソリトン解のみであり、 $FT - \delta$  型の接続条件下での固有値を厳密に求めた。 $FT - \delta$  型の接続条件下では初期値のノルムによって 2 準位系が現れることがわかった。また、こちらの系でも、Grillakis-Shatah-Strauss 理論により固有関数の安定性を議論し、 $0 < \mu < 2$ 、 $v < 0$  のとき固有関数は安定であることを示した。また、本研究の内容の一部はすでに出版されている [25]。断熱過程による準位反転の検証は現在進行中であるが、準位反転するパラメータが存在することは確認できている。

### 謝辞

指導教員である全卓樹教授に感謝いたします。研究に関する議論や論文の執筆など、大変お世話になりました。また、有益な議論をしていただいた Riccardo Adami 教授、田中篤司教授、Axel Perez-Obiol 助教、Ondrej Turek 助教に感謝します。

## 参考文献

- [1] E. P. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Nuovo Cim. **20** (1961) 454–457.
- [2] L. P. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*. Sov. Phys. JETP **13** (1961) 451–454.
- [3] M. Eckart, R. Walser, W.P. Schleich, *Exploring the growth of correlations in a quasi one-dimensional trapped Bose gas*, New J. Phys. **10** (2008) 045024 (28pp).



- [4] H. Hasimoto, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. **51** (1972) 477–485.
- [5] R. Myrzakulov, G. K. Mamyrbekova, G. N. Nugmanova, K. R. Yesmakhanova, M. Lakshmanan, *Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials : Relation to Spin Systems and Soliton Equations*, J. Phys. Lett. A, **378** (2014) 2118–2123.
- [6] D. Felice, *A Study of a Nonlinear Schrödinger Equation for Optical Fibers*, <http://arxiv.org/abs/1612.00358> (2016)
- [7] V. F. Zakharov, A. B. Shabat, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of wave in nonlinear media*, Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62–69.
- [8] H. Berestycki and T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris: I Math, **293** (1981) 489–492.
- [9] T. Cazenave and P.-L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **85** (1982) 549–561.
- [10] R. Fukuizumi, M. Ohta, T. Ozawa, *Nonlinear Schrödinger equation with a point defect*, Ann. I. H. Poincaré – AN **25** (2008) 837–845.
- [11] B. P. Venkatesh, J. Larson, and D. H. J. O'Dell, *Band-structure loops and multistability in cavity QED*, Phys. Rev. **A83** (2011) 063606 (22pp).
- [12] R. Adami, C. Cacciapuoti, D. Finco, D. Noja, *Fast solitons on star graphs*, Rev. Math. Phys. **23** (2011) 409–451.
- [13] R. Adami, E. Serra, P. Tilli, *NLS ground states on graphs*, Calc. Var. PDEs **54** (2015) 743–761.
- [14] R. Adami, F. Golse, A. Teta, *Rigorous derivation of the cubic NLS in dimension one*, J. Stat. Phys. **127** (2007) 1193–1220.
- [15] D. Pelinovsky, G. Schneider, *Bifurcations of standing localized waves on periodic graphs*, <http://arxiv.org/abs/1603.05463> (2016)
- [16] S. Gnutzmann and D. Waltner, *Stationary waves on nonlinear quantum graphs: General framework and canonical perturbation theory* Phys. Rev. **E93** (2016) 032204 (19pp).
- [17] O. Turek and T. Cheon, *Threshold resonance and controlled filtering in quantum star graphs*, Europhys. Lett. **98** (2012) 50005 (5pp).
- [18] O. Turek and T. Cheon, *Potential-controlled filtering in quantum star graphs*, Ann. of Phys. (NY) **330** (2013) 104–141.
- [19] R. Adami, D. Noja, *Stability and symmetry-breaking bifurcation for the ground states of a NLS with a  $\delta'$  interaction*, Ann. H. Poincaré **25** (2008) 837–845.
- [20] K. Nakamura, D. Babajanov, D. Matrasulov, M. Kobayashi, P. Muruganandam, *Dynamics of trapped interacting vortices in Bose-Einstein condensates: Role of breathing degree of freedom*, J. Phys. A: Math. Theor. **49** (2016) 315102 (20pp).
- [21] T. Fulop, I. Tsutsui, *A Free Particle on a Circle with Point Interaction*, Phys. Lett. A **264** (2000) 366–374.
- [22] 伊丹 哲郎、松井 伸之、乾 徳夫、全 卓樹、「量子力学的手法によるシステムと制御」、コ

ロナ社

- [23] M. V. Berry. *Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes*, Proc. Roy. Soc. A **392** (1984) 45?57.
- [24] T. Cheon and A. Tanaka, *New anatomy of quantum holonomy*, Europhys. Lett. **85** (2009) 20001 (5pp).
- [25] T. Nakamura, T. Cheon *Spectral properties of nonlinear Schrödinger equation on a ring*, J. Phys. Soc. Jpn. **86** (2017) 114001 (5pp).