2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A

No. 7

解答

＜ 1 ページ. 指数の復習 ＞

問 1 の解答

(1) $64^{\frac{1}{3}} = 4$

(2) $7^0 = 1$

(3) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(4) $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(5) $27^{\frac{4}{3}} = 81$

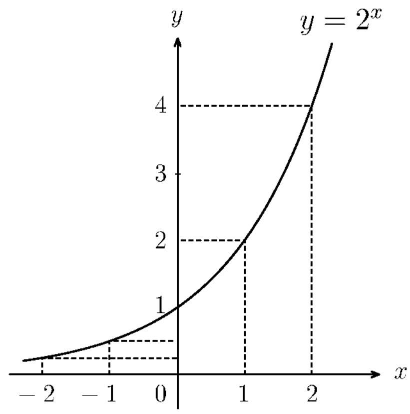
(6) $8^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{4}$

(7) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5}$

(8) $(0.0001)^{-0.25} = \left(\dfrac{1}{10000}\right)^{-\frac{1}{4}} = (10000)^{\frac{1}{4}} = 10$

問 2 の解答

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



＜ 2 ページ. 対数の復習 ＞

問 1 の解答

(1) $\log_2 8 = 3$

(2) $\log_7 49 = 2$

(3) $\log_3 1 = 0$

(4) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right) = -2$

(5) $\log_{27} 3 = \dfrac{1}{3}$

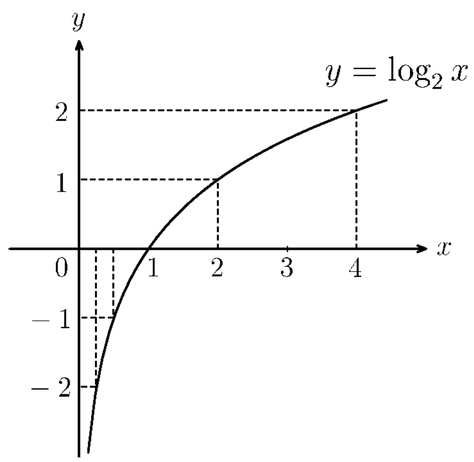
(6) $\log_{32} 8 = \dfrac{3}{5}$

(7) $\log_{10}(0.01) = -2$

(8) $\log_5(0.2) = \log_5\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1$

問 2 の解答

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	− 2	− 1	0	1	2

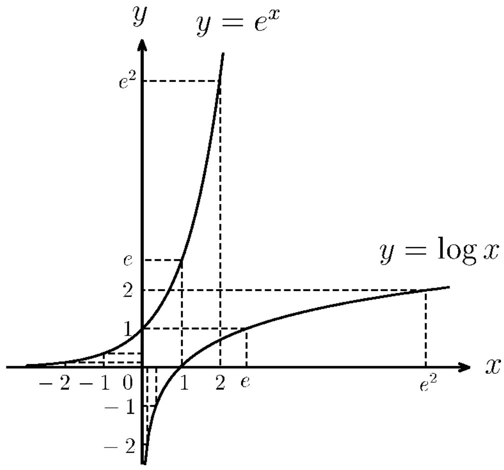


＜ 3 ページ.e の復習 ＞

問の解答

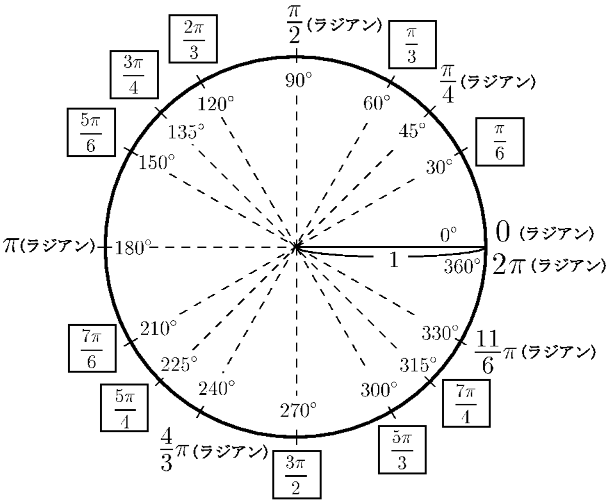
x	-2	-1	0	1	2
e^x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
$\log x$	-2	-1	0	1	2



＜ 4 ページ. 三角関数の復習 1 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

角度 θ	度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

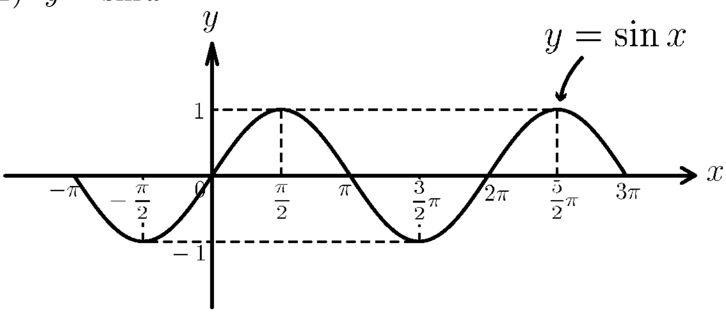
角度 θ	度数法	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	弧度法	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

＜ 5 ページ. 三角関数の復習 2 ＞

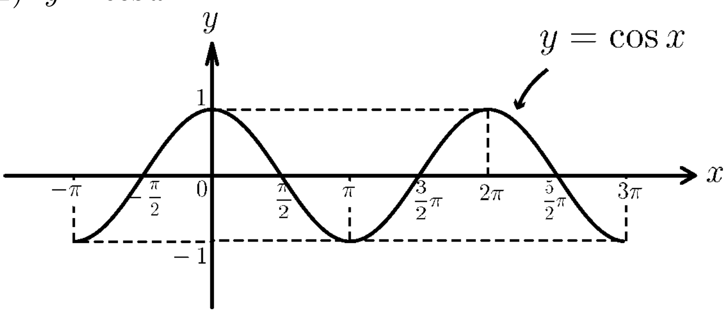
問の解答

x	度数法	$-180°$	$-135°$	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$	$405°$	$450°$	$495°$	$540°$
	弧度法	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{11\pi}{4}$	3π
$\sin x$		0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$		-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

(1) $y = \sin x$

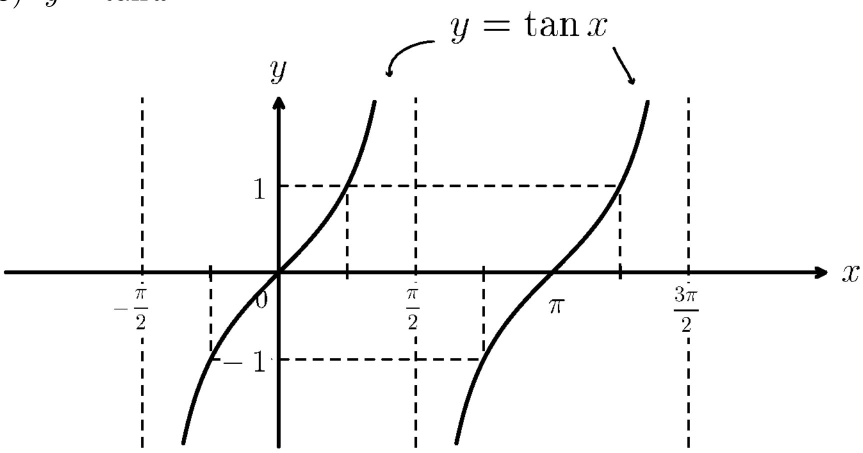


(2) $y = \cos x$



x	度数法	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$
	弧度法	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	×

(3) $y = \tan x$



＜ 6 ページ. 微分の復習 1 ＞

問の解答

(1) $(x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$

(2) $(3x^4 - 2x + 1)' = 12x^3 - 2$

(3) $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

(5) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

(6) $\left(\sqrt{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

(7) $\left(\dfrac{2}{x^3}\right)' = \left(2x^{-3}\right)' = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

(8) $\left(\dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2}\right)' = \left(x - 2 - \dfrac{1}{x^2}\right)' = 1 + \dfrac{2}{x^3}$

(9) $\left(\dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

＜ 7 ページ. 微分の復習 2 ＞

問の解答

(1) $(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$

(2) $(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$

(3) $(e^x \cos x)' = e^x \cos x - e^x \sin x$

(4) $(x + x\log x)' = 1 + \log x + 1 = 2 + \log x$

(5) $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = -\dfrac{(1-x)'}{(1-x)^2} = -\dfrac{-1}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

(6) $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \dfrac{1(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$\left(\text{または } \left(\dfrac{x}{1-x}\right)' = \left(\dfrac{-(1-x)+1}{1-x}\right)' = \left(-1+\dfrac{1}{1-x}\right)' = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}\right)$

(7) $\left(\dfrac{2}{\sin x}\right)' = -\dfrac{2x(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}$

(8) $\left(\dfrac{1}{e^x}\right)' = -\dfrac{e^x}{(e^x)^2} = -\dfrac{1}{e^x}$

$\left(\text{または } \left(\dfrac{1}{e^x}\right)' = \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x} = -\dfrac{1}{e^x}\right)$

(9) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

＜ 8 ページ. 微分の復習 3 ＞

問の解答

(1) $\big(\sin(1-x)\big)' = -\cos(1-x)$

(2) $\big(\cos(x^2+2)\big)' = -2x\sin(x^2+2)$

(3) $\big(e^{x^4}\big)' = 4x^3e^{x^4}$

(4) $\big((2x+1)^6\big)' = 12(2x+1)^5$

(5) $\big(\sqrt{2x-5}\big)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

(6) $\big(\cos(2x)+e^{x-1}\big)' = -2\sin(2x)+e^{x-1}$

(7) $\big(e^{2x}\sin(2x)\big)' = 2e^{2x}\sin(2x)+2e^{2x}\cos(2x)$

(8) $\big(e^{4x}\sin(3x)\big)' = 4e^{4x}\sin(3x)+3e^{4x}\cos(3x)$

(9) $\big(\cos(-3x)\sin(2x)\big)' = 3\sin(-3x)\sin(2x)+2\cos(-3x)\cos(2x)$

$$\Bigg(\text{または } \big(\cos(-3x)\sin(2x)\big)' = \big(\cos(3x)\sin(2x)\big)' = -3\sin(3x)\sin(2x)+2\cos(3x)\cos(2x)\Bigg)$$

＜ 9 ページ. 接線の傾き 1 ＞

問の解答

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$x = -1$ における接線の傾き

$f'(-1) = -3 - 6 = -9$

$x = 0$ における接線の傾き

$f'(0) = 0$

$x = 1$ における接線の傾き

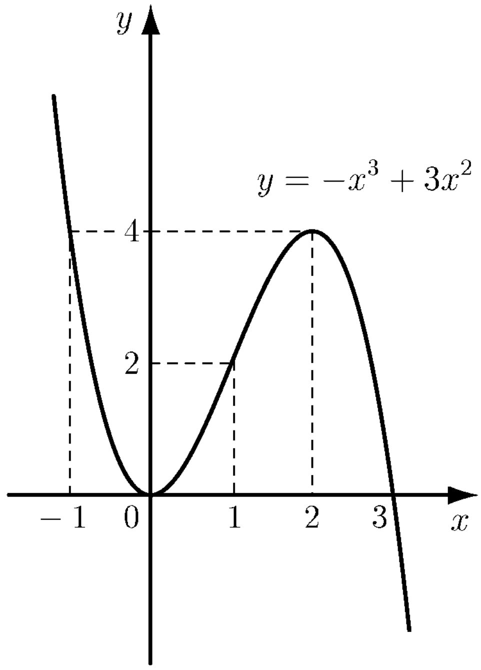
$f'(1) = -3 + 6 = 3$

$x = 2$ における接線の傾き

$f'(2) = -12 + 12 = 0$

$x = 3$ における接線の傾き

$f'(3) = -27 + 18 = -9$



< 10 ページ. 接線の傾き 2 >

問の解答

(1) $y = e^x$ の $x = 1$ における接線の傾き $= e^1 = e$

(2) $y = e^x$ の $x = -1$ における接線の傾き $= e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

(3) $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ における接線の傾き $= \cos 0 = 1$

(4) $f(x) = \sin x$ の $x = \pi$ における接線の傾き $= \cos \pi = -1$

(5) $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ における接線の傾き $= -\sin 0 = 0$

(6) $f(x) = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の傾き $= -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

(7) $f(x) = \log x$ の $x = 1$ における接線の傾き $= \dfrac{1}{1} = 1$

(8) $f(x) = \log x$ の $x = 2$ における接線の傾き $= \dfrac{1}{2}$

＜ 11 ページ. 接線の方程式 1 ＞

問 1 の解答

$y = m(x - a) + b$

問 2 の解答

$y' = 3x^2 - 2x + 1$

$x = 1$ のとき $y' = 3 - 2 + 1 = 2$ $\left(\text{傾き } 2\right)$

$y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$

$\underline{\left(\text{答}\right)\ y = 2x - 1}$

問 3 の解答

$y = f'(a)(x - a) + b$

< 12 ページ. 接線の方程式 2 >

問の解答

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

$y' = e^x$, $x = 0$ のとき $y = e^0 = 1$, $y' = e^0 = 1$

(答) $y = x + 1$

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

$y' = \dfrac{1}{x}$, $x = 1$ のとき $y = \log 1 = 0$, $y' = \dfrac{1}{1} = 1$

(答) $y = x - 1$

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

$y' = \cos x$, $x = 0$ のとき $y = \sin 0 = 0$, $y' = \cos 0 = 1$

(答) $y = x$

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x = 4$ のとき $y = \sqrt{4} = 2$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2$

(答) $y = \dfrac{1}{4}x + 1$

(5) $y = \dfrac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

$y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $x = 1$ のとき $y = \dfrac{1}{1} = 1$, $y' = -\dfrac{1}{1^2} = -1$, $y = -1(x-1) + 1$

(答) $y = -x + 2$

< 13 ページ. 関数の一次近似 >

問の解答

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ とおくと $f(a) = \sqrt[4]{a}$,

$f'(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ より $f'(a) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{a^2}}$

$x \fallingdotseq a$ のとき $\sqrt[4]{x} \fallingdotseq \sqrt[4]{a} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{a^3}}(x-a)$

ここで $a = 1$, $x = 1.1$ とおけば

$$\sqrt[4]{1.1} \fallingdotseq \sqrt[4]{1} + \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}}(1.1-1) = 1 + \frac{1}{4} \times 0.1 = 1 + \frac{1}{40}$$

$<$ 14ページ. 高階導関数 $>$

問 1 の解答

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) = 2x - 3$

$f''(x) = 2$

(2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

(3) $f(x) = \log x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

問 2 の解答

(1) $f(x) = x^5 - x^3 + x$

$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$

$f''(x) = 20x^3 - 6x$

$f'''(x) = 60x^2 - 6$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

(3) $f(x) = x \log x$

$f'(x) = \log x + 1$

$f''(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

(4) $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = 4e^{2x}$

$f'''(x) = 8e^{2x}$

＜ 15 ページ. グラフの凹凸 1 ＞

問の解答

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

$y'' = 6x + 6$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	凸	11	凹

(2) $y = -x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 10$

$y'' = -12x^2 + 12x + 24 = -12(x^2 - x - 2) = -12(x-2)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	凸	-1	凹	38	凸

＜ 16 ページ. グラフの凹凸 2 ＞

問の解答

(1) $y = x^2 - 5x + 6$

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

(2) $y = -x^2 + 4x - 5$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	$\nearrow$	-1	$\searrow$

＜ 17 ページ. グラフの凹凸 3 ＞

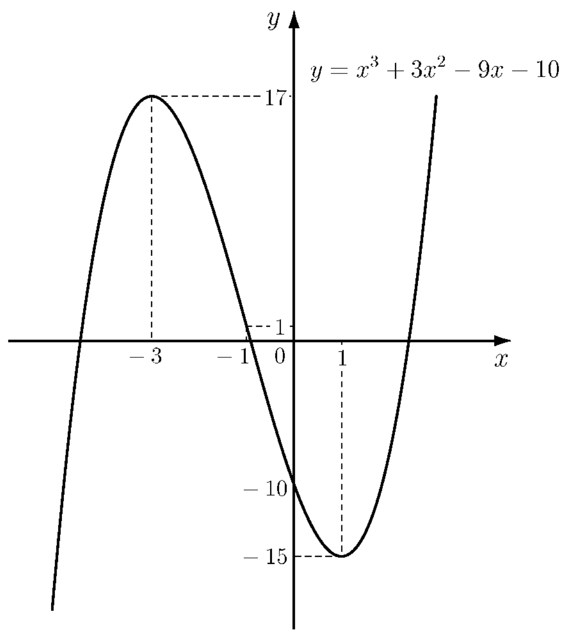
問の解答

(解)

$$y' = 3x^2 + 6x - 9$$
$$= 3(x^2 + 2x - 3)$$
$$= 3(x+3)(x-1)$$

$$y'' = 6x + 6 = 6(x+1)$$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	17	↘	1	↘	-15	↗



＜ 18 ページ. 微分係数と極限値 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e^0=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^6-64}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=6\times 2^5=192$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

< 19 ページ. ロピタルの定理 1 >

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^4-16)'}{(x-2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{4x^3}{1}=4\times 2^3=32$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(e^x-e)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{e^x}{1}=e'=e$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$

＜ 20 ページ. ロピタルの定理 2 ＞

問の解答

(1) $$\lim_{x\to1}\frac{x^5-1-5(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{5x^4-5}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{20x^3}{2}=\frac{20}{2}=10$$

(2) $$\lim_{x\to2}\frac{x^5-2^5-5\times2^4(x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{5x^4-5\times2^4}{2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{20x^3}{2}=10\times2^3=80$$

(3) $$\lim_{x\to1}\frac{x^4-1-4(x-1)-6(x-1)^2}{(x-1)^3}=\lim_{x\to1}\frac{4x^3-4+12(x-1)}{3(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{12x^2-12}{6(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{24x}{6}=\frac{24}{6}=4$$

(4) $$\lim_{x\to1}\frac{x^5-1-5(x-1)-10(x-1)^2-10(x-1)^3}{(x-1)^4}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{5x^4-5-20(x-1)-30(x-1)^2}{4(x-1)^3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{20x^3-20-60(x-1)}{12(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{60x^2-60}{24(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{120x}{24}=\frac{120}{24}=\frac{10}{2}=5$$

＜ 21 ページ. 微分記号 1 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4+c^2\}=0$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4x+c^5x^2\}=b^4+2x^5x$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{(a+b)^3-c^4\}=0$

(4) $\dfrac{d}{dx}\{(a-b)^2x-c^3\}=(a-b)^2$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{a^4(x-b)\}=a^4$

(6) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x+c)^2\}=2a^3(x+c)$

(7) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^4\}=4a(ax+b)^3$

(8) $\dfrac{d}{dx}\{(x-a)^5\}=5(x-a)^4$

(9) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x-a)^3\}=3a^3(x-a)^2$

(10) $\dfrac{d}{dx}\{4a^3(x-b)^4\}=16a^3(x-b)^3$

(11) $\dfrac{d}{dx}\{x^2-a^2-2a(x-a)\}=2x-2a$

(12) $\dfrac{d}{dx}\{x^3-a^3-3a(x-a)-6a(x-a)^2\}=3x^2-3a^2-12a(x-a)$

＜ 22 ページ. 微分記号 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\dfrac{d}{dt}(4t^3+5t^2-2t+3)=12t^2+10t-2$

(2) $\dfrac{d}{dy}(5y^6-7y^3+8y^4-4)=30y^5-21y^2+32y^3$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(t+4)^5\}=5(t+4)^4$

(4) $\dfrac{d}{dy}\{(3y+1)^6\}=18(3y+1)^5$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{10(t-5)^6\}=60(t-5)^5$

(6) $\dfrac{d}{dy}\{15(y-4)^8\}=120(y-4)^7$

問 2 の解答

(1) $\dfrac{d}{dt}\{(a-b)^2t-c\}=(a-b)^2$

(2) $\dfrac{d}{dy}\{a^4(y-b)\}=a^4$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(at+b)^2\}=2a(at+b)$

(4) $\dfrac{d}{dy}\{(ay-b)^3\}=3a(ay-b)^2$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{a^4(t-1)^2\}=2a^4(t-1)$

(6) $\dfrac{d}{dy}\{a^5(y-b)^3\}=3a^5(y-b)^2$

(7) $\dfrac{d}{dt}\{a^5(t-a)^4\}=4a^5(t-a)^3$

(8) $\dfrac{d}{dy}\{3a^2(y+a)^5\}=15a^2(y+a)^4$

< 23 ページ. ロピタルの定理 3 >

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2-2a(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{2x-2a}{2(x-a)}=1$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{4x^3-4a^3}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{12x^2}{2}=6a^2$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{20a^3}{2}=10a^3$

＜ 24 ページ. ロピタルの定理 4 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{y\to a}\frac{\log y-\log a}{y-a}=\lim_{y\to a}\frac{\frac{1}{y}}{1}=\frac{1}{a}$

(2) $\displaystyle \lim_{t\to b}\frac{\cos t-\cos b}{t-b}=\lim_{t\to b}\frac{-\sin t}{1}=-\sin b$

(3) $\displaystyle \lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(b\beta)-\beta\sin(ab)}{a^3-a\beta^2}=\lim_{\beta\to a}\frac{ab\cos(b\beta)-\sin(ab)}{-2a\beta}=\frac{ab\cos(ab)-\sin(ab)}{-2a^2}$

＜ 25 ページ. ロピタルの定理 5 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{4x^3-4a^3-12a^2(x-a)}{3(x-a)^2}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{12x^2-12a^2}{6(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{24x}{6}=4a$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2}{(x-a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{6x^5-6a^5-30a^4(x-a)}{3(x-a)^2}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{30x^4-30a^4}{6(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{120x^3}{6}=20a^3$

(3) $\displaystyle \lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2}{(x-a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{7x^6-7a^6-42a^5(x-a)}{3(x-a)^2}$

$\displaystyle =\lim_{x\to a}\frac{42x^5-42a^5}{6(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{210x^4}{6}=35a^4$

＜ 26 ページ. ロピタルの定理 6 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2-10a^2(x-a)^3}{(x-a)^4}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)-30a^2(x-a)^2}{4(x-a)^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{20x^3-20a^3-60a^2(x-a)}{12(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{60x^2-60a^2}{24(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{120x}{24}=5a$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2-35a^4(x-a)^3}{(x-a)^4}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{7x^6-7a^6-42a^5(x-a)-105a^4(x-a)^2}{4(x-a)^3}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{42x^5-42a^5-210a^4(x-a)}{12(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{210x^4-210a^4}{24(x-a)}$

$\displaystyle=\lim_{x\to a}\frac{840x^3}{24}=\frac{840}{24}a^3=35a^3$

＜ 27 ページ. 関数の高次近似 1 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\}=f'(x)-f'(a)$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)\}=f''(x)-f''(a)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\}$

$=f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)-\dfrac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2\}$

$=f''(x)-f''(a)-f'''(a)(x-a)$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\dfrac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3\}$

$=f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)-\dfrac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2$

＜ 28ページ. 関数の高次近似 2 ＞

問の解答

(1) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{6(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{6}=\frac{f'''(a)}{6}$$

(2) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)-\frac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2}{4(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)-f'''(a)(x-a)}{12(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)-f'''(a)}{24(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''''(x)}{24}=\frac{1}{24}f''''(a)$$

＜ 29 ページ. 関数の高次近似 3 ＞

問の解答

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f''''(a)(x-a)^4$$

< 30 ページ. 高階微分係数 >

問の解答

(1) $f^{(4)}(x) = e^x$, $f^{(4)}(0) = e^0 = 1$

(2) $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

(3) $f^{(1)}(x) = \cos x$, $f^{(2)}(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$

$f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(6)}(x) = -\sin x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x$, $f^{(8)}(x) = \sin x$

$f^{(1)}(0) = 1$, $f^{(2)}(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(0) = 1$, $f^{(6)}(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = -1$, $f^{(8)}(0) = 0$

< 31 ページ. 関数の n 次近似 1 >

問の解答

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

< 32 ページ. 関数の n 次近似 2 >

問の解答

$$e^x \fallingdotseq e^a + e^a(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n$$

< 33 ページ. テーラー展開 >

問 1 の解答

$$e^x = e^a + e^a(x-a) + \frac{1}{2!}e^a(x-a)^2 + \frac{1}{3!}e^a(x-a)^3 + \frac{1}{4!}e^a(x-a)^4 + \cdots + \frac{1}{n!}e^a(x-a)^n + \cdots$$

問 2 の解答

(1) $e^x = e + e(x-1) + \dfrac{e}{2!}(x-1)^2 + \dfrac{e}{3!}(x-1)^3 + \dfrac{e}{4!}(x-1)^4 + \cdots + \dfrac{e}{n!}(x-1)^n + \cdots$

(2) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

＜ 34 ページ. マクローリン展開 1 ＞

問の解答

$$f(0) = \sin 0 = 0\ ,\ f^{(1)}(0) = 1\ ,\ f^{(2)}(0) = 0\ ,\ f^{(3)}(0) = -1\ ,$$

$$f^{(4)}(0) = 0\ ,\ f^{(5)}(0) = 1\ ,\ f^{(6)}(0) = 0\ ,\ f^{(7)}(0) = -1\ ,\ f^{(8)}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\sin x &= 0 + \frac{1}{1!} \times 1 \times x + \frac{1}{2!} \times 0 \times x^2 + \frac{1}{3!} \times (-1) \times x^3 + \frac{1}{4!} \times 0 \times x^4 \\ &\qquad + \frac{1}{5!} \times 1 \times x^5 + \frac{1}{6!} \times 0 \times x^6 + \frac{1}{7!} \times (-1) \times x^7 + \frac{1}{8!} \times 0 \times x^8 + \cdots \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots\end{aligned}$$

< 36 ページ. マクローリン展開 3 >

問の解答

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2 + \frac{17}{24} = 2.708333\cdots$$

< 37 ページ. 実数 >

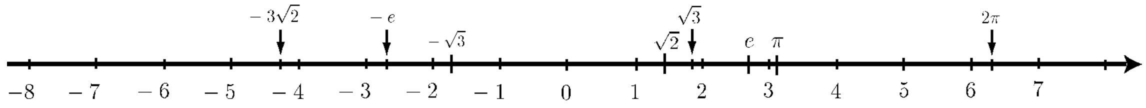
問 1 の解答

(1) $\dfrac{5}{8} = 0.625$

(2) $\dfrac{1}{15} = 0.0666\cdots = 0.0\dot{6}$

(3) $\dfrac{3}{11} = 0.27272727\cdots = 0.\dot{2}\dot{7}$

問 2 の解答



< 38 ページ. 虚数の導入 1 >

問の解答

(1) $x = \pm 4i$

(2) $x = \pm \dfrac{5}{2}i$

(3) $x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$

< 39 ページ. 虚数の導入 2 >

問の解答

(1) $x = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{3}i$

(2) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{16}i}{2} = 3 \pm 2i$

(3) $x = a \pm \dfrac{c}{b}i$

＜ 40 ページ. 複素数の定義 ＞

問の解答

(1) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$

(2) $a = 0$, $b = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$