2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A

No. 4

解答

＜ 1 ページ. 等差数列の和 ＞

問 1 の解答

$$S = 1 + 2 + \cdots + 999 + 1000$$

$$2S = 1001 + 1001 + \cdots + 1001 + 1001 = 1001 \times 1000$$

$$S = \frac{1001 \times 1000}{2} = 500500$$

問 2 の解答

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) = (n+1) \times n$$

$$S = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

問 3 の解答

$$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100$$

$$2S = 102 + 102 + \cdots + 102 = 102 \times 50$$

$$S = \frac{102 \times 50}{2} = 2550$$

問 4 の解答

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99$$

$$2S = 100 + 100 + \cdots + 100 = 100 \times 50$$

$$S = \frac{100 \times 50}{2} = 2500$$

＜ 2 ページ. 等比数列の和 ＞

問 1 の解答

$$\begin{array}{rl} S = & 5 + 5\times 3 + 5\times 3^2 + \cdots + 5\times 3^{n-2} + 5\times 3^{n-1} \\ -)\,3S = & \phantom{5 + {}} 5\times 3 + 5\times 3^2 + \cdots + 5\times 3^{n-2} + 5\times 3^{n-1} + 5\times 3^n \\ \hline -2S = & 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5\times 3^n \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{5 - 5\times 3^n}{-2} = \dfrac{5(3^n - 1)}{2}$

問 2 の解答

$$\begin{array}{rl} S = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ -)\,rS = & \phantom{a + {}} ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ar^n \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{a - ar^n}{1 - r} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

問 3 の解答

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$= \frac{1\times(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

問 4 の解答

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

＜ 3ページ. 順列 ＞

問1の解答

(1) ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

(2) ${}_{6}P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

(3) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(4) $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

問2の解答

(1) ${}_{4}P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ (通り)

(2) $4^3 = 64$ (通り)

＜ 4 ページ. 組合せ 1 ＞

問 1 の解答

(1) ${}_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ (通り)

(2) ${}_{10}C_4 = \dfrac{{}_{10}P_4}{4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$ (通り)

問 2 の解答

(1) ${}_1C_0 = 1$, ${}_1C_1 = 1$

(2) ${}_2C_0 = 1$, ${}_2C_1 = 2$, ${}_2C_2 = 1$

(3) ${}_3C_0 = 1$, ${}_3C_1 = 3$, ${}_3C_2 = 3$, ${}_3C_3 = 1$

(4) ${}_4C_0 = 1$, ${}_4C_1 = 4$, ${}_4C_2 = 6$, ${}_4C_3 = 4$, ${}_4C_4 = 1$

(5) ${}_5C_0 = 1$, ${}_5C_1 = 5$, ${}_5C_2 = 10$, ${}_5C_3 = 10$, ${}_5C_4 = 5$, ${}_5C_5 = 1$

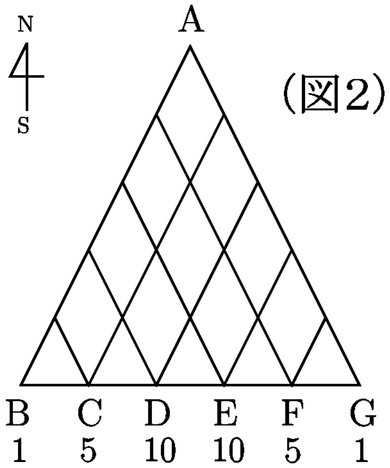
＜ 5 ページ. 組合せ 2 ＞

問 1 の解答

(1) ${}_5C_2 = 10$ (通り)

(2) ${}_6C_3 = \dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ (通り)

問 2 の解答

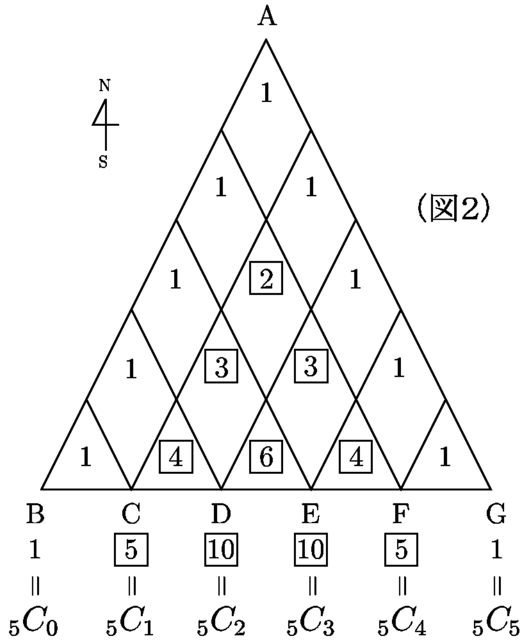


＜ 6 ページ. 二項定理 1 ＞

問 1 の解答

$$(a+b)^6 = \boxed{1}\, a^6 + \boxed{6}\, a^5 b + \boxed{15}\, a^4 b^2 + \boxed{20}\, a^3 b^3 + \boxed{15}\, a^2 b^4 + \boxed{6}\, a b^5 + \boxed{1}\, b^6$$

問 2 の解答



(図2)

問 3 の解答

$$(a+b)^5 = {}_5C_0\, a^5 b^0 + \boxed{{}_5C_1}\, a^4 b^1 + \boxed{{}_5C_2}\, a^3 b^2 + \boxed{{}_5C_3}\, a^2 b^3 + \boxed{{}_5C_4}\, a^1 b^4 + {}_5C_5\, a^0 b^5$$

問 4 の解答

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + \boxed{{}_nC_1}\, a^{n-1} b^1 + \boxed{{}_nC_2}\, a^{n-2} b^2 + \cdots + \boxed{{}_nC_{n-1}}\, a^1 b^{n-1} + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

＜ 7 ページ. 二項定理 2 ＞

問 1 の解答

${}_nC_1 = n$, ${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, ${}_nC_{n-1} = n$

問 2 の解答

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

問 3 の解答

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

問 4 の解答

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + nh^{n-1} + h^n$$

問 5 の解答

$(1+h)^n \geqq 1 + nh$

(証明) $h > 0,\ n \geqq 1$ より

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + nh^{n-1} + h^n \geqq 1 + nh$$

＜ 8 ページ. 数列の極限 1 ＞

問の解答

(1) $a_{10} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

(2) $a_{100} = \dfrac{1}{100} = 0.01$

(3) $a_{1000} = \dfrac{1}{1000} = 0.001$

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

< 9 ページ. 数列の極限 2 >

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+4}=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{3n^2-2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}=\frac{2}{3}$

＜ 10 ページ. 数列の極限 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.0001n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{10000} = \infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+0.001n} = 0$

＜ 11 ページ. 数列の極限 4 ＞

問 1 の解答

$$(1.01)^n = (1+0.01)^n \geqq 1 + n \times \boxed{0.01}$$

問 2 の解答

$$\lim_{n\to\infty}(1.01)^n = \lim_{n\to\infty}(1+0.01)^n = \infty$$

問 3 の解答

$$\lim_{n\to\infty}(1+h)^n = \infty$$

問 4 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{99}\right)^n = \infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3\times(1.1)^n = \infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4\times(1.5)^{n-1} = \infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^n = \infty$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} = \infty$

< 12 ページ. 数列の極限 5 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{99}\right)^n=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{99})^n}=0$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(0.99)^n=0$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+h}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+h)^n}\\&=0\end{aligned}$$

問 3 の解答

(1) $r=\dfrac{1}{1+h}$

(2) $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}r^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+h}\right)^n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+h)^n}\\&=0\end{aligned}$$

＜ 13 ページ. 絶対値 ＞

問 1 の解答

(1) $|4.5| = 4.5$

(2) $|13.4| = 13.4$

(3) $|-0.5| = 0.5$

(4) $|-3.7| = 3.7$

問 2 の解答

(1) $a > 0$ のとき $|a| = \boxed{a}$

(2) $a = 0$ のとき $|a| = 0$

(3) $a < 0$ のとき $|a| = \boxed{-a}$

問 3 の解答

(1) $a > 3$ のとき $|a-3| = \boxed{a-3}$

(2) $a = 3$ のとき $|a-3| = 0$

(3) $a < 3$ のとき $|a-3| = \boxed{-a+3}$

問 4 の解答

(1) $a > b$ のとき $|a-b| = \boxed{a-b}$

(2) $a = b$ のとき $|a-b| = 0$

(3) $a < b$ のとき $|a-b| = \boxed{-a+b}$

問 5 の解答

数直線上の点 a と b との距離

＜ 14 ページ. 数列の収束・振動 ＞

問 1 の解答

(1) $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = 0$

(2) $\lim_{n\to\infty} (-0.99)^n = 0$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-3)^n} = 0$

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n}{4^n} = 0$

問 2 の解答

(1) $r > 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{\infty}$

(2) $r = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \boxed{1}$

(3) $0 < r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{0}$

(4) $r = 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \boxed{0}$

(5) $-1 < r < 0$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{0}$

< 15 ページ. 正・負の無限大 >

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3 - n^4) = \lim_{n\to\infty} n^4\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^5 - n^4) = \lim_{n\to\infty} n^5\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 3^n) = +\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 5^n) = -\infty$

＜ 16 ページ. 無限級数 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\cdots$

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

＜ 17ページ. 無限等比級数 ＞

問1の解答

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$

(2) $S_n = r + r^2 + \cdots + r^n$

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& r + r^2 + \cdots + r^n \\ -)\ rS_n &=& \boxed{r^2} + \boxed{r^3} + \cdots + \boxed{r^{n+1}} \\ \hline (\boxed{1} - \boxed{r})\,S_n &=& \boxed{r} \quad - \quad \boxed{r^{n+1}} \end{array} \implies S_n = \frac{\boxed{r} - \boxed{r^{n+1}}}{\boxed{1} - \boxed{r}}$$

(3) $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{r - r^{n+1}}{1-r} = \dfrac{r}{1-r}$

問2の解答

(1) $\lim_{n\to\infty} ar^n = 0$

(2) $S_n = \dfrac{a - ar^n}{1-r}$

(3) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a - ar^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

問3の解答

(1) $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $\frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^4 + \cdots + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + \cdots$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

(3) $4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$

$$= \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

< 18 ページ. 循環小数 1 >

問の解答

(1) $\dfrac{11}{16} = 0.6875$

(2) $\dfrac{3}{125} = 0.024$

(3) $\dfrac{31}{80} = 0.3875$

(4) $\dfrac{5}{12} = 0.41666\cdots = 0.41\dot{6}$

(5) $\dfrac{4}{33} = 0.1212121212\cdots = 0.\dot{1}\dot{2}$

(6) $\dfrac{15}{37} = 0.405405405405\cdots = 0.\dot{4}0\dot{5}$

＜ 19 ページ. 循環小数 2 ＞

問の解答

(1)
$$
\begin{aligned}
0.\dot{5} &= 0.5555\cdots \\
&= 0.5 + 0.05 + 0.005 + \cdots \\
&= 0.5 + 0.5 + \frac{1}{10} + 0.5 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \\
&= \frac{0.5}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0.5}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
0.\dot{9} &= 0.9999\cdots \\
&= 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots \\
&= 0.9 + 0.9 \times \frac{1}{10} + 0.9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \\
&= \frac{0.9}{1-\frac{1}{10}} = 1
\end{aligned}
$$

(3)
$$
\begin{aligned}
0.\dot{1}\dot{2} &= 0.12121212\cdots \\
&= 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots \\
&= 0.12 + 0.12 \times \frac{1}{100} + 0.12 + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots \\
&= \frac{0.12}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}
\end{aligned}
$$

(4)
$$
\begin{aligned}
0.\dot{4}\dot{3} &= 0.434343\cdots \\
&= \frac{0.43}{1-\frac{1}{100}} = \frac{43}{99}
\end{aligned}
$$

(5)
$$
\begin{aligned}
0.0\dot{9} &= 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots \\
&= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots \\
&= \frac{0.09}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1
\end{aligned}
$$

$<$ 20 ページ. 小数の表示 $>$

問 1 の解答

(1) $0.000\dot{9} = 0.001$

(2) $0.0000\dot{9} = 0.0001$

問 2 の解答

(1) $9.\dot{9} = 10$

(2) $0.1\dot{9} = 0.2$

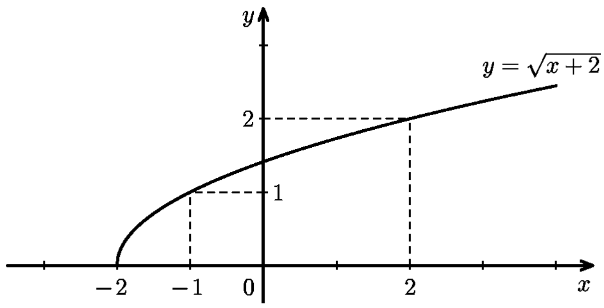
(3) $2.78\dot{9} = 2.79$

(4) $5.0123\dot{9} = 5.0124$

＜ 21 ページ. 無理関数 1 ＞

問の解答

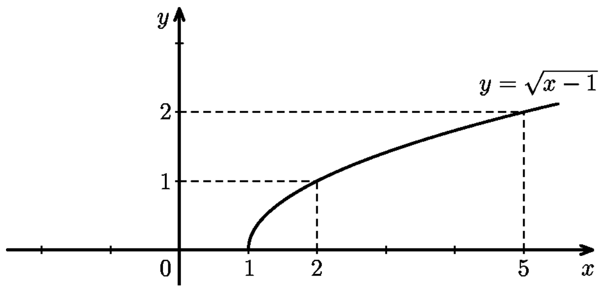
(1)



x	-2	-1	0	2
y	0	1	$\sqrt{2}$	2

定義域：$x \geqq -2$ ，値域：$y \geqq 0$

(2)



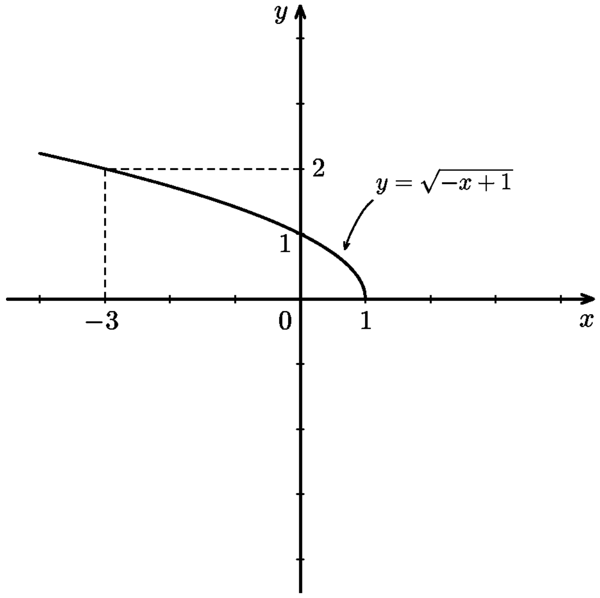
x	1	1.25	2	5
y	0	$\frac{1}{2}$	1	2

定義域：$x \geqq 1$ ，値域：$y \geqq 0$

＜ 22 ページ. 無理関数 2 ＞

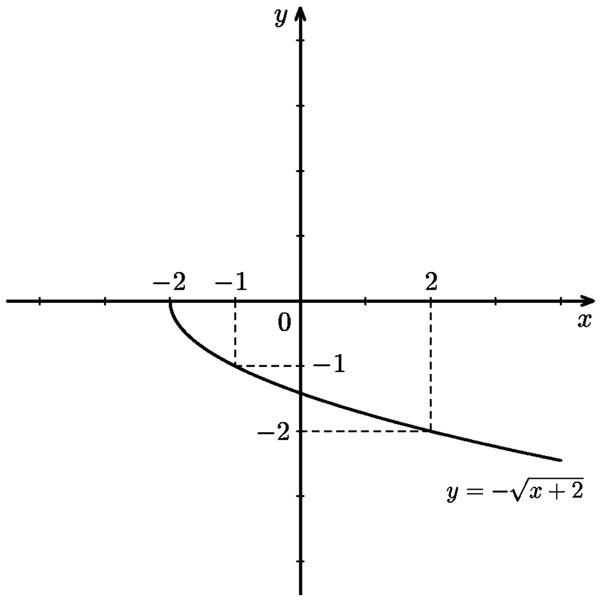
問の解答

(1)



定義域：$x \leqq 1$, 値域：$y \geqq 0$

(2)



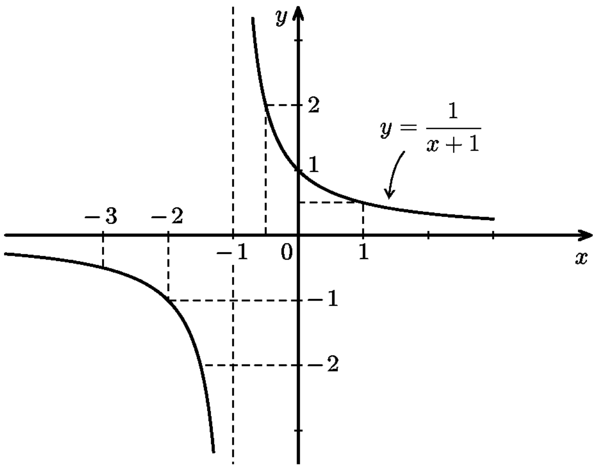
定義域：$x \geqq -2$, 値域：$y \leqq 0$

＜ 23 ページ. 分数関数 1 ＞

問の解答

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$\times$	2	1	$\frac{1}{2}$

定義域：$x \neq -1$ ，値域：$y \neq 0$



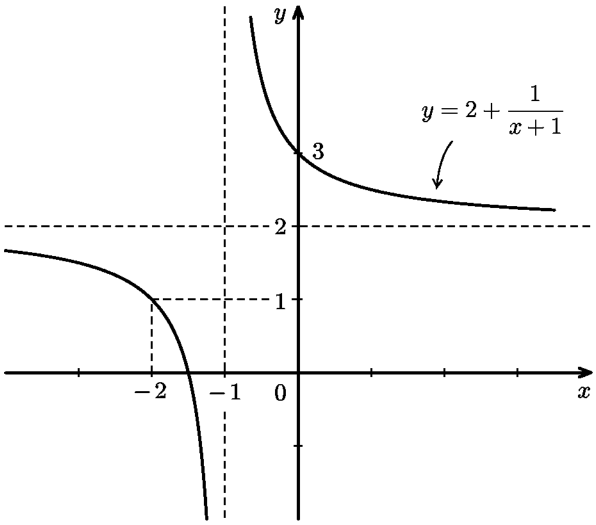
＜ 24 ページ. 分数関数 2 ＞

問の解答

定義域：$x \neq -1$

値域：$y \neq 2$

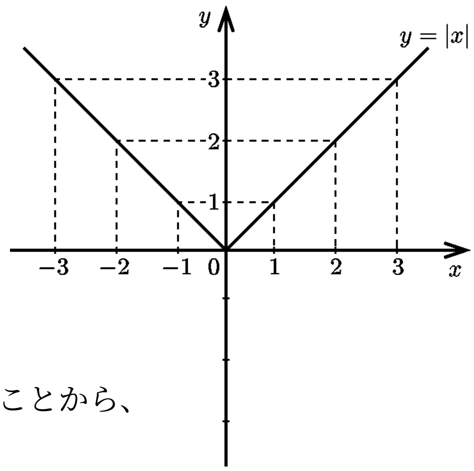
漸近線：$x = -1$, $y = 2$



＜ 25 ページ. 絶対値のグラフ 1 ＞

問 1 の解答

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3



「右のグラフより、$y = |x|$ のグラフは

$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{\ x\ }$ であり

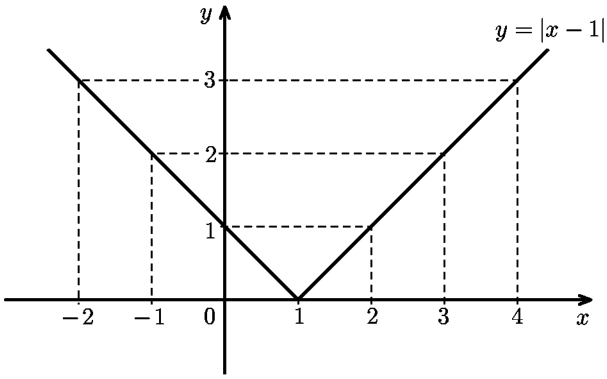
$x < 0$ の範囲では、直線 $y = \boxed{-x}$ であることから、

$$y = |x| = \begin{cases} \boxed{\ x\ } & (x \geqq 0) \\ \boxed{-x} & (x < 0) \end{cases}$$ が分かる。」

問 2 の解答

(1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3



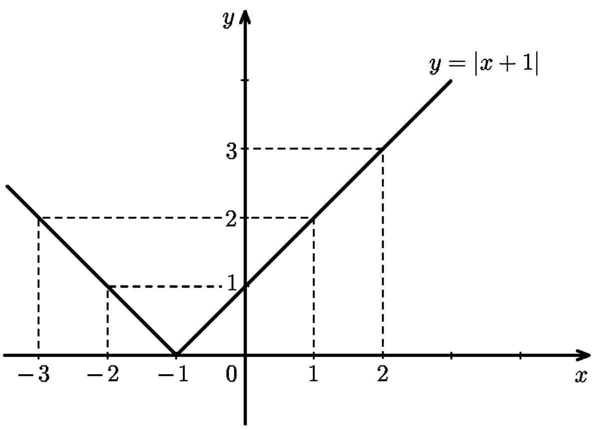
(2) $x \geqq 1$ のとき　$|x-1| = \boxed{x-1}$

$x < 1$ のとき　$|x-1| = \boxed{-x+1}$

問 3 の解答

$x \geqq -1$ のとき　$|x+1| = \boxed{x+1}$

$x < -1$ のとき　$|x+1| = \boxed{-x-1}$



＜ 26 ページ. 絶対値のグラフ 2 ＞

問 1 の解答

(1)

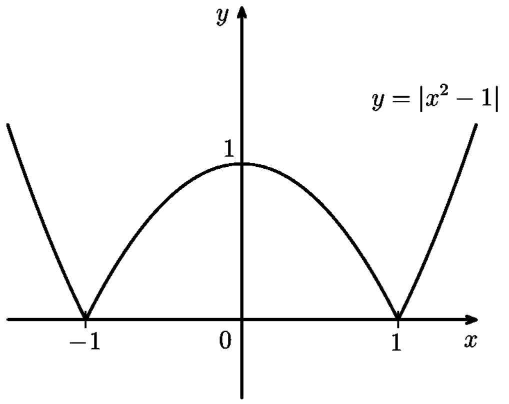
x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	3

(2) $x \geqq 1$ のとき $|x^2-1| = \boxed{x^2-1}$

$-1 < x < 1$ のとき $|x^2-1| = \boxed{-x^2+1}$

$x < -1$ のとき $|x^2-1| = \boxed{x^2-1}$

(3)



問 2 の解答

(1)

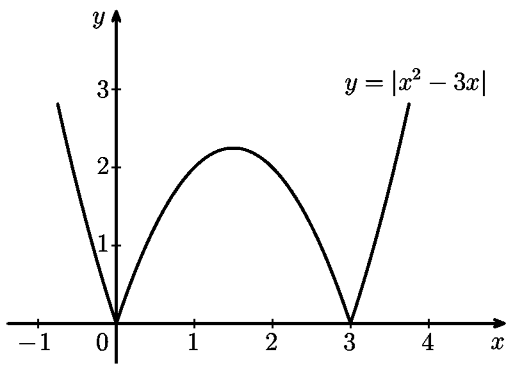
x	-1	0	1	2	3	4
y	4	0	2	2	0	4

(2) $x \geqq 1$ のとき $|x^2-3x| = \boxed{x^2-3x}$

$-1 < x < 1$ のとき $|x^2-3x| = \boxed{-x^2+3x}$

$x < -1$ のとき $|x^2-3x| = \boxed{x^2-3x}$

(3)



問 3 の解答

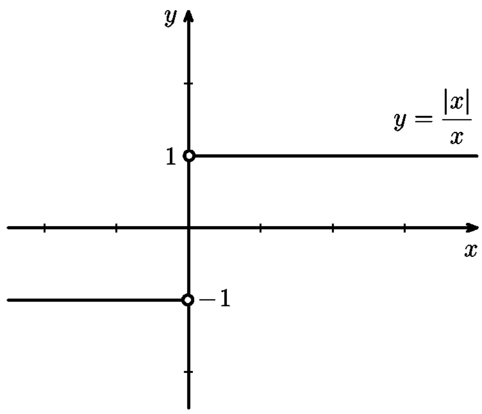
(1)

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y	-1	-1	-1		1	1	1

(2) $x > 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{1}$

$x < 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{-1}$

(3)



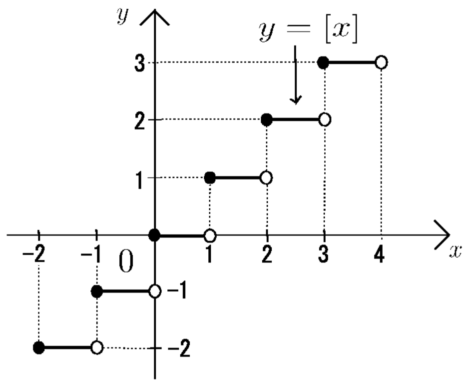
＜ 27 ページ. ガウス記号 ＞

問 1 の解答

(1) 1 (2) 9 (3) 0

(4) −1 (5) −4 (6) −10

問 2 の解答



＜ 28 ページ. 関数の極限 ＞

問の解答

(1) $\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{4} = 2$

(2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x = \cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0 = 0$

(4) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \log_2 x = \log_2 \left(\dfrac{1}{2} \right) = -1$

(5) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 1$

(6) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \dfrac{4 - 2 - 2}{2 + 1} = 0$

(7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x - 3) = 1 - 3 = -2$

(8) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \dfrac{(x+2)(x-3)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 3) = -2 - 3 = -5$

＜ 29 ページ. 左極限・右極限 1 ＞

問 1 の解答

(1) 10 の左表現 $= 9.\dot{9}$, 10 の右表現 $= 10.\dot{0}$

(2) 5.3 の左表現 $= 5.2\dot{9}$, 5.3 の右表現 $= 5.3\dot{0}$

問 2 の解答

(1) $\lim_{x \to 1-0} [x] = 0$ (2) $\lim_{x \to 1+0} [x] = 1$

(3) $\lim_{x \to 3-0} [x] = 2$ (4) $\lim_{x \to 3+0} [x] = 3$

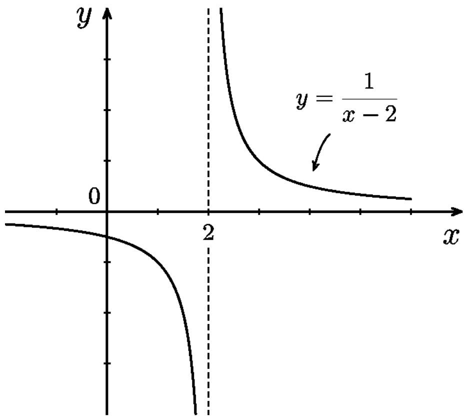
＜ 30 ページ. 左極限・右極限 2 ＞

問 1 の解答

(1) -1 (2) 0

問 2 の解答

(1) $+\infty$ (2) $-\infty$



＜ 31 ページ. 左極限・右極限 3 ＞

問の解答

(1) $\lim_{x \to -0} |x| = 0$, $\lim_{x \to +0} |x| = 0$

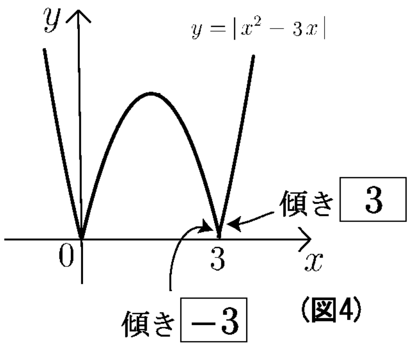
(2) $\lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = -1$, $\lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = 1$

＜ 32 ページ. 左微分係数・右微分係数 ＞

問の解答

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3+0} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3+0} \frac{|x^2-3x|-|0|}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim_{x\to 3} x = 3$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3-0} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3-0} \frac{|x^2-3x|-|0|}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x\to 3}(-x) = -3$$



(図4)

< 33 ページ. 弧度法の復習 >

問 1 の解答

度数法	40°	60°	90°	120°	180°	360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$	$\frac{\pi}{3}r$	$\frac{\pi}{2}r$	$\frac{2}{3}\pi r$	πr	$2\pi r$
面積 S	$\frac{\pi}{8}r^2$	$\frac{\pi}{6}r^2$	$\frac{1}{4}\pi r^2$	$\frac{\pi}{3}r^2$	$\frac{\pi}{2}r^2$	πr^2

問 2 の解答

$$\ell = \theta r$$

$$S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

＜ 34 ページ. 三角関数の極限 1 ＞

問 1 の解答

$\ell_1 = \sin\theta$ $\qquad\qquad$ $\ell_3 = \tan\theta$

問 2 の解答

$\ell_2 = \theta$

問 3 の解答

$\sin\theta < \theta < \tan\theta$

問 4 の解答

$$\boxed{\;\sin\theta\;} < \theta < \boxed{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

< 35 ページ. 三角関数の極限 2 >

問 1 の解答

$$\cos\theta \quad < \quad \frac{\sin\theta}{\theta} \quad < \quad \boxed{1}$$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle \lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

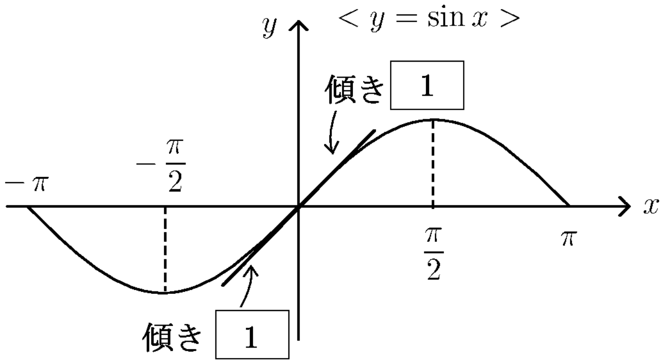
問 3 の解答

(2) $\displaystyle \lim_{\theta\to-0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{-\sin\theta_1}{-\theta_1}=\lim_{\theta_1\to+0}\frac{\sin\theta_1}{\theta_1}=1$

問 4 の解答

$$f'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=1$$

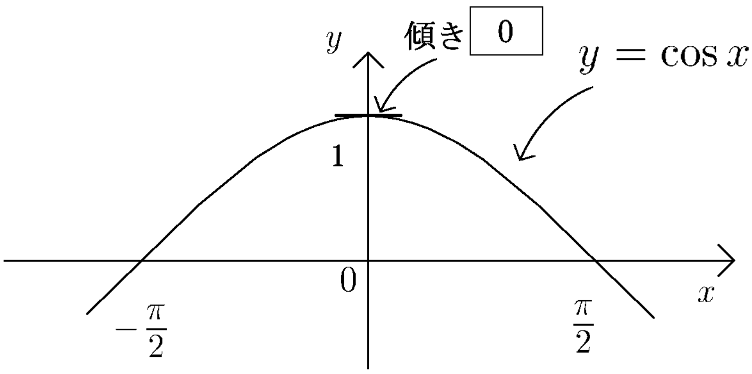
$$f'_-(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{\sin x-\sin 0}{x}=1$$



＜ 36 ページ. 三角関数の極限 3 ＞

問 1 の解答

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$



問 2 の解答

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\cos h}{h} \right) \right\} = (\sin x) \times 0 + (\cos x) \times 1 = \cos x$$

問 3 の解答

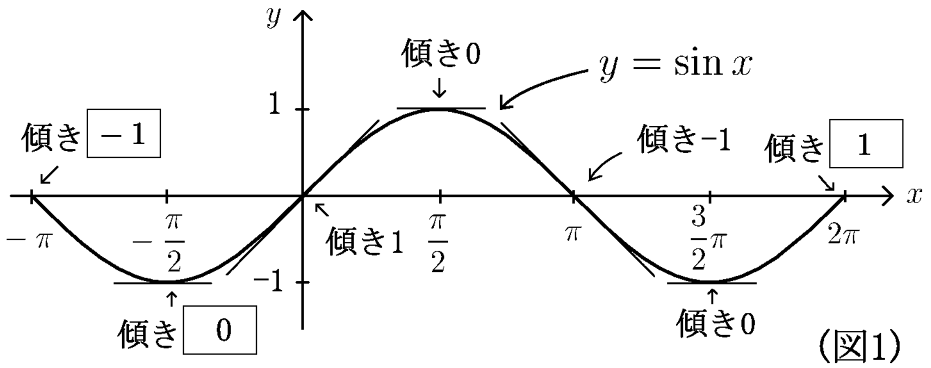
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(x+\theta) - \cos x}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos x \cos\theta - \sin x \sin\theta - \cos x}{\theta}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \cos x \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \right) - \sin x \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right) \right\}$$

$$= (\cos x) \times 0 - (\sin x) \times 1 = -\sin x$$

＜ 37 ページ. 三角関数の導関数 ＞

問 1 の解答



(図1)

問 2 の解答

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(x+\theta)-\cos x}{\theta} = -\sin x$$

問 3 の解答

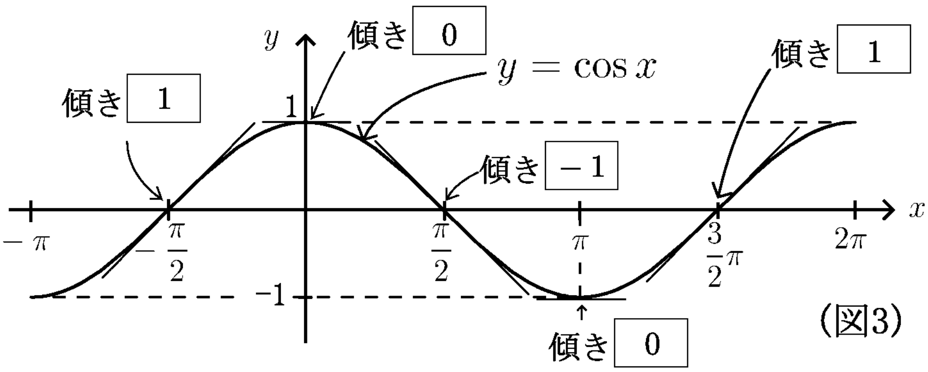
$x = 0$ のとき　$y = \cos x$ の傾き $= -\sin 0 = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \cos x$ の傾き $= -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

$x = \pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き $= -\sin(\pi) = 0$

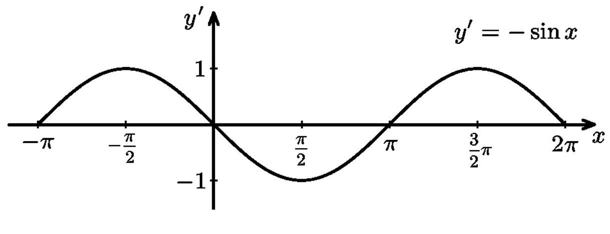
$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き $= -\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 1$

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \cos x$ の傾き $= -\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -(-1) = 1$



(図3)

問 4 の解答



< 38 ページ. ネピアの数 >

問の解答

(1) $x = 0.001$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \dfrac{1}{1000}\right)^{1000}$

$x = 0.0001$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \dfrac{1}{10000}\right)^{10000}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{n \to +0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$

＜ 39 ページ. 対数関数の微分 ＞

問 1 の解答

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \{\log_{10}(3+h) - \log_{10} 3\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10} \left(\frac{3+h}{3} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{3} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{3t} \log_{10}(1+t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{3} \log_{10}(1+t)^{\frac{1}{t}} \qquad \left(\frac{h}{3} = t \Leftrightarrow h = 3t \right)$$

$$= \frac{1}{3} \log_{10} e$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10} \left(1 + \frac{h}{x} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{xt} \log_{10}(1+t) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \log_{10}(1+t)^{\frac{1}{t}} \qquad \left(\frac{h}{x} = t \Leftrightarrow h = xt \right)$$

$$= \frac{1}{x} \log_{10} e$$

問 2 の解答

(答) $\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e}$

＜ 40 ページ. 自然対数 ＞

問 1 の解答

(1) $\dfrac{1}{x}\log_{10} e$　　(2) $\dfrac{1}{x}\log_{2} e$

問 2 の解答

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x}\log_e e = \frac{1}{x}$$

問 3 の解答

(1) 1　　(2) $\dfrac{1}{3}$　　(3) -1　　(4) 0

問 4 の解答

$$(\log x)' = (\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

問 5 の解答

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e \quad , \; f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} \quad , \; f'(e) = \frac{1}{e}$$