2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学
基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A
No. 12

内容

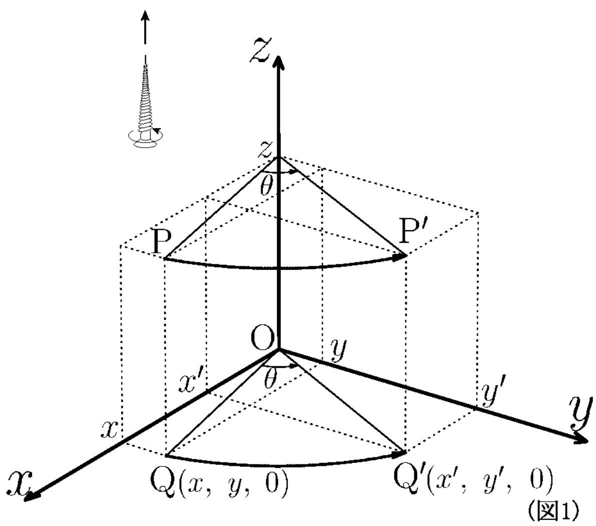
◎　逆行列

◎　一次変換

◎　固有値

◎　直交行列

◎　正規直交基底



(図1)

電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

< 正則行列 >

n 次の正方行列 A と n 次の単位行列 I に対し、ある n 次正方行列 X が存在して、

$$AX = XA = I$$

となるとき、行列 A を**正則行列**という。この行列 X は A に対し一意的に定まる。X を A の**逆行列**といい

$$X = A^{-1}$$

と書く。

例 1 n 次の単位行列 I は任意の n 次正方行列 A に対して

$$AI = IA = A$$

である。特に $A = I$ の場合は

$$II = II = I$$

より、単位行列 I は正則行列であり、$I^{-1} = I$ となる。

例 2 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ とすると $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

より $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$ である。

問 1 A, B が以下の場合に、積 AB と BA を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

AB BA AB BA

$=$ $=$ $=$ $=$

例 3 零行列 O は正則行列でない。もし逆行列 X が存在すれば $XO = OX = I$ となるはずだが、零行列 O との積はやはり零行列 O になり、$O = I$ となって矛盾が生じる。

例 4 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ に対し , 積は $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

この A は正則行列でない。

＜証明＞ もし仮に A が正則行列であると仮定すると , 逆行列 A^{-1} が存在し ,

$$B = IB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O$$

となって $B = O$ となり矛盾する。したがって最初の仮定が誤りである。

すなわち A は正則行列でない。

(注) このような証明を「背理法」という。

問 2 例 4 の場合に B が正則行列でないことを示せ。

< 逆行列 1 >

例題 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ は正則行列である。 逆行列 A^{-1} を求めよ。

(解) 逆行列を $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5y & 2z+5w \\ x+4y & z+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ x+4y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z+5w=0 \\ z+4w=1 \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式を解くと、

$$x = \frac{4}{3}\ ,\ y = -\frac{1}{3}\ ,\ z = -\frac{5}{3}\ ,\ w = \frac{2}{3}$$

より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である。この A^{-1} は $AA^{-1} = I$ が成り立つように A^{-1} を求めたものである。

一方

$$A^{-1}A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より A^{-1} が A の逆行列であることがわかる。

問 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ は正則行列である。逆行列 A^{-1} を求めよ。

＜逆行列 2 ＞

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値を行列 A の **行列式** $(determinant)$ といい $\det(A)$ で表す。

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad のとき \quad \det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

問題 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し，$\det(A)\neq 0$ であれば正則行列となる。

すなわち逆行列 A^{-1} が存在する。$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおいて A^{-1} を求めたい。

$AA^{-1}=I$ だから

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$① \begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=0 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} az+bw=0 \\ cz+dw=1 \end{cases}$$

となる。

(1) $\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ のとき連立方程式①，②を解いて x，y，z，w を a，b，c，d で表せ。

(2) (1) で求めた x，y，z，w に対し，次の行列の積を求めよ。

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=$$

＜逆行列３＞

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して,

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc\ \neq\ 0$$

であれば A は正則行列であり、前ページの結果より、
逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

となる。実は $\det(A)=0$ であれば、正則行列でないことがわかっている。

例 $A=\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対し,

$$\det(A)=\ 8\times 3-10\times 2\ =\ 4\ \neq\ 0$$

より A は正則行列で

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\ =\ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

となる。実際

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{24}{4}-\frac{10}{2} & \frac{40}{2}+20 \\ \frac{6}{4}-\frac{3}{2} & -\frac{10}{2}+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{24}{4}-\frac{10}{2} & \frac{30}{4}-\frac{15}{2} \\ -\frac{8}{2}+4 & -\frac{10}{2}+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

問 行列 A が以下の場合に、A が正則行列かどうかを判定し、正則行列ならば逆行列 A^{-1} を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

＜逆行列 4 ＞

3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の逆行列 $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ を求めたい。

$AA^{-1} = I$ より

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから、各成分は次の方程式を満たす。

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 = 1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 = 0 \\ a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1 = 0 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 = 0 \\ a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2 = 1 \\ a_3x_2 + b_3y_2 + c_3z_2 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} a_1x_3 + b_1y_3 + c_1z_3 = 0 \\ a_2x_3 + b_2y_3 + c_2z_3 = 0 \\ a_3x_3 + b_3y_3 + c_3z_3 = 1 \end{cases}$$

(1) 式は 1 列目の成分に関する式であり, (2) 式は 2 列目, (3) 式は 3 列目を表す。

これらの連立方程式 (1), (2), (3) は係数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ が 0 でなければ解をもつ (クラメルの公式)。 ワークブック $No.$11 の 14 ページより

(1) 式の解は

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y_1 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

となる。

問 上 $(D \neq 0)$ の場合に, (2) 式と (3) 式の解を $\pm\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix}$ の形で表せ。

$x_2 =$

$x_3 =$

$y_2 =$

$y_3 =$

$z_2 =$

$z_3 =$

< 逆行列 5 >

3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対し A の行列式 $\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D$ が 0 でなければ $AA^{-1} = I$ となる $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ が存在し , その値は前ページより

$$x_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad x_2 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y_1 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad y_3 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$z_1 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad , \quad z_2 = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad , \quad z_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

となる。A^{-1} が A の逆行列であるためには $A^{-1}A = I$ でなければならない。

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 & b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 & c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 \\ a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 & c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3 \end{pmatrix}$$

が単位行列になることを確かめる。

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \frac{1}{D}\left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \frac{1}{D}\left\{b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \frac{1}{D}\left\{c_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(注) ここで行列式の列展開の公式を逆に用いている。

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = \frac{-1}{D}\left\{a_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} = \frac{-1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = \frac{-1}{D}\left\{b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} = \frac{-1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

問 上の場合に残りの成分を計算せよ。

(1) $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$

$=$

(2) $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3$

$=$

(3) $b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3$

$=$

(4) $c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3$

$=$

< 逆行列の一意性 >

定理1 正則行列 A の逆行列はただ1つである。

< 証明 > A の逆行列が2つあったとして, それを X, Y とすると,

$$XA = AX = I \quad , \qquad YA = AY = I \qquad (I \text{は単位行列})$$

である。よって

$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

より $X = Y$ である。 (証明終)

定理2 正則行列 A に対して,

$$XA = I \qquad (I \text{は単位行列})$$

を満たす正方行列 X が存在すれば, X は A の逆行列 A^{-1} である。
すなわち

$$X = A^{-1}$$

である。

問 定理1の証明を参考にして定理2の証明をせよ。
(ヒント $AA^{-1} = A^{-1}A = I$)

< 証明 >

(注) 正方行列 A が正則行列であるかどうかは (P4, P6 より)
その行列式 $\det(A)$ の値を調べればよい。

$$\boxed{\text{正方行列 } A \text{ が正則} \iff \det(A) \neq 0}$$

< 逆行列と連立一次方程式 >

未知数 x，y に関する連立一次方程式

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (1)$$

を行列を用いて解くことができる。(1) 式を行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表すと

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \ (2)$$

と表される。A が逆行列 A^{-1} をもつとき，(2) の両方に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (3)$$

となる。ここで左辺は

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから (3) より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

一般に

> 行列 A が逆行列 A^{-1} をもつとき，
>
> 方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ である。

例題 行列を利用して，次の連立一次方程式を解け。

$$\begin{cases} 4x+3y=10 \\ 6x+5y=16 \end{cases} \qquad \cdots\cdots \ (1)$$

(解) $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ とすると $A^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ となる。

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

よって <u>(答) $x=1$，$y=2$</u>

問 行列を利用して，次の連立一次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 2x+5y=9 \\ x+3y=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=9 \end{cases}$

＜平面の一次変換 1 ＞

座標平面上の任意の点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ に移す変換が、
$a,\ b,\ c,\ d$ を定数として、$x,\ y$ の一次式

$$(1)\begin{cases} x' \ = \ ax + by \\ y' \ = \ cx + dy \end{cases}$$

で表されている場合に、**一次変換**という。(1) を行列で表すと

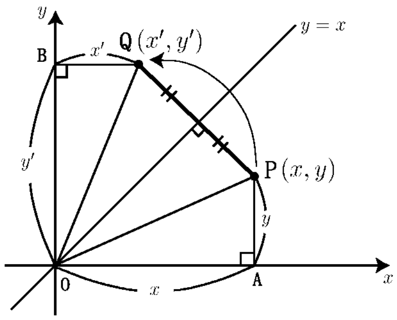
$$(2)\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから、一次変換 (1) を (2) 式、又は単に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表す。

例 1 直線 $y = x$ に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移動したとすれば、右図より $\triangle\mathrm{OAP}$ と $\triangle\mathrm{OBQ}$ は合同だから

$$x' = y\ ,\quad y' = x$$

となる。よって



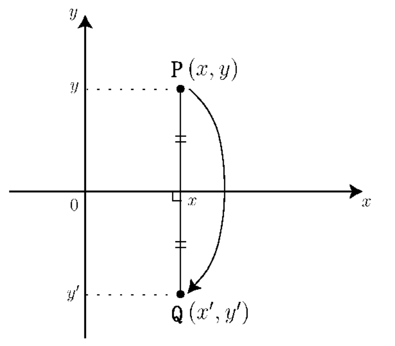
$$\begin{cases} x' = 0 \times x + 1 \times y \\ y' = 1 \times x + 0 \times y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

例 2 x 軸に関して対称に移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移動したとすると
右図より

$$x' = x\ ,\quad y' = -y$$

であるから



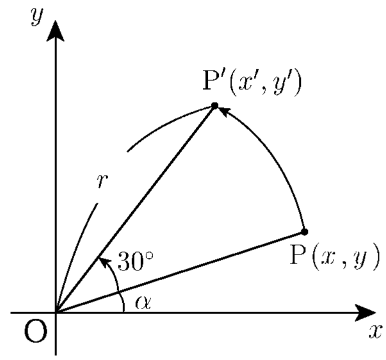
$$\begin{cases} x' = 1 \times x + 0 \times y \\ y' = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書けるから、この変換は一次変換であり、変換行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

問 平面上の点を原点に関して対称に移動する一次変換を A とする。 A を表す行列を求めよ。

< 平面の一次変換 2 >

例 座標平面上の点を原点 O を中心として反時計まわりに角度 30° だけ回転移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x, y)$ が点 $\mathrm{P}'(x', y')$ に移動したとする。(x', y') を (x, y) で表したい。
右図のように原点からの距離を $\mathrm{OP} = \mathrm{OP}' = r$ とし、線分 OP と x 軸との角度を α とする。このとき



$$x = r\cos\alpha \quad , \quad y = r\sin\alpha \quad , \quad x' = r\cos(\alpha + 30^\circ) \quad , \quad y' = r\sin(\alpha + 30^\circ)$$

である。加法定理から

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + 30^\circ) = r\{\cos\alpha\cos 30^\circ - \sin\alpha\sin 30^\circ\} \\ &= (r\cos\alpha)\cos 30^\circ - (r\sin\alpha)\sin 30^\circ = x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha + 30^\circ) = r\{\sin\alpha\cos 30^\circ + \cos\alpha\sin 30^\circ\} \\ &= (r\sin\alpha)\cos 30^\circ + (r\cos\alpha)\sin 30^\circ = y\cos 30^\circ + x\sin 30^\circ \end{aligned}$$

であるから、この変換は

$$\begin{cases} x' = x\cos 30^\circ - y\sin 30^\circ \\ y' = x\sin 30^\circ + y\cos 30^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり一次変換である。この一次変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問 次の一次変換を表す行列を求めよ。(回転は全て反時計回りとする)

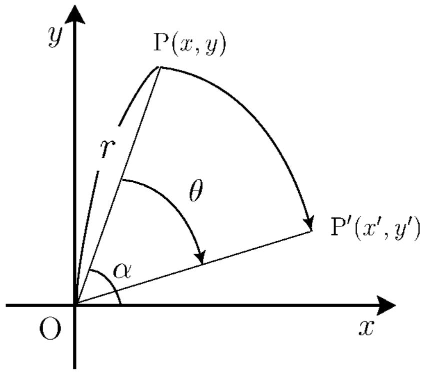
(1) 原点中心, 45° 回転

(2) 原点中心, 90° 回転

(3) 原点中心, 120° 回転

(4) 原点中心, θ 回転

＜平面の一次変換 3＞



例 座標平面上の点を原点 O を中心として時計まわりに角度 θ だけ回転移動する変換を考える。この変換によって点 $\mathrm{P}(x,y)$ が点 $\mathrm{P}'(x',y')$ に移動したとする。(x',y') を (x,y) で表したい。

右図のように原点からの距離を $\mathrm{OP}=\mathrm{OP}'=r$ とし , 線分 OP と x 軸との角度を α とすると

$$x=r\cos\alpha \quad , \quad y=r\sin\alpha \quad , \quad x'=r\cos(\alpha-\theta) \quad , \quad y'=r\sin(\alpha-\theta)$$

と表される。

問 1 加法定理を用いて $\cos(\alpha-\theta)$, $\sin(\alpha-\theta)$ を展開し , 整理して , x' , y' を x , y と $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ。

$x'=$

$y'=$

問 2 この変換を表す行列を $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ。

問 3 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とする。A の逆行列を求めよ。

$A^{-1}=$

問 4 三角関数の性質を用いて次の行列を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ だけで表せ。

$$\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}=$$

問 5 次の一次変換を表す行列を求めよ。

(1) 原点中心 , 時計まわりに 30°回転移動　　(2) 原点中心 , 時計まわりに 45°回転移動

(3) 原点中心 , 時計まわりに 90°回転移動　　(4) 原点中心 , 時計まわりに 120°回転移動

< 平面の一次変換 4 >

例 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ が表す一次変換を $A,\ B$ とする。

今点 $(x,\ y)$ が一次変換 A によって $(x',\ y')$ に移り, さらに B によって $(x',\ y')$ が $(x'',\ y'')$ に移ったとする。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}, \quad \begin{cases} x'' = 5x' + 6y' \\ y'' = 7x' + 8y' \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{cases} x'' = 5(x+2y) + 6(3x+4y) = 23x + 34y \\ y'' = 7(x+2y) + 8(3x+4y) = 31x + 46y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される。したがって A にひき続き B を行う一次変換は行列 $\begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$ で表される。

問 1 上の例の $A,\ B$ に対し, B にひき続き A を行う一次変換を行列で表せ。

問 2 上の例の $A,\ B$ に対し, 次の行列の積を計算せよ。

(1) AB (2) BA

< 平面の一次変換 5 >

2 つの一次変換 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対し，A にひき続き B を行う一次変換を求めたい。

今，点 $(x\,,\,y)$ が A によって $(x'\,,\,y')$ に移り，さらに B によって $(x'\,,\,y')$ が $(x'',\,y'')$ に移ったとする。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{x'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad , \qquad \boldsymbol{x''} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{x'} = A\boldsymbol{x} \quad , \qquad \boldsymbol{x''} = B\boldsymbol{x'}$$

より

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;, \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

であるから

$$(1) \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad , \; (2) \begin{cases} x'' = \alpha x' + \beta y' \\ y'' = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

と表される。

問 1　(1)，(2) 式より x''，y'' を x，y で表すことによって，A にひき続き B を行う一次変換を行列で表せ。

問 2　上の A，B に対し，次の行列の積を求めよ。

$AB =$

$BA =$

＜平面の一次変換 6 ＞

２つの一次変換 A , B がある。今点 (x,y) が A によって点 (x',y') に移り , さらに B によって (x',y') が (x'',y'') に移ったとする ,

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{x}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \qquad , \qquad \boldsymbol{x}'' = B\boldsymbol{x}'$$

より

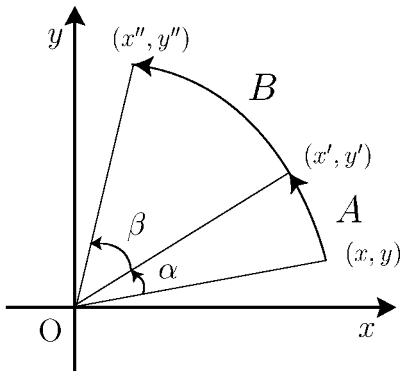
$$\boldsymbol{x}'' \;=\; B\boldsymbol{x}' \;=\; B(A\boldsymbol{x}) \;=\; (BA)\boldsymbol{x}$$

であるから , A にひき続き B を行う一次変換は行列 B と A の積 BA で表される。

例　原点を中心として反時計回りに角度 α だけ回転移動する一次変換を A, 同じく角度 β だけ回転移動する一次変換を B とすると , A と B は行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で表される。



問1　A にひき続き B を行う一次変換を $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$ を用いた行列で表せ。

問2　例の場合に A にひき続き B を行う一次変換は (図より) 角度 $\alpha+\beta$ の回転移動になる。すなわち

$$BA = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

となる。問 1 の結果と比較して , 次式を $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$ で表せ。

$\cos(\alpha+\beta) =$

$\sin(\alpha+\beta) =$

＜ 平面の一次変換 7 ＞

例 1　一次変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ に対し, A の逆行列 A^{-1} が表す一次変換を考える。

4 ページより A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \times 4 - 2 \times 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。A によって点 $(5,\ 6)$ は点 $(17,\ 39)$ に移る。

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A^{-1} によって点 $(17,\ 39)$ は点 $(5,\ 6)$ にもどる。

一般に正則行列 A が表す一次変換によって点 $(x,\ y)$ が点 $(x',\ y')$ に移るとき, A^{-1} によって点 $(x',\ y')$ は点 $(x,\ y)$ にもどる。すなわち

$$(*) \quad \boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{ならば} \qquad A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

である。このとき A^{-1} が表す一次変換を一次変換 A の **逆変換** という。

例 2　例の場合に $(*)$ を証明する。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$$

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x' + y' \\ \frac{3x'}{2} - \frac{y'}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x + 2y) + (3x + 4y) \\ \frac{3}{2}(x + 2y) - \frac{1}{2}(3x + 4y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2x - 4y + 3x + 4y \\ \frac{3}{2}x + 3y - \frac{3}{2}x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

問　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad - bc \neq 0)$ の場合に $(*)$ を証明せよ。

＜固有値 1＞

2 次の正方行列　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$(*) \qquad A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad \left(\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

をみたす $\mathbf{0}$ 以外のベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数 λ が存在するとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する**固有ベクトル** という。

例　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3x+2y \\ x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)$$

であるから連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y = \lambda x \\ x+4y = \lambda y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (3-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots(2)$$

が導かれる。ワークブック $Ser.$A , $No.$11 (P 22) より，この同次方程式が $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をもつためには係数行列式が 0 でなければならない。従って (2) の係数行列式 $= 0$ より

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3-\lambda)(4-\lambda)-2 = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

とおいて，λ について整理すると,

$$(3-\lambda)(4-\lambda)-2 = \lambda^2-7\lambda+10 = (\lambda-2)(\lambda-5) = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

より　$\underline{\lambda = 2}$ と $\underline{\lambda = 5}$ が求まる。これが A の固有値である。

(注) 固有値は 2 個であるとは限らない。1 個の場合もあるし，共役な複素数の場合もある。

問 1　一般の 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値 λ を求めたい。例の (4) 式のような λ に関する 2 次方程式を導け。(因数分解はしなくてよい)

問 2　行列 A が以下の場合に，A の固有値を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　　(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

＜ 固有値 2 ＞

一般の正方行列 A に対し

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

をみたす零ベクトルでない縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と定数 λ が存在するとき，
λ を (A の) **固有値**，$\boldsymbol{x}$ を (λ に対する) **固有ベクトル**という。

2 次の場合には，固有値 λ を求めるために，前ページの (3) 式をみたす λ を求めれば良い。一般の場合にも同様なことが成り立つ。

> 正方行列 A の固有値 λ は，$\det(A - \lambda I) = 0$ の解である。

ここで I は単位行列である。λ に関する方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ を
固有方程式という。

例 3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値を求めたい。

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

より

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 2(1-\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\left\{(1-\lambda)(2-\lambda) - 2\right\} = -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3)$$

であるから

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Longleftrightarrow -(\lambda-1)\lambda(\lambda-3) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1, 0, 3$$

よって A の固有値は $\underline{\lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 3}$ である。

問 行列 A が以下の場合に A の固有値を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

< 固有ベクトル >

行列 A の固有値 λ と固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の関係は
$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (A-\lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
である。

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の場合, 16 ページの例より固有値は $\lambda = 2$ と $\lambda = 5$ であった。
この固有値に対応する固有ベクトルを求めたい。固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は
$$(A-\lambda I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} (3-\lambda)x + \quad 2y = 0 \\ \quad x + (4-\lambda)y = 0 \end{cases} \cdots (*)$$
をみたす。

[1] < **$\boldsymbol{\lambda = 2}$ のとき** > 連立方程式 $(*)$ は
$$(*) \ \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$
より 2 式が一致する。従って x と y は $x + 2y = 0$ であれば何でもよい。この 1 つの解として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ をとれば, それが固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルである。実際 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ とすると
$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x}$$
となる。

[2] < **$\boldsymbol{\lambda = 5}$ のとき** > 連立方程式 $(*)$ は
$$(*) \ \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ \quad x - \ y = 0 \end{cases}$$
より $x - y = 0$ であれば何でもよい。この 1 つの解として $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとればそれが固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルである。実際 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると
$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\boldsymbol{x}$$
となる。以上をまとめると

<u>固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$</u>

<u>固有値 $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$</u>

問 行列が A の場合に, 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

< 行列の対角化 1 >

2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を並べた行列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ を

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}$$

と略記する。

補題1　任意の定数 λ_1, λ_2 と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ に対し

$$\boxed{\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x_1} & \lambda_2 \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

証明　$\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$左辺 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{x_1} & \lambda_2 \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = 右辺 \quad \text{(証明終)}$$

問 1　行列 (　　　) の成分を書くことによって上の証明を完成せよ。

補題2　2 次の正方行列 A と 2 次の縦ベクトル $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}$ に対し

$$\boxed{A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

証明　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$左辺 = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

$$右辺 = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x_1} & A\boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$$

左辺 = 右辺より補題 2 が成り立つ。

問 2　行列 (　) の成分を書くことにより補題 2 の証明を完成せよ。

＜行列の対角化 2 ＞

定理 2 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2$ として, λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2$ とする。すなわち

$$A\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 \quad , \qquad A\boldsymbol{x}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{x}_2$$

とする。このとき

$$\boxed{A(\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) \ = \ (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。

問 1 前ページの補題 1, 2 を用いて定理を証明せよ。

問 2 18 ページの例より

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 5$ であり

対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

ここで

$$P = (\boldsymbol{x}_1 \ \ \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) 次の行列の積を求めよ。

$AP =$

$P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。 $P^{-1} =$

(3) 次の行列の積を計算せよ。

$P^{-1}AP =$

< 行列の対角化 3 >

正方行列 A に対し，ある正則行列 P を見つけて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを「行列 A を**対角化**する」という。2 次の正方行列 A に対し，前のページより次の方法で対角化する。

[Step 1]　A の固有値 λ_1 と λ_2 を求める。 $\Leftrightarrow$ $\det(A-\lambda I)=0$ の解 λ_1，λ_2 を求める。

[Step 2]　λ_1 と λ_2 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x_1}$ と $\boldsymbol{x_2}$ を求める。
　$\Leftrightarrow$ $(A-\lambda_1 I)\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{0}$, $(A-\lambda_2 I)\boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$ を求める。

[Step 3]　$P=(\boldsymbol{x_1}\ \ \boldsymbol{x_2})$ とすると，前ページの定理より

$$AP=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\quad\cdots\quad(*)$$

[Step 4]　P の逆行列 P^{-1} を求め，$(*)$ 式の両辺に左側から P^{-1} をかけると

$$\boxed{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}}\quad(\text{行列 } A \text{ の対角化})$$

対角化できる。

注)　この対角化は一意的ではない。たとえば $P=(\boldsymbol{x_2}\ \ \boldsymbol{x_1})$ とおくと

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

となる。

問　次の行列を対角化したい。固有ベクトルを並べた行列 P を作り，P^{-1} を求め，$P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$　　(3) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}$

$P=$　　$P=$　　$P=$

$P^{-1}=$　　$P^{-1}=$　　$P^{-1}=$

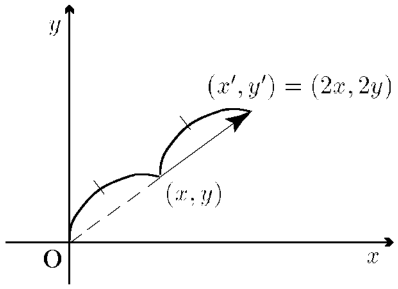
$P^{-1}AP$　　$P^{-1}AP$　　$P^{-1}AP$

$=$　　$=$　　$=$

＜一次変換と固有値 1 ＞

例 1　一次変換 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



より, 原点からの距離を 2 倍に移動する変換である。このとき A の固有値は 2 であり, 固有ベクトルは任意のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ である。このような変換を**相似変換**という。

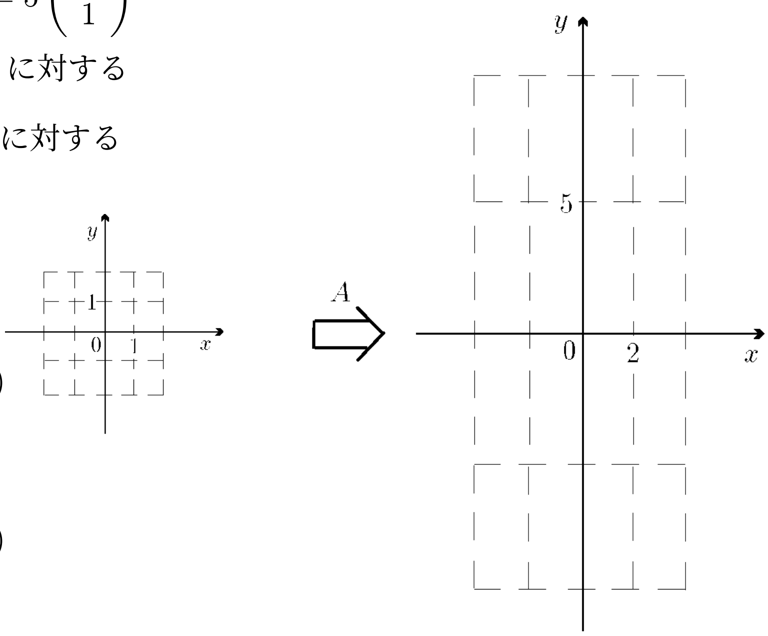
例 2　一次変換 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ は

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より, 固有値は 2 と 5 で, 固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 固有値 5 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

右図よりこの変換 A は

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ベクトル}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\text{方向}(x\text{軸方向}) \\ \text{に 2 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\text{方向}(y\text{軸方向}) \\ \text{に 5 倍ひきのばす変換である。} \end{array}\right.$$



問　一次変換 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ はどういう変換か？

例 2 の { 内のような答え方をせよ。

＜一次変換と固有値 2 ＞

例 一次変換 $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=2$ と $\lambda=5$ であり,

対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ であった (**P.18**)。

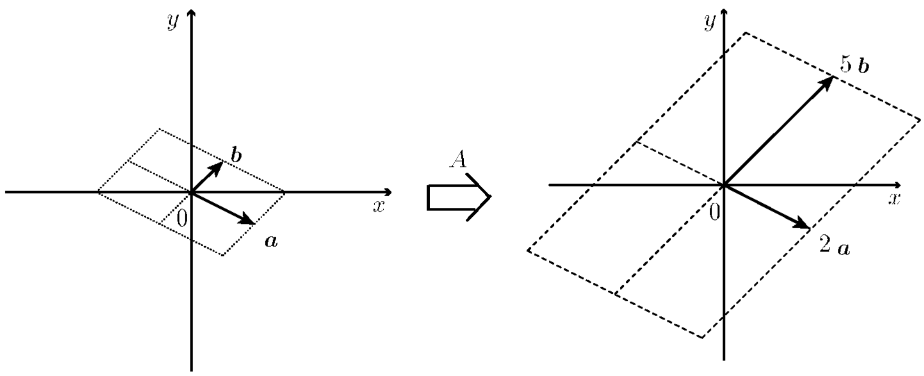
すなわち

$$A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\ ,\quad A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

である。一次変換 A によってベクトル $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ は方向が変わらず, 大きさは 2 倍になる。

又ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ は方向が変わらず, 大きさが 5 倍になる。

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とすれば



上左図が一次変換 A によって, 上右図に移る。この

$$\begin{cases}\text{一次変換は } \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \text{ の方向に 2 倍,}\\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ の方向に 5 倍ひきのばす変換である。}\end{cases}$$

(注) この変換は前ページ例 2 の変換のひきのばす方向を変えたものである。A を対角化すれば,$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$ となるからである (**P.20**)。逆にこのような変換行列でないと対角化はできない（例えば 30° 回転の行列などは対角化できない)。

問 次の行列 A で表される一次変換はどのような変換か？ 例の { 内のような答え方をせよ。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&5\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$

< 空間の一次変換 1 >

座標空間上の点 (x,y,z) を点 (x',y',z') に移す変換が $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$ を定数として x,y,z の一次式

$$(1)\ \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

で表されるとき**一次変換**という。(1) 式を行列で表すと

$$(2)\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となるので, 一次変換 (1) を (2) 式または単に行列 $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ で表す。

例 一次変換

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

によって点 $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)$ が移される先を求める。

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

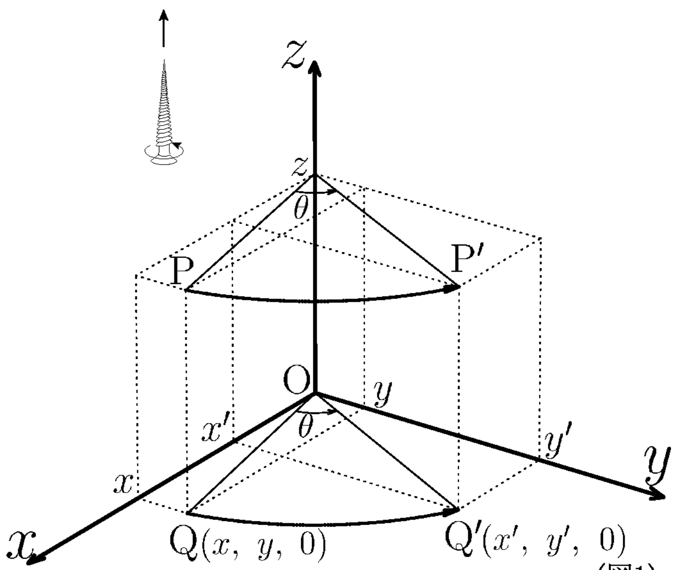
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+7 \\ 2+5+8 \\ 3+6+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

より, 原点 $(0,0,0)$ は原点に, 点 $(1,0,0)$ は点 $(1,2,3)$ に, 点 $(0,1,0)$ は点 $(4,5,6)$ に, 点 $(0,0,1)$ は点 $(7,8,9)$ に, 点 $(1,1,1)$ は点 $(12,15,18)$ に移る。

問 一次変換 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$ によって点 $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$ $(1,1,1)$ の移される先を求めよ。

＜空間の一次変換 2＞

座標空間内の任意の点を z 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち z 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。



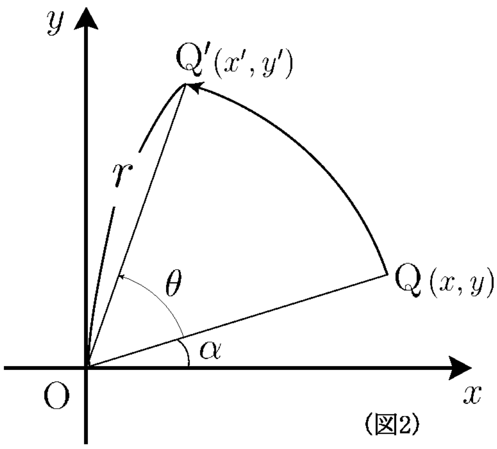
(図1)

今空間の任意の点を z 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 P(x, y, z) がこの回転移動によって点 P′(x', y', z') に移ったとする。x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。

z 軸のまわりに回転するので z 座標は変わらない。すなわち

$$z' = z \quad \cdots \quad ①$$

である。点 P , P′ を xy 平面上に射影した点を Q , Q′ とする (図 1)。Q , Q′ は図 2 のような位置関係にある。



(図2)

問 (1) 10 ページを参考にして, 図 2 の $(x',\ y')$ を $(x,\ y)$ と θ で表せ。

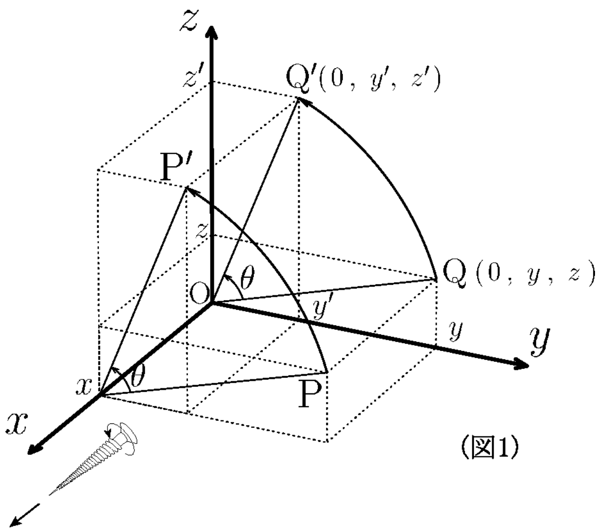
$x' =$

$y' =$

(2) この回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

< 空間の一次変換 3 >

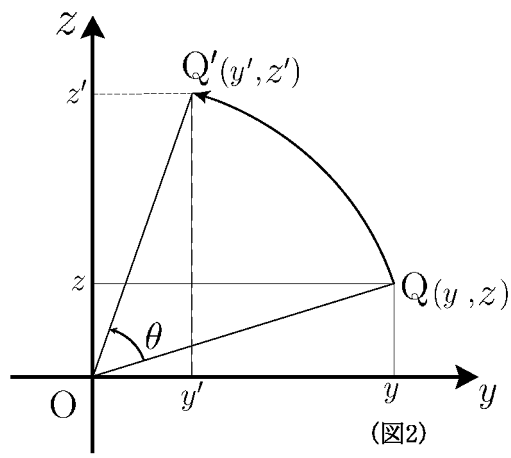


(図1)

座標空間内の任意の点を x 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち x 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。

今空間の任意の点を x 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ が, この回転によって点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ に移ったとする (図 1)。

x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。

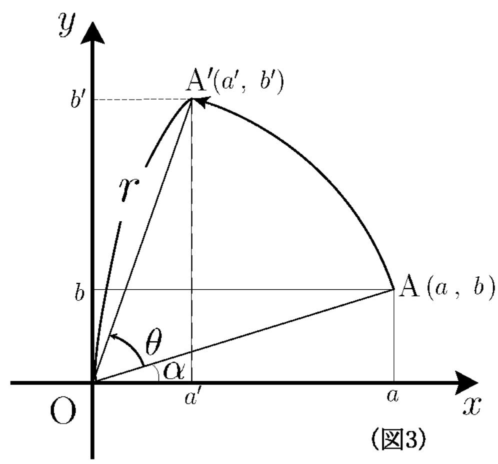


(図2)

問 1 図 3 のように xy 平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を原点を中心にして角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{A}'(a',\ b')$ と置く。10 ページを参考にして, a', b' を a, b と θ で表せ。

$a' =$

$b' =$



(図3)

問 2 図 2 のように yz 平面上の点 $\mathrm{Q}(y,\ z)$ を原点を中心として角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}'(y',\ z')$ と置く。y', z' を y, z と θ で表せ。

$y' =$

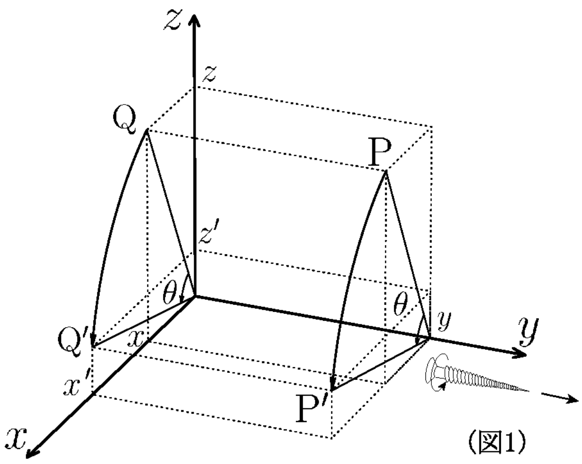
$z' =$

問 3 図 1 の回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

＜ 空間の一次変換 4 ＞

座標空間内の任意の点を y 軸を中心軸として回転移動する変換を考える。回転の方向は右図のようである。すなわち y 軸と同じ方向に右ねじを置き, 右ねじが回転しながら進むときの回転する方向にまわす。



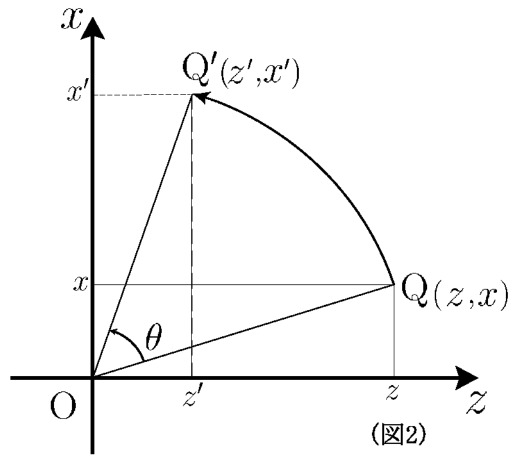
(図1)

今空間の任意の点を y 軸を中心軸として (上記の方向に) 角度 θ だけ回転移動する場合を考える。点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ がこの回転移動によって点 $\mathrm{P}'(x', y', z')$ に移ったとする (図 1)。x', y', z' を x, y, z と θ で表したい。

問 1　図 2 のように zx 平面上の点 $\mathrm{Q}(z,\ x)$ を原点を中心にして角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{Q}'(z',\ x')$ と置く。z', x' を z, x と θ で表せ。

$z' =$

$x' =$



(図2)

問 2　図 1 の回転によって点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ が $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ に移った。x', y', z' を x, y, z と θ で表せ。

$x' =$

$y' =$

$z' =$

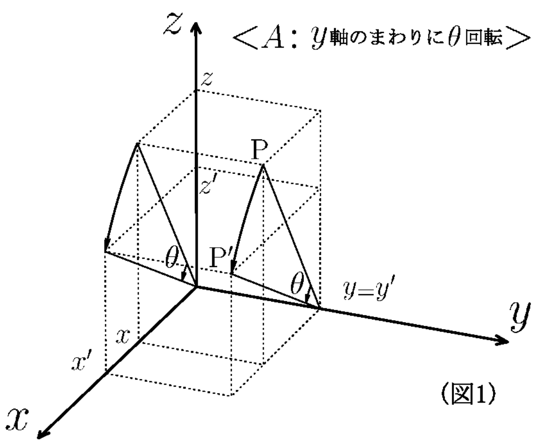
問 3　図 1 の回転移動を行列で表せ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

< 空間の一次変換 5 >

座標空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を y 軸を中心軸として角度 θ だけ回転移動した点を $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ とする (図 1)。前ページの結果より

$$(1)\quad \begin{cases} x' = \ x\cos\theta \ + \ z\sin\theta \\ y' = \ y \\ z' = \ -\ x\sin\theta \ + \ z\cos\theta \end{cases}$$

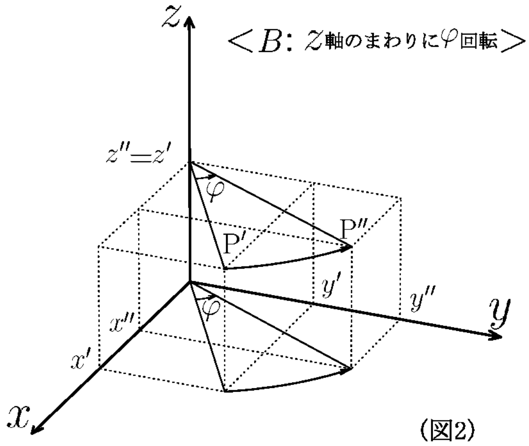


(図1)

となる。この点 $\mathrm{P}'(x',\ y',\ z')$ をさらに z 軸を中心軸として角度 φ だけ回転移動した点を $\mathrm{P}''(x'',\ y'',\ z'')$ とする (図 2)。25 ページの結果より

$$(2)\quad \begin{cases} x'' = \ x'\cos\varphi \ - \ y'\sin\varphi \\ y'' = \ x'\sin\varphi \ + \ y'\cos\varphi \\ z'' = \ z' \end{cases}$$

となる。



(図2)

問 1　(1) 式を (2) 式に代入して整理し, x'', y'', z'' を x, y, z と θ, φ だけで表し, 行列で表現せよ。

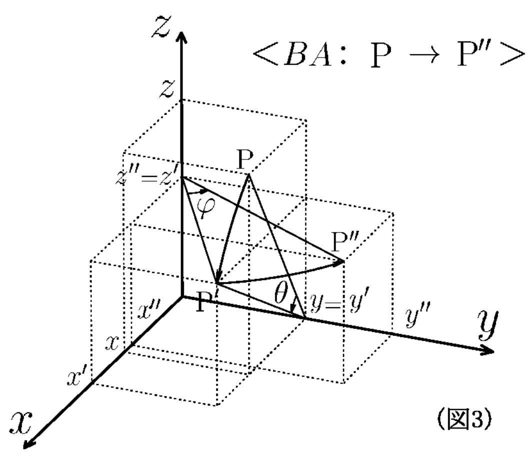
$$\begin{pmatrix} x'' \\ \\ y'' \\ \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \\ \\ z \end{pmatrix}$$

問 2　行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し, 積 BA を求めよ。



(図3)

$BA =$

< 転置行列 >

行列 A の行と列を入れ変えた行列を**転置行列** (tansposed matrix) といい, A^t と書く。

例 1

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \boldsymbol{x}^t = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad B^t = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

問 1

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^t =$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B^t =$

(3) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}^t =$

(4) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r}^t =$

例 2 空間ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し, $\boldsymbol{x}^t$ と $\boldsymbol{y}$ との行列の積

$$\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \ (\cdots \ \boldsymbol{x} \text{ と } \boldsymbol{y} \text{ の内積})$$

はベクトルの内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ である。

問 2 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し, 次の行列の積を求めよ。

(1) $A\boldsymbol{x} =$

(2) $\boldsymbol{x}^t A^t =$

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$|A\boldsymbol{x}|^2 = \left| \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \right|^2 = (x+3y)^2 + (2x+4y)^2 = (x+3y \quad 2x+4y) \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}^t A^t A \boldsymbol{x}$$

問 3 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し, 次式の値を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^t$, A , A^t で表せ。

$|A\boldsymbol{x}|^2 =$

＜ 2 次の直交行列 ＞

平面のベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ が単位ベクトル (= 大きさ 1)

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad , \quad |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1 \quad (\text{単位ベクトル})} \; (*)_1$$

であり, $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ が直交している (⇔ 内積が 0)

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \;\; (\text{直交})} \; (*)_2$$

であるとき $\{\boldsymbol{p}_1 \, , \, \boldsymbol{p}_2\}$ は**正規直交系**であるという。

$\{\boldsymbol{p}_1 \, , \, \boldsymbol{p}_2\}$ が正規直交系であるとき, 2 つのベクトルを並べた行列

$$\boxed{P = (\, \boldsymbol{p}_1 \;\; \boldsymbol{p}_2 \,) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} : \text{直交行列} \;\Leftrightarrow\; \{\boldsymbol{p}_1 \, , \, \boldsymbol{p}_2\} \text{ が正規直交系}}$$

を 2 次の**直交行列**という。

今 $P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき, $(*)_1$ と $(*)_2$ 式より

$$P^t P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1x_2 + y_1y_2 \\ x_1x_2 + y_1y_2 & {x_2}^2 + {y_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

より P^t は P の逆行列になる。すなわち

$$\boxed{P : \text{直交行列} \quad \Leftrightarrow \quad P^t = P^{-1} \;\; (\text{転置行列} = \text{逆行列})}$$

がわかる。

問 1 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく。

(1) 次の値を求めよ。($\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$ は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の内積である)

① $|\boldsymbol{p}_1|^2 =$ 　　　② $|\boldsymbol{p}_2|^2 =$ 　　　③ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 =$

(2) $P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2)$ とおく。P の逆行列 P^{-1} を求めよ。　$P^{-1} =$

問 2 $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ が直交行列かどうかを調べ, その逆行列 P^{-1} を求めよ。

＜ 3 次の直交行列 1 ＞

空間のベクトル $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ が単位ベクトル (= 大きさ 1)

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1\ ,\ |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1\ ,\ |\boldsymbol{p}_3|^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1\ \text{(単位ベクトル)}}\ (*)_1$$

であり, 直交系 (互いに直交している $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{p}_3$, $\boldsymbol{p}_3 \perp \boldsymbol{p}_1$)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{p}_2 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ \boldsymbol{p}_2 \perp \boldsymbol{p}_3 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 = x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \\ \boldsymbol{p}_3 \perp \boldsymbol{p}_1 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \end{array}\right\}\ \text{(直交系)}}\ (*)_2$$

であるとき $\{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\}$ は**正規直交系**であるという。正規直交系 $\{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\}$ を並べた行列

$$\boxed{P = (\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\,) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\ \text{が直交行列}\ \Leftrightarrow\ \{\boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\}\ \text{が正規直交系}}$$

を 3 次の**直交行列**という。

問 $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$ に対し, 次の問に答えよ。

(1) 次の値を求めよ。

① $|\boldsymbol{p}_1|^2 =$ ② $|\boldsymbol{p}_2|^2 =$ ③ $|\boldsymbol{p}_3|^2 =$

④ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 =$ ⑤ $\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 =$ ⑥ $\boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 =$

(2) 行列 $P = (\,\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\,)$ に対し, 転置行列 ${}^tP$ との積 ${}^tP\,P$ を求めよ。

${}^tP\,P =$

(3) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

＜3次の直交行列 2＞

3次の正方行列 $P = (\,\boldsymbol{p}_1 \;\; \boldsymbol{p}_2 \;\; \boldsymbol{p}_3\,) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ が直交行列

とは $\{\boldsymbol{p}_1\,,\ \boldsymbol{p}_2\,,\ \boldsymbol{p}_3\}$ が正規直交系になることである。すなわち

$$\boxed{|\boldsymbol{p}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 \;\;,\;\; |\boldsymbol{p}_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1 \;\;,\;\; |\boldsymbol{p}_3|^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1} \cdots (*)_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 &= x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \\ \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 &= x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \end{aligned}} \cdots (*)_2$$

問 上の場合に以下の問に答えよ。

(1) P と転置行列 $\overset{t}{P}$ との積 $\overset{t}{P}P$ を求め, $(*)_1$ と $(*)_2$ 式を用いて簡単にせよ。

$\overset{t}{P}P =$

(2) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。 $P^{-1} =$

(3) $P\overset{t}{P}$ を x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 , z_2 , x_3 , y_3 , z_3 を用いて表せ。

$P\overset{t}{P} =$

(4) $PP^{-1} = I$ (単位行列) であることから, 次の値を求めよ。

① ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 =$ ② ${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 =$ ③ ${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 =$

④ $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 =$ ⑤ $y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 =$ ⑥ $x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 =$

(5) $\overset{t}{P}$ が直交行列であることを示せ。

＜3次の直交行列3＞

例 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$ は「y 軸まわりの θ 回転」を意味する (**P.27**)。

$$A=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3)\quad,\quad \boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ 0\\ -\sin\theta\end{pmatrix}\quad,\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad,\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ 0\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

とおくと $|\boldsymbol{a}_1|^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, $|\boldsymbol{a}_2|^2=1$, $|\boldsymbol{a}_3|^2=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2=0\quad,\quad \boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=0\quad,\quad \boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}_1=\cos\theta\sin\theta-\sin\theta\cos\theta=0$$

より A は直交行列であるから

$$A^{-1}=A^t=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$

(注) この例のように回転を表す行列は全て直交行列である。

問 $B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{b}_1\quad \boldsymbol{b}_2\quad \boldsymbol{b}_3)$

$$C=BA=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}=(\boldsymbol{c}_1\quad \boldsymbol{c}_2\quad \boldsymbol{c}_3)$$

とおく。

(1) 次の値を求めよ。

① $|\boldsymbol{b}_1|^2=$ ② $|\boldsymbol{b}_2|^2=$ ③ $|\boldsymbol{b}_3|^2=$

④ $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2=$ ⑤ $\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_3=$ ⑥ $\boldsymbol{b}_3\cdot\boldsymbol{b}_1=$

⑦ $|\boldsymbol{c}_1|^2=$

⑧ $|\boldsymbol{c}_2|^2=$

⑨ $|\boldsymbol{c}_3|^2=$

⑩ $\boldsymbol{c}_1\cdot\boldsymbol{c}_2=$

⑪ $\boldsymbol{c}_2\cdot\boldsymbol{c}_3=$

⑫ $\boldsymbol{c}_3\cdot\boldsymbol{c}_1=$

(2) $B\,,C$ の逆行列を求めよ。

$B^{-1}=$, $C^{-1}=$

＜ 3次の直交行列 4 ＞

[定理] 3次の正方行列 $P = (\ \boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \boldsymbol{p}_3\ )$ $(\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3$ は3次の縦ベクトル) に対し , 次の [I] , [II] , [III] , [IV] は同値である。

[I] P は直交行列である (= $\{\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\ \}$ は正規直交系)

[II] $P^t = P^{-1}$ (転置行列 = 逆行列)

[III] 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し , $|P\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ (ベクトルの大きさを変えない)

[IV] 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し , $(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ (内積を変えない)

＜証明＞ [I] ⇒ [II] は 32 ページよりわかる。

[II] ⇒ [III] 29 ページより

$|P\boldsymbol{x}|^2 = (P\boldsymbol{x})^t(P\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^tP^tP\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^t\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|^2$ より $|P\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$

[III] ⇒ [IV] ワークブック Ser.A , $No.$11 (P25,P26) より

$|P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y}|^2 = (P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y})\cdot(P\boldsymbol{x}+P\boldsymbol{y}) = |P\boldsymbol{x}|^2 + 2(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) + |P\boldsymbol{y}|^2$

$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}|^2 + 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + |\boldsymbol{y}|^2$

ここで [III] より $|P(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2$, $|P\boldsymbol{x}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2$, $|P\boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{y}|^2$ より

$$2(P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = 2(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) \Rightarrow (P\boldsymbol{x})\cdot(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$$

[IV] ⇒ [I] $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $P = (\ \boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \boldsymbol{p}_3\ )$ とおくと

$P\boldsymbol{i} = \boldsymbol{p}_1$, $P\boldsymbol{j} = \boldsymbol{p}_2$, $P\boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}_3$ となるから $|\boldsymbol{p}_1|^2 = |P\boldsymbol{i}|^2 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|^2 = 1$

同様にして, $|\boldsymbol{p}_2|^2 = |P\boldsymbol{j}|^2 = |\boldsymbol{j}|^2 = 1$, $|\boldsymbol{p}_3|^2 = |P\boldsymbol{k}|^2 = |\boldsymbol{k}|^2 = 1$

$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$, $\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{p}_3 = (P\boldsymbol{j})\cdot(P\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$,

$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_3 = (P\boldsymbol{i})\cdot(P\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = 0$ より $\{\ \boldsymbol{p}_1\ ,\ \boldsymbol{p}_2\ ,\ \boldsymbol{p}_3\ \}$ は正規直交系

(証明終)

(注) この定理によって , [I] , [II] , [III] , [IV] のどれかが成立すれば直交行列であることがわかる。

例 「P が直交行列ならば $P^{-1} = P^t$ も直交行列である。」

(証明) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $P^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ とおくと $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ である。P が直交行列より $|P\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}'|$ であるから $|P^{-1}\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}'| = |P\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}|$ より [III] が成立する。

(証明終)

問 行列 A , B が共に直交行列ならば , 積 BA も直交行列であることを証明せよ。

< 空間の正規直交系 >

[**定理**](1) 空間の正規直交系 $\{\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \}$ に対し, $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$を並べた行列を $A = \big(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\big)$ とおくと, $\det(A) = \pm 1$ である。

(2) 正規直交系 $\{\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \}$ が右手系であれば $\det(A) = 1$ であり,
① $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$, ② $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$, ③ $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
が成り立つ。

問 1 3 次の正方行列 A, B に対し $\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$ (積の行列式 = 行列式の積) が成り立つ (P.42 参照)。この性質を用いて定理の (1) を証明せよ。

問 2 正規直交系 $\{\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\ \}$ が右手系とする。

(1) $\det(A) = 1$ を示せ。

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

とおく。6 ページの式から次の値を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ を用いて表せ。

$x_1 =$, $x_2 =$, $x_3 =$

$y_1 =$, $y_2 =$, $y_3 =$

$z_1 =$, $z_2 =$, $z_3 =$

(3) A は直交行列だから $A^{-1} = A^t$, すわなち $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

である。このことを用いて, 定理 (2) の①, ②, ③を示せ。

＜ 正規直交基底 1 ＞

2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対し, 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ が「$\boldsymbol{a}$ の定数倍と $\boldsymbol{b}$ の定数倍の和」として表されるとき, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は平面ベクトルの**基底**という。

[定理] 2 つの平面ベクトル $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ が正規直交系であれば,
任意の平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = p_1'\boldsymbol{a} + p_2'\boldsymbol{b} \qquad (p_1' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\ ,\ \ p_2' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b})$$

と表される。ただし $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積である。

(注) この定理は正規直交系 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ が平面ベクトルの基底であることを意味する。
この定理の p_1', p_2' を正規直交基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の**成分**という。(図 1)

[証明] $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおき,

$$p_1'\boldsymbol{a} + p_2'\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

をみたす定数 p_1' と p_2' を求めたい。(1) 式を成分で表すと

$$p_1'\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + p_2'\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1p_1' + b_1p_2' \\ a_2p_1' + b_2p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad \cdots(2)$$

となる。ここで $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とおくと A は直交行列

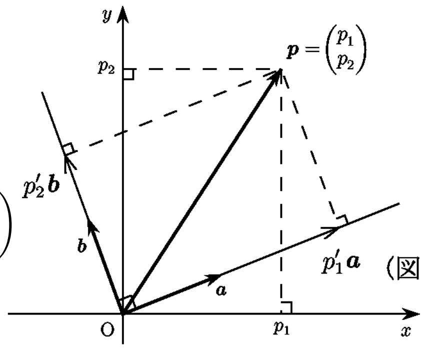
であるから (2) 式は

$$A\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}' = A^{-1}\boldsymbol{p} = A^t\boldsymbol{p}$$

となる。よって成分で表すと

$$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$$

となる。 (証明終)



(図1)

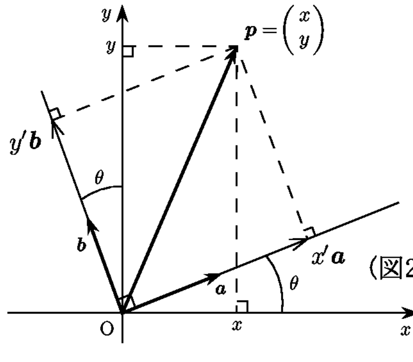
問 1 上の証明の ( ) の中に行列の成分を記入して証明を完成させよ。

問 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ は正規直交系である (図 2)。任意のベクトル $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b}$$

をみたす x', y' を x, y と $\cos\theta$, $\sin\theta$ で表せ。

$$\begin{cases} x' = \\ \\ y' = \end{cases}$$



(図2)

< 正規直交基底 2 >

3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対し, 任意の空間ベクトル $\boldsymbol{p}$ が「$\boldsymbol{a}$ の定数倍と $\boldsymbol{b}$ の定数倍と $\boldsymbol{c}$ の定数倍の和」として表されるとき, $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は空間ベクトルの**基底**という。

[定理] 3 つの空間ベクトル $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が正規直交系であれば
任意の空間ベクトル $\boldsymbol{p}$ は

$$\boldsymbol{p} = p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c} \qquad \left(p'_1 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\ ,\ \ p'_2 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}\ ,\ \ p'_3 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}\right)$$

と表される。ここで $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$ の内積である。

(注) この定理は正規直交系 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が空間ベクトルの基底であることを意味する。
この定理の p'_1 , p'_2 , p'_3 を正規直交基底 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ に関する $\boldsymbol{p}$ の**成分**という。

[証明] $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおき,

$$p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p} \quad \cdots\cdots (1)$$

を満たす定数 $p'_1,\ p'_2,\ p'_3$ を求めたい。(1) 式を成分で表すと

$$p'_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + p'_2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + p'_3\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \cdots (2)$$

となる。ここで $\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix}$, $A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とおくと A は直交行列であるから (2) 式は

$$A\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}' = A^{-1}\boldsymbol{p} = A^t\boldsymbol{p}$$

となる。よって成分で表すと

$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

となる。(証明終)

問 1 上の証明の (　) の中に行列の成分を記入して証明を完成させよ。

問 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$ は正規直交系である。(P.33)

$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{p} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b} + z'\boldsymbol{c}$ をみたす $x',\ y',\ z'$ を $x,\ y,\ z$ と $\theta,\ \varphi$ で表せ。

$x' =$

$y' =$

$z' =$

< 基本ベクトルによる計算 1 >

空間の基本ベクトルを $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると, 任意のベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ は

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

と表される。

例 1 $\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

問 1 次のベクトルを例 1 のように基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表せ。

(1) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=$ (2) $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}=$ (3) $\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}=$

問 2 次の値を求めよ。ただし $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{j}$ の内積である。

(1) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|^2=$ (2) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=|\boldsymbol{j}|^2=$ (3) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=|\boldsymbol{k}|^2=$

(4) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=$ (5) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=$ (6) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=$

例 2 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ の内積は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(5\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\\&=2\boldsymbol{i}\cdot5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{j})+2\boldsymbol{i}\cdot2\boldsymbol{k}+3\boldsymbol{j}\cdot5\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}\cdot(-\boldsymbol{j})+3\boldsymbol{j}\cdot2\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{k}\cdot5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{k}\cdot(-\boldsymbol{j})+4\boldsymbol{k}\cdot2\boldsymbol{k}\\&=10\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+15\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+20\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=10\times1-2\times0+4\times0+15\times0-3\times1+6\times0+20\times0-4\times0+8\times1\\&=10-3+8=15\end{aligned}$$

問 3 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ のとき次の内積の値を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}$ (2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$ (3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$

問 4 次の内積の値を求めよ。

(1) $(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\cdot(3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{k})$

(2) $(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})$

(3) $(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})$

例 3 $|\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}|=\sqrt{|\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}|^2}=\sqrt{(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$

問 5 次の値を求めよ。

(1) $|\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}|$ (2) $|3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}|$

(3) $|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}|$

< 基本ベクトルによる計算 2 >

前ページの基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ による成分表示は外積の計算に有効である。
$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ に対し, 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

となるが, 3 次の行列式の行展開の式から形式的に

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

とおくと

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \times (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \quad \text{(外積)}$$

と書ける。外積の定義はこの形の方が覚えやすい。

例 ① $(5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \times (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}) - (6\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) = -7\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$

② $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$

③ $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ (零ベクトル)

(注) ①はサラスの公式で展開したが, 次のように行展開でやってもよい。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = -7\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 14\boldsymbol{k}$$

問 次の外積を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} =$

(2) $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} =$

(3) $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} =$

(4) $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} =$

(5) $(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \times (\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) =$

(6) $(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \times (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}) =$

＜基本ベクトルによる計算 3＞

問 $\boldsymbol{a} = \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{b} = \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{c} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$ に対し
次の問に答えよ。

(1) 次の内積の値を求めよ。

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　② $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　③ $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ の大きさを求めよ。

① $|\boldsymbol{a}|$　② $|\boldsymbol{b}|$　③ $|\boldsymbol{c}|$

(3) 次の外積を求めよ。

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　② $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$　③ $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

(4) $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{pmatrix}$ に対し, 行列式 $\det(A)$ の値を求めよ。

$\det(A) =$

(5) $\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ に対し

$$\boldsymbol{p} = p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{q} = q'_1\boldsymbol{a} + q'_2\boldsymbol{b} + q'_3\boldsymbol{c}$$

をみたす p'_1, p'_2, p'_3 と q'_1, q'_2, q'_3 を p_1, p_2, p_3 と q_1, q_2, q_3 で表せ。

$p'_1 =$　$p'_2 =$　$p'_3 =$

$q'_1 =$　$q'_2 =$　$q'_3 =$

(6) 次の内積を p'_1, p'_2, p'_3 と q'_1, q'_2, q'_3 で表せ。
$(p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c})\cdot(q'_1\boldsymbol{a} + q'_2\boldsymbol{b} + q'_3\boldsymbol{c})$

(7) 次の内積を p_1, p_2, p_3 と q_1, q_2, q_3 で表せ。
$(p'_1\boldsymbol{a} + p'_2\boldsymbol{b} + p'_3\boldsymbol{c})\cdot(q'_1\boldsymbol{a} + q'_2\boldsymbol{b} + q'_3\boldsymbol{c})$

＜ 付録1 $\cdots$ 3次の行列式の表現 ＞

1，2，3 の 3 個の数字を重複をゆるして 3 個並べたものの集まりを集合

$$I = \{\ (i,\ j,\ k)\ :\ 1 \leqq i \leqq 3\ ,\ \ 1 \leqq j \leqq 3\ ,\ \ 1 \leqq k \leqq 3\ ,\ \ i,\ j,\ k\ \text{は整数}\}$$

で表わす。I を定義域とする 3 変数関数 $f(i,\ j,\ k)$ を次で定める。

$$f(i,\ j,\ k) = \begin{cases} 1 & : \ (i,\ j,\ k)\ \text{が}\ (1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2)\ \text{のどれかのとき} \\ 0 & : \ i,\ j,\ k\ \text{の中で 2 つが同じ数のとき} \\ -1 & : \ (i,\ j,\ k)\ \text{が}\ (1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)\ \text{のどれかのとき} \end{cases}$$

この関数 f を用いて行列式の展開を $\sum$ で表わすことができる。

[定理 1]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f(i,\ j,\ k)\ a_{i1}\ a_{j2}\ a_{k3}$$

[証明] サラスの公式より

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} f(i,\ j,\ k)\ a_{i1}\ a_{j2}\ a_{k3}$$

(証明終)

[定理 2]

$$\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{vmatrix} = f(i,\ j,\ k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[証明] (1) $i,\ j,\ k$ の中で 2 つが同じ数のときは行列式の 2 列が等しくなるので行列式の値は 0 より，このとき両辺は一致する。

(2) $(i,\ j,\ k)$ が $(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2)$ のどれかのとき $f(i,\ j,\ k) = 1$ である。行列式の列を偶数回入れかえても行列式の値は変わらないので両辺は等しい。すなわち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(3) $(i,\ j,\ k)$ が $(1,\ 3,\ 2),\ (3,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 3)$ のどれかのとき $f(i,\ j,\ k) = -1$ である。行列式の列を奇数回入れかえると行列式の符号 $(+,\ -)$ が入れかわるので両辺は等しい。すなわち

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(証明終)

＜付録2 ⋯ 行列の積と行列式＞

[定理]

> ３次の正方行列 A と B に対し
>
> $\det(AB) \ = \ (\det A)\ (\det B)$

[証明] $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ とおくと

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{k=1}^{3} a_{2k}b_{k3} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{k=1}^{3} a_{3k}b_{k3} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} a_{1i}b_{i1} & a_{1j}b_{j2} & a_{1k}b_{k3} \\ a_{2i}b_{i1} & a_{2j}b_{j2} & a_{2k}b_{k3} \\ a_{3i}b_{i1} & a_{3j}b_{j2} & a_{3k}b_{k3} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3k} \end{vmatrix} b_{i1}b_{j2}b_{k3}$$

（前ページ定理２）

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} f(i,j,k) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} b_{i1}b_{j2}b_{k3}$$

$$= \ (\det A) \ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} f(i,j,k)\ b_{i1}b_{j2}b_{k3}$$

（前ページ定理１）

$$= \ (\det A) \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} \ = \ (\det A)(\det B)$$

(証明終)

< 付録3 ··· 直交座標変換と外積 >

[定理] $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ を正規直交系で右手系とする。$\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ を基本ベクトルとする。

任意のベクトル $\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q}$ に対し $\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ に関する成分を

$$\boldsymbol{p} = p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k} \quad , \qquad \boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$$

とする。また $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ に関する成分を

$$\boldsymbol{p} = p_1'\boldsymbol{a} + p_2'\boldsymbol{b} + p_3'\boldsymbol{c} \quad , \qquad \boldsymbol{q} = q_1'\boldsymbol{a} + q_2'\boldsymbol{b} + q_3'\boldsymbol{c}$$

とする。このとき次式が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ q_1' & q_2' & q_3' \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

[証明] $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ とおくと P.37 より

$$p_1' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3\,,\quad p_2' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} = p_1b_1+p_2b_2+p_3b_3\,,\quad p_3' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c} = p_1c_1+p_2c_2+p_3c_3$$

$$q_1' = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a} = q_1a_1+q_2a_2+q_3a_3\,,\quad q_2' = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b} = q_1b_1+q_2b_2+q_3b_3\,,\quad q_3' = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{c} = q_1c_1+q_2c_2+q_3c_3$$

となる。ここで $A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}\ \ \boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ とおくと，P.35 より $\det(A) = 1$ である。

よって

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ p_1' & p_2' & p_3' \\ q_1' & q_2' & q_3' \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k} & b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k} & c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k} \\ a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 & b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 & c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 \\ a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3 & b_1q_1 + b_2q_2 + b_3q_3 & c_1q_1 + c_2q_2 + c_3q_3 \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}$$

(証明終)

(注) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が左手系ならば $(*)$ 式の左辺 (または右辺) にマイナスをつけた等式が成り立つ。

＜付録4 $\cdots$ 対称行列と一次変換＞

正方行列 A がその転置行列 A^t と一致するとき**対称行列**という。2 次の対称行列は $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の形をしている。対称行列による一次変換は次の例のように「回転」と「ひきのばし」の合成として表すことができる。

例　$A=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda=2$ または $\lambda=3$ である。(**P.23** 問 (2))

$\lambda=2$ のとき固有ベクトルは $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。それを正規化して $\boldsymbol{p_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおく。

$\lambda=3$ のとき固有ベクトルは $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。それを正規化して $\boldsymbol{p_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とおく。

$\{\boldsymbol{p_1},\ \boldsymbol{p_2}\}$ は正規直交系であるから $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p_1} & \boldsymbol{p_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ は直交行列であり,

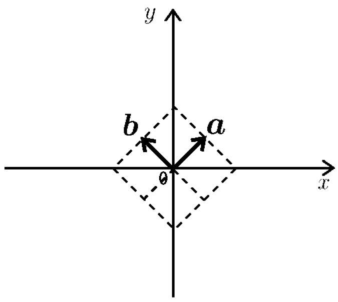
$$P^{-1}AP=P^tAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。対角行列を $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと $A=PBP^{-1}=PBP^t$ と表される。

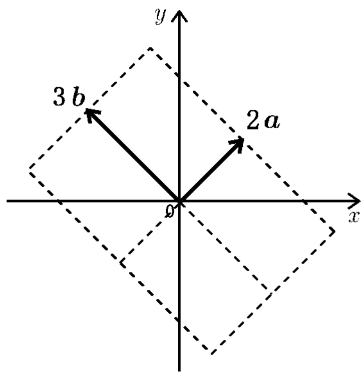
$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$$

より P は「45° 回転」の一次変換であり, $P^{-1}=P^t$ は「-45° 回転」の一次変換である。

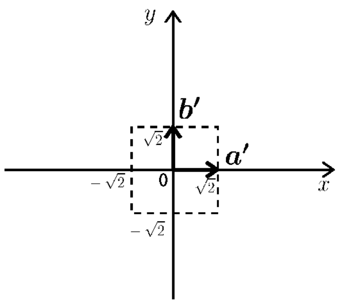
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は固有ベクトルであるから $A\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a},\ A\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{b}$ より, A は「$\boldsymbol{a}$ 方向に 2 倍, $\boldsymbol{b}$ 方向に 3 倍ひきのばす一次変換」である。



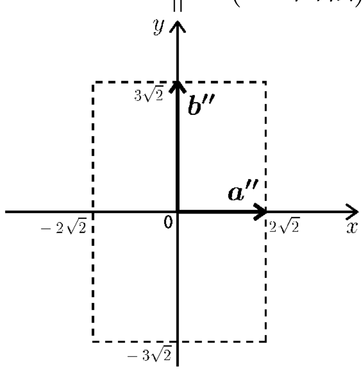
$A=PBP^{-1}$ $\Longrightarrow$ ($\boldsymbol{a}$ 方向に 2 倍, $\boldsymbol{b}$ 方向に 3 倍ひきのばし)



$P^{-1}(-45^\circ$ 回転$)\Downarrow$　　　$\Uparrow P(45^\circ$ 回転$)$



B $\Longrightarrow$ (x 軸方向に 2 倍, y 軸方向に 3 倍ひきのばし)



$\left(\boldsymbol{a'}=P^{-1}\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b'}=P^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right)$　　$(\boldsymbol{a''}=B\boldsymbol{a'},\ \boldsymbol{b''}=B\boldsymbol{b'})$