2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学
基礎数学ワークブック
（2002年度版）

Series **A**
No. 11

内容

◎　2次・3次の行列式

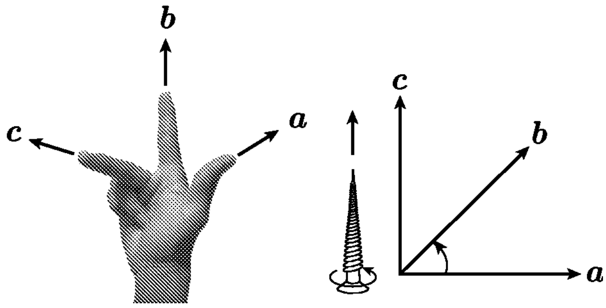
◎　連立一次方程式

◎　空間ベクトルと行列式

◎　同次方程式

◎　行列

（図1　右手系）



電子・光システム工学科
井上　昌昭　著

＜ 2次行列式の性質 ＞

2 次の行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

より、次の性質がわかる。

[I] 行と列を入れ替えても行列式の値は同じ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

[II] 列 (または行) をいれかえると符号が反対になる。

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

[III] １つの列 (または行) を定数倍した行列式の値は元の行列式の値の定数倍になる。

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (k \text{ は定数})$$

[IV] 分配法則が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} (a_1+c_1) & b_1 \\ (a_2+c_2) & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

[V] 列 (または行) が一致すれば行列式の値は 0

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \ , \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

例1
$$\begin{vmatrix} 60 & 50 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} = 30 \times \begin{vmatrix} 2 & 50 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = 30 \times 10 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 300 \times (8-5) = 900$$

例2 2 つの実数 x,y に対し

$$k_1 = 7x + 5y \quad , \qquad k_2 = 3x + 4y$$

とおくと

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (7x+5y) & 5 \\ (3x+4y) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7x & 5 \\ 3x & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5y & 5 \\ 4y & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 13x$$

$$\begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & (7x+5y) \\ 3 & (3x+4y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7x \\ 3 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5y \\ 3 & 4y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 13y$$

問 2 つの実数 x,y に対し

$$k_1 = 3x - y \quad , \qquad k_2 = 4x + 2y$$

とおくとき次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 4 & k_2 \end{vmatrix}$

＜ 3 次行列式の性質 1 ＞

3 次の行列式のサラスの公式より

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

となるので

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{(列展開)}$$

がなりたつ。この展開を**列展開** という。

例

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times (36 - 42) = 12$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times (32 - 35) = -9$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

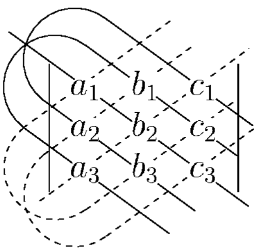
(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

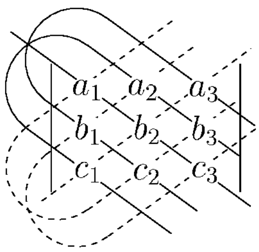
(3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

＜3次行列式の性質 2＞

サラスの方法において、行列式の行と列を入れかえた行列式を元の行列式と比較すると、





プラスの項（実線）は両方とも $a_1b_2c_3$ ，$a_2b_3c_1$ ，$a_3b_1c_2$ で等しい。同様にマイナスの項（点線）も両方同じであるから、２つの行列式は等しい。従って

[I] 行列式の行と列を入れかえても、行列式の値は同じ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる。前ページの展開公式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ （列展開）

を**列展開**という。[I] の性質から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ （行展開）

がなりたつ。この式を**行展開**という。

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\times(-4+3) - 3\times(-5+2) + 0 = -2 + 9 = 7$$

問　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

＜ 3 次行列式の性質 3 ＞

行列式の 1 列目と 2 列目を入れかえた行列式の値はサラスの公式より

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_1a_2c_3 + b_2a_3c_1 + b_3a_1c_2 - b_1a_3c_2 - b_2a_1c_3 - b_3a_2c_1$$

$$= -(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1)$$

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となる。従って元の行列式の値にマイナスをつけたものになる。同様にして

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

がわかる。すなわち行列式の 2 つの列を入れ変えると符号が逆になる。

前ページの [I] で行列式の行と列を入れかえても行列式の値は同じであるから、

[II] 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。

がなりたつ。

例 (1) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\left\{1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}\right\} = 5$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

＜ 3 次行列式の性質 4 ＞

3 次の行列式の展開公式 (サラスの公式) より以下の性質がわかる。

> [III] 1 つの列（または行）を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。

例 1 k を定数とすると

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

> [IV] 分配法則がなりたつ。

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1+d_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2+d_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3+d_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2-a_2') & (b_2-b_2') & (c_2-c_2') \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

> [V] 2 つの列（または行）が一致すれば行列式の値は 0。

例 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

例 4

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+3) & 1 \\ 2 & (2+3) & 1 \\ 3 & (3+3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (4-1) \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\} = -1$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

＜3次行列式の性質 5＞

例 1
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1+ka_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2+ka_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3+ka_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

この例より以下の性質が分かる。

> [VI] 一つの列を定数倍して他の列に加える (または引く) ことによって行列式の値は変わらない。また一つの行を定数倍して他の行に加える (または引く) ことによっても行列式の値は変わらない。

例 2
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 15 \\ 3 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4-4\times 1 & 6 \\ 2 & 7-4\times 2 & 15 \\ 3 & 10-4\times 3 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 15 \\ 3 & -2 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \qquad ② -4\times ① \qquad \begin{array}{cc} ① & ③ \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6-6\times 1 \\ 2 & -1 & 15-6\times 2 \\ 3 & -2 & 20-6\times 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$③ -6\times ①$$

この例は最初に (2 列)−4×(1 列) をして 2 列目の 1 番目の項を 0 にし、次の (3 列)−6×(1 列) をして 3 列目の 1 番目の項を 0 にし、最後に行展開をして 2 次の行列式の計算に帰着。[VI] の性質を使ってこのように変形することを**基本変形**という。

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 17 & 27 \\ 15 & 35 & 55 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 25 \\ 7 & 3 & 30 \\ 10 & 3 & 28 \end{vmatrix}$

＜ 2 元連立一次方程式 1 ＞

例題 与えられた定数 k_1,k_2 に対し、2 元連立一次方程式

$$\begin{cases} 7x+5y=k_1 & \cdots ① \\ 3x+4y=k_2 & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす x,y を求めよ。

(解) ① , ②より y を消去する。

＜ ① × 4 − ② × 5 ＞

$$\begin{array}{rrcll} & 28x+20y & = & 4k_1 & \cdots ①\times 4 \\ -) & 15x+20y & = & 5k_2 & \cdots ②\times 5 \\ \hline & 13x & = & 4k_1-5k_2 & \cdots ③ \end{array}$$

③より

$$x=\frac{4k_1-5k_2}{13}$$

① , ②より x を消去する。

＜ ① × 3 − ② × 7 ＞

$$\begin{array}{rrcll} & 21x+15y & = & 3k_1 & \cdots ①\times 3 \\ -) & 21x+28y & = & 7k_2 & \cdots ②\times 7 \\ \hline & -13y & = & 3k_1-7k_2 & \cdots ④ \end{array}$$

④より

$$y=\frac{-3k_1+7k_2}{13}$$

(答) $x=\dfrac{4k_1-5k_2}{13}$, $y=\dfrac{-3k_1+7k_2}{13}$

問 与えられた定数 k_1,k_2 に対し、次の連立一次方程式をみたす x , y を求めよ。ただし $ad-bc\neq 0$ とする。

(1) $$\begin{cases} 5x+2y=k_1 \\ 4x+3y=k_2 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} ax+by=k_1 \\ cx+dy=k_2 \end{cases}$$

＜ 2 元連立一次方程式 2 ＞

例 与えられた数 k_1, k_2 に対して、連立一次方程式

$$\begin{cases} 7x+5y=k_1 \\ 3x+4y=k_2 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

をみたす解 x, y を求めたい。1 ページ例 2 より

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7x+5y & 5 \\ 3x+4y & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7x+5y \\ 3 & 3x+4y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots (3)$$

(2) より $x = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{13}(4k_1-5k_2)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$

(3) より $y = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \dfrac{-3k_1+7k_2}{13}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

が求まる。このようにして連立方程式 (1) の解を求める方法を
クラメルの方法という。

問 1 与えられた数 $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ は $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ とする。
連立方程式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=k_1 \\ a_2x+b_2y=k_2 \end{cases}$$

の解 x, y に対し、例の (2), (3) のように

$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} =$

を x と y で表すことにより、例の (4), (5) のように、解 x, y を
$a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ を用いた行列式で表せ。

$x =$ $\qquad\qquad\qquad$ $y =$

問 2 問 1 の式を**クラメルの公式**という。次の連立方程式をクラメルの公式で解け。

(1) $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+3y=-2 \end{cases}$ $\qquad$ (2) $\begin{cases} 3x+4y=k_1 \\ 2x+3y=k_2 \end{cases}$

< 3元連立一次方程式 1 >

例 3元連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x+5y+2z=17 & \cdots\cdots ① \\ 5x+4y+3z=15 & \cdots\cdots ② \\ 9x+6y+5z=27 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

をみたす x , y , z を求めたい。

[Step 1] まず z を消去する。

< ① × 3 − ② × 2 >

$$\begin{array}{rl} 24x+15y+6z=51 & \cdots ①\times 3 \\ -)\ \ 10x+\ \ 8y+6z=30 & \cdots ②\times 2 \\ \hline 14x+\ \ 7y\qquad\ =21 & \cdots ④ \end{array}$$

< ① × 5 − ③ × 2 >

$$\begin{array}{rl} 40x+25y+10z=85 & \cdots ①\times 5 \\ -)\ \ 18x+12y+10z=54 & \cdots ③\times 2 \\ \hline 22x+13y\qquad\ =31 & \cdots ⑤ \end{array}$$

[Step 2] 次に y を消去する。

< ④ × 13 − ⑤ × 7 >

$$\begin{array}{rl} 182x+91y=273 & \cdots ④\times 13 \\ -)\ \ 154x+91y=217 & \cdots ⑤\times 7 \\ \hline 28x\qquad\ =\ 56 & \cdots ⑥ \end{array}$$

[Step 3] x , y , z を求める。

⑥より $\boldsymbol{x=2}$, ④より $7y=21-14x=21-28=-7 \Rightarrow \boldsymbol{y=-1}$

①より $2z=17-8x-5y=17-16+5=6 \Rightarrow \boldsymbol{z=3}$ (答) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$

問 次の3元連立一次方程式を解け。

(1) $\begin{cases} 8x+5y+2z=7 \\ 5x+4y+3z=7 \\ 9x+6y+5z=13 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3x+2y+2z=5 \\ 4x+3y+5z=11 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$

< 3元連立一次方程式 2 >

例題 与えられた定数 k_1 , k_2 , k_3 に対し、次の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x + 5y + 2z = k_1 & \cdots\cdots ① \\ 5x + 4y + 3z = k_2 & \cdots\cdots ② \\ 9x + 6y + 5z = k_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

をみたす x , y , z を求めよ。

(解) 前ページの方法でまず z を消去する。

< ① × 3 − ② × 2 >

$$\begin{array}{rl} 24x + 15y + 6z = 3k_1 & \cdots ① \times 3 \\ -)\ 10x + 8y + 6z = 2k_2 & \cdots ② \times 2 \\ \hline 14x + 7y \qquad = 3k_1 - 2k_2 & \cdots ④ \end{array}$$

< ① × 5 − ③ × 2 >

$$\begin{array}{rl} 40x + 25y + 10z = 5k_1 & \cdots ① \times 5 \\ -)\ 18x + 12y + 10z = 2k_3 & \cdots ③ \times 2 \\ \hline 22x + 13y \qquad = 5k_1 - 2k_3 & \cdots ⑤ \end{array}$$

次に④と⑤より y を消去する。

< ④ × 13 − ⑤ × 7 >

$$\begin{array}{rl} 182x + 91y = 13(3k_1 - 2k_2) & \cdots ④ \times 13 \\ -)\ 154x + 91y = 7(5k_1 - 2k_3) & \cdots ⑤ \times 7 \\ \hline 28x \qquad = 13(3k_1 - 2k_2) - 7(5k_1 - 2k_3) & \cdots ⑥ \end{array}$$

⑥より $28x = 4k_1 - 26k_2 + 14k_3$ よって $x = \dfrac{2k_1 - 13k_2 + 7k_3}{14}$

④より $7y = (3k_1 - 2k_2) - 14x = (3k_1 - 2k_2) - (2k_1 - 13k_2 + 7k_3) = k_1 + 11k_2 - 7k_3$

①より $2z = k_1 - 8x - 5y = k_1 - \dfrac{4(2k_1 - 13k_2 + 7k_3)}{7} - \dfrac{5(k_1 + 11k_2 - 7k_3)}{7}$

$$= \frac{7k_1 - 8k_1 + 52k_2 - 28k_2 - 5k_1 - 55k_2 + 35k_3}{7} = \frac{-6k_1 - 3k_2 + 7k_3}{7}$$

(答) $x = \dfrac{2k_1 - 13k_2 + 7k_3}{14}$, $y = \dfrac{k_1 + 11k_2 - 7k_3}{7}$, $z = \dfrac{-6k_1 - 3k_2 + 7k_3}{14}$

問 与えられた定数 k_1 , k_2 , k_3 に対し、次の連立方程式の解 x , y , z を求めよ。

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = k_1 \\ 4x + 3y + 5z = k_2 \\ 2x - y + 3z = k_3 \end{cases}$$

< 3元連立一次方程式 3 >

一般の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & \cdots\cdots ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & \cdots\cdots ② \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めたい。c_1 , c_2 , c_3 のうちどれかを 0 でないとする。ここでは $c_1 \neq 0$ として、まず z を消去する。

< ① $\times\, c_2 -$ ② $\times\, c_1$ >

$$\begin{array}{rl} & a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = k_1c_2 \quad \cdots ① \times c_2 \\ -\big) & a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z = k_2c_1 \quad \cdots ② \times c_1 \\ \hline & (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = k_1c_2 - k_2c_1 \cdots ④ \end{array}$$

< ① $\times\, c_3 -$ ③ $\times\, c_1$ >

$$\begin{array}{rl} & a_1c_3x + b_1c_3y + c_1c_3z = k_1c_3 \quad \cdots ① \times c_3 \\ -\big) & a_3c_1x + b_3c_1y + c_1c_3z = k_3c_1 \quad \cdots ③ \times c_1 \\ \hline & (\boxed{})x + (\boxed{})y = \boxed{} \quad \cdots ⑤ \end{array}$$

次に y を消去する。

< ④ $\times\, (b_1c_3 - b_3c_1) -$ ⑤ $\times\, (b_1c_2 - b_2c_1)$ >

$$\begin{array}{rl} & (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)y = (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) \quad \cdots ④ \times (b_1c_3 - b_3c_1) \\ -\big) & (\boxed{})(\boxed{})x + (\boxed{})(\boxed{})y = (\boxed{})(\boxed{}) \quad \cdots ⑤ \times (b_1c_2 - b_2c_1) \\ \hline & \{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)\}\, x \qquad = (\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) \quad \cdots ⑥ \end{array}$$

⑥式の左辺 $= \Big\{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\boxed{})(\boxed{})\Big\}\, x$

$= \Big\{a_1b_1c_2c_3 - a_1b_3c_1c_2 - a_2b_1c_1c_3 + a_2b_3{c_1}^2 - (\boxed{})\Big\}\, x$

$= c_1 \Big\{\boxed{}\Big\}\, x$

⑥式の右辺 $= (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\boxed{})(\boxed{})$

$= k_1b_1c_2c_3 - k_1b_3c_1c_2 - k_2b_1c_1c_3 + k_2b_3{c_1}^2 - (\boxed{})$

$= c_1 \Big\{\boxed{}\Big\}$

問 上の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

＜3元連立一次方程式 4＞

前ページの連立方程式

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 & \cdots ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 & \cdots ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めたい。$c_1\neq 0$ として z と y を消去した式は

$$c_1\left\{\qquad\qquad\right\}x=c_1\left\{\qquad\qquad\right\}\quad\cdots ⑥$$

の形になった。ここで、

⑥式の右辺 $=c_1\left\{-k_1b_3c_2-k_2b_1c_3+k_2b_3c_1+k_3b_1c_2+k_1b_2c_3-k_3b_2c_1\right\}$

$$=c_1\left\{k_1(b_2c_3-b_3c_2)-k_2(b_1c_3-b_3c_1)+k_3(b_1c_2-b_2c_1)\right\}$$

$$=c_1\left\{k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix}-k_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\right\}=c_1\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

となる。同様にして

⑥式の左辺 $=c_1\left\{\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\right\}x$

$$=c_1\left\{a_1\left(\boxed{\quad}-\boxed{\quad}\right)-a_2\left(\boxed{\quad}-\boxed{\quad}\right)+a_3\left(\boxed{\quad}-\boxed{\quad}\right)\right\}x$$

$$=c_1\left\{a_1\begin{vmatrix}\boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}\boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}\boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}\right\}x$$

$$=c_1\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ a_2 & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ a_3 & \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}x$$

となる。よって⑥式は

$$c_1\begin{vmatrix}\boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}x=c_1\begin{vmatrix}\boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} & \boxed{\quad} & \boxed{\quad}\end{vmatrix}$$

と表される。従って $(*)$ の係数行列式が 0 でなければ x の値が求まる。

問 上の $\boxed{\qquad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

＜ 3 元連立一次方程式 5 ＞

例 次の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

をみたす解 $x,\ y,\ z$ を求めたい。ただし

$$\text{係数行列式} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

をみたすとする。この条件があれば 8 ページと同様に求められる。
3 次の行列式の性質 [III], [IV], [V]（5 ページ）より

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

が求まる。これも**クラメルの公式**という。

問 1 例の場合に (3) 式にように

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = \qquad\qquad\qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

を y と z で表すことにより、(1) の解 $y,\ z$ を (4) 式のように表せ。

$y =$ 　　　　　　　　　　　　$z =$

問 2 クラメルの公式を用いて、次の連立方程式を解け。

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 3 \\ x - 2y - 4z = -4 \end{cases}$ 　　　　(2) $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 3z = -1 \\ 5y + 4z = 3 \end{cases}$

$x =$ 　　, $y =$ 　　, $z =$ 　　　　　　$x =$ 　　, $y =$ 　　, $z =$

＜ 3 元連立一次方程式 6 ＞

3 元連立一次方程式

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \end{cases}$$

に対し、係数行列式を D とする。この D が 0 でなければ、すなわち

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

であれば、(1) の解は

$$\boxed{x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \ y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \ z=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}$$

となる（クラメルの公式）。

例 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ の場合に連立方程式

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

の解は

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \ y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

となる。

問 例と同じ係数行列 ($D \neq 0$) に対し、次の連立方程式の解を例のような形 $\left(\pm\frac{1}{D}\begin{vmatrix} \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc \end{vmatrix}\right)$ で表せ。

$$(1)\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases} \qquad\qquad (2)\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=1 \end{cases}$$

＜ベクトルの平行条件＞

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が**平行** ($\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$) であるということは互いに他の定数倍 ($\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる定数 k が存在する) ということである。
これが成立するための条件を平面と空間の場合にそれぞれ示す。

[**1. 平面ベクトルの平行条件**] $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は共に零ベクトルでないとする。

このとき

$$\boxed{\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0} \quad \text{(平面ベクトルの平行条件)}$$

(証明)

($\Rightarrow$) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行のとき $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる定数 k が存在する。このとき $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

($\Leftarrow$) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ より a_1 と a_2 のうちどちらかは 0 ではない。$a_1 \neq 0$ とし $\dfrac{b_1}{a_1} = k$ とおく。

条件

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \text{より} \quad a_1b_2 = a_2b_1 \Rightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1}b_1$$

ここで $b_1 = ka_1$ を代入すると $b_2 = \dfrac{a_2}{a_1}b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} \times ka_1 = ka_2$ よって

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{a}$$

より $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行である。
$a_2 \neq 0$ の場合も同様に示される。

[**2. 空間ベクトルの平行条件**] $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ は共に零ベクトルでないとする。

このとき

$$\boxed{\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0} \quad \text{(空間ベクトルの平行条件)}$$

証明は平面の場合と同様である。

問 1 空間ベクトルの平行条件の ($\Leftarrow$) を証明したい。$a_1 \neq 0$ として $\dfrac{b_1}{a_1} = k$ とおくとき条件式から $b_2 = ka_2$, $b_3 = ka_3$ を導け。

問 2 空間ベクトルの平行条件を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を用いて表せ。

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow$$

＜スカラー三重積 1 ＞

3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \qquad \Big((\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ の外積}) \text{ と } \boldsymbol{c} \text{ との内積}\Big)$$

を $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ の**スカラー三重積**という。

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対しスカラー三重積は

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} &= \left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_2b_3 - b_2a_3)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 \\
&= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

となる。従ってスカラー三重積は 3 次の行列式を使って

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

と表される。

例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のスカラー三重積は

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 2 - 2 - 3 = 15$$

問 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が以下の場合にスカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} =$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} =$

< スカラー三重積 2 >

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し行列式の性質より

$$(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

であるから

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}}$$

が成り立つ。また

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

より

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}}$$

が成り立つ。

問 1 次のスカラー三重積を $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ を用いて表せ。

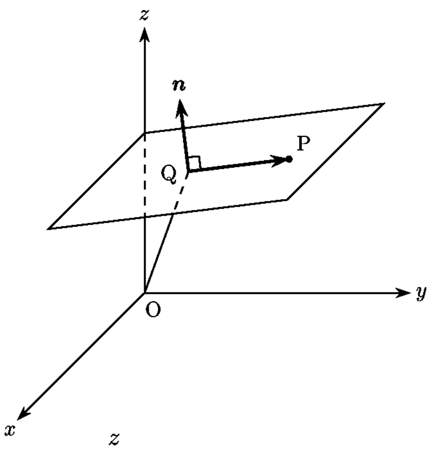
(1) $(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} =$

(2) $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} =$

問 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し次のスカラー三重積の値を求めよ。

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ (2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ (3) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$

＜ 2 つの空間ベクトルの張る平面 1 ＞



[**1**] ＜点 Q を通り $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面＞

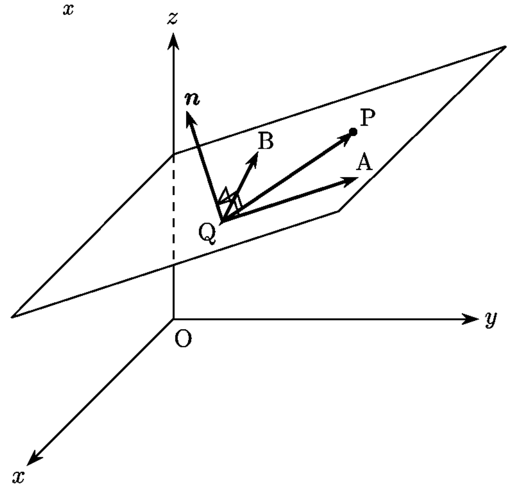
点 $\mathrm{Q}(q_1,\ q_2,\ q_3)$ を通りベクトル $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると

$$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{QP}} \quad \text{より} \quad \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = 0$$

だから

$$n_1(x - q_1) + n_2(y - q_2) + n_3(z - q_3) = 0$$

を満たす。これを平面の方程式という。



[**2**] ＜ 3 点を通る平面＞

3 点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ は同一直線上にないとする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QB}}$ は平行でない。従って 15 ページよりその外積 $\overrightarrow{\mathrm{QA}} \times \overrightarrow{\mathrm{QB}}$ は $\mathbf{0}$ (ゼロベクトル) ではない。

これを

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{\mathrm{QA}} \times \overrightarrow{\mathrm{QB}} \quad (\text{外積})$$

とおくと、外積の性質より $\boldsymbol{n}$ は 3 点 Q, A, B を通る平面に垂直である。この平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると、$\boldsymbol{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{QP}}$ より

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{QA}} \times \overrightarrow{\mathrm{QB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 - q_1 \\ a_2 - q_2 \\ a_3 - q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 - q_1 \\ b_2 - q_2 \\ b_3 - q_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - q_1 & b_1 - q_1 & x - q_1 \\ a_2 - q_2 & b_2 - q_2 & y - q_2 \\ a_3 - q_3 & b_3 - q_3 & z - q_3 \end{vmatrix} = 0$$

を満たす。これが 3 点 Q, A, B を通る平面の方程式である。

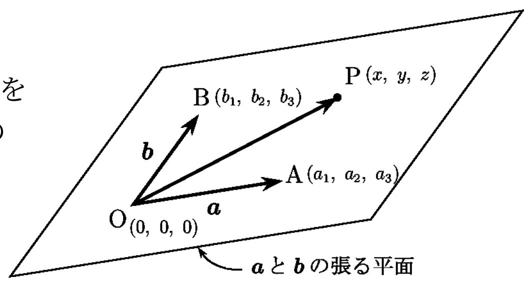
[**3**] ＜ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平面＞

平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

に対し 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ を通る平面を「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面」という。この平面の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$,　$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ とおくと

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ。

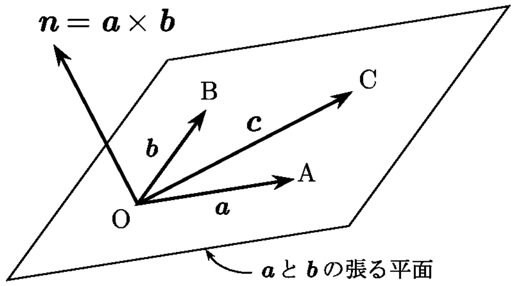


問 平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と定数 x, y に対し、

点 $\mathrm{C}(xa_1 + yb_1,\ xa_2 + yb_2,\ xa_3 + yb_3)$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の張る平面上の点であることを示せ。

＜ 2 つの空間ベクトルの張る平面 2 ＞

平行でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上の任意の点を $\mathrm{C}(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする。$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおくと、前ページより



$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ。このとき

$$\boxed{\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} \qquad \text{となる定数 } x,\ y \text{ が存在する。}}$$

[証明]　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積を $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ とおく。すなわち $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ とおく。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行でないから $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より $|\boldsymbol{n}| > 0$ である。ここで $D = |\boldsymbol{n}|^2$ とおくと

$$D = |\boldsymbol{n}|^2 = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix} > 0$$

である。ここで連立方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + n_1z = c_1 \\ a_2x + b_2y + n_2z = c_2 \\ a_3x + b_3y + n_3z = c_3 \end{cases}$$

を考える。

問 1　この連立方程式は係数行列式 D が 0 でないので解 $x,\ y,\ z$ が存在する。クラメルの公式 (14 ページ) より解 $x,\ y,\ z$ を求めよ。(行列式を用いた答でもよい)

$x =$ 　　　　　　　　　　, $y =$ 　　　　　　　　　　, $z =$

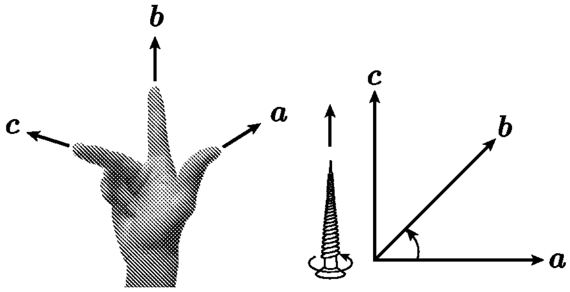
問 2　連立方程式 $(*)$ は

$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

と表される。問 1 の結果を用いて $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ となることを示せ。

< 右手系と左手系 >

(図1 右手系)



3つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図1のような位置関係にあるとき

$$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}\ \text{は}\textbf{右手系}$$

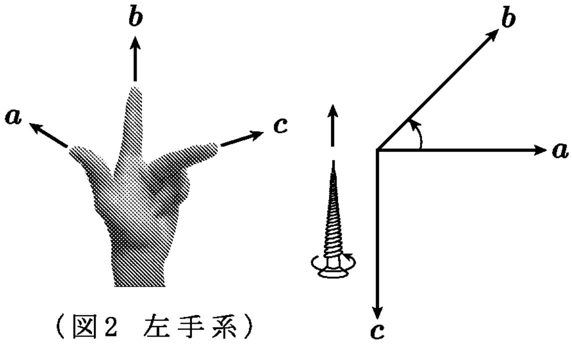
という。

また $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図2のような位置関係にあるとき

$$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}\ \text{は}\textbf{左手系}$$

という。

(注) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば
$\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\}$ も右手系であり、
$\{\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ も右手系である。



(図2 左手系)

ワークブック Ser. **A** , *No.* **10** の 38 ページの例の $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は右手系である。この例の場合スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ は3つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積になる。

この事と前のページのスカラー三重積の性質

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

より以下の事がわかる。

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}\ \text{が右手系} & \Longleftrightarrow & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0 \\ \{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}\ \text{が左手系} & \Longleftrightarrow & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0 \end{array}}$$

(注1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ の場合は3つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が作る平行六面体の体積は 0 (ゼロ) となる。このときは 3 つのベクトルが同一平面上にある。この場合は右手系でも左手系でもない。

(注2) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば $\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\}$ は左手系である。

問 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が以下の場合に、スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を計算し、$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系か左手系かを判定せよ。

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$

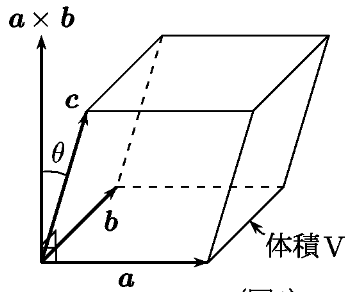
＜空間ベクトルと行列式＞

零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$ に対し、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ, スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ の値を D とすると

$$\boxed{D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta}$$

となる。この D の値によって 3 つのベクトルの位置関係がわかる。

（右手系）



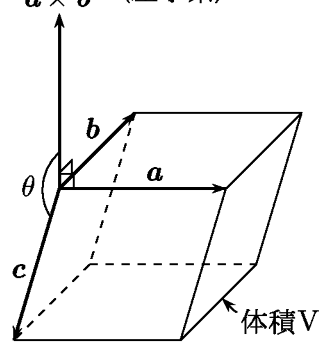
（図1）

[**1**] $\boxed{D>0\text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|>0,\ |\boldsymbol{c}|>0,\ \cos\theta>0$ より $0^\circ<\theta<90^\circ$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は右手系 (図 1) であり、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を V とすると

$$V=D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

（左手系）



（図2）

[**2**] $\boxed{D<0\text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|>0,\ |\boldsymbol{c}|>0,\ \cos\theta<0$ より $90^\circ<\theta<180^\circ$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は左手系 (図 2) であり、$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を V とすると

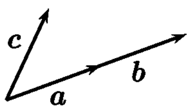
$$V=-D=-\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

[**3**] $\boxed{D=0\text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{c}|>0$ より $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ かまたは $\cos\theta=0$

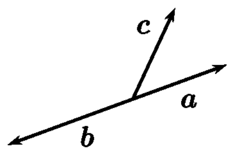
(1) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$ のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (ゼロベクトル) である。
15 ページより $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行になる。(図 3 または図 4)
すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}}$$

を満たす定数 k が存在する。



（図3）

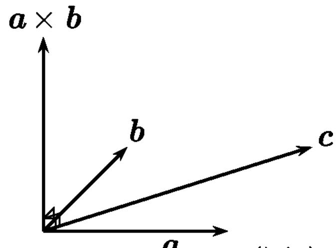


（図4）

(2) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq 0$ のとき $\cos\theta=0$ より $\theta=90^\circ$.
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ であるから 19 ページより $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上のベクトルであり

$$\boxed{\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}}$$

を満たす定数 $x,\ y$ が存在する。



（図5）

問 図 5 の場合 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は同一平面上にあると言える。
図 3 と図 4 の場合はどうか。

(1) 図 3 の場合　　　　(2) 図 4 の場合

< 同次方程式 1 >

2 元連立一次方程式で右辺が 0 の場合

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

を考える。このように○ x + ○ y = 0 の方程式を**同次方程式**という。もし係数行列式が $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ならばクラメルの公式より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad , \qquad y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

より解は $x = y = 0$ だけである。しかし $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ の場合は $x = y = 0$ 以外にも解がある。

例 連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 & \cdots ① \\ 8x + 12y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を考える。このとき係数行列式は $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$ になる。②式を 4 で割ると①式と同じ式になる。従って①式をみたす x と y の組は全て①と②の解である。
たとえば

$$x = 3 \ , \ y = -2$$

は解である。一般に任意の実数 t に対し

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \end{cases} \cdots ③$$

は①と② の解である。逆に①と②の全ての解は③の形をしている。

一般に (∗) 式において $x = y = 0$ 以外の解をもつための必要十分条件は
係数行列式が 0 になることである。

[定理] $\boxed{(*) \text{ 式が} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{以外の解を持つ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$

(証明は次のページで行う。)

問 次の連立方程式をみたす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求め、③式のように表せ。

(1) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 12x - 18y = 0 \end{cases}$

＜同次方程式 2＞

[I] ＜2 元連立方程式＞ 前ページの定理を証明する ベクトル $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いると、連立方程式 $(*)$ は

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

と書きなおせる。

[定理の証明]

$(\Rightarrow)$ 　$(*)$ 式が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つとする。例に $x\neq 0$ とする。 $k=-\frac{y}{x}$ とおくと

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1=kb_1 \\ a_2=kb_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} kb_1 & b_1 \\ kb_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

($y\neq 0$ の場合も同様であるから略す)

$(\Leftarrow)$ 　$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ とする。

(1) $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ の場合は 15 ページより $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行になる。従って 0 でない。定数 k が存在して $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$ となる。よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ は $(*)$ の解である。

(2) $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0},\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ のときは 　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $(*)$ の解である。

(3) $\boldsymbol{a}=\mathbf{0},\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ のときは 　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $(*)$ の解である。

(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ のときは 　$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $(*)$ の解である。 　(証明終)

[II] ＜3 元連立方程式＞ 3 元連立一次方程式で右辺が 0 の場合

$$(**)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

を考える。もし係数行列式が 0 でなければクラメルの公式より解は $x=y=z=0$ だけである。係数行列式が 0 であれば $x=y=z=0$ 以外の解をもつ。一般に次の定理が成立する。

[**定理**]

$$(**)\text{ が}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\text{以外の解をもつ} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

問 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつ 3 元連立同次方程式 $(**)$ の例を示せ。またその解も答えよ。

(できれば係数は全て 0 でない方が望ましい)

< 同次方程式 3 >

前ページの定理を証明する．ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いると 3 元連立方程式 $(**)$ は

$$(**) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\ x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

と書きなおせる。

[定理の証明]

$(\Rightarrow)$ $(**)$ が $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつとする。仮に $x \neq 0$ とする。$k = -\dfrac{y}{x}$, $\ell = -\dfrac{z}{x}$ とおくと

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b} + \ell\boldsymbol{c} \ \Rightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 + \ell c_1 \\ a_2 = kb_2 + \ell c_2 \\ a_3 = kb_3 + \ell c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb_1 + \ell c_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 + \ell c_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 + \ell c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \ell\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

($y \neq 0$ や $z \neq 0$ の場合も同様である)

$(\Leftarrow)$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ とする。

(1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のいずれかの場合は，前ページ (2)，(3)，(4) の場合と同様に $\boldsymbol{0}$ でない解がある。

(2) $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ はすべて $\boldsymbol{0}$ でない場合，$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を θ とすると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\ |\boldsymbol{c}| \cos\theta = 0$$

である。21 ページの [3] より，

① $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 0$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行より，ある定数 k が存在して $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる。

従って　$k\boldsymbol{a} + (-1)\boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ より　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{0}$ でない解である。

② $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \neq 0$ のとき $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上のベクトルであるから

$$\boldsymbol{c} \ = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$$

となる定数 x と y が存在する。従って

$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + (-1)\boldsymbol{c} = 0$ より　$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$ が $\boldsymbol{0}$ でない解である。

問 前ページの問で答えた例は上記 (1)，(2) ①，(2) ②のどの場合になるか。その理由も述べよ。

< 内積の計算 1 >

$\mathbf{0}$ でない 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を成分で表すと

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

であった。この式から次の性質がわかる。ただし k は実数である。

(1)	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$	
(2)	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	(交換法則)
(3)	$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$	(分配法則)
(3)$'$	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$	(分配法則)
(4)	$(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$	(実数倍)

(証明)

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 = \left(\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\right)^2 = |\boldsymbol{a}|^2$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

問 1 (3)$'$ を証明せよ。

問 2 (4) 式の $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を証明せよ。

例 1 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \big(\boldsymbol{b} + (-\boldsymbol{c})\big) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot (-1\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - 1(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

例 2 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{b}|^2$
であるから、$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ のときは $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ は直交する。

問 3 $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ を $|\boldsymbol{a}|^2$, $|\boldsymbol{b}|^2$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ だけで表せ。

$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 =$

＜ 内積の計算 2 ＞

0 でない 2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を成分で表すと

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

であった。この式から前ページと同様な性質がわかる。

(1)	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \lvert\boldsymbol{a}\rvert^2$	
(2)	$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$	
(3)	$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$	
(3)′	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$	
(4)	$(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$	(k は実数)

例 1 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + (-\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

例 2 $|k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}|^2 = (k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}) \cdot (k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}) = {k_1}^2|\boldsymbol{a}|^2 + 2k_1k_2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + {k_2}^2|\boldsymbol{b}|^2$

ここで、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するときは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ より $|k_1\boldsymbol{a} + k_2\boldsymbol{b}|^2 = {k_1}^2|\boldsymbol{a}|^2 + {k_2}^2|\boldsymbol{b}|^2$

問 1 次式を例 2 のように展開し、$|\boldsymbol{a}|^2$ と $|\boldsymbol{b}|^2$ だけで表せ。

$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 + |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|^2 =$

問 2 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交すれば $|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2$ であることを示せ。

問 3 2 つの **0** でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}$ に対し、$k = \dfrac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - k\boldsymbol{a}$ とおく。$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ が直交することを示せ。

＜ 平面の直交系 ＞

$\mathbf{0}$ でない 2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が直交するとき，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ は**直交系**という。
内積の性質より

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ が直交} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0}$$

である。

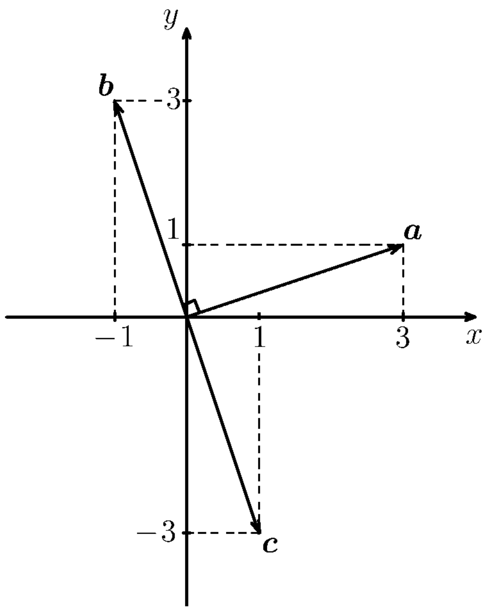
例 1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$$
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$$

より $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$ である。



問 1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ と直交するベクトルの例を 2 つあげよ。

ベクトル $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ が直交していて，大きさが 1 ($|\boldsymbol{e}_1| = 1$, $|\boldsymbol{e}_2| = 1$) であるとき，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を**正規直交系**という。

例 2 例 1 のベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ の大きさは $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{10}$，$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{10}$，$|\boldsymbol{c}| = \sqrt{10}$ である。これを $\sqrt{10}$ で割ったベクトルを

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2{}' = \frac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

とおくと，$|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_2{}'| = 1$ となる。このようにベクトルの大きさを 1 にすることを**正規化**するという。このとき $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2{}'\}$ は正規直交系である。

問 2 問 1 のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し，$\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{a}$ とおく。このとき $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2{}'\}$ が正規直交系となるベクトル $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_2{}'$ を求めよ。

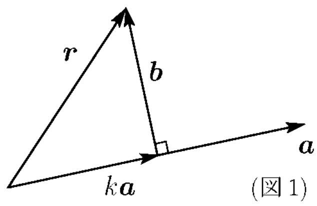
< 空間の直交系 1 >

$\mathbf{0}$ でない 3 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が互いに直交しているとき，すなわち

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}\ ,\ \ \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}\ ,\ \ \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a} \qquad (\Leftrightarrow\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} = 0)$$

であるとき $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は**直交系**であるという。

例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む直交系の例を作りたい。

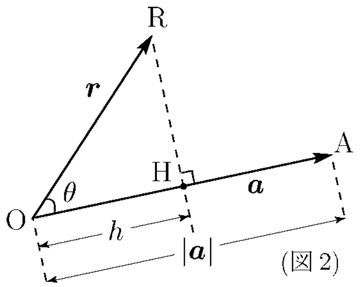


(図 1)

$\boldsymbol{a}$ と平行でない任意のベクトル $\boldsymbol{r}$ に対し

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - k\boldsymbol{a}\ ,\quad k = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}}$$

とおくと 26 ページより $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交する。



(図 2)

（幾何学的には図 1 のような位置関係にある。
なぜならば図 2 より

$$h = |\boldsymbol{r}|\cos\theta\ ,\quad \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{r}|\cos\theta = |\boldsymbol{a}|h$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{h}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\right)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{HR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boldsymbol{r} - k\boldsymbol{a}$$
）

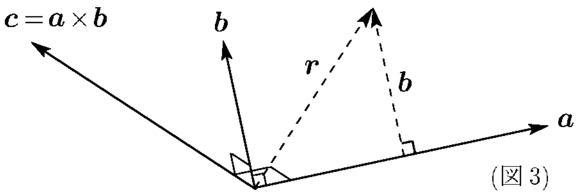
よって $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交するベクトル $\boldsymbol{c}$ を求めるには

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \quad (\text{外積})$$

とおけばよい (図 3)。外積の性質より

$$\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{a}\ ,\quad \boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{b}$$

となる。



(図 3)

問 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して，例の k とベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を求め，各内積を求めよ。

(解) $k =$, $\boldsymbol{b} =$, $\boldsymbol{c} =$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} =$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} =$

＜空間の直交系 2 ＞

$\mathbf{0}$ でない 3 つの空間ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ が直交系であり、大きさが全て 1 $(|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1)$ であるとき $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ を**正規直交系**という。

$$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}\text{ が正規直交系} \iff \begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0 \\ |\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1 \end{cases}$$

例 正規直交系の例を作りたい。前ページ 問 で求めた $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を正規化する。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に対し } |\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ より}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$|\boldsymbol{e}_1| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+0+1}{5}} = 1$$

である。

問 上の例の場合に次の問に答えよ。(ただし $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は前ページの問で求めたものである。)

(1) $|\boldsymbol{b}|$ と $|\boldsymbol{c}|$ を求めよ。 $|\boldsymbol{b}| =$ ， $|\boldsymbol{c}| =$

(2) $\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$, $\boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$ とおく。$\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の成分を求めよ。

$\boldsymbol{e}_2 =$ ， $\boldsymbol{e}_3 =$

(3) $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の大きさを求めよ。

$|\boldsymbol{e}_2| =$ ， $|\boldsymbol{e}_3| =$

(4) 各内積を求めよ。

$\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 =$ ， $\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 =$ ， $\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 =$

(5) 各外積を求めよ。

$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 =$ ， $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 =$ ， $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 =$

(6) $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおくとき行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

< 行列 >

自然数 n と m に対して，$n \times m$ 個の数を縦に n 個，横に m 個の長方形に並べて書いたものを n 行 m 列の**行列** $(matrix)$，または (n,m) 型の行列，(n,m) 行列などという。一つの行列を構成する n,m 個の数をその行列の**成分**という。また同じ横線上に並んでいる n 個の数の組をその行列の**行**，同じ縦線上に並んでいる m 個の数の組をその行列の**列**という。第 i 行と第 j 列の交叉点にある成分をその行列の (i,j) **成分**という。

例 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ は 2 行 3 列の行列 ((2,3) 型行列) で，

第 1 行は $(1,3,5)$，第 2 行は $(2,4,6)$，第 1 列は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

第 2 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ である。また $(1,2)$ 成分は

1 行 2 列の成分だから 3 であり，$(2,3)$ 成分は 6 である。

問 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ の型（何行，何列）と第 1 行，第 3 列を書き，

$(1,3)$ 成分と $(3,2)$ 成分を求めよ。

行列を表すのに $A, B, C \cdots, X, Y \cdots$ 等の大文字の斜体を用いる。行列の型が特別の場合，(n,m) 型行列の代わりに別名で呼ぶ。$n = m$ の場合は***n*次の正方行列**という。$(n,1)$ 型行列を***n*次の列ベクトル**，$(1,m)$ 型行列を***m*次の行ベクトル**という。

例 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix},\quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の場合，A は 2 次の正方行列，B は 3 次の行ベクトル，C は 2 次の列ベクトル，D は 3 次の正方行列，E は 3 次の列ベクトルである。

問 2 4 次の行ベクトル，3 次の列ベクトル，2 次の正方行列の例を上げよ。

< 行列の計算 1 >

一般の (n, m) 型行列を表すのに

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

のように一つの小文字 a に二重の添字をつけて表す。このように行列 A の型がはっきり分かっていて、A の (i, j) 成分が a_{ij} で表されるとき、$A = (a_{ij})$ と略記する。

二つの行列 $A = (a_{ij})$,$B = (b_{ij})$ は型が同じで、かつ対応する成分が相等しい $(a_{ij} = b_{ij})$ とき、そのときに限って A と B は等しいといい、A=B と書く。また同じ型の行列に対し、ベクトルの場合と同様にして、和、差、実数倍が定められる。

共に (m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$、$B = (b_{ij})$ に対し、

和：	$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$	
差：	$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$	
実数倍：	$kA = (ka_{ij})$	（k は実数）

と定める。

例 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, (3) $4\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

問 次の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

(2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

(3) $-3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$

＜ 行列の計算 2 ＞

行列の和・差，実数倍はベクトルの場合とまったく同じである。その際零ベクトルに相当するものはすべての成分が 0（ゼロ）である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であり，アルファベットの O の大文字の斜体で表し，**零行列**という。

例題 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき

$$3(X - 2A) + 2(B + X) = O$$

をみたす行列 X を求めよ。

解 上の式から

$$5X - 6A + 2B = O$$

より

$$X = \frac{1}{5}(6A - 2B)$$

$$= \frac{1}{5}\left\{6\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{5}\left\{\begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

問 例題の行列 A, B に対し，次式をみたす行列 X を求めよ。

(1) $3X - 2A + B = O$ (2) $3(2X - 3A) = -5(B - X)$

＜ 行列の積 1 ＞

m 次の行ベクトル A と m 次の列ベクトル B が

$$A = \ (a_1\ a_2\ \cdots\ a_m)\ ,\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

であるとき A と B の積を

$$A\,B = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m$$

と定める。

例 (1) $(3\ \ 2)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$

(2) $(3\ \ 2\ \ 1)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 12 + 20 + 6 = 38$

(3) $(3\ \ 2\ \ 1\ \ -1)\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 + (-1) \times 7 = 31$

注） (1) は平面のベクトルの内積, (2) は空間ベクトルの内積を
表していると考えてもよい。

問 次のベクトルの積を求めよ。

(1) $(6\ \ 5)\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$=$

(2) $(3\ 0\ 4)\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

$=$

(3) $(2\ \ -5\ \ 3\ \ 4)\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \quad =$

＜行列の積 2＞

n 行 m 列の行列　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$　と

m 行 ℓ 列の行列　$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix}$　に対して、積を

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{im}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{mj} \end{matrix}} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

と定める。

例　(1)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$

(2)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 & 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$

問　次の行列の積を求めよ。

(1)　$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2)　$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3)　$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

< 行列の積 3 >

例 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 5+3\times 6+(-1)\times 7 \\ 2\times 5+0\times 6+4\times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 38 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 8+3\times 9+(-1)\times 10 \\ 2\times 8+0\times 9+4\times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 56 \end{pmatrix}$

(3) (1) と (2) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 38 & 56 \end{pmatrix}$$

(注) 行列 A, B に対して, 左の行列 A の列の数と右の行列 B の行の数が同じでないと積 AB はできない。

行列の積の定義から, 次のことがわかる。

$$\boxed{(n, m) \text{ 行列 } \times (m, \ell) \text{ 行列 } = (n, \ell) \text{ 行列}}$$

問 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

＜行列の積 4 ＞

行列 A、B が共に n 次の正方行列の場合は、その積として AB と BA が共に定義されるが、AB と BA が等しいことはまれである。（このことを「**交換法則がなりたたない**」という。）

例

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき、

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times4+2\times(-3) & 1\times(-1)+2\times6 \\ 3\times4+5\times(-3) & 3\times(-1)+5\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & 27 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\times1+(-1)\times3 & 4\times2+(-1)\times5 \\ (-3)\times1+6\times3 & (-3)\times2+6\times5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

であり、$AB\neq BA$ となる。

問　行列 A、B が以下の場合に積 AB と BA を求めよ。

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$AB=$　　　　$BA=$

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$AB=$　　　　$BA=$

< 行列の積 5 >

行列の乗法に関しては、交換法則は成り立たないが、それ以外は数の計算と同様にできる。A, B, C を行列、k を実数とすると

実数倍　$(kA)B = A(kB) = k(AB)$

結合法則　$(AB)C = A(BC)$

分配法則　$(A+B)C = AC + BC \quad \cdots (1)$

$C(A+B) = CA + CB \quad \cdots (2)$

が成り立つ。ただし、交換法則が成り立たないので、(1) と (2) は等しくない。

例　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$AC + BC = (A+B)C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

問　上の A, B, C に対し、以下の計算をせよ。

(1) $C(A+B) =$

(2) $AB - BC =$

(3) $CC + BC =$

＜行列の積 6＞

3 つの行列 A, B, C の積 $(AB)C = A(BC)$ を単に ABC と書く。また, $AA = A^2$, $AAA = A^3$, $AAAA = A^4$ と表す。

例　A, B を同じ型の正方行列とするとき, 分配法則より

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

であるが, 交換法則が成り立たないので

$$(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$$

である。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$A^2 - AB + BA - B^2 = A(A-B) + B(A-B)$

$= (A+B)(A-B)$

$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

問 1　上の行列 A, B に対し, 次式を計算せよ

(1)　$A^2 - B^2$

$=$

(2)　$A^2 - BA + AB - B^2$

$=$

< 単位行列 >

n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の成分で、$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}\}$ を**対角成分**という。n 次の正方行列 A の対角成分以外の成分が全て 0 であるとき、A を n 次の**対角行列**といい、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & a_{33} & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と略記する。

問 1 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ に対し、積 AB と BA を計算せよ。

$AB =$

$BA =$

n 次の対角行列の対角成分が全て 1 である行列を n 次の**単位行列**といい、I で表す。

例 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 2 次の単位行列

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の単位行列

問 2 以下の場合に積 AI と IA を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$

$IA =$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$

$IA =$

＜ 零因子 ＞

n 次の正方行列 A, B と零行列 O に対し、

$$AO = OA = O$$

が成り立つが、

「$AB = BA = O$ であっても $A \neq O\,, B \neq O$ の場合がある」

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、$A \neq O$ かつ $B \neq O$ にもかかわらず $AB = O$ となる。
この様な行列 A, B を**零因子**という。

問 1 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問 2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、次の積を求めよ。

(1) $AB =$

(2) $AC =$

(3) $A(B - C) =$

問 3 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ のとき、次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$