2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series **A**

No. 10

内容

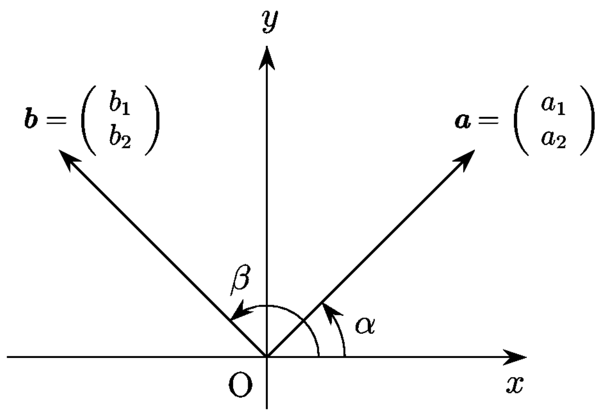
◎ 平面のベクトル

◎ 平面ベクトルの位置関係

◎ 空間のベクトル

◎ 内積

◎ 外積

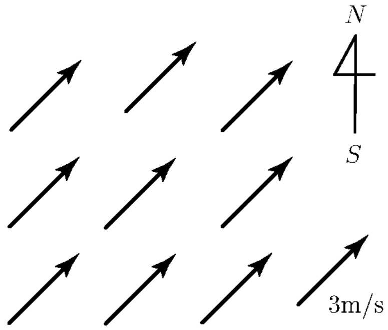


電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< スカラーとベクトル >

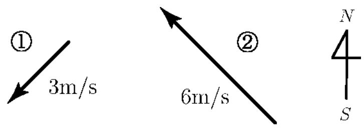
長さ、質量、温度などは、ある単位を基準に 1 つの実数で表すことができる。このような量を**スカラー**（scalar）という。しかし風の速度のように、大きさ（速さ）だけでなく、その方向を考えなければならないものがある。天気図などで風を表すときは、風の方向を ↗, ↘ のような矢印で表す。このように線分の片方の端に矢印をつけたものを**有向線分**という。



例　「南西の風 3m/s」と言えば、その地域の各点で南西の方角から秒速 3m の風が吹くことを意味する。このことを有向線分を用いて右図のように描くことができる。

（注）実際の天気図では 1 つの地域の風を 1 本の有向線分で表す。同じ方向と同じ長さをもった有向線分をたくさん描くことはない。

問 1　右図の有向線分①、②が表す風を例のような「○○の風○ m/s」の形で表せ。



①　　　　　　　　②

風を有向線分で表す場合に、同じ方向と同じ大きさ（＝長さ＝風の速さ）を持つ有向線分は同じ風を表す。このように有向線分について、位置を考えないで、方向と大きさ（＝長さ）だけを考えるとき、これを**ベクトル**（vector ）という。

(注)　有向線分をベクトルとみなす場合もある。「1 点に働く力」は有向線分で表されるが、位置を無視することはできないのでベクトルとはいえない。しかしこれもベクトルとみなす場合がある。

スカラー ： 1 次元の量
ベクトル ： 2 次元 · 3 次元の量

問 2　次の量はスカラーであるかベクトルであるか答えよ。

(1) 面積　　(2) 体積　　(3) 時間

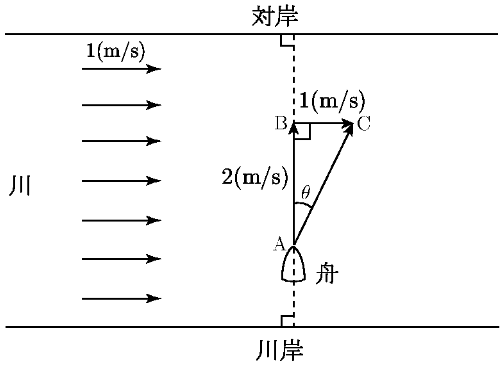
(4) 湿度　　(5) 海流の速度　　(6) 重力

< 速度の合成 >

例 1　静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まで進むはずであるが、川の流れのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。

この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを 2(=舟の速さ)、BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より AC= $\sqrt{5}$ となるから、

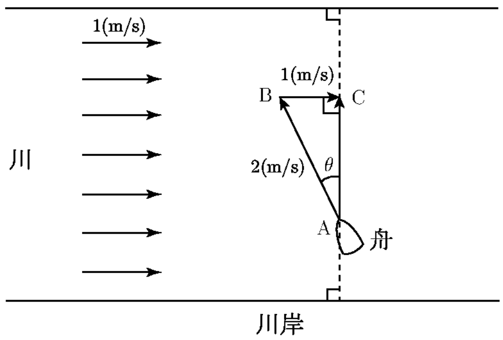
$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad より \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$



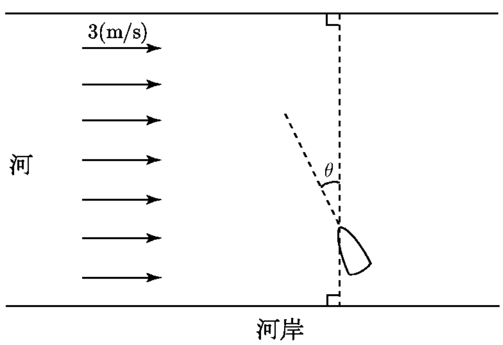
例 2　例 1 と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。

例 1 と同様に、舟の速度を有向線分 AB(長さ 2)、川の速度を有向線分 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad だから \quad \theta = 30^\circ$$



問　静水中を 5m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 3m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



< ベクトルの表記 >

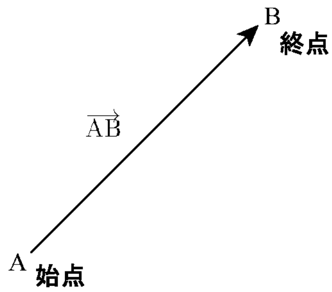
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を有向線分で示し、その大きさは有向線分の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変らないときは、一本の有向線分で流れの速度を表すことができる。このように、有向線分で、向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの有向線分 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい、B を**終点**という。ベクトルは $\vec{a}$ のような記号で表したり、太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする（本書では $\boldsymbol{a}$ と書くことにする)。



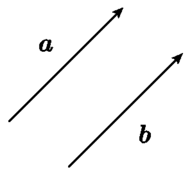
ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について、向きが同じで、大きさが等しいとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**等しい**といい、

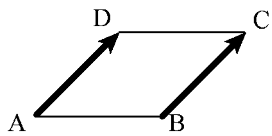
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



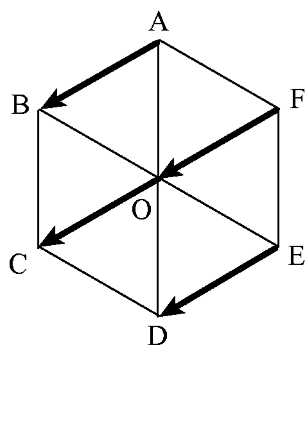


例　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

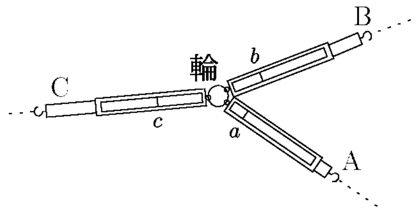
である。

問　右の正六角形で、$\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。

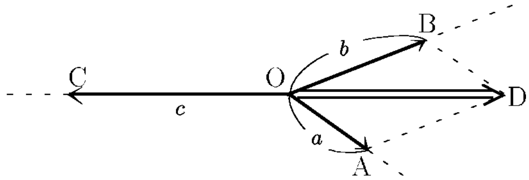


＜力の合成＞

例　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3 本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。

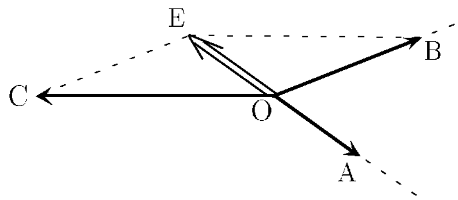


輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ有向線分をひき, その有向線分の先を A, B, C とする。

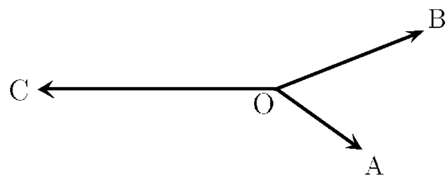


次に OA,OB を 2 辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 有向線分 OD と有向線分 OC は方向が同じ (有向線分の向きは逆) で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を有向線分 ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$) で表すと, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ との合力が $\overrightarrow{OD}$ であり, $\overrightarrow{OC}$ とつりあっていることがわかる。

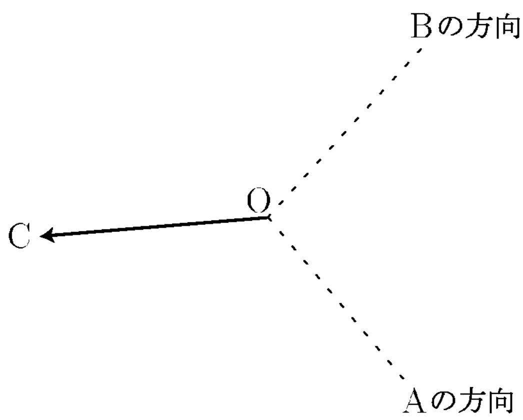
同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 有向線分 OE と OA は方向が同じ (向きが逆) で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の合力が $\overrightarrow{OE}$ であり, $\overrightarrow{OA}$ とつりあっている。



問 1　右図に $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ との合力 $\overrightarrow{OF}$ を作図せよ。



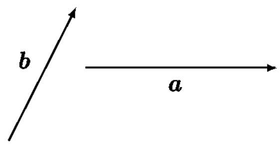
問 2　ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の有向線分の長さがわからない。$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ がつりあうように, 右図に有向線分 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を作図せよ。



＜平面のベクトル１＞

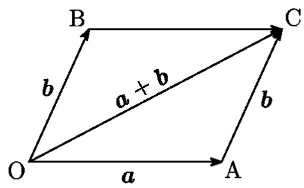
２ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、4ページでやった２つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

２つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が与えられているとする。



$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A, B とし、OA, OB を２辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が決まる。これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**和**といい、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$



と書く。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が２つの力であれば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ はその合力を表す。また、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が２つの速度であれば、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ はその合成速度を表す。

ここで、$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

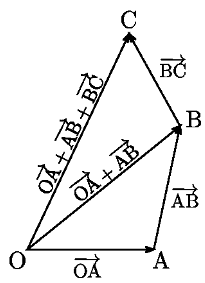
$$\boxed{\overrightarrow{\boxed{\mathrm{O}}\underbrace{\mathrm{A}}+\underbrace{\mathrm{A}}\boxed{\mathrm{C}}}=\overrightarrow{\boxed{\mathrm{OC}}}}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと、A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最後の到着点 C に行くベクトルになる。

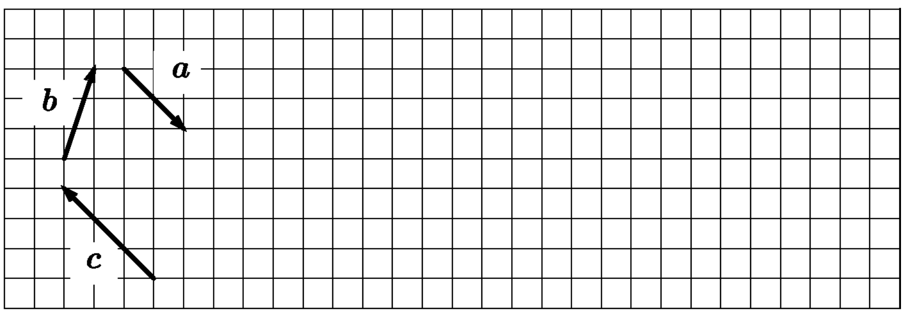
同様にして、4点 O, A, B, C に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。



問　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が下図の場合に、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ を作図せよ。

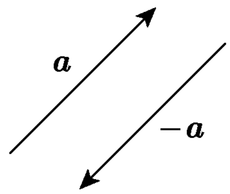


＜平面のベクトル 2 ＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。これを**零ベクトル**といい、$\mathbf{0}$ で表す。つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して、大きさが同じで向きが反対であるベクトルを、$\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい、$-\boldsymbol{a}$ で表す。
$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき、$-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。



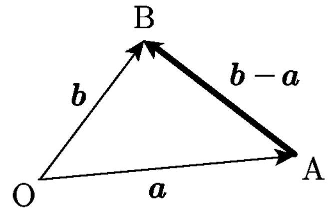
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

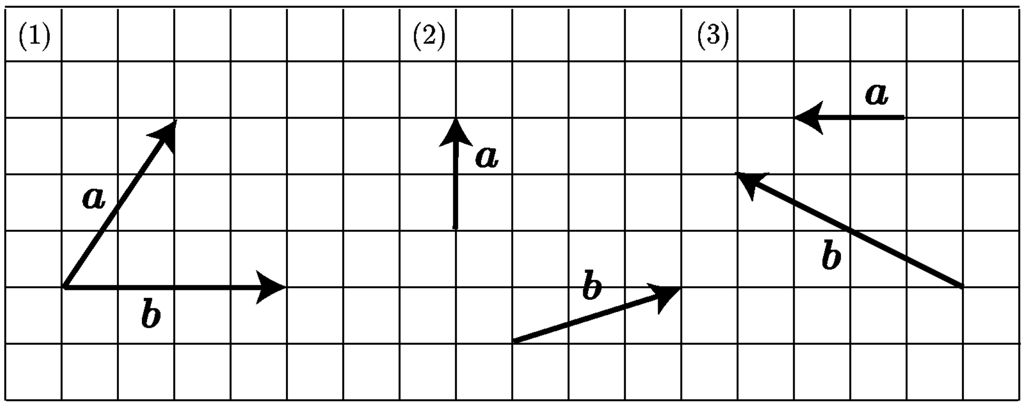
だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ の**差**といい、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$



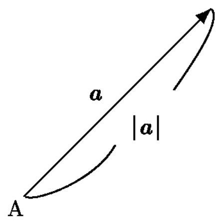
と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には「終点 (B)− 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問　$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ が次のように与えられている場合に $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ を図示せよ。



＜平面のベクトル 3 ＞

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを $|\boldsymbol{a}|$ で表す。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは、$|\boldsymbol{a}|$ は線分 AB の長さである。

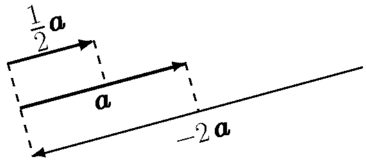


大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という。
$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ と正数 k に対して

(1) $k\boldsymbol{a}$ は、$\boldsymbol{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル

(2) $-k\boldsymbol{a}$ は、$\boldsymbol{a}$ と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

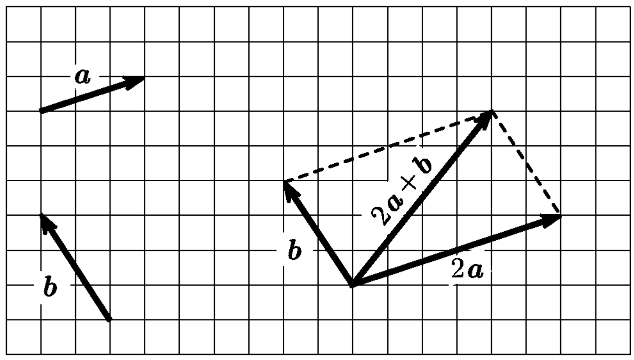
と定める。このようなベクトルを $\boldsymbol{a}$ の**実数倍**という。



例　ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ が右図の様に与えられているとき

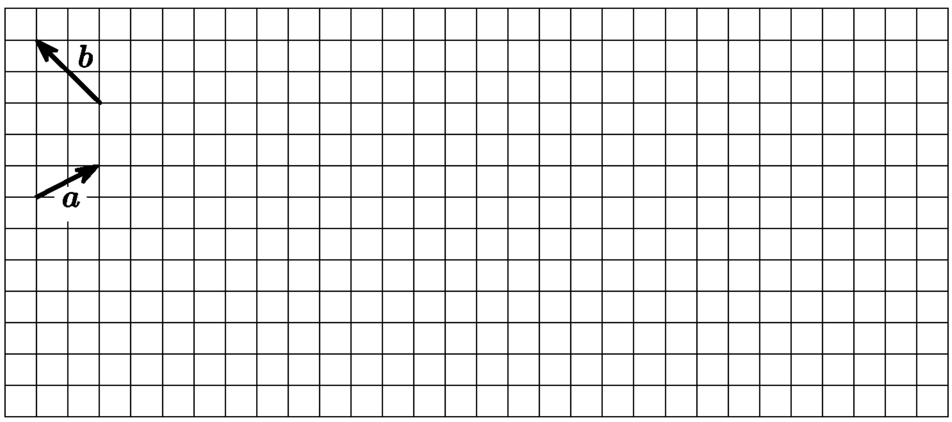
$$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

を図示すると、右の様になる。

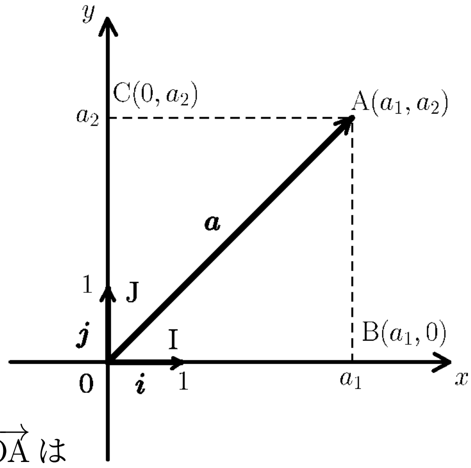


問　ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

(1) $-2\boldsymbol{a}$　, (2) $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$　, (3) $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$　, (4) $\boldsymbol{a} + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{b}$



< 平面ベクトルの成分 1 >



O を原点とする座標平面上の 2 点 I(1,0), J(0,1) に対して、

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} \quad , \ \boldsymbol{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

を**基本ベクトル**という。
平面上の任意の点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ に対し、2 点 $\mathrm{B}(a_1, 0)$, $\mathrm{C}(0, a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_2\boldsymbol{j}$ だから、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$$

と表すことが出来る。この a_1, a_2 を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい、a_1 を x 成分、a_2 を y 成分という。このとき $\boldsymbol{a}$ を成分を使って

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

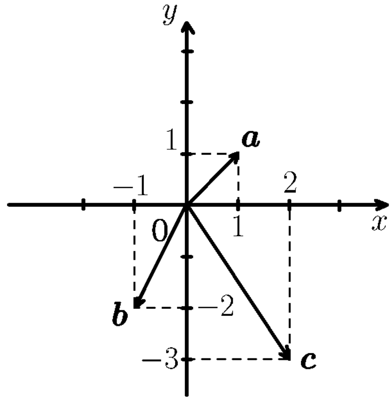
と表す。(このように成分を縦に並べる表し方を縦ベクトル表示といい、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ の様に横に並べる現し方を横ベクトル表示という。本書では、縦ベクトル表示を使う。)

例 1 $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \ \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… 零ベクトル

例 2 2 点 $\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}(4, -1)$ に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

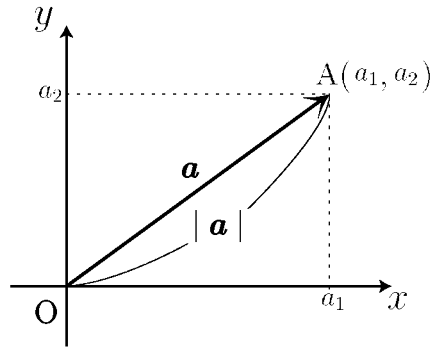
問 右図のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を成分で表せ。



< 平面ベクトルの成分 2 >

右図のように $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は,
線分 OA の長さと一致するから

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$



例題　2 点 A$(3,1)$, B$(4,5)$ が与えられたとき,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように

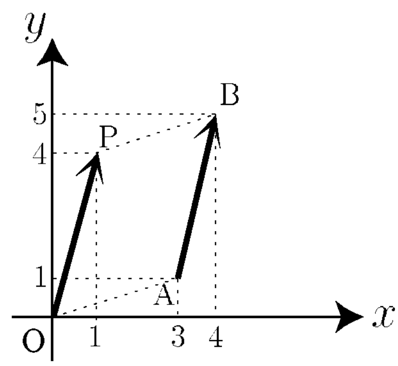
x 軸方向に -3
y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に
なるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$



(別解)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots$ (終点 − 始点)

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問　次の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し, その大きさを求めよ。

(1)　A $(3,\ 1)$,　B $(4,\ 5)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2)　A $(1,\ -1)$,　B $(-2,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

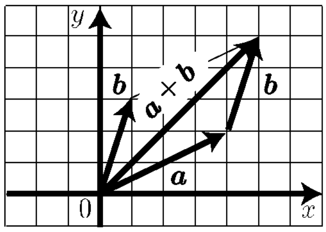
(3)　A(a_1, a_2) ,　B(b_1, b_2)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$　　　　　　　　　　　　, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

＜平面ベクトルの成分 3 ＞

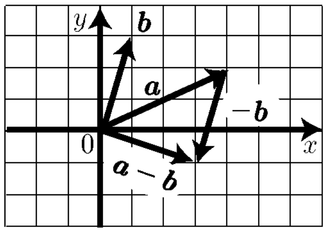
例題 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, (2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, (3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$, (4) $2\boldsymbol{b}$



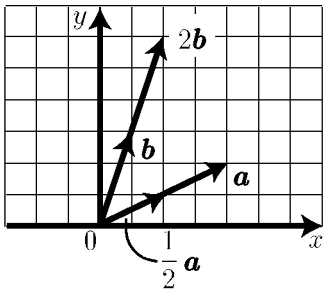
（解） (1) 右図より

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$



(2) 右図より

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$
$$=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$



(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(4) 右図より

$$2\boldsymbol{b}=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

問 1 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

（k は定数）

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(3) $k\boldsymbol{a}=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=$

問 2 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

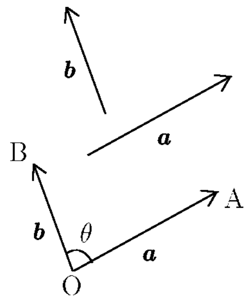
(1) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=$

(2) $-\boldsymbol{b}=$

(3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$

(4) $\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=$

< 平面ベクトルの内積 1 >



0 でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対し、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき、終点をそれぞれ A, B とするとき、∠AOB の大きさ θ は、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によってきまる。この角 θ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角という。

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角が θ のとき

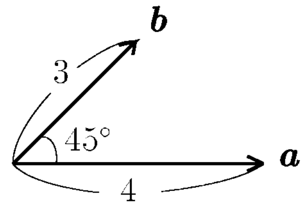
$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

を、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積**といい、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta} \quad \text{(内積の定義)}$$

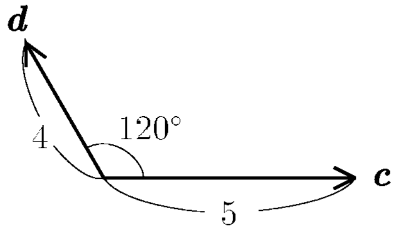
例 (1) $|\boldsymbol{a}| = 4$, $|\boldsymbol{b}| = 3$ で
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角が 45° のとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4\times 3\times\cos 45^\circ$$
$$= 4\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$



(2) $|\boldsymbol{c}| = 5$, $|\boldsymbol{d}| = 4$ で
$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ のつくる角が 120° のとき

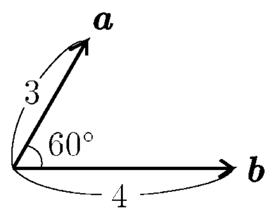
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} = 5\times 4\times\cos 120^\circ$$
$$= 5\times 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -10$$

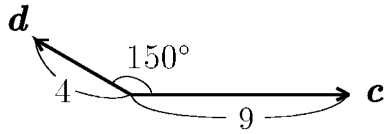


問 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が右図の場合に
内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$ を求めよ。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} =$





＜平面ベクトルの内積 2 ＞

内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で、$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ のときは、2 つのベクトルは一致するので
間の角 $\theta=0^\circ$ より $\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ だから

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2 \text{ つまり、} |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が 90° のとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は **垂直** であるといい、
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ と書く。$\cos 90^\circ=0$ であるから、次が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}, \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0} \text{ のとき} \\ \qquad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \end{array}}$$

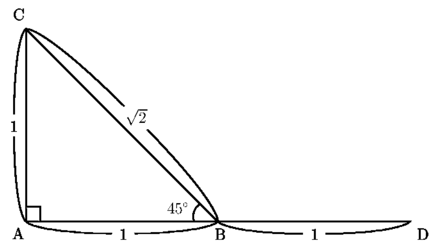
(ベクトルの垂直と内積)

例 右図の直角二等辺三角形において

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\times1\times\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=1$

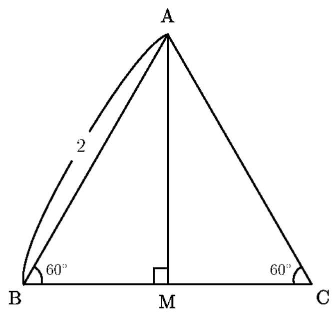
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-1$



問 右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。
辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

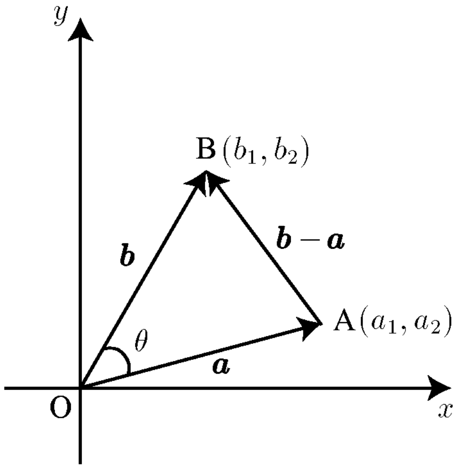


(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=$

＜平面ベクトルの内積の成分表示 1＞



座標平面上の 2 点 A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) と原点 O に対し、2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

問 1 $(*)$ 式の右辺を $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 2 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問 1 の結果を使って、内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ についての簡単な式で表せ。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$$

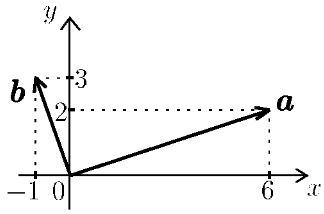
< 平面ベクトルの内積の成分表示 2 >

前ページの結果より

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である。

例 1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき　内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 6 \times (-1) + 2 \times 3 = 0$$

であるから, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直 ($\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$) である。

問 1 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直である場合は　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$　と書け。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

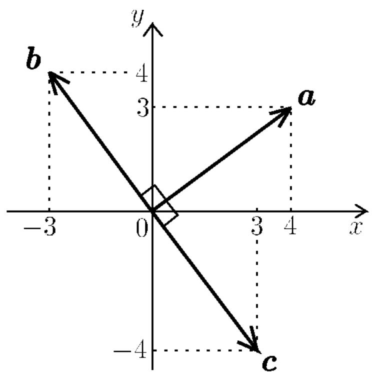
例 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

のとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

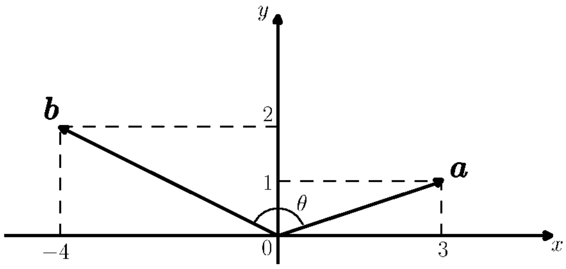
より　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$　である。



問 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と垂直なベクトルの例を 2 つあげよ。

$<$ 平面ベクトルのなす角 $>$

例　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。内積の定義から



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2 + 1^2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \dfrac{3}{4}\pi \ (= 135^\circ)$ である。

問 1　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。上の例にならって、$\cos\theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$\cos\theta =$

問 2　以下の場合に、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ。

(1) $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{b}| = 2$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sqrt{3}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

< 平面ベクトルの位置関係 >

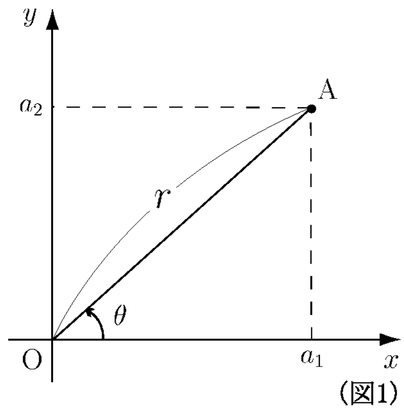
例 平面上の点 A(a_1 , a_2) に対し、原点 O からの距離を r とする。右図のように線分 OA の x 軸 (の正の部分) からの角度を θ とする。このとき

$$a_1 = r\cos\theta \ \ , \ \ a_2 = r\sin\theta$$

が成り立つ。この場合、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

となる。

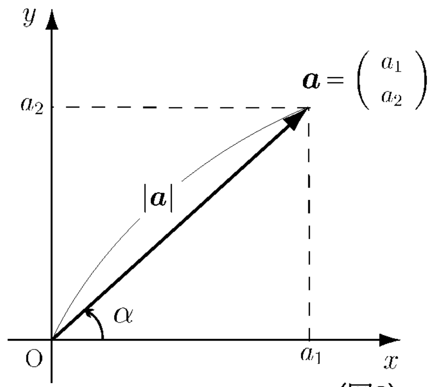


(図1)

問 上の例を参考にして次の問に答えよ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点 O にもってきて、図 2 のように x 軸からの角度を α とするとき、$\boldsymbol{a}$ の各成分を $|\boldsymbol{a}|$ と角度 α で表せ。

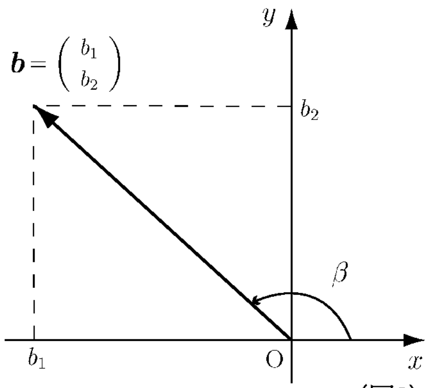
$a_1 =$ $\qquad\qquad$, $a_2 =$



(図2)

(2) ベクトル $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点 O にもってきて、図 3 のように x 軸からの角度を β とするとき、$\boldsymbol{b}$ の各成分を $|\boldsymbol{b}|$ と角度 β で表せ。

$b_1 =$ $\qquad\qquad$, $b_2 =$



(図3)

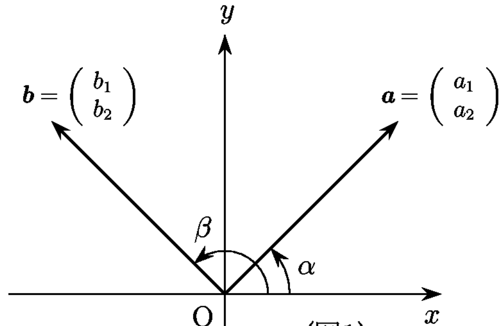
(3) sin の加法定理を用いて次式を展開し、整理して、a_1 , a_2 , b_1 , b_2 だけで表せ。

$|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin(\beta - \alpha)$

$=$

< 平面ベクトルの位置関係 2 >

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点にもってきて、x 軸からの角度をそれぞれ α と β とする（図 1)。このとき前ページの結果より



(図1)

(∗) $\boxed{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin(\beta - \alpha) = a_1 b_2 - a_2 b_1}$

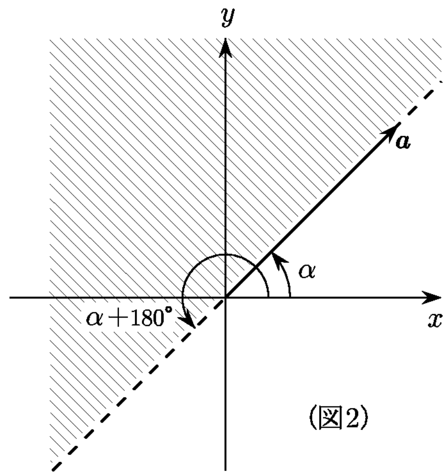
が成り立つ。この (∗) 式を用いると、2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の位置関係が成分を計算することによってわかる。

例 $\boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0}$ のときは

$|\boldsymbol{a}| > 0,\ |\boldsymbol{b}| > 0$ より (∗) 式から

$$\sin(\beta - \alpha) > 0$$
$$\iff \quad 0^\circ < \beta - \alpha < 180^\circ$$
$$\iff \quad \alpha < \beta < \alpha + 180^\circ$$

となる。従ってベクトル $\boldsymbol{b}$ の存在する範囲は図 2 の斜線部分である。ただし境界は含まない。

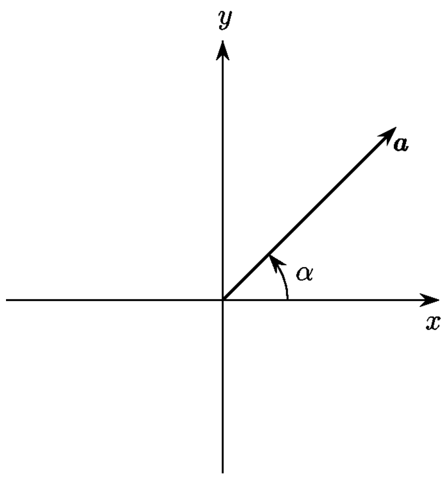


(図2)

(注) 正確に言うと、原点を始点とするベクトル $\boldsymbol{b}$ の終点の存在する範囲が図 2 の斜線部分である。

問 1 $\boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0}$ のとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ の位置関係を答えよ。

問 2 $\boxed{a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0}$ のとき、ベクトル $\boldsymbol{b}$ の（終点の）存在する範囲を右に図示せよ。



< 平面のベクトルと平行四辺形の面積 >

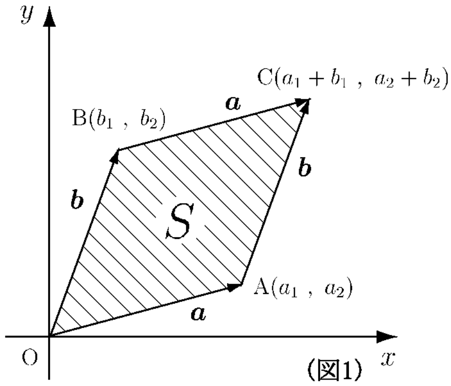
2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して原点 O(0 , 0) と 3 点

$$\mathrm{A}(a_1 \ , \ a_2) \ , \ \mathrm{B}(b_1 \ , \ b_2) \ , \ \mathrm{C}(a_1 + b_1 \ , \ a_2 + b_2)$$

をとると、四角形 OACB は平行四辺形となる。
これを 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形ということにする。この面積 S を求めたい。



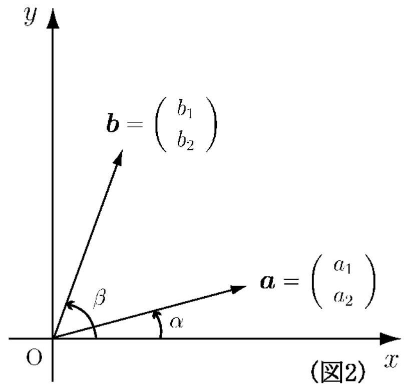
(図1)

問 1 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が図 2 のような位置関係にあるとする。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形の面積 S は図 3 より

$$S = |\boldsymbol{a}| \times h$$

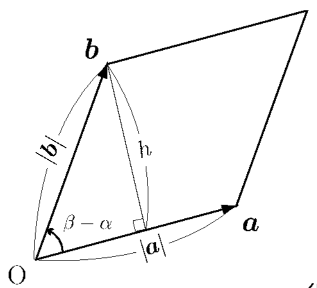
である。

(1) h を $|\boldsymbol{b}|$ と $\beta - \alpha$ で表せ。



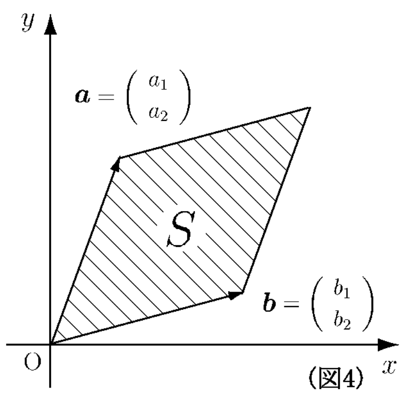
(図2)

(2) 前ページの (∗) 式を用いて S を a_1 , a_2 , b_1 , b_2 だけで表せ。



(図3)

問 2 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が図 4 のような位置関係にあるとする。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形の面積 S を a_1 , a_2 , b_1 , b_2 だけで表せ。



(図4)

＜ 2 次の行列式 ＞

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、$a_1b_2 - a_2b_1$ の値を

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ という記号で表し、2 次の**行列式**という。

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{(2 次の行列式)}$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$, $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 7 \times 3 = 9$

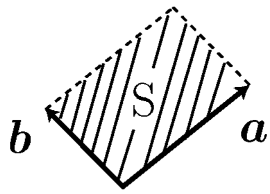
問 1 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の値は次のことを意味する。

[**I**] $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 1 のような位置関係である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平方四辺形の面積を S とすると

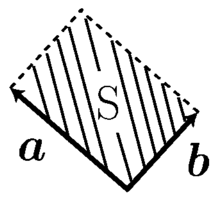
$$\boxed{\mathrm{S} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$



(図1)

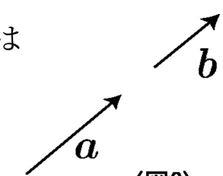
[**II**] $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} < 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 2 のような位置関係である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平方四辺形の面積を S とすると

$$\boxed{\mathrm{S} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$

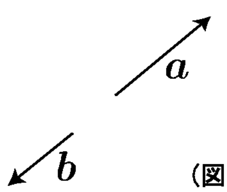


(図2)

[**III**] $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 3 または図 4 のような位置関係である。つまり $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**平行** である。



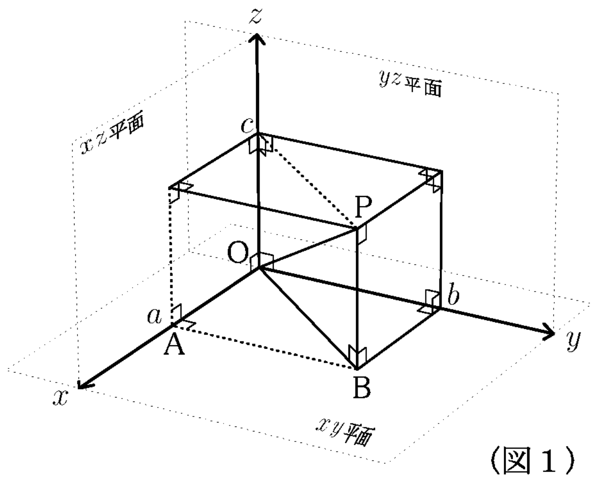
(図3)



(図4)

問 2 [III] $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のとき $\frac{b_1}{a_1} = k$ として、$\boldsymbol{b}$ を k と $\boldsymbol{a}$ で表せ。(ただし $a_1 \neq 0$, とする)

＜ 空間座標 ＞



（図１）

例 座標空間上に原点 O(0, 0, 0) と３点 A,B,P が図１のような位置にあるとき、A,B,P の座標は

$$\mathrm{A}(a, 0, 0)$$
$$\mathrm{B}(a, b, 0)$$
$$\mathrm{P}(a, b, c)$$

と表される。 a, b, c が正のとき、各線分の長さ (各点の距離) は

$$\mathrm{OA} = a \quad , \quad \mathrm{AB} = b \quad , \quad \mathrm{BP} = c \quad , \quad \mathrm{OB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BP}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

となる。

問１ この例で、点 $\mathrm{C}(a, 0, c)$, $\mathrm{D}(0, b, c)$ の位置を図１内に表示し、以下の線分の長さを求めよ。

AC = 　　　　, CD = 　　　　, AD =

問２ 図２の４点 $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{A}(x_2, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2, z_2)$ に対し、以下の線分の長さを求めよ。(ただし $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $z_1 < z_2$ とする)

PA = 　　　　, AB = 　　　　, BQ =

PB =

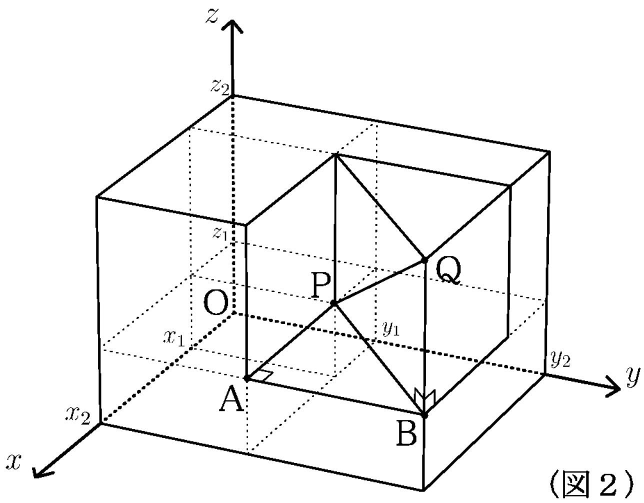
PQ =

問３ 点 $\mathrm{C}(x_2, y_1, z_2)$, $\mathrm{D}(x_1, y_2, z_1)$ の位置を図２内に表示し、以下の線分の長さを求めよ。

AC =

AD =

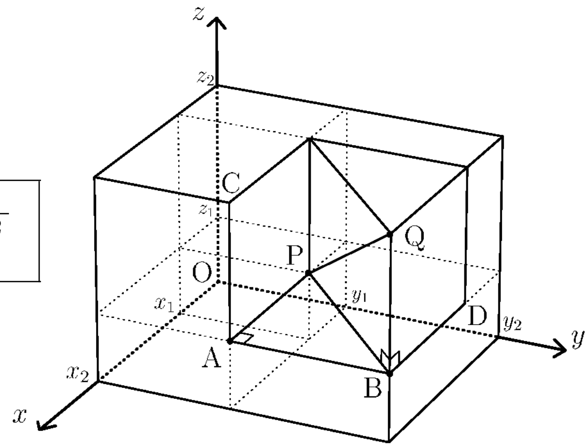
CD =



（図２）

< 空間座標と距離 >

例 前ページの結果より
2 点 $\mathrm{P}(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の間の
距離 PQ(= 線分 PQ の長さ) は



$$\boxed{\mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

である。

(注) この公式は

$$x_1 < x_2, \qquad y_1 < y_2, \qquad z_1 < z_2$$

の場合以外にも適用できる。

右図の点 $\mathrm{C}(x_2\,,\,y_1\,,\,z_2)$，$\mathrm{D}(x_1\,,\,y_2\,,\,z_1)$ の間の距離 CD は

$$\mathrm{CD} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

であり，$\sqrt{\ }$ の中の $(\bigcirc - \triangle)^2$ の中の ○ と △ は入れ替えても 2 乗するので
結果は変わらないからである。

問 1 点 $\mathrm{E}(x_1\,,\,y_1\,,\,z_2)$，$\mathrm{F}(x_1\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の位置を右上図内に表示し，
点 $\mathrm{A}(x_2\,,\,y_1\,,\,z_1)$ と点 $\mathrm{B}(x_2\,,\,y_2\,,\,z_1)$ に対し，次の距離を求めよ。

BE =

AF =

問 2 原点 O(0 , 0 , 0) と点 $\mathrm{A}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$，$\mathrm{B}(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$ に対し，

(1) 以下の距離を求めよ。

OA = ，OB =

AB =

(2) 以下の式を計算し，できるだけ簡単にせよ。

$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 =$

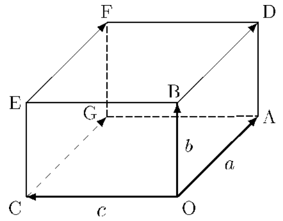
＜空間のベクトル１＞

速度や力などのように、方向と大きさをもつベクトルは、平面上だけでなく空間においても同様に扱える。

例１ 右図の直方体の頂点を始点、終点とするベクトルのうちで、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しいものは

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\,,\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

である。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ である。



問１ 例１で、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に等しいものと $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に等しいものを全て書け。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$

空間のベクトルについても、和・差、実数倍は平面のベクトルと同様である。

例２ 例１の直方体で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

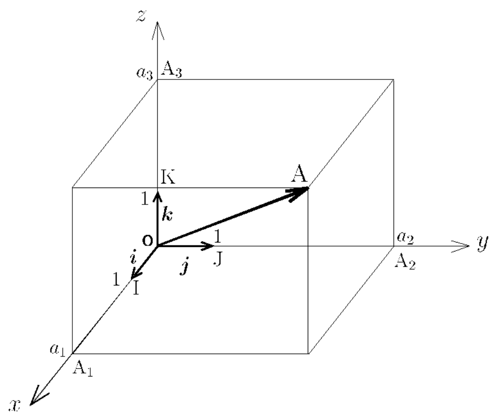
問２ 例１の直方体で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}\,,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}\,,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$ とするとき、

次のベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$　　　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=$　　　　(5) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}=$　　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=$

＜ 空間のベクトル 2 ＞



O を原点とする空間における座標軸上の 3 点 I$(1, 0, 0)$, J$(0, 1, 0)$, K$(0, 0, 1)$ に対し、

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}},\quad \boldsymbol{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}},\quad \boldsymbol{k} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

を**基本ベクトル**という。

空間における任意のベクトル$\boldsymbol{a}$の始点を原点にもっていき、$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$となる点 A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき、$\mathrm{A}_1(a_1, 0, 0)$, $\mathrm{A}_2(0, a_2, 0)$, $\mathrm{A}_3(0, 0, a_3)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} = a_1\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} = a_2\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3} = a_3\boldsymbol{k}$ より

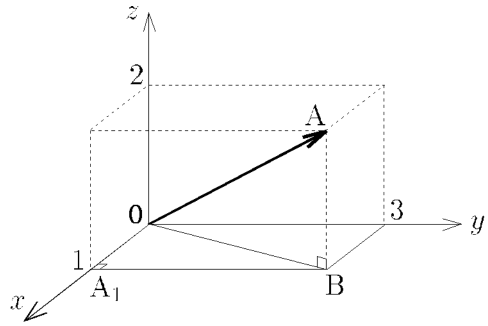
$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

と表される。この a_1, a_2, a_3 を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい、$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と表す。

とくに $\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

問 1 上図で、$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$ を成分で表せ。

例 A$(1, 3, 2)$ に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$



である。ここで、$\mathrm{A}_1(1,0,0)$, B$(1,3,0)$ とおくと

$$\begin{aligned} \mathrm{OA}^2 &= \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AB}^2 \\ &= (\mathrm{OA}_1{}^2 + \mathrm{A}_1\mathrm{B}^2) + \mathrm{AB}^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14 \end{aligned}$$

より、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは、$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{14}$ である。

問 2 $\boldsymbol{a}$ の成分が以下の場合に、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を求めよ。

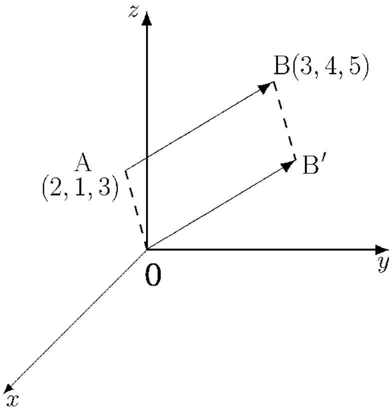
(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{a}| =$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{a}| =$

＜空間のベクトル３＞



例 空間座標上の２点 A(2,1,3)、B(3,4,5) に対し、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めたい。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動し、始点を原点 O にもっていくとすると、点 A が原点 O に移動するから

x 軸方向に -2

y 軸方向に -1

z 軸方向に -3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B′ に (同じ様に) 平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となったとすると、B′ の座標は

$$\mathrm{B'}(3-2\,,\,4-1\,,\,5-3) = (1,3,2)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

（別解）次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 空間の２点 A、B の座標が以下の場合に、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

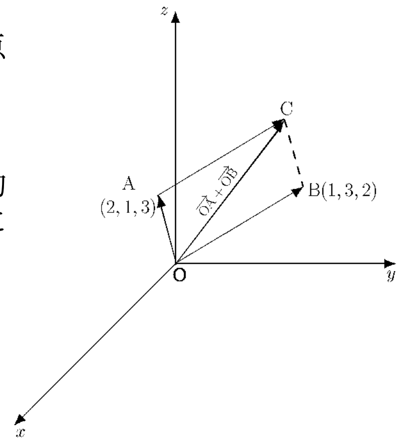
(1) $\mathrm{A}(5,2,3)$, $\mathrm{B}(4,1,2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(2) $\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

＜空間のベクトル 4＞



例　空間の２点 A(2,1,3)、B(1,3,2) と原点 O に対し、ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の成分を求めたい。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を平行移動し、始点が A になるようすると、O が A に移動するから、

x 軸方向に +2

y 軸方向に +1

z 軸方向に +3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同じ様に平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となったとすると、C の座標は

$$\mathrm{C}(1+2,3+1,2+3)=(3,4,5)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

（別解）次の様に計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1+3\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

問　２点 A、B の座標が次の様な場合に、以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) A(5,2,3) , B(4,1,2)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

(2) A(a_1,a_2,a_3) , B(b_1,b_2,b_3)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

< 空間のベクトル 5 >

問 1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき前ページの結果から類推して、次のベクトルの成分を求めよ。（ただし、k は実数）

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} =$　　(2) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} =$　　(3) $k\boldsymbol{a} =$

例　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、$3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ の成分は

$$3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+0 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

23 ページの結果より、このベクトルの大きさは

$$|3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

問 2　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} =$　　(2) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} =$

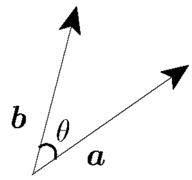
$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| =$　　$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| =$

(3) $3\boldsymbol{a} =$　　(4) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} =$

$|3\boldsymbol{a}| =$　　$|\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}| =$

＜空間ベクトルの内積 1＞

平面上のベクトルと同じように、空間の $\mathbf{0}$ でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角 θ を定めることができる。$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$
そして、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を



$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \cos\theta$$

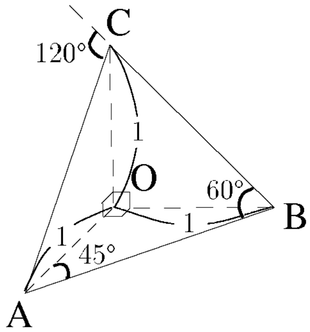
と定める。（どちらか一方が $\mathbf{0}$ のときは、内積は 0 とする。）

例　右図のような立体 OABC を考える。

ここで OA=OB=OC= 1,

OA⊥OB, OB⊥OC, OC⊥OA

とする。このとき

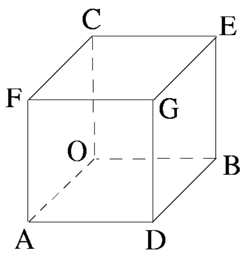


$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| \times \cos 120^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問　右の図は、1 辺の長さが 1 の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} =$　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} =$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}} =$　　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}} =$

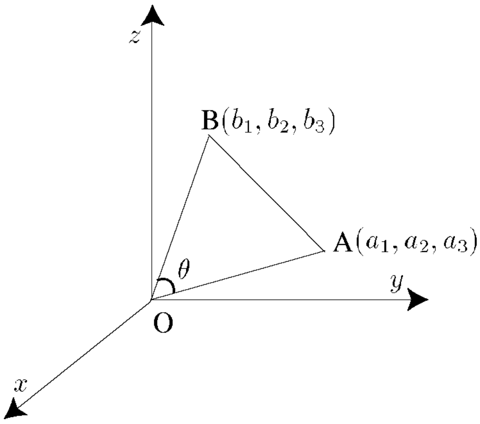
(5) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} =$　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} =$

< 空間ベクトルの内積 2 >

空間の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ と原点 O に対し、$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より、

$$(*)\ \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\}$$

となる。



問 1　OA,OB,AB の長さの 2 乗を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ で表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　　　, $\mathrm{OB}^2 =$

$\mathrm{AB}^2 =$

問 2　(∗) 式の右辺を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 3　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,| \times |\,\boldsymbol{b}\,| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

問 2 の結果を使って、内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

＜空間ベクトルの内積 3＞

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積は、前ページの結果より

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad \text{（内積の成分表示）}$$

となる。

例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のつくる角を θ とすれば、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ だから、$\theta = 120^\circ$ となる。

問 以下の場合に、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜平面の方程式 1＞

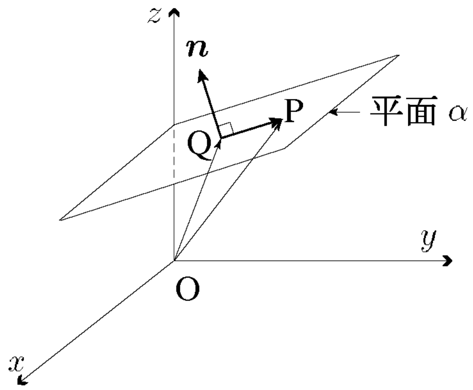
例 空間の点 Q$(3,4,5)$ を通り、ベクトル

$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}$ に垂直な平面を α と

する。平面 α 上の任意の点 P(x,y,z)

に対し、 $\boldsymbol{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は直交するから

$\boldsymbol{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ との内積は $\cos 90^\circ=0$ より



$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$$

となる。一方、

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}=-4\times(x-3)+(-3)\times(y-4)+12\times(z-5)=0$$

これを整理すると、

$$-4x-3y+12z-36=0 \qquad \text{（平面の方程式）}$$

となる。これが平面 α を表す方程式である。このとき $\boldsymbol{n}$ を平面 α の**法線ベクトル**という。

問 ベクトル $\boldsymbol{n}$ と点 Q が以下の場合に、点 Q を通って $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, Q$(2,-1,3)$　　　(2) $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, Q(q_1,q_2,q_3)

＜ 平面の方程式 2 ＞

点 $\mathrm{Q}(q_1, q_2, q_3)$ を通り、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は

$$a(x - q_1) + b(y - q_2) + c(z - q_3) = 0$$

となる。

例 1 $2x + 4y + 3z = 0$ は原点 $(0, 0, 0)$ を通り、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例 2 $3x + 5y + 2z = 8$ を変形すると

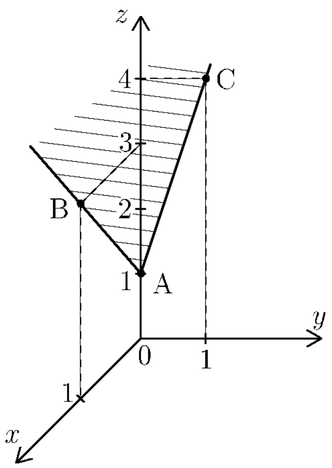
$$3x + 5y + 2(z - 4) = 0$$

となるから、点 $(0, 0, 4)$ を通り、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例 3 $z = 2x + 3y + 1$ を変形すると

$$2x + 3y - (z - 1) = 0$$

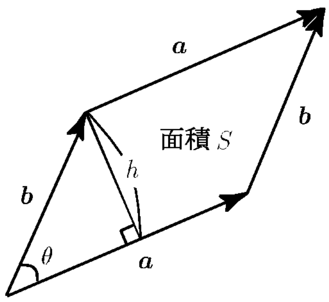
となるから、点 $(0, 0, 1)$ をとおり、$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。この平面は点 $\mathrm{A}(0, 0, 1)$, $\mathrm{B}(1, 0, 3)$, $\mathrm{C}(0, 1, 4)$ を通る右図のような平面である。



問 次の方程式はどんな平面を表すか。

(1) $x - 2y + 3z = 0$　　(2) $2x + y + 3z = 1$　　(3) $z = \dfrac{10 - 5x - 3y}{7}$

＜ 空間の平行四辺形 1 ＞



例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対し、

右図のように、 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる角を θ、平行四辺形の高さを h とすれば、

$$S = \left|\boldsymbol{a}\right| \times h \ , \ \ h = \left|\boldsymbol{b}\right| \times \sin\theta$$

より

$$\begin{aligned} S^2 &= \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 \times \sin^2\theta = \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 \times (1 - \cos^2\theta) \\ &= \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 - \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 \times \cos^2\theta = \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= (1^2 + 6^2 + 3^2) \times \left((-2)^2 + 4^2 + 5^2\right) - \left(1 \times (-2) + 6 \times 4 + 3 \times 5\right)^2 \\ &= 701 \end{aligned}$$

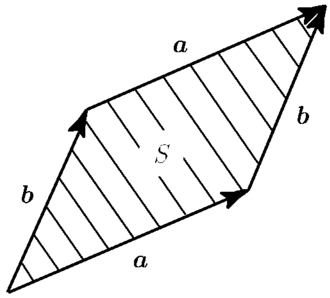
よって $S = \sqrt{701}$ となる。

問 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が以下の場合に、 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

＜ 空間の平行四辺形 2 ＞



一般のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に

対して、 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。 前ページと同様に考えると、

$$
\begin{aligned}
S^2 &= \left|\boldsymbol{a}\right|^2 \times \left|\boldsymbol{b}\right|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \\
&= \left\{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right\} \times \left\{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2\right\} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= (a_1)^2(b_1)^2 + (a_1)^2(b_2)^2 + (a_1)^2(b_3)^2 + (a_2)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 \\
&\quad + (a_2)^2(b_3)^2 + (a_3)^2(b_1)^2 + (a_3)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 \\
&\quad - \left\{(a_1)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_1b_1a_3b_3\right\} \\
&= \left\{(a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2\right\} + \left\{(a_2b_3)^2 - 2(a_2b_3)(a_3b_2) + (a_3b_2)^2\right\} \\
&\quad + \left\{(a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1)(a_1b_3) + (a_1b_3)^2\right\}
\end{aligned}
$$

となる。

問 1 S^2 を $\{\quad\}^2 + \{\quad\}^2 + \{\quad\}^2$ の形にせよ。

$S^2 =$

問 2 行列式の記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ を用いて、S^2 を表せ。

$S^2 =$

問 3 S を行列式の記号を用いて表せ。

$S =$

＜ 外積 1 ＞

空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}} \qquad (\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ の外積})$$

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**という。外積の大きさは

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^2}$$

であるから、前ページの結果より、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の

つくる平行四辺形の面積 S に等しい。

（注）　今後、2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間に積の記号 $\times$ がある

場合は必ず外積を意味し、内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と区別する。

例　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり、内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ である。

問　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が以下の場合に、外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$　　　(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

＜外積 2 ＞

例 1 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、前ページの例より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

であった。このとき

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 1 + 6 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交している。すなわち $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$ である。また

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 6 \times 5 + (-3) \times 6 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}$ も直交している。すなわち $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$ である。

問 1 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が以下の場合に、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

例 2 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

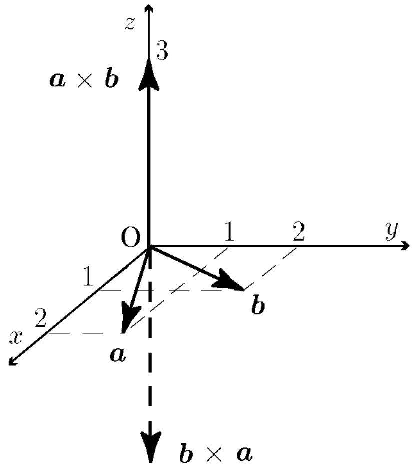
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交している。

問 2 例 2 の場合に、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

＜外積 3 ＞

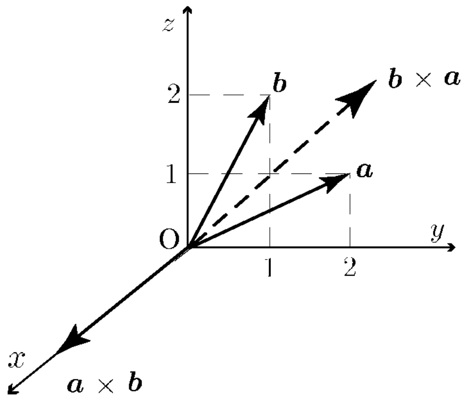
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ (および $\boldsymbol{b}$) と直交していて、その大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しい。



例 1 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ のとき、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となる。



例 2 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき、

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

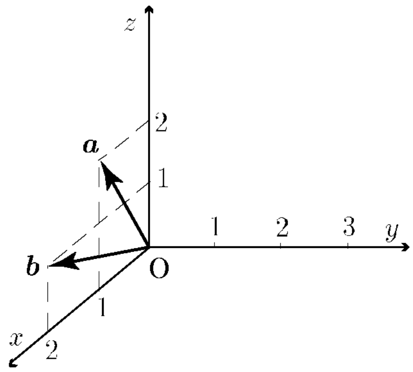
より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となる。

問 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき、

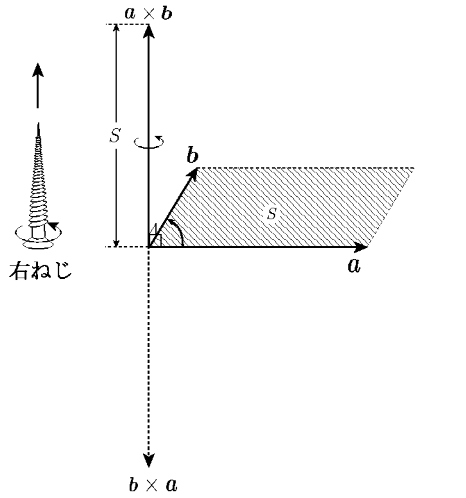
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ の成分を求め、
右にを $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ を作図せよ。

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=$



＜外積 4＞



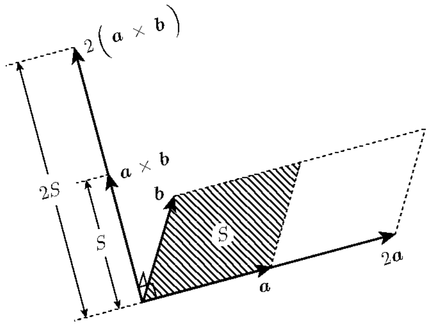
２つのベクトル$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の外積$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$は、$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$に垂直なベクトルであり、大きさは$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$のつくる平行四辺形の面積$S$に等しい。又$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$の向きは$\boldsymbol{a}$から$\boldsymbol{b}$に、向かって回転するときに、右ねじの進む方向である。従って$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$はその反対向きであり

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \;=\; -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

が成り立つ。

例１ $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ のとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\3&4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&4\\1&-1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}$$ である。



次に$(2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$を計算したい。右図から明らかに

$(2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-14\\4\end{pmatrix}$ である。

例２ $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

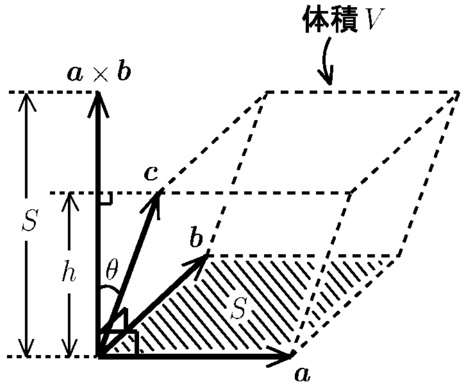
問 $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$,　$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ のとき、次の外積の成分を求めよ。

(ただしkは定数とする。)

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　, (2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　　, (3) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$　　, (4) $\boldsymbol{a}\times(3\boldsymbol{a})$

＜平行六面体の体積＞

例 $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$



であるとき、右図のような平行六面体の体積 V を求めたい。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がつくる平行四辺形の面積を S 、平行六面体の高さを h とすると、

$$V = Sh \quad , \quad S = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$$

である。一方 , $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ のつくる角を θ とすると

$$h = |\boldsymbol{c}| \cos\theta$$

であるから、

$$V = Sh = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| \cos\theta = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \text{と} \boldsymbol{c} \text{の内積})$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \times (-1) + (-4) \times 3 + 32 \times 7 = 206$$

一般に $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V は

$$\boxed{V = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \text{ の絶対値}}$$

問 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が以下の場合に、$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} =$

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} =$

$<$ 3次の行列式 $>$

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ に対し $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との内積

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

を**スカラー三重積**という。

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し、スカラー三重積

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

の値を記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

で表し、 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のつくる (3 次の) **行列式** という。

例 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6-7\times5\times3-4\times2\times9-1\times6\times8=0$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix}=$$

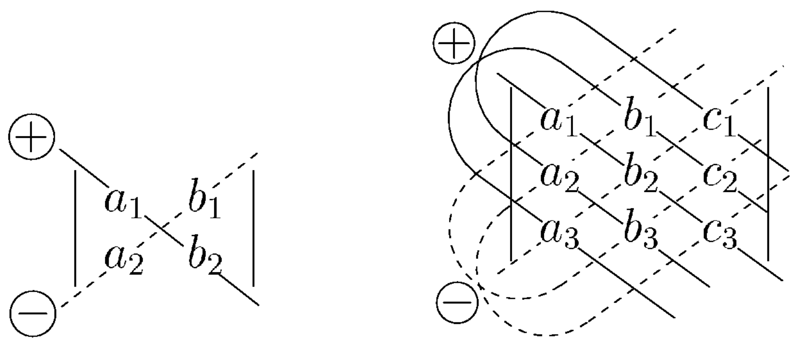
< サラスの方法 >

2 次や 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

の計算規則を覚えるためには、次のように考える。



この図で実線はプラスの項であり、点線はマイナスの項である。この方法を**サラスの方法**という。

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$