

2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	http://hdl.handle.net/10173/248

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

番外編

「力学入門 1」

解答

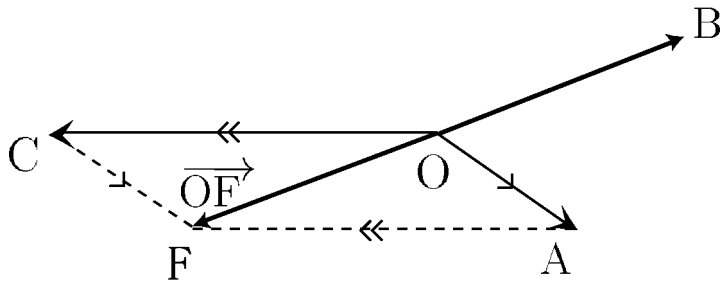
< 1 ページ. 速度の合成 >

問の解答

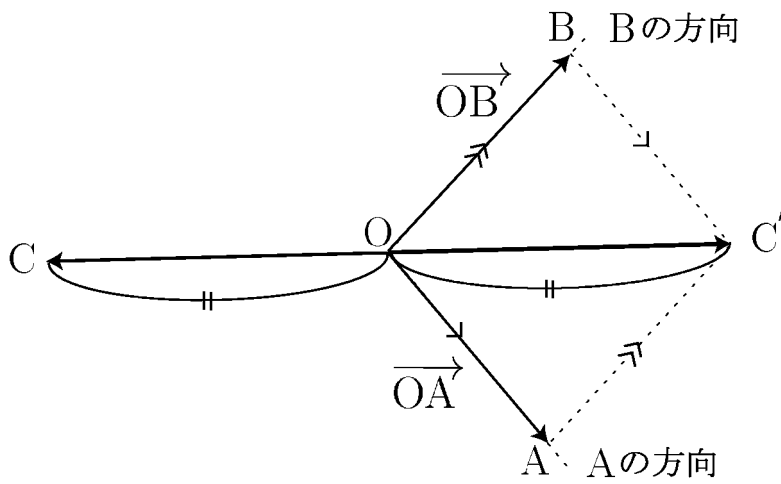
$$\sin \theta = \frac{7}{10}$$

< 2 ページ. 力の合成 >

問 1 の解答



問 2 の解答



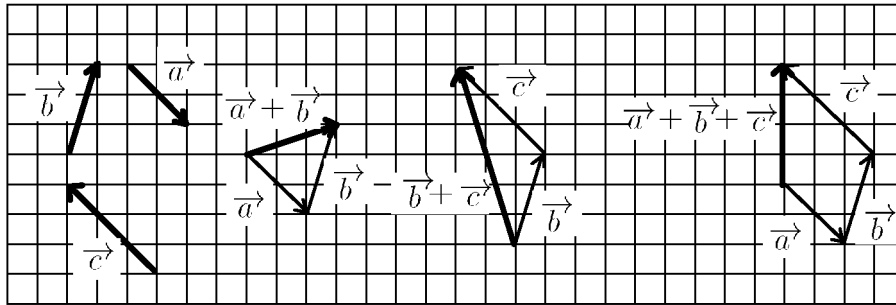
< 3 ページ. 平面上のベクトル 1 >

問の解答

$$\vec{AO} = \vec{BC} = \vec{OD} = \vec{FE}$$

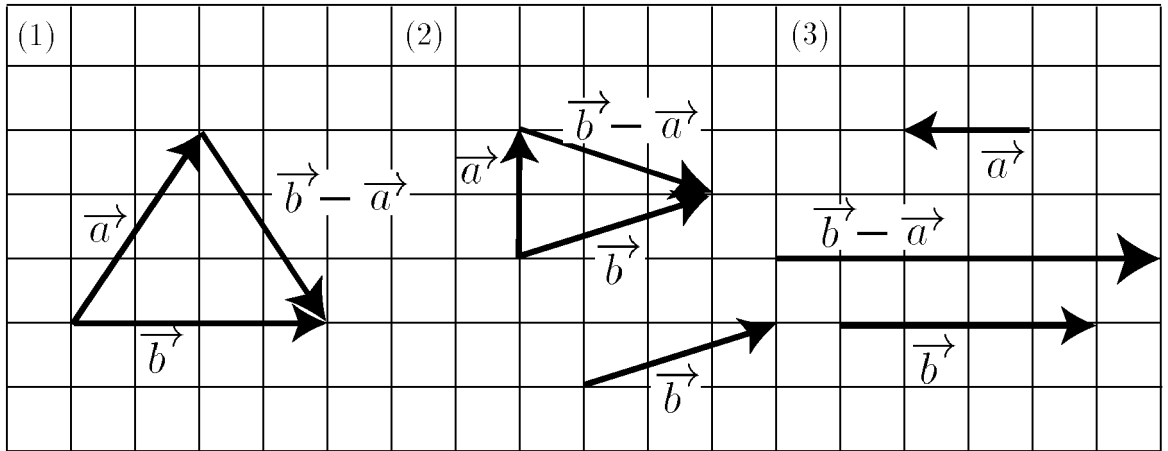
< 4 ページ. 平面上のベクトル 2 >

問の解答



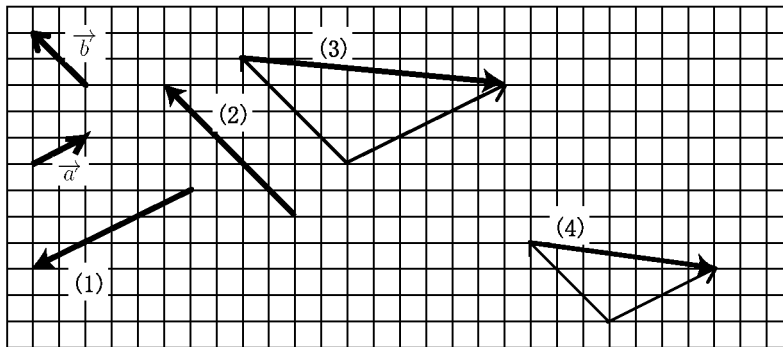
< 5 ページ. 平面上のベクトル 3 >

問の解答



< 6 ページ. 平面上のベクトル 4 >

問の解答



< 7 ページ. 平面ベクトルの成分 1 >

問の解答

$$\vec{a} = (1, 3)$$

$$\vec{b} = (-2, 1)$$

$$\vec{c} = (4, -3)$$

< 8 ページ. 平面ベクトルの成分 2 >

問の解答

$$(1) \overrightarrow{AB} = (2, 1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$$

$$(2) \overrightarrow{AB} = (-1, 2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$$

< 9 ページ. 平面ベクトルの成分 3 >

問 1 の解答

$$(1) \vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$(3) k\vec{a} = k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$$

問 2 の解答

$$(1) \frac{1}{2}\vec{a} = (1, 3)$$

$$(2) -\vec{b} = (1, 3)$$

$$(3) \vec{a} - \vec{b} = (3, 9)$$

$$(4) \vec{a} + 2\vec{b} = (2, 6) = (-2, -6) = (0, 0)$$

< 10 ページ. 平面ベクトルの内積 1 >

問の解答

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 3$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 4 \times 2 \times \cos 150^\circ = -4\sqrt{3}$$

< 11 ページ. 平面ベクトルの内積 2 >

問の解答

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = 2$$

$$(2) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ = 3$$

$$(3) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos 90^\circ = 0$$

$$(4) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 2 \times \cos 120^\circ = -2$$

$$(5) \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 1 \times 1 \times \cos 180^\circ = -1$$

< 12 ページ. 平面ベクトルの内積の成分表示 1 >

問 1 の解答

$$OA^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad OB^2 = b_1^2 + b_2^2$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1^2 - 2b_1a_1 + a_1^2) - (b_2^2 - 2b_2a_2 + a_2^2)\} \\ &= \frac{1}{2} \{2a_1b_1 + 2a_2b_2\} = a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

問 3 の解答

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

< 13 ページ. 平面ベクトルの内積の成分表示 2 >

問 1 の解答

$$(1) \quad \vec{a} = (2, 3), \quad \vec{b} = (4, 5), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 3 \times 5 = 8 + 15 = 23$$

$$(2) \quad \vec{a} = (4, 6), \quad \vec{b} = (-3, 2), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times (-3) + 6 \times 2 = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$(3) \quad \vec{a} = (1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

問 2 の解答

$$\vec{b} = (1, 1) \quad , \quad \vec{c} = (-1, -1) \quad \text{など}$$

< 14 ページ. 平面ベクトルのなす角 >

問 1 の解答

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

問 2 の解答

$$(1) \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{1 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta (= 30^\circ) = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{-2 \times 3 + 1 \times 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{-6 + 1}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{3}{4}\pi$$

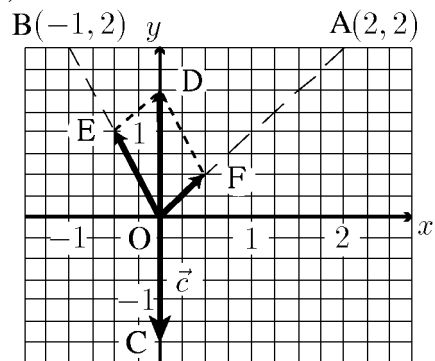
$$(3) \cos \theta = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 3 \times 1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{3 + 3}{\sqrt{12} \sqrt{4}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

< 15 ページ. ベクトルの均衡 >

問の解答

(1) $D(0, 1.5)$

(2)



(3) $\vec{OF} = (0.5, 0.5)$, $\vec{OE} = (-0.5, 1)$ より

$$\vec{OF} = k_1 \vec{OA} \Rightarrow (0.5, 0.5) = k_1(2, 2) = (2k_1, 2k_1) \Rightarrow k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\vec{OE} = k_2 \vec{OB} \Rightarrow (-0.5, 1) = k_2(-1, 2) = (-k_2, 2k_2) \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2}$$

< 16 ページ. 平面の基本ベクトル 1 >

問の解答

(1) $\vec{a} + \vec{b}$

$$= (3\vec{i} + 2\vec{j}) + (-2\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$= \vec{i} + 7\vec{j}$$

(2) $\vec{a} - \vec{b}$

$$= (3\vec{i} + 2\vec{j}) - (-2\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$= 5\vec{i} - 3\vec{j}$$

(3) $3\vec{a} + 2\vec{b}$

$$= 3(3\vec{i} + 2\vec{j}) + 2(-2\vec{i} + 5\vec{j}) = 9\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{i} + 10\vec{j}$$

$$= 5\vec{i} + 16\vec{j}$$

(4) $-5\vec{a} + 6\vec{b}$

$$= -5(3\vec{i} + 2\vec{j}) + 6(-2\vec{i} + 5\vec{j}) = -15\vec{i} - 10\vec{j} - 12\vec{i} + 30\vec{j}$$

$$= -27\vec{i} + 20\vec{j}$$

< 17 ページ. 平面の基本ベクトル 2 >

問 1 の解答

(1) $|\vec{j}| = 1$

(2) $|3\vec{i} + 4\vec{j}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(3) $|2\vec{i} - 4\vec{j}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

問 2 の解答

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ より $\vec{e} = \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

$\vec{b} = 3\vec{e} = 3\left(\frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}\right) = \frac{12}{5}\vec{i} - \frac{9}{5}\vec{j}$

問 3 の解答

(1) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 0$

$\cos \theta = 0$

(2) $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) + 1 \times 1 = -3 + 1 = -2$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

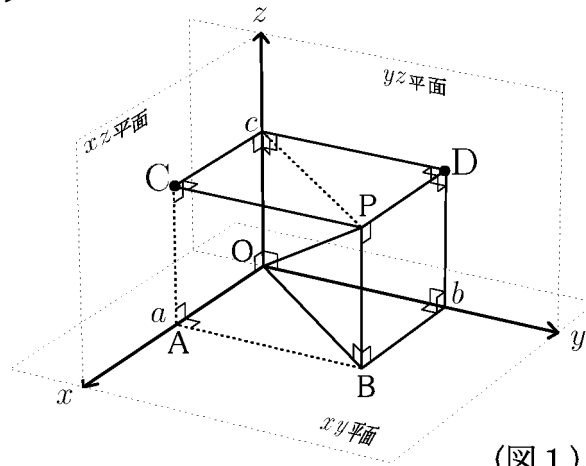
< 18 ページ. 空間座標 >

問 1 の解答

$$AC = c$$

$$CD = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



(図 1)

問 2 の解答

$$PA = x_2 - x_1, \quad AB = y_2 - y_1, \quad BQ = z_2 - z_1$$

$$PB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

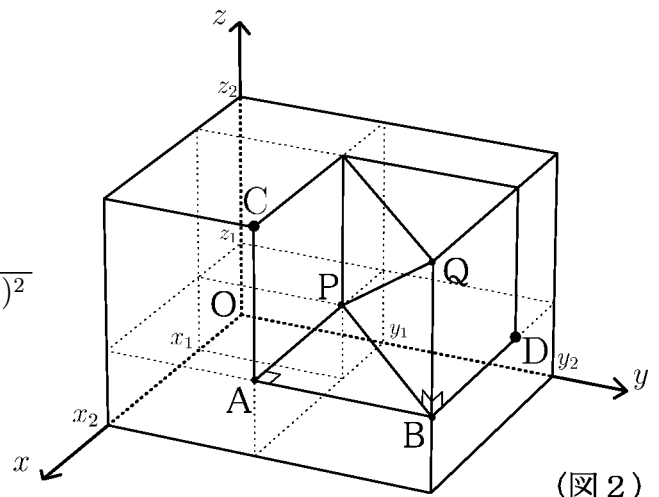
$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

問 3 の解答

$$AC = z_2 - z_1$$

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$CD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



(図 2)

< 19 ページ. 空間のベクトル 1 >

問 1 の解答

$$(1) \vec{OB} = \vec{AD} = \vec{GF} = \vec{CE}$$

$$(2) \vec{OC} = \vec{BE} = \vec{DF} = \vec{AG}$$

問 2 の解答

$$(1) \vec{OG} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$(2) \vec{OE} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$(3) \vec{OF} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$(4) \vec{DG} = \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$$

$$(5) \vec{FB} = \vec{GO} = -\vec{OG} = -\vec{a} - \vec{c}$$

$$(6) \vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

< 20 ページ. 空間のベクトル 2 >

問 1 の解答

$$\overrightarrow{OA_1} = (a_1, 0, 0) \quad , \quad \overrightarrow{OA_2} = (0, a_2, 0) \quad , \quad \overrightarrow{OA_3} = (0, 0, a_3)$$

問 2 の解答

$$\overrightarrow{A_2A_3} = (a_3, -a_2, 0) \quad \overrightarrow{A_3A_1} = (a_1, 0, -a_3)$$

< 21 ページ. 空間のベクトル 3 >

問の解答

(1) $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1)$

(2) $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

< 22 ページ. 空間のベクトル 4 >

問の解答

$$(1) \quad \vec{OA} + \vec{OB} = (9, 3, 5)$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = (-1, -1, -1)$$

$$2\vec{OB} = (8, 2, 4)$$

$$(2) \quad \vec{OA} + \vec{OB} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$3\vec{OA} = (3a_1, 3a_2, 3a_3)$$

< 23 ページ. 空間座標と距離 >

問 1 の解答

(1) $BE = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

(2) $AF = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

問 2 の解答

(1) $OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $OB = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

(2) $OA^2 + OB^2 - AB^2$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2\}$

$= 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3$

< 24 ページ. 空間ベクトルの成分と大きさ >

問の解答

(1)

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 4)$$

$$\overrightarrow{OB} = (3, -2, 5)$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21} \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, -4, 1)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{33}$$

(2)

$$(1) \quad \vec{a} + \vec{b} = (2, 0, 9)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 9^2} = \sqrt{85}$$

$$(2) \quad \vec{a} - \vec{b} = (-4, 4, -1)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{33}$$

$$(3) \quad 2\vec{a} + 3\vec{b} = (7, -2, 23)$$

$$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{582}$$

< 25 ページ. 空間ベクトルの内積 1 >

問の解答

(1) $\vec{AD} \cdot \vec{AF} = 0$

(2) $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 1$

(3) $\vec{FE} \cdot \vec{FD} = 1$

(4) $\vec{AD} \cdot \vec{OC} = 0$

(5) $\vec{AD} \cdot \vec{CE} = 1$

(6) $\vec{AD} \cdot \vec{GF} = -1$

< 26 ページ. ベクトルの内積 2 >

問 1 の解答

$$OA^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$OB^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

問 2 の解答

$$\frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} = \frac{1}{2} \{2b_1a_1 + 2b_2a_2 + 2b_3a_3\} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

問 3 の解答

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

< 27 ページ. 空間ベクトルのなす角 >

問の解答

$$(1) \cos \theta = \frac{2 \times 3 + 1 \times (-1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{より} \quad \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{5 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 1}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{15 + 2 + 4}{\sqrt{42}\sqrt{14}} = \frac{21}{7\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{より} \quad \theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \cos \theta = \frac{-1 - 1 - 1}{\sqrt{1 + 1 + 1} \sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\text{より} \quad \theta = 180^\circ = \pi$$

< 28 ページ. 空間の基本ベクトル 1 >

問 1 の解答

$$(1, 2, 0) = \vec{i} + 2\vec{j} \qquad (2, 0, 4) = 2\vec{i} + 4\vec{k}$$

$$(0, 4, 5) = 4\vec{j} + 5\vec{k} \qquad (5, -1, 3) = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

問 2 の解答

$$(1) 2\vec{a} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} \qquad (2) 3\vec{b} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$(3) \vec{a} + \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} \qquad (4) \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(5) 2\vec{a} + 3\vec{b} = 9\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k} \qquad (6) 2\vec{a} - 3\vec{b} = 3\vec{i} - 16\vec{j} + 5\vec{k}$$

< 29 ページ. 空間の基本ベクトル 2 >

問 1 の解答

(1) $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$

(2) $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

(3) $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

(4) $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

(5) $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

(6) $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 1 - 1 = 0$

(7) $(2\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} - 3\vec{j})$
 $= 2$

(8) $(\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (-3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k})$
 $= -3 - 8 + 15 = 4$

問 2 の解答

(1) $|\vec{j}| = 1$

(2) $|\vec{k}| = 1$

(3) $|\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{2}$

(4) $|\vec{j} - \vec{k}| = \sqrt{2}$

(5) $|2\vec{i} + 3\vec{j}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

(6) $|3\vec{j} - 4\vec{k}| = 5$

(7) $|\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}|$
 $= \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$

(8) $|2\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}|$
 $= \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56}$

< 30 ページ. 空間の基本ベクトル 3 >

問 1 の解答

$$(1) A(3, 1, 2), B(7, 10, 6) \quad \overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(2) A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) \quad \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}$$

問 2 の解答

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4} \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

問 3 の解答

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{5\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{50}} = \sqrt{\frac{49}{50}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

< 31 ページ. ベクトルの表記 >

問の解答

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 4\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$2\mathbf{A} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$, |\mathbf{A}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

$$|2\mathbf{A}| = 2\sqrt{14}$$

$$, |\mathbf{B}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$, \cos \theta = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = 0$$

< 32 ページ. ベクトルの練習 1 >

問 1 の解答

$$(1) 2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + (-6\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$-4\mathbf{A} - 2\mathbf{B} = -16\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 8\mathbf{k} + 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -12\mathbf{i} - 18\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

$$(2) |\mathbf{A}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$$

$$|4\mathbf{A}| = 4\sqrt{29}$$

$$(3) \mathbf{A} + \mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ より } |\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \sqrt{4 + 36 + 1} = \sqrt{41}$$

問 2 の解答

$$(1) 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$(2) -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$(3) -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{25 + 36 + 25}}(5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = \frac{5}{\sqrt{86}}\mathbf{i} - \frac{6}{\sqrt{86}}\mathbf{j} - \frac{5}{\sqrt{86}}\mathbf{k}$$

$$(5) |-5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}| = \sqrt{25 + 36 + 25} = \sqrt{86}$$

$$\frac{2}{\sqrt{86}}(-5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \frac{-10}{\sqrt{86}}\mathbf{i} + \frac{12}{\sqrt{86}}\mathbf{j} + \frac{10}{\sqrt{86}}\mathbf{k}$$

$$(6) (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

< 33 ページ. ベクトルの練習 2 >

問 1 の解答

(1) $2\mathbf{A} = -6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ は \mathbf{A} の 2 倍の長さである。

なぜならば

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$|2\mathbf{A}| = \sqrt{36 + 16 + 64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29} \quad \text{より} \quad |2\mathbf{A}| = 2 \times |\mathbf{A}|$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{A} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{2}}\mathbf{k} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j} - 2\sqrt{2}\mathbf{k}$ は \mathbf{A} の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の長さである。

なぜならば

$$\left| \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{2}} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{9 + 4 + 16}{2}} = \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{|\mathbf{A}|}{\sqrt{2}}$$

$$(3) \frac{\mathbf{A}}{\sqrt{29}} = -\frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{j} - \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

$$(4) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\mathbf{A} = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\mathbf{j} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

問 2 の解答

(1)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{3}{\sqrt{9 + 25} \times 1} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

(2)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{2}{\sqrt{4 + 9} \times 1} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

(3)

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

< 34 ページ. ベクトルの練習 3 >

問の解答

$$(1) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{i}|} = \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$(2) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{j}|} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{29}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{29}}$$

$$(3) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{k}|} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$$

$$(4) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} = \frac{4+9}{\sqrt{29}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{13}{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$(5) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} = \frac{4+16}{\sqrt{29}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{20}{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$(6) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} = \frac{9+16}{\sqrt{29} \times 5} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

< 35 ページ. 単位の計算 1 >

問 1 の解答

(1) $123\text{m} = \boxed{0.123} \text{ km}$

(2) $7500\text{mm} = \boxed{7.5} \text{ m}$

(3) $1\text{mm} = \boxed{10^7} \text{ \AA}$

問 2 の解答

(1) $10.5\text{m} + 2.4\text{m} = 12.9\text{m}$

(2) $2000\text{m} - 140\text{m} = 1860\text{m}$

問 3 の解答

(1) $0.6\text{min} = \boxed{36} \text{ s}$

(2) $36\text{s} = \boxed{0.01} \text{ h}$

(3) $1\text{h} = \boxed{3600} \text{ s}$

(4) $156\text{s} = \boxed{2.6} \text{ min}$

(5) $2.3\text{h} = \boxed{138} \text{ min}$

(6) $15\text{min} = \boxed{0.25} \text{ h}$

< 36 ページ. 単位の計算 2 >

問 1 の解答

$$(1) 1\text{m}^2 = \boxed{10000} \text{cm}^2 \quad (= \boxed{10^4} \text{cm}^2)$$

$$(2) 1\text{km}^2 = \boxed{1000000} \text{m}^2 \quad (= \boxed{10^6} \text{m}^2)$$

$$(3) 0.5\text{cm}^2 = \boxed{50} \text{mm}^2$$

$$(4) 600\text{mm}^2 = \boxed{0.0006} \text{m}^2 \quad (= \boxed{6 \times 10^{-4}} \text{m}^2)$$

問 2 の解答

$$(1) 1\text{cm}^3 = \boxed{1000} \text{mm}^3$$

$$(2) 1\text{m}^3 = \boxed{1000000} \text{cm}^3 \quad (= \boxed{10^6} \text{cm}^3)$$

$$(3) 1\text{m}^3 = \boxed{1000000000} \text{mm}^3 \quad (= \boxed{10^9} \text{mm}^3)$$

$$(4) 0.001\text{km}^3 = \boxed{1000000} \text{m}^3 \quad (= \boxed{10^6} \text{m}^3)$$

< 37 ページ. 単位の計算 3 >

問 1 の解答

$$18\text{km/h} = \boxed{300} \text{ m/min} = \boxed{5} \text{ m/s}$$

問 2 の解答

$$\frac{5\text{m}}{6\text{s}} = \frac{3\text{km}}{1\text{h}} \quad (\text{時速 } 3\text{km})$$

問 3 の解答

$$1 \text{ 時間 } 39 \text{ 分} = (60 + 39)\text{min} = 99\text{min} \text{ より}$$

$$\frac{54\text{km}}{99\text{min}} = \frac{100\text{m}}{11\text{s}}$$

(答) 100m を 11 秒で走る

< 38 ページ. 平均速度 >

問 1 の解答

$$72 \text{ (km/h)} = \boxed{1.2} \text{ (km/min)} = \boxed{20} \text{ (m/s)}$$

問 2 の解答

$$(1) \frac{4.9(3^2 - 1^2)}{3 - 1} = 19.6(\text{m/s})$$

$$(2) \frac{4.9(4^2 - 3^2)}{4 - 3} = 34.3(\text{m/s})$$

$$(3) \frac{4.9(3.5^2 - 3^2)}{3.5 - 3} = 31.85(\text{m/s})$$

$$(4) \frac{4.9(3.1^2 - 3^2)}{3.1 - 3} = 29.89(\text{m/s})$$

< 39 ページ. 時間の関数 >

問 1 の解答

(1) 19.6

(2) 78.4

(3) 60.025

問 2 の解答

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

$$x(1) = 19.6 \quad y(1) = 14.7$$

$$x(2) = 39.2 \quad y(2) = 19.6$$

問 3 の解答

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

$$v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

問 4 の解答

$$(1) f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (3+h)^2 - 4.9 \times 3^2}{h}$$

$$(2) f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (t+h)^2 - 4.9 \times t^2}{h}$$

問 5 の解答

$$x'(t) = 29.4$$

$$y'(t) = -9.6t + 29.4$$

$$v'(t) = 0$$

< 40 ページ. 瞬間の速度 1 >

問 1 の解答

$$(1) \frac{4.9(3.01^2 - 3^2)}{3.01 - 3} = 29.449 \quad (\text{m/s})$$

$$(2) \frac{4.9\{(3+h)^2 - 3^2\}}{(3+h) - 3} = \frac{4.9(6h + h^2)}{h} = 29.4 + 4.9h \quad (\text{m/s})$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9\{(3+h)^2 - 3^2\}}{(3+h) - 3} = 29.4 \quad (\text{m/s})$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9\{(t+h)^2 - t^2\}}{(t+h) - t} = 9.8t \quad (\text{m/s})$$

問 2 の解答

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{3 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (t \text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

問 3 の解答

$$(1) 29.4 \quad (\text{m/s})$$

$$(2) 9.8t \quad (\text{m/s})$$

問 4 の解答

$$(1) f'(3)$$

$$(2) f'(t)$$

< 41 ページ. 瞬間の速度 2 >

問 1 の解答

(1) $19.6(\text{m/s})$ (2) $39.2 (\text{m/s})$

問 2 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + 29.4(\text{m/s})$

(2) $v(0) = 29.4(\text{m/s})$

(3) $t = \frac{29.4}{9.8} = 3$

(答) 3 秒後

(4) $f(3) = 83.3 (\text{m})$

< 42 ページ. 速度の応用 1 >

問の解答

$$(1) v(t) = y'(t) = -9.8t + 19.6 \text{ (m/s)}$$

$$(2) v(0) = 19.6$$

(答) 初速度 19.6 (m/s)

$$(3) v(t) = 0 \Rightarrow -9.8t + 19.6 = 0 \Rightarrow t = 2$$

(答) 2 秒後

$$(4) t = 2 \text{ のとき } y(2) = -4.9 \times 4 + 19.6 \times 2 + 24.5 = 44.1$$

(答) 44.1 (m)

$$(5) y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 = 0$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t - 5)(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 5, -1$$

(答) 5 秒後

< 43 ページ. 速度の応用 2 >

問の解答

$$(1) v_x(t) = x'(t) = 14.7$$

$$(2) v_y(t) = y'(t) = -9.8t + 19.6$$

$$(3) v_y(t) = 0 \Rightarrow -9.8t + 19.6 = 0 \Rightarrow t = 2$$

(答) 2 秒後

$$(4) t = 2 \text{ のとき } y(2) = -4.9 \times 4 + 19.6 \times 2 = 19.6$$

(答) 19.6

$$(5) y(t) = 0 \Rightarrow -4.9t^2 + 19.6t = 0$$

$$-4.9t(t - 4) = 0$$

(答) 4 秒後

$$(6) t = 4 \text{ のとき } x(4) = 14.7 \times 4 = 58.8$$

(答) 58.8

< 44 ページ. 速度の応用 3 >

問の解答

$$(1) \quad v_x(t) = x'(t) = 29.4 \quad , \quad v_y(t) = y'(t) = -9.8t + 29.4$$

$$(2) \quad v_y = 0 \Rightarrow -9.8t + 29.4 = 0 \Rightarrow t = 3$$

(答) 3 秒後

$$(3) \quad \text{高さ} = 78.4(\text{m})$$

$$(t = 3 \text{ のとき} \quad y(3) = -4.9 \times 9 + 29.4 \times 3 + 34.3 = 78.4)$$

$$\text{水平距離} = 88.2(\text{m})$$

$$(t = 3 \text{ のとき} \quad x(3) = 29.4 \times 3 = 88.2)$$

$$(4) \quad y(t) = 0 \Rightarrow -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 = 0 \\ -4.9(t^2 - 6t - 7) = 0$$

(答) 7 秒後

$$(5) \quad t = 7 \text{ のとき} \quad x(7) = 29.4 \times 7 = 205.8(\text{m})$$

(答) 205.8(m)

< 45 ページ. 速度と速さ >

問 1 の解答

$$\text{速度 } \vec{v}(2) = (3, -3) \quad , \quad \text{速さ } |\vec{v}(2)| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

問 2 の解答

$$t \text{ 秒後の速度 } \vec{v}(t) = (4, -6t + 9) \text{ より}$$

$$1 \text{ 秒後の速度は } \underline{\vec{v}(1) = (4, 3)}$$

$$1 \text{ 秒後の速さは } \underline{|\vec{v}(1)| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5}$$