2002年度 基礎数学ワークブック

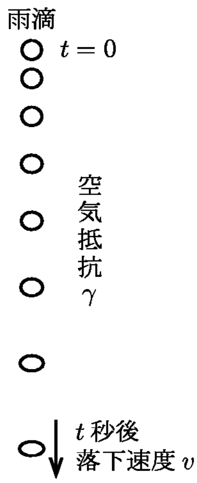
高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2002年度版）

Series **A**

No. 9



内容

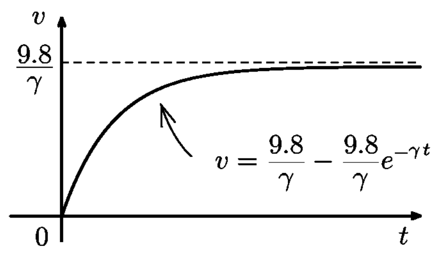
◎ 変数分離形

◎ 1階線形微分方程式

◎ 定数係数2階線形微分方程式

◎ 初期値問題

◎ 微分方程式の応用



電子・光システム工学科

井上 昌昭　著

＜ 1 階微分方程式の原理 ＞

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ならば} \quad y = C \quad (C \text{ は定数})}$

となる。この定理を使うと 1 階微分方程式の一般解の形が決定できる。

例 微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

を考える。No.8, 48 ページより $(*)$ の一般解は

$$(**) \qquad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であると類推できる。$(**)$ が $(*)$ の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{-t}) = C \times \frac{d}{dt}(e^{-t}) = C \times (-e^{-t}) = -Ce^{-t} = -y$$

よりわかる。実は

「**$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない**」

ことが証明できる。

＜証明＞ $y_1 = e^{-t}$ とする。$(*)$ の任意の解を y_2 とすると $(*)$ 式を満たすので

(1) $y_1{}' = -y_1 \quad , \quad y_2{}' = -y_2$

が成り立つ (ここで t に関する導関数 $\dfrac{dy}{dt}$ を y' と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、分数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2{}' \times y_1 - y_2 \times y_1{}'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(-y_2) \times y_1 - y_2 \times (-y_1)}{(y_1)^2} = \frac{-y_2y_1 + y_2y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となり定理から y が定数 C になるので

$$y = C \implies \frac{y_2}{y_1} = C \implies y_2 = Cy_1 = Ce^{-t}$$

より $(*)$ の任意の解 y_2 が $(**)$ の形をしていることがわかった。(証明終)

問 微分方程式 $(*)$ $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = y}$ の一般解は No.8, 37 ページより $(**)$ $\boxed{y = Ce^{t}}$ (C は定数) となる。「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない」ことを証明せよ。

< 変数分離形 1 >

例 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は前ページより

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であった。この一般解の見つけ方は以下のようにする。

< 一般解の求め方 >

$(*)$ の両辺を y で割る。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を t で微分する。

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int (-1)dt$$

$$\Downarrow \qquad \text{置換積分}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (-1)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| + C_1 = -t + C_2 \qquad (C_1,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = -t + C_0 \qquad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1)$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{-t+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t}$$

$$\Downarrow$$

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \qquad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0})$$

ここで C_0 がどんな数でも e^{C_0} は 0(ゼロ) にならないから $C \neq 0$ である。一方 $(**)$ 式で $C = 0$ のとき $y = 0$ となるが、$y = 0$ は $(*)$ の解であるから $C = 0$ を含めて $(*)$ の一般解は

$$\boldsymbol{y = Ce^{-t}} \qquad (\boldsymbol{C} \textbf{ は任意定数})$$

< 変数分離形 2 >

例題 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 3y}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページの方法で求める。まず (∗) の両辺を y で割り, t で積分する。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 3$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int 3dt$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y}dy = \int 3dt$$
$$\Downarrow$$
$$\log|y| = 3t + C_0 \qquad (C_0\text{は任意定数})$$
$$\Downarrow$$
$$|y| = e^{3t+C_0}$$
$$\Downarrow$$
$$y = \pm e^{3t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{3t}$$
$$\Downarrow$$
$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{3t}} \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

ここで $C = \pm e^{C_0} \neq 0$ であるが前ページと同様な理由で $C = 0$ でもよいから、(∗) の一般解は

(答) $\boldsymbol{y = Ce^{3t}}$ ($\boldsymbol{C}$ は任意定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 5y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -3y$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = ay$

＜ 変数分離形 3 ＞

例題 微分方程式

$$(*)\quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 2ty}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページと同じ方法で求める。まず両辺を y で割り, t で積分する。。

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 2t$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}dt = \int 2tdt$$

$$\Downarrow$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2tdt$$

$$\Downarrow$$

$$\log|y| = t^2 + C_0 \qquad (C_0 \text{は任意定数})$$

$$\Downarrow$$

$$|y| = e^{t^2+C_0}$$

$$\Downarrow$$

$$y = \pm e^{t^2+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(**)\quad \boxed{y = Ce^{t^2}} \qquad (C = \pm e^{C_0})$$

ここで $C = \pm e^{C_0} \neq 0$ であるが、$(**)$ 式で $C = 0$ の場合は $y = 0$ となり、$y = 0$ は $(**)$ の解であるから、$C = 0$ も含めて $(*)$ の一般解は

(答) $\boldsymbol{y = Ce^{t^2}}$ **(**$\boldsymbol{C}$ **は任意定数)**

(注) $\boxed{\dfrac{dy}{dt} = (t \text{ の関数}) \times (y \text{ の関数})}$ の形の微分方程式を**変数分離形**といい、例題と同じやり方で解ける。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = (6t+5)y$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = (3t^2+4)y$

＜ 1 階線形微分方程式 1 ＞

t の関数 $p(t)$ と $q(t)$ が与えられたとき、未知関数 y に関する次の形の微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

を **1 階線形微分方程式**という。ここで「線形」というのは未知関数 y とその導関数 $\frac{dy}{dt}$ に関する一次式であることを意味する。(y^3 や $(\frac{dy}{dt})^2$ などのある微分方程式は非線形という。) 特に $q(t) = 0$ のとき

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の形の微分方程式を **1 階線形同次微分方程式**という。

例 同次微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + 2ty = 0}$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

となり変数分離形になるので、前ページと同様にして

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-2t) dt$$

より一般解は

一般解 ： $\boldsymbol{y = Ce^{-t^2}}$ **($\boldsymbol{C}$ は任意定数)**

問 1 次の微分方程式の一般解を求めよ。（ただし a は定数）

(1) $\dfrac{dy}{dt} + ay = 0$ (2) $\dfrac{dy}{dt} - 10ty = 0$ (3) $\dfrac{dy}{dt} + (6t^2 + 1)y = 0$

問 2 同次微分方程式 $\boxed{\dfrac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$ の一般解を不定積分 $\displaystyle\int p(t)dt$ を用いて表せ。

< 1 階線形微分方程式 2 >

前ページより同次微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-\int p(t)dt}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「$(*)$ の解は $(**)$ の形の関数以外はない。」ことが 1 ページと同様にして証明できる (証明は省略)。

例 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 5}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{5}{3}$$

とおくと、y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 3y_1 = 0 + 3 \times \dfrac{5}{3} = 5$ となり (1) 式を満たす。
すなわち y_1 は (1) の解の 1 つである。(1) に対し、同次微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を y_0 とすると、上の公式 $(**)$ より

$$y_0 = Ce^{-3t} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y = y_1 + y_0 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + 3y &= \frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right) + 3\left(\frac{5}{3} + Ce^{-3t}\right)\\ &= 0 - 3Ce^{-3t} + 5 + 3Ce^{-3t} = 5\end{aligned}$$

より y は (1) 式をみたす。(1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解}: \boxed{y = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「(1) の解は全て $\dfrac{5}{3} + Ce^{-3t}$ の形をしている」ことが証明できる。

<証明> (1) の任意の解を y_2 とすると $y_2{}' + 3y_2 = 5$ である。今

$$w = y_2 - \frac{5}{3}$$

とおくと

$$w' + 3w = \left(y_2 - \frac{5}{3}\right)' + 3\left(y_2 - \frac{5}{3}\right) = y_2{}' + 3y_2 - 5 = 5 - 5 = 0$$

より w は (2) の解だから

$$w = Ce^{-3t} \implies y_2 - \frac{5}{3} = Ce^{-3t} \implies y_2 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \qquad (\text{証明終})$$

＜1階線形微分方程式 3＞

前ページの議論を一般化すると以下のようになる。

1 階線形微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の解の 1 つが分かった場合、その解を y_1 とする。

次に同次微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解を

(2) の一般解 : $\boxed{y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}}$ (C は任意定数)

とすると、(1) の一般解は

(1) の一般解 : $\boxed{y = y_1 + y_0 = y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}}$ (C は任意定数)

となる。すなわち「(1) の解は全て $y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}$ の形をしている」ことが前ページと同様に証明できる (証明略)。

例 微分方程式

$$(3) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 8}$$

の一般解を求めたい。

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

とおくと、y_1 は定数だから $\dfrac{dy_1}{dt} + 5y_1 = 0 + 5 \times \dfrac{8}{5} = 8$ より (1) の解である。

ここで同次微分方程式

$$(4) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 5y = 0}$$

の一般解は

$\boxed{y_0 = Ce^{-5t}}$ (C は任意定数)

だから (3) の一般解は

(3) の一般解 : $\boxed{y = y_1 + y_0 = \dfrac{8}{5} + Ce^{-5t}}$ (C は任意定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし $a \neq 0$)

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 5$

(2) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

＜１階線形微分方程式４＞

例 微分方程式

$$(1)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=e^{4t}}$$

を考える。今

$$y_1=\frac{1}{7}e^{4t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt}+3y_1=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)+3\left(\frac{1}{7}e^{4t}\right)=\frac{4}{7}e^{4t}+\frac{3}{7}e^{4t}=e^{4t}$$

より y_1 は (1) の解である。同次方程式

$$(2)\quad \boxed{\frac{dy}{dt}+3y=0}$$

の一般解を

$$(**)\quad \boxed{y_0=Ce^{-3t}}$$

とおくと (1) の一般解は

$$(1)\text{ の一般解 : }\ \underline{y=y_1+y_0=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}\quad (C\text{ は任意定数})}$$

＜別解＞ ((1) の解 y_1 も自動的に求まる方法)

Step1 同次方程式 (2) の一般解 $(**)$ の定数 C を関数 $C(t)$ におきかえる

$$(3)\quad \boxed{y=C(t)e^{-3t}}$$

とおく。

Step2 (3) を (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}+3y&=\left(C(t)e^{-3t}\right)'+3\left(C(t)e^{-3t}\right)\\&=C'(t)e^{-3t}-3C(t)e^{-3t}+3C(t)e^{-3t}\\&=C'(t)e^{-3t}\end{aligned}$$

積の微分
$(\square\times\triangle)'=\square'\times\triangle+\square\times\triangle'$

(1) より

$$C'(t)e^{-3t}=e^{4t}$$

$$\Downarrow$$

両辺に e^{3t} をかける

$$C'(t)=e^{7t}$$

$$\Downarrow$$

積分

$$(4)\cdots\quad \boxed{C(t)=\int e^{7t}dt=\frac{1}{7}e^{7t}+C}$$

Step3 (4) を (3) に代入

$$\underline{(\text{答})\quad y=\left(\frac{1}{7}e^{7t}+C\right)e^{-3t}=\frac{1}{7}e^{4t}+Ce^{-3t}}$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt}+4y=e^{5t}$, (2) $\dfrac{dy}{dt}-4y=e^{5t}$

＜ 1 階線形微分方程式 5 ＞

前ページの別解のような解き方を**定数変化法**という。1 階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

例題 微分方程式

(1) $$\boxed{\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}}$$

の一般解を求めよ。

(解) 定数変化法によって求める。

Step1 同次微分方程式

(2) $$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{3t}$$

の定数 C のかわりに関数 $C(t)$ でおきかえたものを y とする。

(3) $$\boxed{y = C(t)e^{3t}}$$

Step2 (1) に代入して $C(t)$ を決定する。

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} - 3y &= \big(C(t)e^{3t}\big)' - 3\big(C(t)e^{3t}\big) \\ &= C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3C(t)e^{3t} \\ &= C'(t)e^{3t}\end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{3t} = e^{3t}$$
$$\Downarrow$$
$$C'(t) = 1$$
$$\Downarrow$$

(4) $$\boxed{C(t) = \int 1dt = t + C}$$

Step3 (4) を (3) に代入する。

(答) $y = (t + C)\,e^{3t} = te^{3t} + Ce^{3t}$ (C は任意定数)

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^{2t}$, (2) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t}$, (3) $\dfrac{dy}{dt} - ay = e^{at}$

＜ 1 階線形微分方程式の一般解 1 ＞

一般の 1 階線形微分方程式

$$(1) \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の一般解を求めるため、同次方程式

$$(2) \qquad \frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}$$

の定数 C を $C(t)$ におきかえたものを

$$(3) \qquad \boxed{y = C(t)e^{-\int p(t)dt}}$$

とおく。(1) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + p(t)y &= \frac{d}{dt}\left(C(t)e^{-\int p(t)dt}\right) + p(t)\left(C(t)e^{-\int p(t)dt}\right) \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt} - p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} + p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt}\end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{-\int p(t)dt} = q(t)$$

$$\Downarrow \qquad \text{両辺に } e^{\int p(t)dt} \text{ をかける}$$

$$C'(t) = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

$$\Downarrow \qquad \text{積分}$$

$$(4) \qquad \boxed{C(t) = \int \left(q(t)e^{\int p(t)dt}\right) dt + C}$$

より (4) を (3) に代入すると (1) の一般解は

$$\boxed{y = \left\{\int \left(q(t)e^{\int p(t)dt}\right) dt + C\right\} e^{-\int p(t)dt}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{1 階線形微分方程式} \\ \text{(1) の一般解の公式}\end{array}\right)$$

問 1 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = q(t)$$

の一般解を (上の公式で $\int p(t)dt = -at$ とおくことにより) 求めよ。

問 2 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$$

の一般解を (問 1 の結果で $q(t) = e^{at}$ とおくことにより) 求めよ。

＜1階線形微分方程式の一般解 2＞

前ページの結果より1階線形微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の一般解は

$$y = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt})dt + C \right\} e^{-\int p(t)dt} = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt})dt \right\} e^{-\int p(t)dt} + Ce^{-\int p(t)dt}$$

である。ここで

$$y_0 = Ce^{-\int p(t)dt} \qquad , \qquad y_1 = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt}dt) \right\} e^{-\int p(t)dt}$$

とおくと y_0 は同時微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy_0}{dt} + p(t)y_0 = 0}$$

の一般解であり、y_1 は (1) の解である。y_1 を (1) の**特解**という。

従って (1) の一般解 y は

$$\boxed{\text{(1) の一般解}} = y = y_1 + y_0 = \boxed{\text{(1) の特解}} + \boxed{\text{(2) の一般解}}$$

と表される。

問1 y_1 が (1) の解であることを示したい。以下の式を計算して $g(t)$ になることを確かめよ。（式変形を書くこと）

$$\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1 =$$

(ヒント) 積の微分公式と $\frac{d}{dt}\left\{ \int f(t)dt \right\} = f(t)$ 等を用いる。

問2 次の微分方程式の特解と一般解を求めよ。(ただし a, b は定数で $a \neq b, \quad a \neq 0$)

(1) $\frac{dy}{dt} - ay = b$ (2) $\frac{dy}{dt} - ay = e^{bt}$ (3) $\frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$

特解　　特解　　特解

一般解　　一般解　　一般解

＜１階微分方程式の初期値問題＞

例題　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(解)　(1)　求積法より $y = \displaystyle\int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = C = 20$　　$\underline{\text{(答) } y = 6t - 5t^2 + 20}$

(2)　3 ページと同様にして一般解は $y = Ce^{-2t}$

初期条件より $t = 0$ のとき $y = Ce^0 = C = 5$　　$\underline{\text{(答) } y = 5e^{-2t}}$

(3)　7 ページと同様に考える。

$$y_1 = \frac{-5}{2}$$

は (3) の解である。同次方程式 $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ の一般解 $y_0 = Ce^{-2t}$ に対し

$$y = y_1 + y_0 = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t}$$

が (3) の一般解である。

初期条件より $t = 0$ のとき $y = -\dfrac{5}{2} + Ce^0 = -\dfrac{5}{2} + C = 4$ より $C = \dfrac{13}{2}$

$$\underline{\text{(答) } y = -\frac{5}{2} + \frac{13}{2}e^{-2t}}$$

問　次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし k, g は定数で $k \neq 0$)

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = 9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 0 \end{cases}$　(4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

< 2 階線形微分方程式 1 >

与えられた関数 $a(t)$, $b(t)$, $F(t)$ に対し、未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)} \cdots (*)_1$$

を **2 階線形微分方程式**という。1 階線形微分方程式の場合は 10,11 ページのような一般解を求める公式があるが、2 階以上の場合は解の公式が存在しない。場合に応じて一般解の形がちがうが、共通して次の基本定理が成り立つ。

< 基本定理 >

任意の点 t_0 と定数 α , β に対して

$$\boxed{y(t_0) = \alpha \quad , \quad y'(t_0) = \beta} \cdots (*)_2$$

を満たす $(*)_1$ の解 $y = y(t)$ がただ 1 つ存在する。

通常は $t_0 = 0$ の場合を考えるので、条件 $(*)_2$ を**初期条件**という。

例 微分方程式

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} = -10}$$

を考える。t について積分すると

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \int \frac{d^2y}{dt^2}dt = \int (-10)dt = -10t + C_1$$

$$y(t) = \int \frac{dy}{dt}dt = \int (-10t + C_1)dt = -5t^2 + C_1t + C_2$$

より $\boldsymbol{y = -5t^2 + C_1t + C_2}$ が (1) の一般解である。ここで初期条件として

(2) $\boxed{y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = 4}$ (初期条件)

があれば

$$y(0) = 3 \;\Rightarrow\; t = 0 \text{ のとき } y = 3 \;\Rightarrow\; C_2 = 3$$

$$y'(0) = 4 \;\Rightarrow\; t = 0 \text{ のとき } y' = 4 \;\Rightarrow\; C_1 = 4$$

より $\boldsymbol{y = -5t^2 + 4t + 3}$ が (2) をみたす (1) の解である。

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

(1) $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 8 \\ y(0) = 7 \,,\; y'(0) = 6 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 6t + 2 \\ y(0) = 8 \,,\; y'(0) = 9 \end{cases}$$

＜ 2階線形微分方程式 2 ＞

例　t の関数 $y = y(t)$ に関する微分方程式

(1)　$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y}$

を考える。今

$$y_1(t) = \cos(3t) \quad , \qquad y_2(t) = \sin(3t)$$

とおくと

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \big(\cos(3t)\big)'' = \big(-3\sin(3t)\big)' = -9\cos(3t) = -9y_1$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = \big(\sin(3t)\big)'' = \big(3\cos(3t)\big)' = -9\sin(3t) = -9y_2$$

より y_1 と y_2 は共に (1) の解である。さらに定数 C_1 と C_2 に対して

(2)　$\boxed{y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$

とおくと

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dt^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dt^2} = C_1 \times (-9y_1) + C_2 \times (-9y_2) = -9(C_1y_1 + C_2y_2) = -9y$$

より y もまた (1) の解である。次のページで説明するが、(1) の解は全て (2) の形をしている。ここで初期条件が

(3)　$\boxed{y(0) = 4 \quad , \qquad y'(0) = 5}$　　(初期条件)

であるとき (2) 式より

(4)　$4 = y(0) = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 = C_1$

である。また (2) を微分すると

$$y'(t) = -3C_1\sin(3t) + 3C_2\cos(3t)$$

より

(5)　$5 = y'(0) = -3C_1\sin 0 + 3C_2\cos 0 = 3C_2$

であるから (4)(5) より $C_1 = 4$, $C_2 = \dfrac{5}{3}$ となる。よって (3) をみたす (1) の解は

$$\boldsymbol{y = 4\cos(3t) + \frac{5}{3}\sin(3t)} \quad \cdots \text{ 初期条件 (3) をみたす (1) の解}$$

問　次の初期条件をみたす (1) の解 y を求めよ。

① $y(0) = 6$,　$y'(0) = 8$　　　② $y(0) = \alpha$,　$y'(0) = \beta$

＜ 2 階線形同次微分方程式 1 ＞

与えられた関数 $a(t)$, $b(t)$ に対し未知関数 y に関する微分方程式

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0}$$

を **2 階線形同次微分方程式**という。これは 2 階線形微分方程式
(13 ページ $(*)_1$ 式) で $F(t) = 0$ の場合である。

例 $a(t) = 0$, $b(t) = 9$ のときの同次微分方程式

$$(1) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0}$$

を考える。これは前ページの例の微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -9y$ と
同じであるから定数 C_1 と C_2 に対し

$$(2) \qquad \boxed{y = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)}$$

は (1) の解である。実は「(1) の解は全て (2) の形をしている」ことが証明
できる。(2) を微分方程式 (1) の**一般解**といい、 $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$
を (1) の**基本解**という。

[証明] ((1) の解が全て (2) の形をしていることの証明)
(1) の任意の解を $y_1 = y_1(t)$ とおく。 y_1 の初期値を

$$(3) \qquad \boxed{y_1(0) = \alpha\ , \quad {y_1}'(0) = \beta}$$

とする。一方

$$y_2(t) = \alpha\cos(3t) + \frac{\beta}{3}\sin(3t)$$

とおくと y_2 は (1) の解であり

$$y_2(0) = \alpha\ , \quad {y_2}'(0) = \beta$$

をみたす。13 ページの基本定理より初期条件 (3) をみたす (1) の解は
ただ 1 つであるから

$$y_1(t) = y_2(t)$$

である。従って $y_1(t) = \alpha\cos(3t) + \dfrac{\beta}{3}\sin(3t)$ であるから (2) の形をしている。(証明終)

問 $y(t) = \cos(2t)$ は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解を求め、この微分方程式の一般解
を求めよ。

＜ 2 階線形同次微分方程式 2 ＞

このページでは 2 つの関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が互いに他の定数倍 $\big(y_1(t) = k_1 y_2(t)$ または $y_2(t) = k_2 y_1(t)\big)$ になっているとき y_1 と y_2 は**同じ形の関数**ということにする。

一般の 2 階線形同次微分方程式

$$(*)_1 \cdots \frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

を考える。もし 2 つの異なる関数 $y_1(t)$ と $y_2(t)$ が $(*)_1$ の解ならば、任意の定数 C_1 と C_2 に対し

$$(*)_2 \cdots y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

とおくと $(*)_2$ も $(*)_1$ の解である。実は「y_1 と y_2 が同じ形の関数でなければ、$(*)_1$ の全ての解は $(*)_2$ の形をしている」ことが前のページと同様にして証明できる（証明略）。このとき $y_1(t)$ と $y_2(t)$ を $(*)_1$ の**基本解**といい、$(*)_2$ を $(*)_1$ の**一般解**という。

例 微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。今

$$y_1(t) = e^{3t} \quad , \quad y_2(t) = te^{3t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 3e^{3t} \ , \ \frac{d^2y_1}{dt^2} = 9e^{3t} \ , \ \frac{dy_2}{dt} = e^{3t} + 3te^{3t} \ , \ \frac{d^2y_2}{dt^2} = 6e^{3t} + 9te^{3t}$$

であるから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} - 6\frac{dy_1}{dt} + 9y_1 = 9e^{3t} - 6 \times 3e^{3t} + 9 \times e^{3t} = 0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - 6\frac{dy_2}{dt} + 9y_2 = 6e^{3t} + 9te^{3t} - 6 \times (e^{3t} + 3te^{3t}) + 9 \times te^{3t} = 0$$

より y_1 と y_2 は共に (1) の解である。すなわち y_1 と y_2 は (1) の基本解であるから (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

問 $y = te^{5t}$ は　微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解をみつけ、この微分方程式の一般解を求めよ。

< 微分演算子 D >

t の関数 $y = y(t)$ に対し、微分記号を

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dt} = Dy \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = D^2y}$$

と書くことにする。この記号 D を**微分演算子**または**微分作用素**という。

例 1 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

を D を用いて書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = Dy - 3y = (D-3)y$$

より

$$(D-3)y = 0$$

となる。

例 2 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

を D を用いて書くと

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = D^2y - 5Dy + 6y = (D^2 - 5D + 6)y$$

より

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。

問 1 次の微分方程式を D を用いて表せ。

(1) $\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

例 3 微分方程式

$$(D-3)y = e^{3t}$$

を考える。これを D を使わずに書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$$

となる。9 ページよりこの微分方程式の一般解は

$$\boldsymbol{y = te^{3t} + Ce^{3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし a は定数)

(1) $(D-4)y = 0$ (2) $(D-a)y = 0$

(3) $(D-4)y = e^{4t}$ (4) $(D-a)y = e^{at}$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 >

定数 a , b に対し t の関数 y に関する微分方程式

$$(*) \quad \cdots \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

を**定数係数 2 階線形同次微分方程式**という。この形の微分方程式を解くためには前ページの微分演算子 D を用いると便利である。$(*)$ 式を D を用いて書きなおすと

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

となる。

例 微分方程式

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

の一般解を求めたい。この式を D を用いて表すと

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。D に関する 2 次式を因数分解すると

$$(D-2)(D-3)y = 0$$

となるから

$$(D-2)y = 0 \qquad \text{または} \qquad (D-3)y = 0$$

となり前ページの結果から

$$y = C_1e^{2t} \qquad \text{または} \qquad y = C_2e^{3t}$$

が導かれる。これが (1) の基本解であるから、求める一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}} \quad (C_1 , C_2 \text{ は任意定数})$$

問 1 以下の関数 y に対し、実際に微分して $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y$ を計算せよ。

(1) $y = e^{2t}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y =$

(2) $y = e^{3t}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y =$

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 >

例 微分方程式

(1) $$\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。微分演算子 D を用いると

(2) $$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

より

$$(D-3)(D-3)y = 0$$

となる。ここで $\boxed{(D-3)y_1 = 0}$ の解を y_1 とおくと

$$(D-3)(D-3)y_1 = (D-3)0 = 0$$

より y_1 は (2) の解である。またこの y_1 に対して $\boxed{(D-3)y_2 = y_1}$ の解を y_2 とおくと

$$(D-3)(D-3)y_2 = (D-3)y_1 = 0$$

より y_2 は (2) の解である。

17 ページ問 2 の結果より

$y_1 = e^{3t}$ は $(D-3)y_1 = 0$ の解

$y_2 = te^{3t}$ は $(D-3)y_2 = e^{3t}$ の解

であるから y_1 , y_2 が (1) の基本解である。よって (1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}} \qquad (C_1 , C_2 \text{ は任意定数})$$

である。(16 ページの例参照)。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし α は定数)

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 10\dfrac{dy}{dt} + 25y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\alpha\dfrac{dy}{dt} + \alpha^2 y = 0$

＜定数係数2階線形同次微分方程式3＞

例 微分方程式

(1) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$$

を考える。14，15ページで $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が (1) の基本解であることがわかった。この基本解を見つけるには微分演算子 D を用いて以下のように考える。

(1) を D を用いて表すと

$$(D^2 + 9)y = 0$$

となる。 $D^2 + 9$ を複素数の範囲で因数分解すると

(2) $$(D - 3i)(D + 3i)y = 0$$

となる。よって y を複素数値関数と考えると

$$e^{3it} \quad と \quad e^{-3it}$$

が (2) の基本解であるから

(3) $$\boldsymbol{y = Z_1 e^{3it} + Z_2 e^{-3it}} \quad (Z_1 , Z_2 は任意の複素数定数)$$

となる。これが複素数値関数としての (2) の一般解である。この中に (1) の基本解が含まれている。オイラーの公式より

$$Z_1 e^{3it} + Z_2 e^{-3it} = Z_1\{\cos(3t) + i\sin(3t)\} + Z_2\{\cos(-3t) + i\sin(-3t)\}$$

である。ここで $\cos(-3t) = \cos(3t)$ ， $\sin(-3t) = -\sin(3t)$ より (3) は

(3)′ $$\boldsymbol{y = (Z_1 + Z_2)\cos(3t) + i(Z_1 - Z_2)\sin(3t)}$$

と書きなおせる。従って $\cos(3t)$ と $\sin(3t)$ が基本解であるから (1) の一般解は

(4) $$\boldsymbol{y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)} \quad (C_1 , C_2 は任意の実数定数)$$

となる。

(注) (3)′ で $Z_1 = Z_2 = \frac{1}{2}$ のとき $y = \cos(3t)$ となる。また $Z_1 = -\frac{i}{2}$, $Z_2 = \frac{i}{2}$ のとき $y = \sin(3t)$ となる。

問1 上の例で $Z_1 = \dfrac{C_1 - C_2 i}{2}$ ， $Z_2 = \dfrac{C_1 + C_2 i}{2}$ のとき、(3)′ の y を C_1 , C_2 , $\cos(3t)$, $\sin(3t)$ を用いて表せ。

$y =$

問2 次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。
ただし ω は実数の定数とする。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

< 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 >

例 微分方程式

(1) $$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+229y=0$$

を考える。D を用いて表すと

(2) $$(D^2+4D+229)y=0$$

となる。D の 2 次式を因数分解するため 2 次方程式を解くと

$$D^2+4D+229=0 \quad \Rightarrow \quad D=-2\pm 15i$$

より (2) 式は次のように因数分解される

(2)′ $$\big(D-(-2+15i)\big)\big(D-(-2-15i)\big)y=0$$

従って (2) の複素数解は

(3) $$\boldsymbol{y=Z_1e^{(-2+15i)t}+Z_2e^{(-2-15i)t}}$$ (Z_1 , Z_2 は任意の複素数定数)

となる。この中に (1) の実数値基本解 y_1 , y_2 が含まれている。オイラーの公式より

$$e^{(-2+15i)t}=e^{-2t}\{\cos(15t)+i\sin(15t)\}$$
$$e^{(-2-15i)t}=e^{-2t}\{\cos(-15t)+i\sin(-15t)\}=e^{-2t}\{\cos(15t)-i\sin(15t)\}$$

となるから (3) は次のように書きなおせる。

(3)′ $$\boldsymbol{y=(Z_1+Z_2)e^{-2t}\cos(15t)+i(Z_1-Z_2)e^{-2t}\sin(15t)}$$

従って $y_1=e^{-2t}\cos(15t)$ と $y_2=e^{-2t}\sin(15t)$ が (1) の基本解である。
よって (1) の一般解は

(4) $$\boldsymbol{y=C_1e^{-2t}\cos(15t)+C_2e^{-2t}\sin(15t)}$$ (C_1 , C_2 は任意の実数定数)

となる。

問 1 上の y_1 , y_2 を実際に微分して次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y_1}{dt^2}+4\dfrac{dy_1}{dt}+229y_1=$ (2) $\dfrac{d^2y_2}{dt^2}+4\dfrac{dy_2}{dt}+229y_2=$

問 2 上の例で $Z_1=\dfrac{C_1-C_2i}{2}$, $Z_2=\dfrac{C_1+C_2i}{2}$ のとき (3)′ の y を C_1 , C_2 および $e^{-2t}\cos(15t)$ と $e^{-2t}\sin(15t)$ を用いて表せ。

$y=$

問 3 次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+5y=0$ (2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+10y=0$

< 定数係数２階線形同次微分方程式５ >

一般の定数係数２階線形同次微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

の一般解の求め方をまとめる。

Step 1. 微分演算子 D に関する２次方程式

$$(2) \quad D^2 + aD + b = 0$$

を解く。

Step 2. ２次方程式 (2) の解が以下のどの場合かを考える。

[I] $a^2 - 4b > 0$ のとき (2) は２つの実数解 α , β をもつ。
このとき (2) は $(D-\alpha)(D-\beta)$ と因数分解されるから
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}} \quad (C_1\ ,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[II] $a^2 - 4b = 0$ のとき (2) はただ１つの実数解 α(α は実数) をもつ。
このとき (2) は $(D-\alpha)(D-\alpha)$ と因数分解されるから 19 ページより
(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}} \quad (C_1\ ,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

[III] $a^2 - 4b < 0$ のとき (2) は２つの複素数解 α , β をもつ。今

$$\alpha = \mu + \nu i \qquad , \qquad \beta = \mu - \nu i$$

であれば前ページと同様に考えると、(1) の一般解は

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{\mu t}\cos(\nu t) + C_2 e^{\mu t}\sin(\nu t)} \quad (C_1\ ,\ C_2 \text{ は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} - 6y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 8\dfrac{dy}{dt} + 20y = 0$

< 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 >

例 微分方程式

(1) $$\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y=7$$

を考える。今

(2) $$y_1(t)=\frac{7}{6}$$

とおくと y_1 は定数だから

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}-5\frac{dy_1}{dt}+6y_1=0-5\times 0+6\times\frac{7}{6}=7$$

となり (1) 式をみたす。従って y_1 は (1) の解である。これを (1) の**特解**という。

(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を $y=y(t)$ とし

(3) $$y_0(t)=y(t)-\frac{7}{6}$$

とおくと、y は (1) の解だから

$$\frac{d^2y_0}{dt^2}-5\frac{dy_0}{dt}+6y_0=\frac{d^2y}{dt^2}-5\frac{dy}{dt}+6y-7=0$$

となる。従って y_0 は同次方程式

(4) $$\frac{d^2y_0}{dt^2}-5\frac{dy_0}{dt}+6y_0=0$$

の解である。18 ページより (4) の一般解は

$$y_0=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$$

だから (3) より (1) の一般解 y は

$$\boldsymbol{y\left(=y_0+\frac{7}{6}\right)=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+\frac{7}{6}}\quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

一般の 2 階線形微分方程式

$(*)_1$ $$\frac{d^2y}{dt^2}+a(t)\frac{dy}{dt}+b(t)y=F(t)$$

で $F(t)\neq 0$ のとき**非同次方程式**という。もし (1) の解（特解）y_1 が 1 つみつかれば、同次方程式

$(*)_2$ $$\frac{d^2y_0}{dt^2}+a(t)\frac{dy_0}{dt}+b(t)y_0=0$$

の一般解 y_0 に対し $(*)_1$ の一般解 y は

$(*)_1$ の一般解：$\boldsymbol{y=y_0+y_1}$ (y_0 は $(*)_2$ の一般解 , y_1 は $(*)_1$ の特解)

であることが例と同様にしてわかる。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}-2y=6$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}-4y=8$

(3) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+4y=10$

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+16y=20$

＜定数係数 2 階線形非同次微分方程式 2 ＞

与えられた関数 $F(t)$ $(\neq 0)$ と定数 a , b に対し次の形の微分方程式

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)$$

を**定数係数 2 階線形非同次微分方程式**という。前ページより、$F(t)$ が定数の時は $(*)$ の特解も定数である。実は $F(t)$ が t の n 次式のときは特解も t の n 次式になる。さらに定数 r , α , β に対し、$F(t)$ が $re^{\alpha t}$, $re^{\alpha t}\cos(\beta t)$, $re^{\alpha t}\sin(\beta t)$ の形のとき $(*)$ の特解は次の表のようになる（証明は実際に $(*)$ 式の左辺に特解を代入し、計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。）

$F(t)$	a , b と α , β の関係	特 解
$re^{\alpha t}$	① $\alpha^2+\alpha a+b\neq 0$	$\dfrac{r}{\alpha^2+\alpha a+b}e^{\alpha t}$
	② $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\alpha+a}te^{\alpha t}$
	③ $\begin{cases}\alpha^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ 2\alpha+a=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2}t^2e^{\alpha t}$
$re^{\alpha t}\cos(\beta t)$	④ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=(2\alpha+a)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\{A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\}$
	⑤ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=(2\alpha+a)\beta=0\end{cases}$	$\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\sin(\beta t)$
$re^{\alpha t}\sin(\beta t)$	⑥ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b\neq 0\\ \text{または}\\ B=(2\alpha+a)\beta\neq 0\end{cases}$	$\dfrac{r}{A^2+B^2}e^{\alpha t}\{A\sin(\beta t)-B\cos(\beta t)\}$
	⑦ $\begin{cases}A=\alpha^2-\beta^2+\alpha a+b=0\\ \text{かつ}\\ B=(2\alpha+a)\beta=0\end{cases}$	$-\dfrac{r}{2\beta}te^{\alpha t}\cos(\beta t)$

例 定数 ω , r , β （ただし $\omega^2\neq\beta^2$ とする）に対し微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\beta t)$$

を考える。上の表では $a=0$, $b=\omega^2$, $\alpha=0$, $A=-\beta^2+\omega^2\neq 0$, $B=0$ であるから⑥の場合であり、特解 y_1 は $y_1=\frac{r}{A^2+0^2}e^0\{A\sin(\beta t)-0\}=\frac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)$ である。一方 (1) の同次方程式

$$(2) \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} + \omega^2 y_0 = 0$$

の一般解は 20 ページより $y_0=C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t)$ であるから、(1) の一般解は

(1) の一般解 : $\boldsymbol{y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t) + \dfrac{r}{\omega^2-\beta^2}\sin(\beta t)}$ （C_1, C_2 は任意定数）

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし ω は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\omega t)$$

＜ 2階微分方程式の初期値問題 ＞

例題 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。(ただし L は定数)

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0 \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 229y = 0 \\ y(0) = L,\ \ y'(0) = 0 \end{cases}$

(解)　(1) $D^2 - 5D + 6 = (D-2)(D-3)$ より (1) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

である。この導関数は

$$y'(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = -1,\ \ C_2 = 2$ より

(答) $\boldsymbol{y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}}$

(2) $D^2 + 4D + 229 = 0 \Rightarrow D = -2 \pm 15i$ より (2) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{-2t}\cos(15t) + C_2e^{-2t}\sin(15t)$$

である。

$$y'(t) = -2C_1e^{-2t}\cos(15t) - 15C_1e^{-2t}\sin(15t) - 2C_2e^{-2t}\sin(15t) + 15C_2e^{-2t}\cos(15t)$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = L \\ y'(0) = -2C_1 + 15C_2 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと $C_1 = L,\ \ C_2 = \dfrac{2L}{15}$ より

(答) $\boldsymbol{y(t) = Le^{-2t}\cos(15t) + \dfrac{2L}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$

問 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0 \\ y(0) = 5,\ \ y'(0) = 7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0 \\ y(0) = 10,\ \ y'(0) = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 25y = 0 \\ y(0) = 3,\ \ y'(0) = 2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ y(0) = 10,\ \ y'(0) = 0 \end{cases}$

< 微分方程式の練習 1 >

例 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし a, b は定数で $a \neq 0$ とする。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t + 5$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = \cos(2t)$

(3) $\dfrac{dy}{dt} = -5y$

(4) $\dfrac{dy}{dt} = 2ty$

(5) $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 3$

(6) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = 5$

(7) $\dfrac{dy}{dt} + ay = b$

(8) $\dfrac{dy}{dt} - 2y = e^t$

(9) $\dfrac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(10) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = at + b$

(11) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

(12) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0$

(13) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 9y = 0$

(14) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 6\dfrac{dy}{dt} + 9y = 0$

(15) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 8\dfrac{dy}{dt} + 16y = 0$

(16) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$

(17) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$

(18) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

(19) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 6\dfrac{dy}{dt} + 25y = 0$

(20) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 6y = 4$

(21) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 5$

(22) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 5$

< 微分方程式の練習 2 >

問 次の微分方程式を以下の初期条件で解け。

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 2t - 3$
$y(0) = 5$

(2) $\dfrac{dy}{dt} = -3y$
$y(0) = 4$

(3) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 5$
$y(0) = 6$

(4) $\dfrac{dv}{dt} + 3v = 6$
$v(0) = 5$

(5) $\dfrac{dI}{dt} + 2I = 5$
$I(0) = 0$

(6) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 4$
$y(0) = 1$, $y'(0) = 3$

(7) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0$
$y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

(8) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$
$y(0) = 2$, $y'(0) = 6$

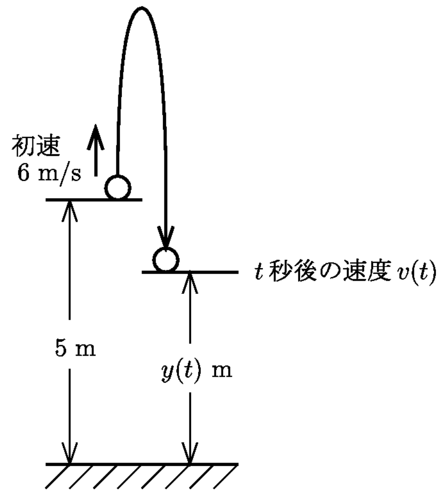
(9) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0$
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(10) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$
$y(0) = 5$, $y'(0) = 6$

(11) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(12) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 13y = 0$
$y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

< 微分方程式の応用 1 >



例 地上 5 m の高さから初速 6(m/s) で質量 m(kg) の物体を真上に投げ上げた。
t 秒後の速度 $v(t)$ および高さ $y(t)$ を求めたい。空気抵抗を考えないとすると、この物体に働く力は重力だけなので、加速度を a とすると

$$\text{重力} = ma = -mg \qquad (g = 9.8 \ \ \mathrm{m/s^2})$$

となる。従って

$$\text{加速度} = a = -g$$

が成り立つ。加速度 a は速度 v を微分したもの $\left(a = \dfrac{dv}{dt}\right)$

(1) $$\frac{dv}{dt} = -g = -9.8$$

より

$$v(t) = -9.8t + C_1$$

となる。ここで初速 6(m/s) だから $t = 0$ のとき $v(0) = 6$ より $C_1 = 6$
よって

$$\underline{t\text{ 秒後の速度 } v(t) = -9.8t + 6 \quad (\mathrm{m/s})}$$

である。速度は位置 $y(t)$ を微分したもの $\left(v = \dfrac{dy}{dt}\right)$

(2) $$\frac{dy}{dt} = -9.8t + 6$$

より

$$y(t) = -4.9t^2 + 6t + C_2$$

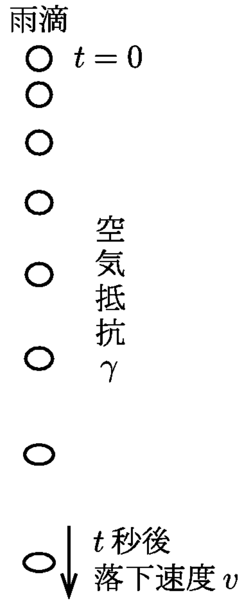
となる。ここで初期位置が 5 m だから $t = 0$ のとき $y(0) = 5$ より $C_2 = 5$
よって

$$\underline{t\text{ 秒後の位置 } y(t) = -4.9t^2 + 6t + 5 \quad (\mathrm{m})}$$

である。

問 地上 10 m の高さから初速 7(m/s) で質量 m(kg) の物体を真上に投げ上げた。
t 秒後の速度 $v(t)$ と高さ $y(t)$ を求めよ。ただし空気抵抗は考えない。

< 微分方程式の応用 2 >



例 (自由落下 $\cdots$ 空気抵抗あり)
雨のようにかなり上空から落ちるのに地面に落ちた時の速度があまり速くないのは空気抵抗による。水滴を上空から落とす実験をすると、最初球形だった水滴が速度を増すとだんだん円盤状になり、より空気抵抗を受けやすい形になる。つまり速度に比例して空気抵抗が大きくなる。この比例定数を γ とすると、落ちるとき「$\gamma\times$ 速度」というブレーキがかかるので

落ちる加速度 = 重力加速度 $-\gamma\times$ 速度

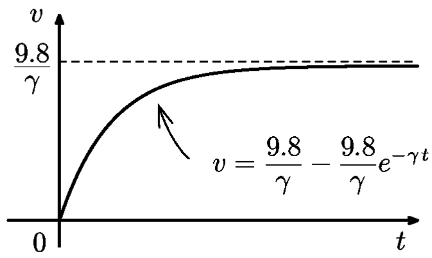
となる。t 秒後の落下速度 v に関する式で表すと

(1) $$\frac{dv}{dt}=9.8-\gamma v \quad (t=0 \text{ のとき } v=0)$$

という微分方程式ができる。これは 14 ページ問 (3) と同じ方程式であるから、14 ページの結果より

(1) の解：$\underline{v=\dfrac{9.8}{\gamma}-\dfrac{9.8}{\gamma}e^{-\gamma t}}$

となる。v のグラフは右図のようになり、落下速度 v は一定速度 $\dfrac{9.8}{\gamma}$ より大きくならないことがわかる。



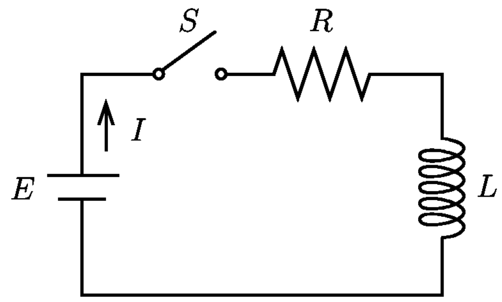
問 1 上の例で上向きの速度をプラス、下向きの速度をマイナスと考えたとき t 秒後の速度 v はマイナスだから、v の方程式は

(2) $$\frac{dv}{dt}=-9.8-\gamma v$$

となる。初期条件 ($t=0$ のとき $v=0$) のもとで (2) の解 v を求めよ。

問 2 物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。t 秒後の速度を v とする (ただし上向きの速度はプラス、下向きの速度はマイナスと考える)。例と同様に速度に比例する空気抵抗があるとする。空気抵抗の比例定数を γ として t 秒後の速度 v を求めよ。
また極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} v$ を求めよ。(ヒント：$\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma t}=0$)

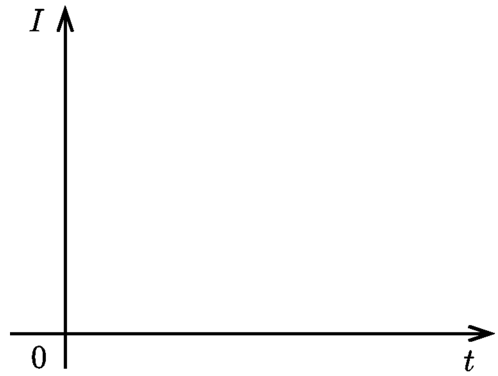
< 微分方程式の応用 3 >



問 右図のような直列回路のスイッチ S を閉じた瞬間から t 秒後の電流を $I = I(t)$ とおくと I は次の微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = \dfrac{E}{L} \\ t = 0 \text{ のとき } I = 0 \end{cases}$$

をみたす。ここで $R,\ L,\ E$ は正の定数で L は自己インダクタンス、R は抵抗、E は起電力と呼ばれる。この微分方程式の解 I を求めよ。
また、前ページの例を参考にして I のグラフを右図に描け。



< 微分方程式の応用 4 >

定数係数 2 階線形微分方程式

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)}$$

を考える。この微分方程式は未知関数 $y = y(t)$ の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合、通常 $y = y(t)$ は時刻 t における物体の**位置**を表す。このとき $\frac{dy}{dt}$ は**速度**を表し、$\frac{d^2y}{dt^2}$ は**加速度**を意味する。このとき $(*)$ の係数 $a,\ b$ と関数 $F(t)$ は

a：速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数
b：位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数
$F(t)$：外力

を意味する。特に係数 a がプラスのときは a は**抵抗**を意味する。

ここでは $b = 0$ の場合

$$(**) \qquad \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = F(t)}$$

を考える。$(**)$ は見かけ上 2 階微分方程式だが、本質的には 1 階微分方程式の解法によって解ける。速度を $v = \frac{dy}{dt}$ とおくと、$(**)$ 式は

$$(***) \qquad \boxed{\frac{dv}{dt} + av = F(t)}$$

となり、v に関する 1 階微分方程式になる。この解 $v = v(t)$ を求め、t で積分すると

$$\boxed{y = \int v(t)dt} \quad \cdots (**) \text{ の解} \quad (v = v(t) \text{ は } (***) \text{ の解})$$

$(**)$ の解 y が求まる。

問　次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

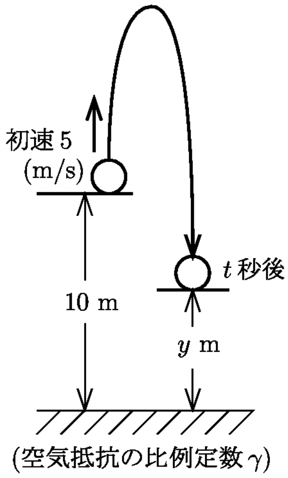
(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 10\ ,\ y'(0) = 6 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} = 6 \\ y(0) = 10\ ,\ y'(0) = 8 \end{cases}$

< 微分方程式の応用 5 >

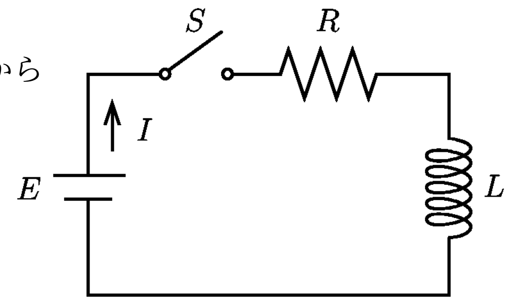
問 地上 10m の場所から物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。このとき速度に比例する空気抵抗があるとして、その比例定数を γ とする。t 秒後の高さを y(m) とすると、微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} + \gamma\dfrac{dy}{dt} = -9.8 \\ y(0) = 10\ ,\ y'(0) = 5 \end{cases}$$

が成り立つ。この微分方程式を解け。



＜微分方程式の応用 6＞



例 30 ページの問の場合にスイッチを閉じた瞬間から t 秒後の電流を $I = I(t)$ をおくと

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = \dfrac{E}{L} \\ t = 0 \ \text{のとき} \ I = 0 \end{cases}$$

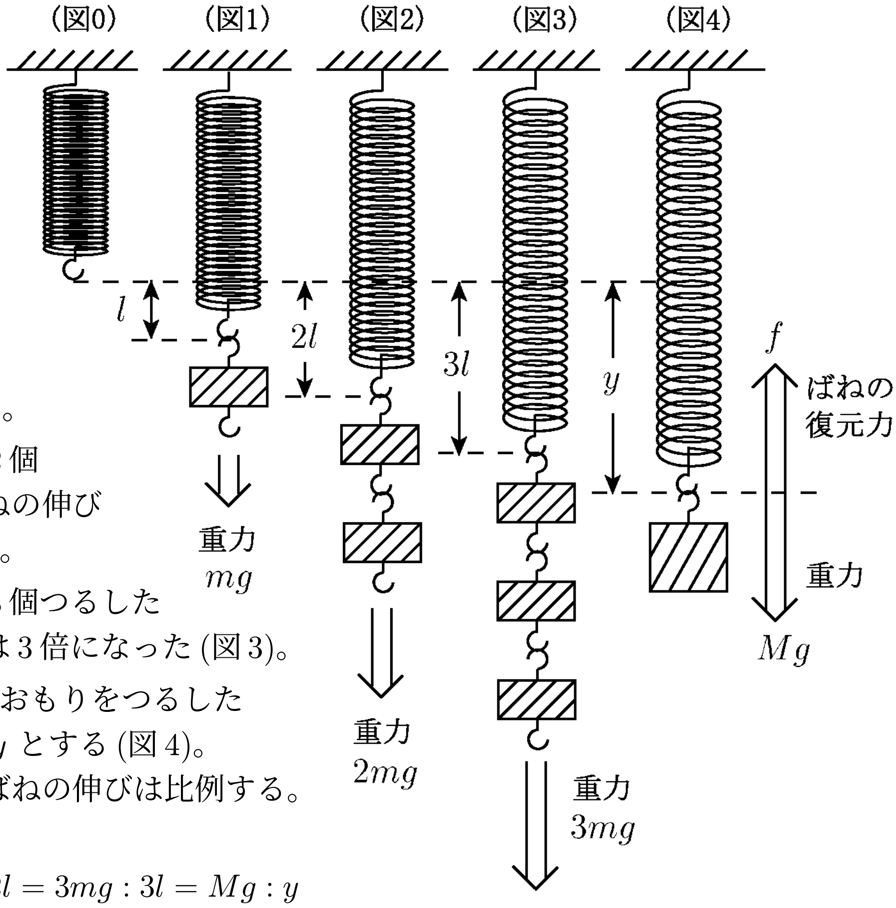
をみたす。ここで L は自己インダクタンス、R は抵抗、E は起電力と呼ばれる正の定数である。今 t 秒後の電気量 (電荷) を $q = q(t)$ とおくと電流 I は $I = \dfrac{dq}{dt}$ となる。つまり電流は電荷 q の流れる速度である。上の微分方程式を $I = \dfrac{dq}{dt}$ として q の式になおすと

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{E}{L} \\ q(0) = 0 \ , \ q'(0) = 0 \end{cases}$$

となる。

問 例の微分方程式 (2) の解 $q = q(t)$ を求めよ。

＜ばね1＞



ばねをつるして、質量 m(kg) のおもりを1個つるしたときのばねの伸びを l とする (図1)。

同じ質量のおもりを2個つるしたときに、ばねの伸びは2倍になった (図2)。

同じ質量のおもりを3個つるしたときに、ばねの伸びは3倍になった (図3)。

一般に質量 M(kg) のおもりをつるしたときのばねの伸びを y とする (図4)。
おもりによる重力とばねの伸びは比例する。
すなわち

$$mg : l = 2mg : 2l = 3mg : 3l = Mg : y$$

より

$$Mg = \frac{mg}{l}y$$

となる。ばねの復元力を f とすると f と重力 Mg はつりあっているから

$$f = -Mg = -\frac{mg}{l}y \qquad (g = 9.8(\mathrm{m/s^2})\text{ は重力加速度})$$

となる。ここで

$$k = \frac{mg}{l} = \frac{\text{おもりの重力}}{\text{ばねの伸び}}$$

とおくと

$$\boxed{f = -ky} \qquad (\text{フックの法則})$$

となる。これをフックの法則という。

問 かたいばねの場合に k は大きくなると考えられるか小さくなると考えられるか？ その理由をあわせて答えよ。

＜ばね 2＞

前ページの場合 $\boxed{k=\dfrac{\text{おもりの重力}}{\text{ばねの伸び}}}$ の値は

$$\text{前ページの図 1 の場合}\quad k=\frac{mg}{l}$$

$$\text{前ページの図 2 の場合}\quad k=\frac{2mg}{2l}=\frac{mg}{l}$$

$$\text{前ページの図 3 の場合}\quad k=\frac{3mg}{3l}=\frac{mg}{l}$$

となり、常に一定の数値になる。これは「ばね」によって決まる定数であり、「かたいばね」は k の値が大きくなる。k を**ばね定数**ともいう。

フックの法則

$$\boxed{f=-ky}\qquad (\text{「ばねの復元力」}=-k\times\text{「ばねの変化量」})$$

は「ばね」が伸びるときだけでなく縮むときにも適用できる。

ばねを引っぱり l だけ伸びたとき (図 2)、ばねの復元力 f は引っぱる方向と逆方向に kl の力で元にもどろうとする。
逆にばねを押して l だけ縮んだとき (図 3)、ばねの復元力 f は押した方向と逆方向に kl の力で元にもどろうとする。
このときばねの変化量 y は

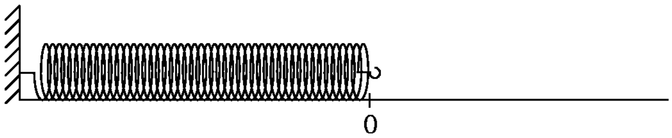
$$y=-l$$

となるので

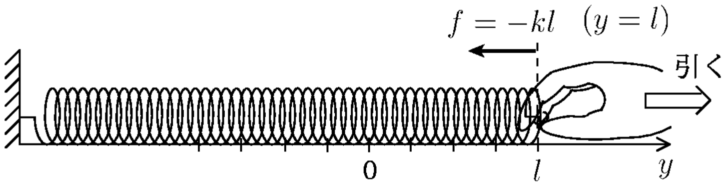
$$f=kl=-k(-l)=-ky$$

より、このときもフックの法則がなりたつ。

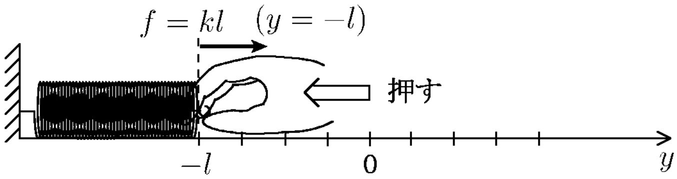
(図1)



(図2)

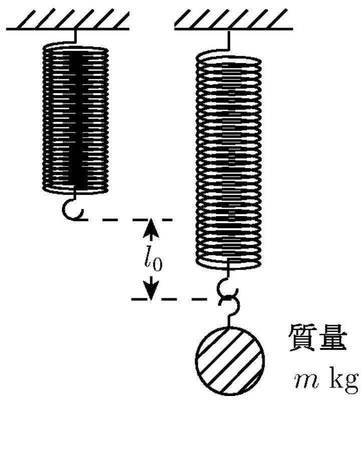


(図3)

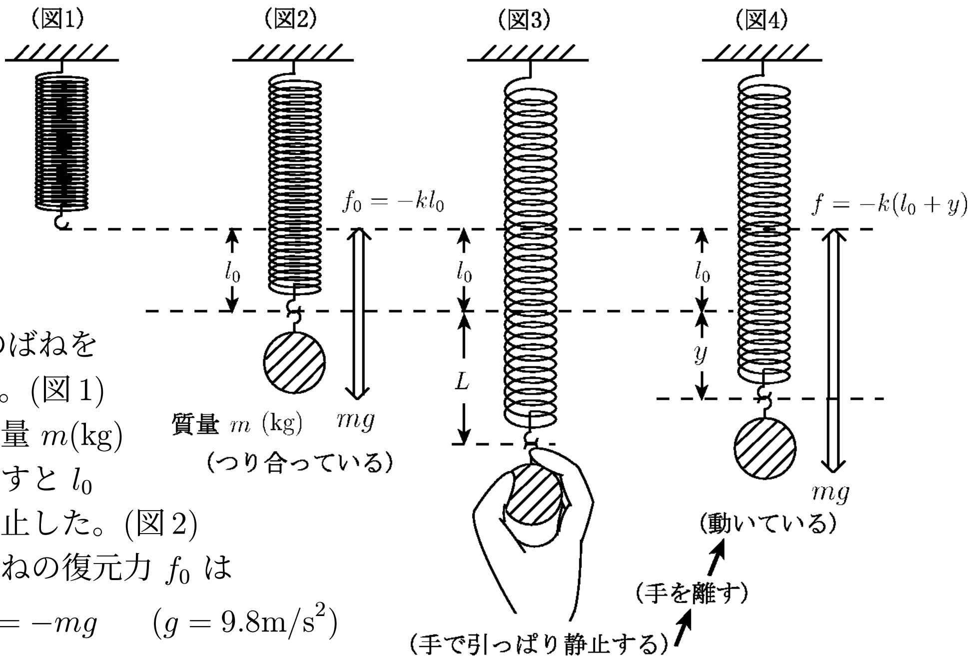


問 右図 (図 4, 5) は「ばね定数」が k のばねであり、質量 m(kg) の物体をつるしたとき l_0 だけ伸びた。l_0 を m と k および重力加速度 $g(=9.8)$ で表せ。

(図4) (図5)



＜ばねの運動 1＞



ばね定数 k のばねを上からつるす。(図 1)
このばねに質量 m(kg) の物体をつるすと l_0 だけ伸びて静止した。(図 2)
このときのばねの復元力 f_0 は

$$f_0 = -kl_0 = -mg \qquad (g = 9.8\mathrm{m/s^2})$$

であるから

$$kl_0 = mg \quad \cdots \quad (1)$$

である。

図 2 の状態から物体を手で下向きに引っぱり、さらに L だけ伸びた。(図 3)

図 3 の状態から静かに手を離すとばねは復元力によって動き出す。

図 4 は動いている途中の図である。図 4 の場合の復元力 f は

$$f = -k(l_0 + y)$$

である。図 4 のばねにつるされた物体にかかる力 F は復元力 f と重力 mg だけであるから

$$F = mg + f = mg - k(l_0 + y)$$

であるが (1) 式を代入すると

$$F = -ky \quad \cdots \quad (2)$$

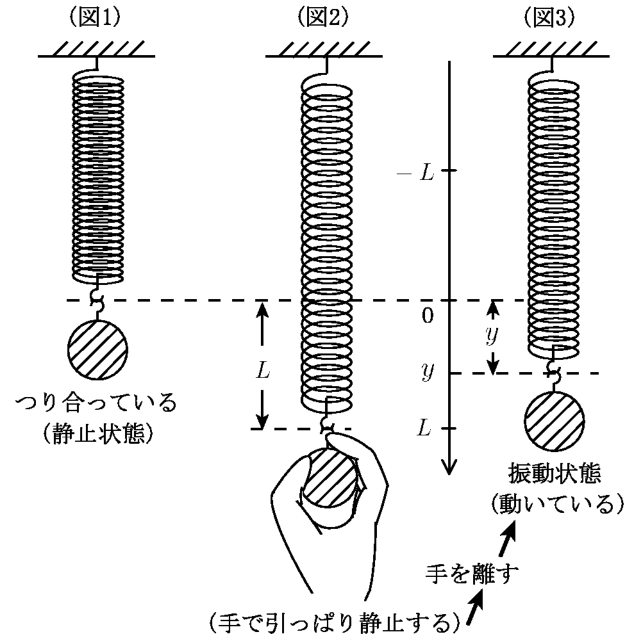
となる。図 4 の物体が動くときの加速度を a とすると

$$F = ma = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \cdots \quad (3)$$

である。

問　上の (2) 式と (3) 式より y に関する微分方程式を導びき, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \square\, y = 0$ の形で表せ。

< ばねの運動 2 >



例 前ページの場合、つり合っている状態からのばねの伸びを y とすると、y は微分方程式

(1) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=0}$

をみたす。ただし

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\left(\begin{array}{l} m:\ \text{おもりの質量} \\ k:\ \text{ばね定数} \end{array}\right)$$

である。ここで
「最初にばねを L だけ伸ばし (図 2)、静かに離す」
とする。

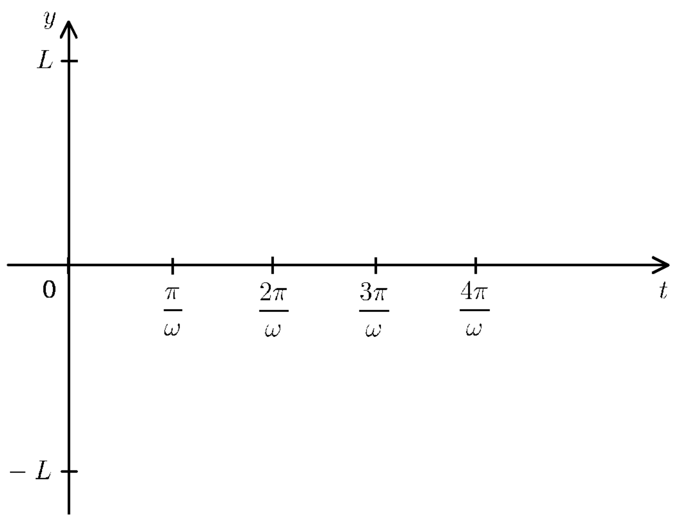
問 1 最初 ($t=0$ のとき) は**伸びが L** であり、そのときの**速度は 0** になっている。この条件を数式で書け。

(∗) $y(0)=$, $y'(0)=$

問 2 微分方程式 (1) を初期条件 (∗) のもとで解け。

$y=$

問 3 問 2 で求めた解のグラフを右図に描け。

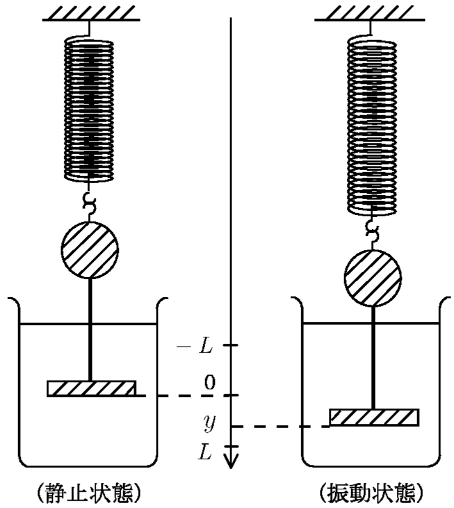


＜ばねの運動 3＞

図 1 のようにばねの先のおもりがある液体につかっているとき、これを振動させたときの変位 y に関する微分方程式は一般に

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+2\gamma\frac{dy}{dt}+(\gamma^2+\omega^2)y=0}$$

となる。ここで γ は速度に比例する**抵抗**を意味する。また ω は振動の速さ (ばねの強さ) を意味する。



(図1)

例 1　$\gamma=2,\ \omega=15$ の場合、微分方程式は

(1) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+229y=0}$

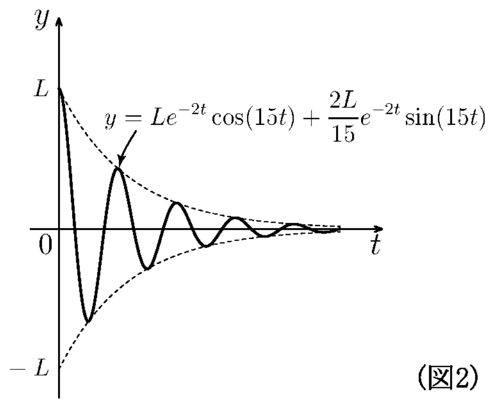
となる。ここで前ページと同じ初期条件「最初に L だけ伸ばし、静かに離す」

(∗) $\boxed{y(0)=L\ ,\quad y'(0)=0}$

を仮定すると、25 ページより (1) – (∗) の解は

$$\underline{y=Le^{-2t}\cos(15t)+\frac{2L}{15}e^{-2t}\sin(15t)}$$

となる。このグラフは図 2 であり、ばねの振動が抵抗によってだんだん弱くなっていく。このような振動を**減衰振動**という。



(図2)

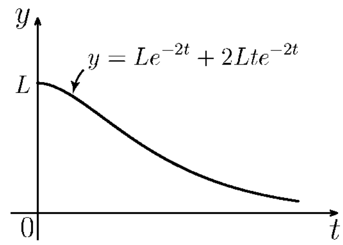
例 2　$\gamma=2,\ \omega=0$ の場合、微分方程式は

(2) $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+4y=0}$

となる。上と同じ初期条件 (∗) をみたす解は

$\underline{y=Le^{-2t}+2Lte^{-2t}}$

となる。これは抵抗にくらべてばねの力が弱いため、振動しないで減衰していく (図 3)



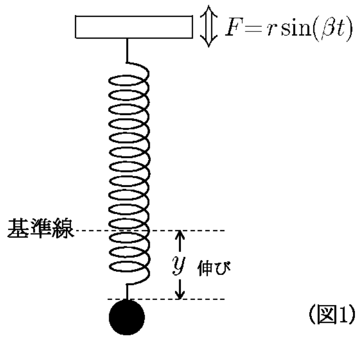
(図3)

問　次の微分方程式を上の初期条件 (∗) のもとで解け。

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}+13y=0$　　　　(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+6\dfrac{dy}{dt}+9y=0$

< 強制振動 1 >

例 図 1 のようにばねの上端を強制的に振動させる。基準線からの伸びを y, 振動する外力 F を $r\sin(\beta t)$ とする。抵抗を考えないとすると、y に関する微分方程式は



(図1)

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r\sin(\beta t)}$$

となる。ここで $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (m はおもりの質量、k はばね定数) である。

問 1 $r = 1$, $\omega = 5$, $\beta = 4$ のとき微分方程式は

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(4t)}$$

となる。24 ページを参考にして (1) の一般解を求めよ。

$y =$

問 2 「ばねの下端は最初基準線上に静止している」と仮定する。
すなわち「$t = 0$ のときの**伸びは 0** であり、**速度も 0** である」とする。
この条件を数式で表せ。

(∗) $\boxed{y(0) = \qquad\qquad , \ y'(0) = \qquad\qquad}$

問 3 微分方程式 (1) を問 2 の初期条件 (∗) のもとで解け。

$y =$

問 4 $r = 1$, $\omega = 5$, $\beta \neq \pm 5$ のとき、微分方程式は

(2) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)}$$

となる。この微分方程式を問 2 の初期条件 (∗) のもとで解け。

$y =$

＜ 強制振動 2 ＞

例 1 前ページ問 4 の場合 ($r = 1$, $\omega = 5$, $\beta \neq \pm 5$)
微分方程式は

(1) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)}$$

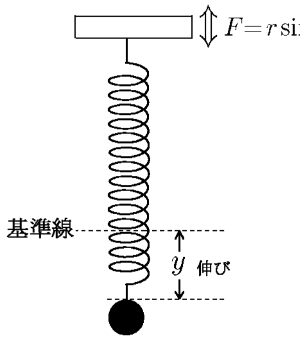
となった。ここで初期条件

(*) $$\boxed{y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0}$$

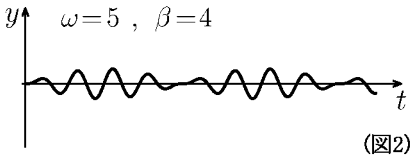
を満たす解は

$$y = -\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)$$

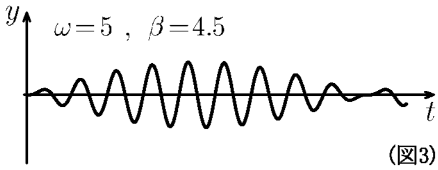
となる。この解のグラフは図 2($\beta = 4$), 図 3($\beta = 4.5$), 図 4($\beta = 4.75$) のようになる。
このような運動を**強制振動**という。



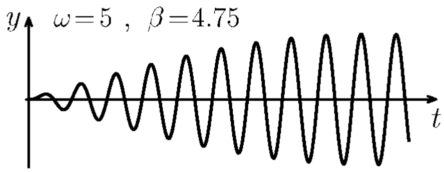
(図1)



(図2)



(図3)



(図4)

例 2 $r = 1$, $\omega = \beta = 5$ のとき微分方程式は

(2) $$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 25y = \sin(5t)}$$

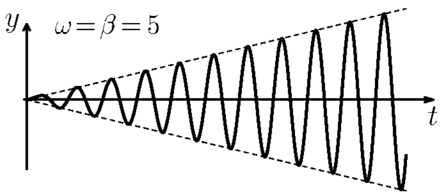
となる。

問 1 24 ページを参考にして、(2) の一般解を求めよ。

$y =$

問 2 上の初期条件 (*) のもとで (2) の解を求めよ。

$y =$



(図5)

(注) 問 2 の解のグラフは図 5 の実線である。図 5 の点線は直線 $y = \pm\dfrac{t}{2}$ である。つまり時刻 t における振幅が $\dfrac{t}{2}$ であり、時間とともに振幅が大きくなる。この現象を**共振**または**共鳴**という。

問 3 例 1 の解の $\beta \to 5$ の極限を求めよ。(ヒント：変数 β に関するロピタルの定理を使う)

$$\lim_{\beta\to 5}\left\{-\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)\right\} = \lim_{\beta\to 5}\frac{-\beta\sin(5t) + 5\sin(\beta t)}{125-5\beta^2}$$

$=$