

## 2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10173/248">http://hdl.handle.net/10173/248</a>



## < 1 階微分方程式の原理 >

微分して 0 になる関数は定数だけである。これを微分方程式の形に書くと

(定理)  $\frac{dy}{dt} = 0$  ならば  $y = C$  ( $C$  は定数)

となる。この定理を使うと 1 階微分方程式の一般解の形が決定できる。

例 微分方程式

(\*)  $\frac{dy}{dt} = -y$

を考える。No.8, 48 ページより (\*) の一般解は

(\*\*)  $y = Ce^{-t}$  ( $C$  は任意定数)

であると類推できる。(\*\*) が (\*) の解であることは

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{-t}) = C \times \frac{d}{dt}(e^{-t}) = C \times (-e^{-t}) = -Ce^{-t} = -y$$

よりわかる。実は

「(\*) の解は (\*\*) の形の関数以外はない」

ことが証明できる。

< 証明 >  $y_1 = e^{-t}$  とする。(\*) の任意の解を  $y_2$  とすると (\*) 式を満たすので

$$(1) \quad y_1' = -y_1, \quad y_2' = -y_2$$

が成り立つ (ここで  $t$  に関する導関数  $\frac{dy}{dt}$  を  $y'$  と略記した)。今

$$y = \frac{y_2}{y_1}$$

とおくと、分数の微分の公式より

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2' \times y_1 - y_2 \times y_1'}{(y_1)^2}$$

となり (1) 式を代入すると

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(-y_2) \times y_1 - y_2 \times (-y_1)}{(y_1)^2} = \frac{-y_2y_1 + y_2y_1}{(y_1)^2} = 0$$

となり定理から  $y$  が定数  $C$  になるので

$$y = C \implies \frac{y_2}{y_1} = C \implies y_2 = Cy_1 = Ce^{-t}$$

より (\*) の任意の解  $y_2$  が (\*\*) の形をしていることがわかった。(証明終)

問 微分方程式 (\*)  $\frac{dy}{dt} = y$  の一般解は No.8, 37 ページより (\*\*)  $y = Ce^t$  ( $C$

は定数) となる。「(\*) の解は (\*\*) の形の関数以外はない」ことを証明せよ。

## &lt; 変数分離形 1 &gt;

例 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -y}$$

の一般解は前ページより

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

であった。この一般解の見つけ方は以下のようにする。

## &lt; 一般解の求め方 &gt;

(\*) の両辺を  $y$  で割る。

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = -1$$

両辺を  $t$  で微分する。

$$\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = \int (-1) dt$$

↓

) 置換積分

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-1) dt$$

↓

$$\log |y| + C_1 = -t + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

↓

$$\log |y| = -t + C_0 \quad (\text{ただし } C_0 = C_2 - C_1)$$

↓

$$|y| = e^{-t+C_0}$$

↓

$$y = \pm e^{-t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{-t}$$

↓

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-t}} \quad (\text{ただし } C = \pm e^{C_0})$$

ここで  $C_0$  がどんな数でも  $e^{C_0}$  は 0(ゼロ)にならないから  $C \neq 0$  である。一方 (\*\*) 式で  $C = 0$  のとき  $y = 0$  となるが、 $y = 0$  は (\*) の解であるから  $C = 0$  を含めて (\*) の一般解は

$$y = Ce^{-t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

## &lt; 変数分離形 2 &gt;

例題 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 3y}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページの方法で求める。まず (\*) の両辺を  $y$  で割り、 $t$  で積分する。

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= 3 \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt &= \int 3 dt \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int 3 dt \\ \Downarrow \\ \log |y| &= 3t + C_0 \quad (C_0 \text{ は任意定数}) \\ \Downarrow \\ |y| &= e^{3t+C_0} \\ \Downarrow \\ y &= \pm e^{3t+C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{3t} \\ \Downarrow \\ (**) \quad \boxed{y = Ce^{3t}} &\quad (C = \pm e^{C_0}) \end{aligned}$$

ここで  $C = \pm e^{C_0} \neq 0$  であるが前ページと同様な理由で  $C = 0$  でもよいから、(\*) の一般解は

$$(\text{答}) \quad y = Ce^{3t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし  $a$  は定数)

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = 5y$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = -3y$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = ay$$

## &lt; 変数分離形 3 &gt;

例題 微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = 2ty}$$

の一般解を求めよ。

(解) 前ページと同じ方法で求める。まず両辺を  $y$  で割り,  $t$  で積分する。。

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= 2t \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt &= \int 2t dt \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int 2t dt \\ \Downarrow \\ \log |y| &= t^2 + C_0 \quad (C_0 \text{ は任意定数}) \\ \Downarrow \\ |y| &= e^{t^2 + C_0} \\ \Downarrow \\ y &= \pm e^{t^2 + C_0} = \pm e^{C_0} \times e^{t^2} \\ \Downarrow \\ (**) \quad \boxed{y = C e^{t^2}} &\quad (C = \pm e^{C_0}) \end{aligned}$$

ここで  $C = \pm e^{C_0} \neq 0$  であるが、(\*\*) 式で  $C = 0$  の場合は  $y = 0$  となり、 $y = 0$  は(\*\*) の解であるから、 $C = 0$  も含めて(\*) の一般解は

$$(\text{答}) \quad y = C e^{t^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(注)  $\boxed{\frac{dy}{dt} = (t \text{ の関数}) \times (y \text{ の関数})}$  の形の微分方程式を変数分離形といい、例題と同じやり方で解ける。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = (6t + 5)y$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = (3t^2 + 4)y$$

## < 1 階線形微分方程式 1 >

$t$  の関数  $p(t)$  と  $q(t)$  が与えられたとき、未知関数  $y$  に関する次の形の微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

を 1 階線形微分方程式という。ここで「線形」というのは未知関数  $y$  とその導関数  $\frac{dy}{dt}$  に関する一次式であることを意味する。 $(y^3$  や  $(\frac{dy}{dt})^2$  などのある微分方程式は非線形という。) 特に  $q(t) = 0$  のとき

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

の形の微分方程式を 1 階線形同次微分方程式という。

例 同次微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = 0$$

の一般解を求める。移項すると

$$\frac{dy}{dt} = -2ty$$

となり変数分離形になるので、前ページと同様にして

$$\int \frac{1}{y} dy = \int (-2t) dt$$

より一般解は

$$\text{一般解 : } y = Ce^{-t^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

問 1 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし  $a$  は定数)

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + ay = 0$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} - 10ty = 0$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} + (6t^2 + 1)y = 0$$

問 2 同次微分方程式  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$  の一般解を不定積分  $\int p(t)dt$  を用いて表せ。

## &lt; 1 階線形微分方程式 2 &gt;

前ページより同次微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0}$$

の一般解は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^{-\int p(t)dt}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「(\*) の解は(\*\*) の形の関数以外はない。」ことが1ページと同様にして証明できる(証明は省略)。

例 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 5}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{5}{3}$$

とおくと、 $y_1$  は定数だから  $\frac{dy_1}{dt} + 3y_1 = 0 + 3 \times \frac{5}{3} = 5$  となり(1)式を満たす。

すなわち  $y_1$  は(1)の解の1つである。(1)に対し、同次微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を  $y_0$  とすると、上の公式(\*\*)より

$$y_0 = Ce^{-3t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。ここで

$$y = y_1 + y_0 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + 3y &= \frac{d}{dt} \left( \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \right) + 3 \left( \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \right) \\ &= 0 - 3Ce^{-3t} + 5 + 3Ce^{-3t} = 5 \end{aligned}$$

より  $y$  は(1)式をみたす。(1)の一般解は

$$(1) \text{ の一般解 : } \boxed{y = \frac{5}{3} + Ce^{-3t}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。実は「(1)の解は全て  $\frac{5}{3} + Ce^{-3t}$  の形をしている」ことが証明できる。

< 証明 > (1)の任意の解を  $y_2$  とすると  $y_2' + 3y_2 = 5$  である。今

$$w = y_2 - \frac{5}{3}$$

とおくと

$$w' + 3w = \left( y_2 - \frac{5}{3} \right)' + 3 \left( y_2 - \frac{5}{3} \right) = y_2' + 3y_2 - 5 = 5 - 5 = 0$$

より  $w$  は(2)の解だから

$$w = Ce^{-3t} \implies y_2 - \frac{5}{3} = Ce^{-3t} \implies y_2 = \frac{5}{3} + Ce^{-3t} \quad (\text{証明終})$$



## < 1 階線形微分方程式 3 >

前ページの議論を一般化すると以下ようになる。

### 1 階線形微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

の解の 1 つが分かった場合、その解を  $y_1$  とする。

次に同次微分方程式

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

の一般解を

$$(2) \text{ の一般解 : } y_0 = Ce^{-\int p(t)dt} \quad (C \text{ は任意定数})$$

とすると、(1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解 : } y = y_1 + y_0 = y_1 + Ce^{-\int p(t)dt} \quad (C \text{ は任意定数})$$

となる。すなわち「(1) の解は全て  $y_1 + Ce^{-\int p(t)dt}$  の形をしている」ことが前ページと同様に証明できる (証明略)。

### 例 微分方程式

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} + 5y = 8$$

の一般解を求めたい。

$$y_1 = \frac{8}{5}$$

とおくと、 $y_1$  は定数だから  $\frac{dy_1}{dt} + 5y_1 = 0 + 5 \times \frac{8}{5} = 8$  より (1) の解である。

ここで同次微分方程式

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

の一般解は

$$y_0 = Ce^{-5t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

だから (3) の一般解は

$$(3) \text{ の一般解 : } y = y_1 + y_0 = \frac{8}{5} + Ce^{-5t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし  $a \neq 0$ )

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + 3y = 5$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + ay = b$$

## &lt; 1 階線形微分方程式 4 &gt;

例 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}}$$

を考える。今

$$y_1 = \frac{1}{7}e^{4t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} + 3y_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{7}e^{4t} \right) + 3 \left( \frac{1}{7}e^{4t} \right) = \frac{4}{7}e^{4t} + \frac{3}{7}e^{4t} = e^{4t}$$

より  $y_1$  は (1) の解である。同次方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + 3y = 0}$$

の一般解を

$$(**) \quad \boxed{y_0 = Ce^{-3t}}$$

とおくと (1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解 : } \underline{y = y_1 + y_0 = \frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t} \quad (C \text{ は任意定数})}$$

< 別解 > ((1) の解  $y_1$  も自動的に求まる方法)Step1 同次方程式 (2) の一般解 (\*\*) の定数  $C$  を関数  $C(t)$  におきかえる

$$(3) \quad \boxed{y = C(t)e^{-3t}}$$

とおく。

Step2 (3) を (1) に代入して  $C(t)$  を決定する。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + 3y &= (C(t)e^{-3t})' + 3(C(t)e^{-3t}) \\ &= C'(t)e^{-3t} - 3C(t)e^{-3t} + 3C(t)e^{-3t} && \left. \begin{array}{l} \text{積の微分} \\ ( \times )' = ' \times + \times ' \end{array} \right\} \\ &= C'(t)e^{-3t} \\ (1) \text{ より} \quad C'(t)e^{-3t} &= e^{4t} \\ \downarrow & \left. \begin{array}{l} \text{両辺に } e^{3t} \text{ をかける} \end{array} \right\} \\ C'(t) &= e^{7t} \\ \downarrow & \left. \begin{array}{l} \text{積分} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$(4) \dots \quad \boxed{C(t) = \int e^{7t} dt = \frac{1}{7}e^{7t} + C}$$

Step3 (4) を (3) に代入

$$\underline{(\text{答}) y = \left( \frac{1}{7}e^{7t} + C \right) e^{-3t} = \frac{1}{7}e^{4t} + Ce^{-3t}}$$

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + 4y = e^{5t} \quad , \quad (2) \quad \frac{dy}{dt} - 4y = e^{5t}$$

## < 1 階線形微分方程式 5 >

前ページの別解のような解き方を定数変化法という。1 階線形微分方程式は定数変化法によって必ず一般解が求まる。

**例題** 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}}$$

の一般解を求めよ。

(解) 定数変化法によって求める。

**Step1** 同次微分方程式

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{3t}$$

の定数  $C$  のかわりに関数  $C(t)$  でおきかえたものを  $y$  とする。

$$(3) \quad \boxed{y = C(t)e^{3t}}$$

**Step2** (1) に代入して  $C(t)$  を決定する。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} - 3y &= (C(t)e^{3t})' - 3(C(t)e^{3t}) \\ &= C'(t)e^{3t} + 3C(t)e^{3t} - 3C(t)e^{3t} \\ &= C'(t)e^{3t} \end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{3t} = e^{3t}$$

↓

$$C'(t) = 1$$

↓

$$(4) \quad \boxed{C(t) = \int 1 dt = t + C}$$

**Step3** (4) を (3) に代入する。

$$\underline{\text{(答) } y = (t + C)e^{3t} = te^{3t} + Ce^{3t} \quad (C \text{ は任意定数)}}$$

**問** 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} - 2y = e^{2t} \quad , \quad (2) \quad \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-3t} \quad , \quad (3) \quad \frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$$

## < 1 階線形微分方程式の一般解 1 >

一般の 1 階線形微分方程式

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$$

の一般解を求めるため、同次方程式

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$$

の一般解

$$y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}$$

の定数  $C$  を  $C(t)$  におきかえたものを

$$(3) \quad y = C(t)e^{-\int p(t)dt}$$

とおく。(1) に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + p(t)y &= \frac{d}{dt} \left( C(t)e^{-\int p(t)dt} \right) + p(t) \left( C(t)e^{-\int p(t)dt} \right) \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt} - p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} + p(t)C(t)e^{-\int p(t)dt} \\ &= C'(t)e^{-\int p(t)dt} \end{aligned}$$

(1) より

$$C'(t)e^{-\int p(t)dt} = q(t)$$

↓

）両辺に  $e^{\int p(t)dt}$  をかける

$$C'(t) = q(t)e^{\int p(t)dt}$$

↓

）積分

$$(4) \quad C(t) = \int \left( q(t)e^{\int p(t)dt} \right) dt + C$$

より (4) を (3) に代入すると (1) の一般解は

$$y = \left\{ \int \left( q(t)e^{\int p(t)dt} \right) dt + C \right\} e^{-\int p(t)dt} \quad \left( \begin{array}{l} \text{1 階線形微分方程式} \\ \text{(1) の一般解の公式} \end{array} \right)$$

問 1 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = q(t)$$

の一般解を (上の公式で  $\int p(t)dt = -at$  とおくことにより) 求めよ。

問 2 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$$

の一般解を (問 1 の結果で  $q(t) = e^{at}$  とおくことにより) 求めよ。

## ＜ 1 階線形微分方程式の一般解 2 ＞

前ページの結果より 1 階線形微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)}$$

の一般解は

$$y = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt})dt + C \right\} e^{-\int p(t)dt} = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt})dt \right\} e^{-\int p(t)dt} + Ce^{-\int p(t)dt}$$

である。ここで

$$y_0 = Ce^{-\int p(t)dt}, \quad y_1 = \left\{ \int (g(t)e^{\int p(t)dt})dt \right\} e^{-\int p(t)dt}$$

とおくと  $y_0$  は同時微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy_0}{dt} + p(t)y_0 = 0}$$

の一般解であり、 $y_1$  は (1) の解である。 $y_1$  を (1) の特解という。

従って (1) の一般解  $y$  は

$$\boxed{(1) \text{ の一般解}} = y = y_1 + y_0 = \boxed{(1) \text{ の特解}} + \boxed{(2) \text{ の一般解}}$$

と表される。

**問 1**  $y_1$  が (1) の解であることを示したい。以下の式を計算して  $g(t)$  になることを確かめよ。  
(式変形を書くこと)

$$\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1 =$$

(ヒント) 積の微分公式と  $\frac{d}{dt} \left\{ \int f(t)dt \right\} = f(t)$  等を用いる。

**問 2** 次の微分方程式の特解と一般解を求めよ。(ただし  $a, b$  は定数で  $a \neq b, a \neq 0$ )

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} - ay = b \quad (2) \quad \frac{dy}{dt} - ay = e^{bt} \quad (3) \quad \frac{dy}{dt} - ay = e^{at}$$

特解                      特解                      特解

一般解

一般解

一般解

## ＜ 1 階微分方程式の初期値問題 ＞

**例題** 次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 6 - 10t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 20 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -2y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 5 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} \frac{dy}{dt} + 2y = -5 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$$

(解) (1) 求積法より  $y = \int (6 - 10t)dt = 6t - 5t^2 + C$

初期条件より  $t = 0$  のとき  $y = C = 20$  (答)  $y = 6t - 5t^2 + 20$

(2) 3 ページと同様にして一般解は  $y = Ce^{-2t}$

初期条件より  $t = 0$  のとき  $y = Ce^0 = C = 5$  (答)  $y = 5e^{-2t}$

(3) 7 ページと同様に考える。

$$y_1 = \frac{-5}{2}$$

は (3) の解である。同次方程式  $\frac{dy}{dt} + 2y = 0$  の一般解  $y_0 = Ce^{-2t}$  に対し

$$y = y_1 + y_0 = -\frac{5}{2} + Ce^{-2t}$$

が (3) の一般解である。

初期条件より  $t = 0$  のとき  $y = -\frac{5}{2} + Ce^0 = -\frac{5}{2} + C = 4$  より  $C = \frac{13}{2}$

$$\underline{\underline{(答)  $y = -\frac{5}{2} + \frac{13}{2}e^{-2t}$ }}$$

**問** 次の微分方程式を以下の初期条件の下で解け。(ただし  $k, g$  は定数で  $k \neq 0$ )

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dy}{dt} + ky = 9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 0 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \frac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$$

## < 2 階線形微分方程式 1 >

与えられた関数  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $F(t)$  に対し、未知関数  $y$  に関する微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t) \cdots (*)_1$$

を 2 階線形微分方程式という。1 階線形微分方程式の場合は 10,11 ページのような一般解を求める公式があるが、2 階以上の場合には解の公式が存在しない。場合に応じて一般解の形がちがうが、共通して次の基本定理が成り立つ。

< 基本定理 >

任意の点  $t_0$  と定数  $\alpha$ ,  $\beta$  に対して

$$y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta \cdots (*)_2$$

を満たす  $(*)_1$  の解  $y = y(t)$  がただ 1 つ存在する。

通常は  $t_0 = 0$  の場合を考えるので、条件  $(*)_2$  を初期条件という。

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -10$$

を考える。  $t$  について積分すると

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \int \frac{d^2y}{dt^2} dt = \int (-10) dt = -10t + C_1$$

$$y(t) = \int \frac{dy}{dt} dt = \int (-10t + C_1) dt = -5t^2 + C_1t + C_2$$

より  $y = -5t^2 + C_1t + C_2$  が (1) の一般解である。ここで初期条件として

$$(2) \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4 \quad (\text{初期条件})$$

があれば

$$y(0) = 3 \Rightarrow t = 0 \text{ のとき } y = 3 \Rightarrow C_2 = 3$$

$$y'(0) = 4 \Rightarrow t = 0 \text{ のとき } y' = 4 \Rightarrow C_1 = 4$$

より  $y = -5t^2 + 4t + 3$  が (2) をみたす (1) の解である。

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = 8 \\ y(0) = 7, \quad y'(0) = 6 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} = 6t + 2 \\ y(0) = 8, \quad y'(0) = 9 \end{cases}$$

## ＜ 2 階線形微分方程式 2 ＞

例  $t$  の関数  $y = y(t)$  に関する微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} = -9y}$$

を考える。今

$$y_1(t) = \cos(3t) \quad , \quad y_2(t) = \sin(3t)$$

とおくと

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = (\cos(3t))'' = (-3 \sin(3t))' = -9 \cos(3t) = -9y_1$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = (\sin(3t))'' = (3 \cos(3t))' = -9 \sin(3t) = -9y_2$$

より  $y_1$  と  $y_2$  は共に (1) の解である。さらに定数  $C_1$  と  $C_2$  に対して

$$(2) \quad \boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)}$$

とおくと

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = C_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} + C_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = C_1 \times (-9y_1) + C_2 \times (-9y_2) = -9(C_1 y_1 + C_2 y_2) = -9y$$

より  $y$  もまた (1) の解である。次のページで説明するが、(1) の解は全て (2) の形をしている。ここで初期条件が

$$(3) \quad \boxed{y(0) = 4 \quad , \quad y'(0) = 5} \quad (\text{初期条件})$$

であるとき (2) 式より

$$(4) \quad 4 = y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1$$

である。また (2) を微分すると

$$y'(t) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)$$

より

$$(5) \quad 5 = y'(0) = -3C_1 \sin 0 + 3C_2 \cos 0 = 3C_2$$

であるから (4)(5) より  $C_1 = 4$  ,  $C_2 = \frac{5}{3}$  となる。よって (3) をみたす (1) の解は

$$y = 4 \cos(3t) + \frac{5}{3} \sin(3t) \quad \cdots \quad \text{初期条件 (3) をみたす (1) の解}$$

問 次の初期条件をみたす (1) の解  $y$  を求めよ。

$$y(0) = 6 \quad , \quad y'(0) = 8$$

$$y(0) = \alpha \quad , \quad y'(0) = \beta$$



## < 2 階線形同次微分方程式 1 >

与えられた関数  $a(t)$ ,  $b(t)$  に対し未知関数  $y$  に関する微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(t)\frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

を 2 階線形同次微分方程式という。これは 2 階線形微分方程式 (13 ページ  $(*)_1$  式) で  $F(t) = 0$  の場合である。

例  $a(t) = 0$ ,  $b(t) = 9$  のときの同次微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$$

を考える。これは前ページの例の微分方程式  $\frac{d^2y}{dt^2} = -9y$  と同じであるから定数  $C_1$  と  $C_2$  に対し

$$(2) \quad y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$$

は (1) の解である。実は「(1) の解は全て (2) の形をしている」ことが証明できる。(2) を微分方程式 (1) の一般解といい、 $\cos(3t)$  と  $\sin(3t)$  を (1) の基本解という。

[証明] ((1) の解が全て (2) の形をしていることの証明)

(1) の任意の解を  $y_1 = y_1(t)$  とおく。  $y_1$  の初期値を

$$(3) \quad y_1(0) = \alpha, \quad y_1'(0) = \beta$$

とする。一方

$$y_2(t) = \alpha \cos(3t) + \frac{\beta}{3} \sin(3t)$$

とおくと  $y_2$  は (1) の解であり

$$y_2(0) = \alpha, \quad y_2'(0) = \beta$$

をみたま。13 ページの基本定理より初期条件 (3) をみたま (1) の解はただ 1 つであるから

$$y_1(t) = y_2(t)$$

である。従って  $y_1(t) = \alpha \cos(3t) + \frac{\beta}{3} \sin(3t)$  であるから (2) の形をしている。(証明終)

問  $y(t) = \cos(2t)$  は微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解を求め、この微分方程式の一般解を求めよ。

## < 2 階線形同次微分方程式 2 >

このページでは 2 つの関数  $y_1(t)$  と  $y_2(t)$  が互いに他の定数倍 ( $y_1(t) = k_1 y_2(t)$  または  $y_2(t) = k_2 y_1(t)$ ) になっているとき  $y_1$  と  $y_2$  は同じ形の関数ということにする。

一般の 2 階線形同次微分方程式

$$(*)_1 \cdots \frac{d^2 y}{dt^2} + a(t) \frac{dy}{dt} + b(t)y = 0$$

を考える。もし 2 つの異なる関数  $y_1(t)$  と  $y_2(t)$  が  $(*)_1$  の解ならば、任意の定数  $C_1$  と  $C_2$  に対し

$$(*)_2 \cdots y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

とおくと  $(*)_2$  も  $(*)_1$  の解である。実は「 $y_1$  と  $y_2$  が同じ形の関数でなければ、 $(*)_1$  の全ての解は  $(*)_2$  の形をしている」ことが前のページと同様にして証明できる (証明略)。このとき  $y_1(t)$  と  $y_2(t)$  を  $(*)_1$  の基本解といい、 $(*)_2$  を  $(*)_1$  の一般解という。

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。今

$$y_1(t) = e^{3t}, \quad y_2(t) = te^{3t}$$

とおくと

$$\frac{dy_1}{dt} = 3e^{3t}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = 9e^{3t}, \quad \frac{dy_2}{dt} = e^{3t} + 3te^{3t}, \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 6e^{3t} + 9te^{3t}$$

であるから

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} - 6 \frac{dy_1}{dt} + 9y_1 = 9e^{3t} - 6 \times 3e^{3t} + 9 \times e^{3t} = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{dt^2} - 6 \frac{dy_2}{dt} + 9y_2 = 6e^{3t} + 9te^{3t} - 6 \times (e^{3t} + 3te^{3t}) + 9 \times te^{3t} = 0$$

より  $y_1$  と  $y_2$  は共に (1) の解である。すなわち  $y_1$  と  $y_2$  は (1) の基本解であるから

(1) の一般解は

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t} \cdots (1) \text{ の一般解}$$

問  $y = te^{5t}$  は 微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 10 \frac{dy}{dt} + 25y = 0$$

の基本解である。もう一つの基本解をみつけ、この微分方程式の一般解を求めよ。

## < 微分演算子 $D$ >

$t$  の関数  $y = y(t)$  に対し、微分記号を

$$y' = \frac{dy}{dt} = Dy \quad , \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = D^2y$$

と書くことにする。この記号  $D$  を微分演算子または微分作用素という。

例 1 微分方程式

$$\frac{dy}{dt} - 3y = 0$$

を  $D$  を用いて書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = Dy - 3y = (D - 3)y$$

より

$$(D - 3)y = 0$$

となる。

例 2 微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

を  $D$  を用いて書くと

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = D^2y - 5Dy + 6y = (D^2 - 5D + 6)y$$

より

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。

問 1 次の微分方程式を  $D$  を用いて表せ。

(1)  $\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

(2)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$

例 3 微分方程式

$$(D - 3)y = e^{3t}$$

を考える。これを  $D$  を使わずに書くと

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$$

となる。9 ページよりこの微分方程式の一般解は

$$y = te^{3t} + Ce^{3t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし  $a$  は定数)

(1)  $(D - 4)y = 0$

(2)  $(D - a)y = 0$

(3)  $(D - 4)y = e^{4t}$

(4)  $(D - a)y = e^{at}$

## < 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 >

定数  $a, b$  に対し  $t$  の関数  $y$  に関する微分方程式

$$(*) \quad \dots \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = 0$$

を定数係数 2 階線形同次微分方程式という。この形の微分方程式を解くためには前ページの微分演算子  $D$  を用いると便利である。(\*) 式を  $D$  を用いて書きなおすと

$$(D^2 + aD + b)y = 0$$

となる。

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$$

の一般解を求めたい。この式を  $D$  を用いて表すと

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$

となる。 $D$  に関する 2 次式を因数分解すると

$$(D - 2)(D - 3)y = 0$$

となるから

$$(D - 2)y = 0 \quad \text{または} \quad (D - 3)y = 0$$

となり前ページの結果から

$$y = C_1 e^{2t} \quad \text{または} \quad y = C_2 e^{3t}$$

が導かれる。これが (1) の基本解であるから、求める一般解は

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

問 1 以下の関数  $y$  に対し、実際に微分して  $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y$  を計算せよ。

$$(1) \quad y = e^{2t} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y =$$

$$(2) \quad y = e^{3t} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y =$$

問 2 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

## ＜ 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 ＞

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$

を考える。微分演算子  $D$  を用いると

$$(2) \quad (D^2 - 6D + 9)y = 0$$

より

$$(D - 3)(D - 3)y = 0$$

となる。ここで  $(D - 3)y_1 = 0$  の解を  $y_1$  とおくと

$$(D - 3)(D - 3)y_1 = (D - 3)0 = 0$$

より  $y_1$  は (2) の解である。またこの  $y_1$  に対して  $(D - 3)y_2 = y_1$  の解を  $y_2$  とおくと

$$(D - 3)(D - 3)y_2 = (D - 3)y_1 = 0$$

より  $y_2$  は (2) の解である。

17 ページ問 2 の結果より

$$y_1 = e^{3t} \quad \text{は} \quad (D - 3)y_1 = 0 \quad \text{の解}$$

$$y_2 = te^{3t} \quad \text{は} \quad (D - 3)y_2 = e^{3t} \quad \text{の解}$$

であるから  $y_1, y_2$  が (1) の基本解である。よって (1) の一般解は

$$y = C_1e^{3t} + C_2te^{3t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

である。(16 ページの例参照)。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。(ただし  $\alpha$  は定数)

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 10\frac{dy}{dt} + 25y = 0$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

$$(4) \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 2\alpha\frac{dy}{dt} + \alpha^2y = 0$$

## ＜ 定数係数 2 階線形同次微分方程式 3 ＞

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 9y = 0$$

を考える。14, 15 ページで  $\cos(3t)$  と  $\sin(3t)$  が (1) の基本解であることがわかった。この基本解を見つけるには微分演算子  $D$  を用いて以下のように考える。

(1) を  $D$  を用いて表すと

$$(D^2 + 9)y = 0$$

となる。  $D^2 + 9$  を複素数の範囲で因数分解すると

$$(2) \quad (D - 3i)(D + 3i)y = 0$$

となる。よって  $y$  を複素数値関数と考えると

$$e^{3it} \quad \text{と} \quad e^{-3it}$$

が (2) の基本解であるから

$$(3) \quad y = Z_1 e^{3it} + Z_2 e^{-3it} \quad (Z_1, Z_2 \text{ は任意の複素数定数})$$

となる。これが複素数値関数としての (2) の一般解である。この中に (1) の基本解が含まれている。オイラーの公式より

$$Z_1 e^{3it} + Z_2 e^{-3it} = Z_1 \{\cos(3t) + i \sin(3t)\} + Z_2 \{\cos(-3t) + i \sin(-3t)\}$$

である。ここで  $\cos(-3t) = \cos(3t)$  ,  $\sin(-3t) = -\sin(3t)$  より (3) は

$$(3)' \quad y = (Z_1 + Z_2) \cos(3t) + i(Z_1 - Z_2) \sin(3t)$$

と書きなおせる。従って  $\cos(3t)$  と  $\sin(3t)$  が基本解であるから (1) の一般解は

$$(4) \quad y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の実数定数})$$

となる。

(注) (3)' で  $Z_1 = Z_2 = \frac{1}{2}$  のとき  $y = \cos(3t)$  となる。また  $Z_1 = -\frac{i}{2}$  ,  $Z_2 = \frac{i}{2}$  のとき  $y = \sin(3t)$  となる。

問 1 上の例で  $Z_1 = \frac{C_1 - C_2 i}{2}$  ,  $Z_2 = \frac{C_1 + C_2 i}{2}$  のとき、(3)' の  $y$  を  $C_1, C_2$  ,  $\cos(3t)$  ,  $\sin(3t)$  を用いて表せ。

$$y =$$

問 2 次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。  
ただし  $\omega$  は実数の定数とする。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

## ＜ 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 ＞

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 229y = 0$$

を考える。  $D$  を用いて表すと

$$(2) \quad (D^2 + 4D + 229)y = 0$$

となる。  $D$  の 2 次式を因数分解するため 2 次方程式を解くと

$$D^2 + 4D + 229 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -2 \pm 15i$$

より (2) 式は次のように因数分解される

$$(2)' \quad (D - (-2 + 15i))(D - (-2 - 15i))y = 0$$

従って (2) の複素数解は

$$(3) \quad y = Z_1 e^{(-2+15i)t} + Z_2 e^{(-2-15i)t} \quad (Z_1, Z_2 \text{ は任意の複素数定数})$$

となる。この中に (1) の実数値基本解  $y_1, y_2$  が含まれている。オイラーの公式より

$$e^{(-2+15i)t} = e^{-2t} \{ \cos(15t) + i \sin(15t) \}$$

$$e^{(-2-15i)t} = e^{-2t} \{ \cos(-15t) + i \sin(-15t) \} = e^{-2t} \{ \cos(15t) - i \sin(15t) \}$$

となるから (3) は次のように書きなおせる。

$$(3)' \quad y = (Z_1 + Z_2)e^{-2t} \cos(15t) + i(Z_1 - Z_2)e^{-2t} \sin(15t)$$

従って  $y_1 = e^{-2t} \cos(15t)$  と  $y_2 = e^{-2t} \sin(15t)$  が (1) の基本解である。

よって (1) の一般解は

$$(4) \quad y = C_1 e^{-2t} \cos(15t) + C_2 e^{-2t} \sin(15t) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意の実数定数})$$

となる。

問 1 上の  $y_1, y_2$  を実際に微分して次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 4 \frac{dy_1}{dt} + 229y_1 = \quad (2) \quad \frac{d^2 y_2}{dt^2} + 4 \frac{dy_2}{dt} + 229y_2 =$$

問 2 上の例で  $Z_1 = \frac{C_1 - C_2 i}{2}$ ,  $Z_2 = \frac{C_1 + C_2 i}{2}$  のとき (3)' の  $y$  を  $C_1, C_2$  および  $e^{-2t} \cos(15t)$  と  $e^{-2t} \sin(15t)$  を用いて表せ。

$$y =$$

問 3 次の微分方程式の一般解 (例の (4) 式のような実数解) を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 5y = 0 \quad (2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} + 10y = 0$$

## ＜ 定数係数 2 階線形同次微分方程式 5 ＞

一般の定数係数 2 階線形同次微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + a \frac{dy}{dt} + by = 0$$

の一般解の求め方をまとめる。

**Step 1.** 微分演算子  $D$  に関する 2 次方程式

$$(2) \quad D^2 + aD + b = 0$$

を解く。

**Step 2.** 2 次方程式 (2) の解が以下のどの場合かを考える。

- [ ]  $a^2 - 4b > 0$  のとき (2) は 2 つの実数解  $\alpha, \beta$  をもつ。  
このとき (2) は  $(D - \alpha)(D - \beta)$  と因数分解されるから  
(1) の一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

- [ ]  $a^2 - 4b = 0$  のとき (2) はただ 1 つの実数解  $\alpha$  ( $\alpha$  は実数) をもつ。  
このとき (2) は  $(D - \alpha)(D - \alpha)$  と因数分解されるから 19 ページより  
(1) の一般解は

$$y = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

- [ ]  $a^2 - 4b < 0$  のとき (2) は 2 つの複素数解  $\alpha, \beta$  をもつ。今

$$\alpha = \mu + \nu i, \quad \beta = \mu - \nu i$$

であれば前ページと同様に考えると、(1) の一般解は

$$y = C_1 e^{\mu t} \cos(\nu t) + C_2 e^{\mu t} \sin(\nu t) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

**問** 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 8 \frac{dy}{dt} + 16y = 0$$

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 16y = 0$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 8 \frac{dy}{dt} + 20y = 0$$



## ＜ 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 ＞

例 微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 6y = 7$$

を考える。今

$$(2) \quad y_1(t) = \frac{7}{6}$$

とおくと  $y_1$  は定数だから

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} - 5 \frac{dy_1}{dt} + 6y_1 = 0 - 5 \times 0 + 6 \times \frac{7}{6} = 7$$

となり (1) 式をみただ。従って  $y_1$  は (1) の解である。これを (1) の特解という。

(1) の解を全て求めたい。(1) の任意の解を  $y = y(t)$  とし

$$(3) \quad y_0(t) = y(t) - \frac{7}{6}$$

とおくと、 $y$  は (1) の解だから

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} - 5 \frac{dy_0}{dt} + 6y_0 = \frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 6y - 7 = 0$$

となる。従って  $y_0$  は同次方程式

$$(4) \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} - 5 \frac{dy_0}{dt} + 6y_0 = 0$$

の解である。18 ページより (4) の一般解は

$$y_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

だから (3) より (1) の一般解  $y$  は

$$y \left( = y_0 + \frac{7}{6} \right) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{7}{6} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

である。

一般の 2 階線形微分方程式

$$(*)_1 \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + a(t) \frac{dy}{dt} + b(t)y = F(t)$$

で  $F(t) \neq 0$  のとき非同次方程式という。もし (1) の解 (特解)  $y_1$  が 1 つみつければ、同次方程式

$$(*)_2 \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} + a(t) \frac{dy_0}{dt} + b(t)y_0 = 0$$

の一般解  $y_0$  に対し  $(*)_1$  の一般解  $y$  は

$$(*)_1 \text{ の一般解 : } y = y_0 + y_1 \quad (y_0 \text{ は } (*)_2 \text{ の一般解, } y_1 \text{ は } (*)_1 \text{ の特解})$$

であることが例と同様にしてわかる。

問 次の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 6$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} - 3 \frac{dy}{dt} - 4y = 8$$

$$(3) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 4y = 10$$

$$(4) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 16y = 20$$

## ＜ 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 2 ＞

与えられた関数  $F(t)$  ( $\neq 0$ ) と定数  $a, b$  に対し次の形の微分方程式

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)$$

を定数係数 2 階線形非同次微分方程式という。前ページより、 $F(t)$  が定数の時は (\*) の特解も定数である。実は  $F(t)$  が  $t$  の  $n$  次式のときは特解も  $t$  の  $n$  次式になる。さらに定数  $r, \alpha, \beta$  に対し、 $F(t)$  が  $re^{\alpha t}, re^{\alpha t} \cos(\beta t), re^{\alpha t} \sin(\beta t)$  の形するとき (\*) の特解は次の表のようになる (証明は実際に (\*) 式の左辺に特解を代入し、計算して右辺の形になるように確かめればよいので省略する。)

$F(t)$	$a, b$ と $\alpha, \beta$ の関係	特解
$re^{\alpha t}$	$\alpha^2 + \alpha a + b \neq 0$	$\frac{r}{\alpha^2 + \alpha a + b} e^{\alpha t}$
	$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha a + b = 0 \\ \text{かつ} \\ 2\alpha + a \neq 0 \end{cases}$	$\frac{r}{2\alpha + a} te^{\alpha t}$
	$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha a + b = 0 \\ \text{かつ} \\ 2\alpha + a = 0 \end{cases}$	$\frac{r}{2} t^2 e^{\alpha t}$
$re^{\alpha t} \cos(\beta t)$	$\begin{cases} A = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b \neq 0 \\ \text{または} \\ B = (2\alpha + a)\beta \neq 0 \end{cases}$	$\frac{r}{A^2 + B^2} e^{\alpha t} \{A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)\}$
	$\begin{cases} A = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b = 0 \\ \text{かつ} \\ B = (2\alpha + a)\beta = 0 \end{cases}$	$\frac{r}{2\beta} te^{\alpha t} \sin(\beta t)$
$re^{\alpha t} \sin(\beta t)$	$\begin{cases} A = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b \neq 0 \\ \text{または} \\ B = (2\alpha + a)\beta \neq 0 \end{cases}$	$\frac{r}{A^2 + B^2} e^{\alpha t} \{A \sin(\beta t) - B \cos(\beta t)\}$
	$\begin{cases} A = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b = 0 \\ \text{かつ} \\ B = (2\alpha + a)\beta = 0 \end{cases}$	$-\frac{r}{2\beta} te^{\alpha t} \cos(\beta t)$

**例** 定数  $\omega, r, \beta$  (ただし  $\omega^2 \neq \beta^2$  とする) に対し微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r \sin(\beta t)$$

を考える。上の表では  $a = 0, b = \omega^2, \alpha = 0, A = -\beta^2 + \omega^2 \neq 0, B = 0$  であるから  
の場合であり、特解  $y_1$  は  $y_1 = \frac{r}{A^2 + 0^2} e^0 \{A \sin(\beta t) - 0\} = \frac{r}{\omega^2 - \beta^2} \sin(\beta t)$  である。一方

(1) の同次方程式

$$(2) \quad \frac{d^2y_0}{dt^2} + \omega^2 y_0 = 0$$

の一般解は 20 ページより  $y_0 = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$  であるから、(1) の一般解は

$$(1) \text{ の一般解 : } y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{r}{\omega^2 - \beta^2} \sin(\beta t) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

**問** 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし  $\omega$  は 0 でない定数とする。

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = r \sin(\omega t)$$

## ＜ 2 階微分方程式の初期値問題 ＞

**例題** 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。(ただし  $L$  は定数)

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0 \\ y(0) = L, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(解) (1)  $D^2 - 5D + 6 = (D - 2)(D - 3)$  より (1) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

である。この導関数は

$$y'(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = 2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと  $C_1 = -1, C_2 = 2$  より

$$\text{(答)} \quad y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$$

(2)  $D^2 + 4D + 229 = 0 \Rightarrow D = -2 \pm 15i$  より (2) の一般解は

$$y(t) = C_1e^{-2t} \cos(15t) + C_2e^{-2t} \sin(15t)$$

である。

$$y'(t) = -2C_1e^{-2t} \cos(15t) - 15C_1e^{-2t} \sin(15t) - 2C_2e^{-2t} \sin(15t) + 15C_2e^{-2t} \cos(15t)$$

であるから、初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = L \\ y'(0) = -2C_1 + 15C_2 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式を解くと  $C_1 = L, C_2 = \frac{2L}{15}$  より

$$\text{(答)} \quad y(t) = Le^{-2t} \cos(15t) + \frac{2L}{15}e^{-2t} \sin(15t)$$

**問** 以下の初期条件のもとで微分方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0 \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 7 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0 \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 25y = 0 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 2 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0 \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

## &lt; 微分方程式の練習 1 &gt;

例 次の微分方程式の一般解を求めよ。ただし  $a, b$  は定数で  $a \neq 0$  とする。

(1)  $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t + 5$

(2)  $\frac{dy}{dt} = \cos(2t)$

(3)  $\frac{dy}{dt} = -5y$

(4)  $\frac{dy}{dt} = 2ty$

(5)  $\frac{dy}{dt} + 2y = 3$

(6)  $\frac{dy}{dt} - 3y = 5$

(7)  $\frac{dy}{dt} + ay = b$

(8)  $\frac{dy}{dt} - 2y = e^t$

(9)  $\frac{dy}{dt} - 3y = e^{3t}$

(10)  $\frac{d^2y}{dt^2} = at + b$

(11)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 6y = 0$

(12)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 5y = 0$

(13)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 9y = 0$

(14)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$

(15)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 16y = 0$

(16)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$

(17)  $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0$

(18)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$

(19)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 25y = 0$

(20)  $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 4$

(21)  $\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = 5$

(22)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 5$

## ＜ 微分方程式の練習 2 ＞

問 次の微分方程式を以下の初期条件で解け。

$$(1) \frac{dy}{dt} = 2t - 3$$

$$y(0) = 5$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = -3y$$

$$y(0) = 4$$

$$(3) \frac{dy}{dt} + 4y = 5$$

$$y(0) = 6$$

$$(4) \frac{dv}{dt} + 3v = 6$$

$$v(0) = 5$$

$$(5) \frac{dI}{dt} + 2I = 5$$

$$I(0) = 0$$

$$(6) \frac{d^2y}{dt^2} = 4$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$$

$$(7) \frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

$$(8) \frac{d^2y}{dt^2} - 5\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

$$(9) \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$(10) \frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

$$y(0) = 5, \quad y'(0) = 6$$

$$(11) \frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$(12) \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

## < 微分方程式の応用 1 >

例 地上 5 m の高さから初速 6(m/s) で質量  $m$ (kg) の物体を真上に投げ上げた。  
 $t$  秒後の速度  $v(t)$  および高さ  $y(t)$  を求めたい。空気抵抗を考えないとすると、この物体に働く力は重力だけなので、加速度を  $a$  とすると

$$\text{重力} = ma = -mg \quad (g = 9.8 \text{ m/s}^2)$$

となる。従って

$$\text{加速度} = a = -g$$

が成り立つ。加速度  $a$  は速度  $v$  を微分したもの  $\left(a = \frac{dv}{dt}\right)$

$$(1) \quad \frac{dv}{dt} = -g = -9.8$$

より

$$v(t) = -9.8t + C_1$$

となる。ここで初速 6(m/s) だから  $t = 0$  のとき  $v(0) = 6$  より  $C_1 = 6$  によって

$$\underline{t \text{ 秒後の速度 } v(t) = -9.8t + 6 \quad (\text{m/s})}$$

である。速度は位置  $y(t)$  を微分したもの  $\left(v = \frac{dy}{dt}\right)$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = -9.8t + 6$$

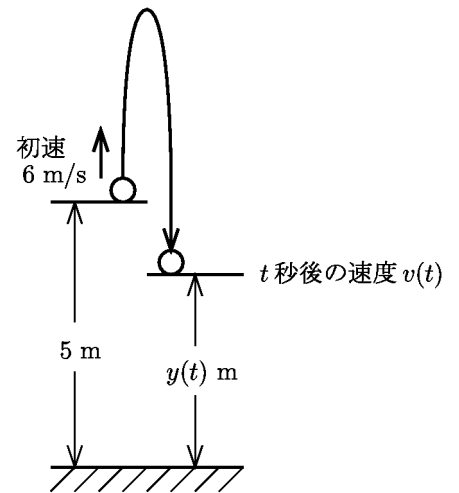
より

$$y(t) = -4.9t^2 + 6t + C_2$$

となる。ここで初期位置が 5 m だから  $t = 0$  のとき  $y(0) = 5$  より  $C_2 = 5$  によって

$$\underline{t \text{ 秒後の位置 } y(t) = -4.9t^2 + 6t + 5 \quad (\text{m})}$$

である。



問 地上 10 m の高さから初速 7(m/s) で質量  $m$ (kg) の物体を真上に投げ上げた。  
 $t$  秒後の速度  $v(t)$  と高さ  $y(t)$  を求めよ。ただし空気抵抗は考えない。

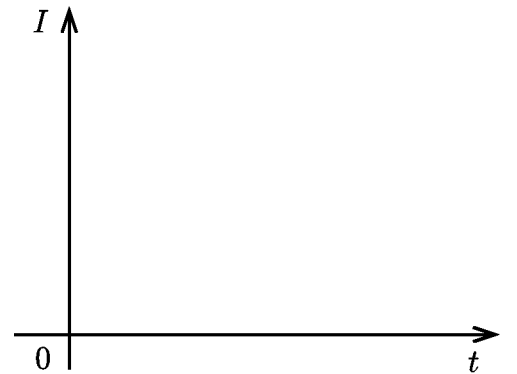
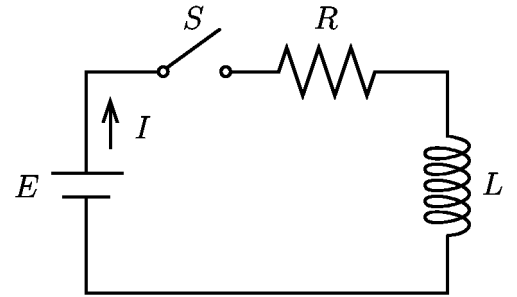


### < 微分方程式の応用 3 >

問 右図のような直列回路のスイッチ  $S$  を閉じた瞬間から  $t$  秒後の電流を  $I = I(t)$  とおくと  $I$  は次の微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \\ t = 0 \text{ のとき } I = 0 \end{cases}$$

をみたま。ここで  $R, L, E$  は正の定数で  $L$  は自己インダクタンス、 $R$  は抵抗、 $E$  は起電力と呼ばれる。この微分方程式の解  $I$  を求めよ。  
また、前ページの例を参考にして  $I$  のグラフを右図に描け。





## < 微分方程式の応用 4 >

定数係数 2 階線形微分方程式

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = F(t)$$

を考える。この微分方程式は未知関数  $y = y(t)$  の時間発展を表す。例えば物体の運動を表す場合、通常  $y = y(t)$  は時刻  $t$  における物体の位置を表す。このとき  $\frac{dy}{dt}$  は速度を表し、 $\frac{d^2y}{dt^2}$  は加速度を意味する。このとき (\*) の係数  $a, b$  と関数  $F(t)$  は

$a$  : 速度に比例して加速度が変わる場合の比例定数

$b$  : 位置に比例して加速度が変わる場合の比例定数

$F(t)$  : 外力

を意味する。特に係数  $a$  がプラスのときは  $a$  は抵抗を意味する。

ここでは  $b = 0$  の場合

$$(**) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} = F(t)$$

を考える。(\*\*) は見かけ上 2 階微分方程式だが、本質的には 1 階微分方程式の解法によって解ける。速度を  $v = \frac{dy}{dt}$  とおくと、(\*\*) 式は

$$(***) \quad \frac{dv}{dt} + av = F(t)$$

となり、 $v$  に関する 1 階微分方程式になる。この解  $v = v(t)$  を求め、 $t$  で積分すると

$$y = \int v(t) dt \quad \dots (**) \text{ の解} \quad (v = v(t) \text{ は } (***) \text{ の解})$$

(\*\*) の解  $y$  が求まる。

問 次の微分方程式を以下の初期条件のもとで解け。

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = 0 \\ y(0) = 10, y'(0) = 6 \end{cases}$$

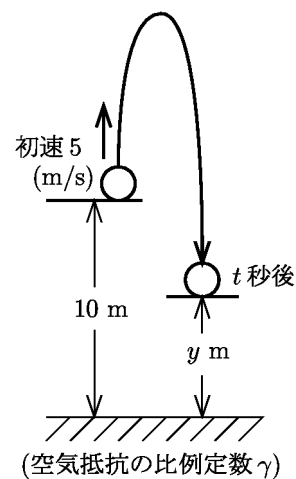
$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = 6 \\ y(0) = 10, y'(0) = 8 \end{cases}$$

### < 微分方程式の応用 5 >

問 地上 10m の場所から物体を真上に初速 5(m/s) で投げ上げた。このとき速度に比例する空気抵抗があるとして、その比例定数を  $\gamma$  とする。  $t$  秒後の高さを  $y$ (m) とすると、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} = -9.8 \\ y(0) = 10, y'(0) = 5 \end{cases}$$

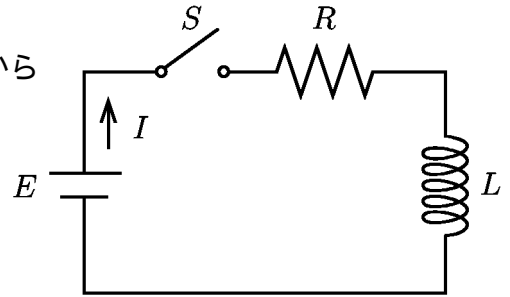
が成り立つ。この微分方程式を解け。



## < 微分方程式の応用 6 >

例 30 ページの間の場合にスイッチを閉じた瞬間から  $t$  秒後の電流を  $I = I(t)$  をおくと

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \\ t = 0 \text{ のとき } I = 0 \end{cases}$$



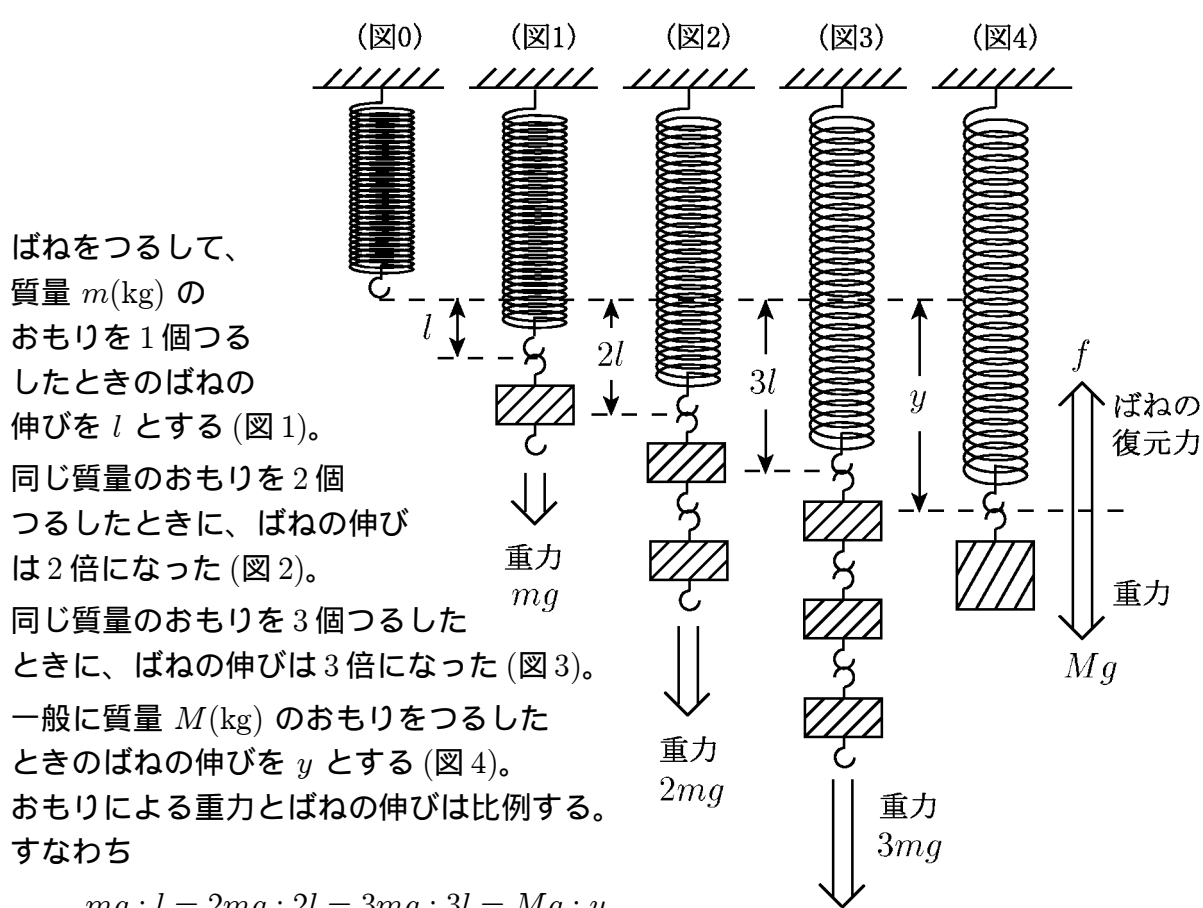
をみます。ここで  $L$  は自己インダクタンス、 $R$  は抵抗、 $E$  は起電力と呼ばれる正の定数である。今  $t$  秒後の電気量 (電荷) を  $q = q(t)$  とおくと電流  $I$  は  $I = \frac{dq}{dt}$  となる。つまり電流は電荷  $q$  の流れる速度である。上の微分方程式を  $I = \frac{dq}{dt}$  として  $q$  の式になおすと

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} = \frac{E}{L} \\ q(0) = 0, \quad q'(0) = 0 \end{cases}$$

となる。

問 例の微分方程式 (2) の解  $q = q(t)$  を求めよ。

## &lt; ばね 1 &gt;



$$mg : l = 2mg : 2l = 3mg : 3l = Mg : y$$

より

$$Mg = \frac{mg}{l}y$$

となる。ばねの復元力を  $f$  とすると  $f$  と重力  $Mg$  はつりあっているから

$$f = -Mg = -\frac{mg}{l}y \quad (g = 9.8(\text{m/s}^2) \text{ は重力加速度})$$

となる。ここで

$$k = \frac{mg}{l} = \frac{\text{おもりの重力}}{\text{ばねの伸び}}$$

とおくと

$$\boxed{f = -ky} \quad (\text{フックの法則})$$

となる。これをフックの法則という。

問 かたいばねの場合に  $k$  は大きくなると考えられるか小さくなると考えられるか？ その理由をあわせて答えよ。

## &lt; ばね 2 &gt;

前ページの場合  $k = \frac{\text{おもりの重力}}{\text{ばねの伸び}}$  の値は

$$\text{前ページの図 1 の場合} \quad k = \frac{mg}{l}$$

$$\text{前ページの図 2 の場合} \quad k = \frac{2mg}{2l} = \frac{mg}{l}$$

$$\text{前ページの図 3 の場合} \quad k = \frac{3mg}{3l} = \frac{mg}{l}$$

となり、常に一定の数値になる。これは「ばね」によって決まる定数であり、「かたいばね」は  $k$  の値が大きくなる。 $k$  をばね定数ともいう。

フックの法則

$$f = -ky \quad (\text{「ばねの復元力」} = -k \times \text{「ばねの変化量」})$$

は「ばね」が伸びるときだけでなく縮むときにも適用できる。

ばねを引っ張り  $l$  だけ伸びたとき (図 2)、ばねの復元力  $f$  は引っばる方向と逆方向に  $kl$  の力で元にもどろうとする。逆にばねを押して  $l$  だけ縮んだとき (図 3)、ばねの復元力  $f$  は押した方向と逆方向に  $kl$  の力で元にもどろうとする。このときばねの変化量  $y$  は

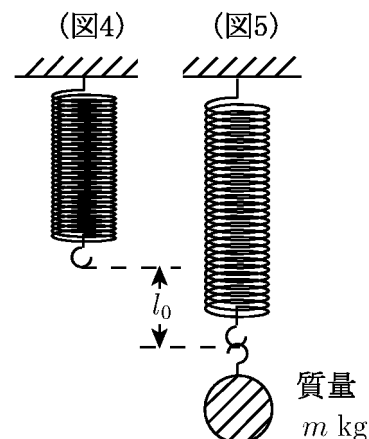
$$y = -l$$

となるので

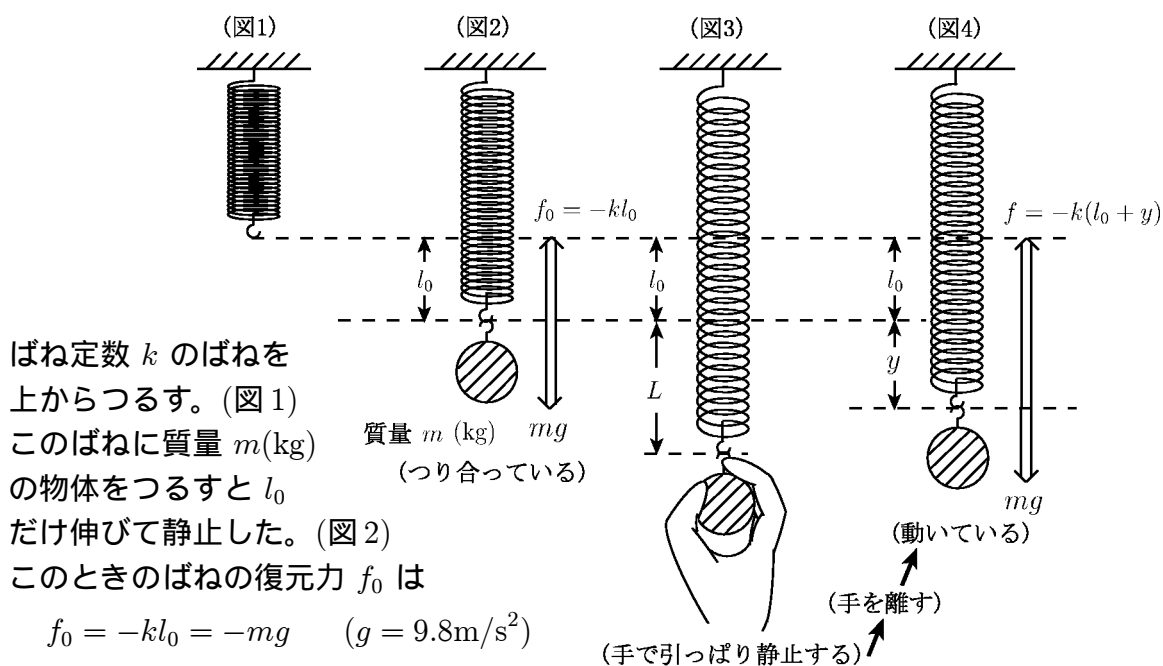
$$f = kl = -k(-l) = -ky$$

より、このときもフックの法則がなりたつ。

問 右図 (図 4, 5) は「ばね定数」が  $k$  のばねであり、質量  $m(\text{kg})$  の物体をつるしたとき  $l_0$  だけ伸びた。 $l_0$  を  $m$  と  $k$  および重力加速度  $g(=9.8)$  で表せ。



## &lt; ばねの運動 1 &gt;



ばね定数  $k$  のばねを上からつるす。(図1) このばねに質量  $m$ (kg) の物体をつるすと  $l_0$

だけ伸びて静止した。(図2) このときのばねの復元力  $f_0$  は

$$f_0 = -kl_0 = -mg \quad (g = 9.8\text{m/s}^2)$$

であるから

$$kl_0 = mg \quad \dots \quad (1)$$

である。

図2の状態から物体を手で下向きに引っ張り、さらに  $L$  だけ伸びた。(図3)

図3の状態から静かに手を離すとばねは復元力によって動き出す。

図4は動いている途中の図である。図4の場合の復元力  $f$  は

$$f = -k(l_0 + y)$$

である。図4のばねにつるされた物体にかかる力  $F$  は復元力  $f$  と重力  $mg$  だけであるから

$$F = mg + f = mg - k(l_0 + y)$$

であるが(1)式を代入すると

$$F = -ky \quad \dots \quad (2)$$

となる。図4の物体が動くときの加速度を  $a$  とすると

$$F = ma = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad \dots \quad (3)$$

である。

問 上の(2)式と(3)式より  $y$  に関する微分方程式を導びき、 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$  の形で表せ。

### < ばねの運動 2 >

例 前ページの場合、つり合っている状態からのばねの伸びを  $y$  とすると、 $y$  は微分方程式

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$$

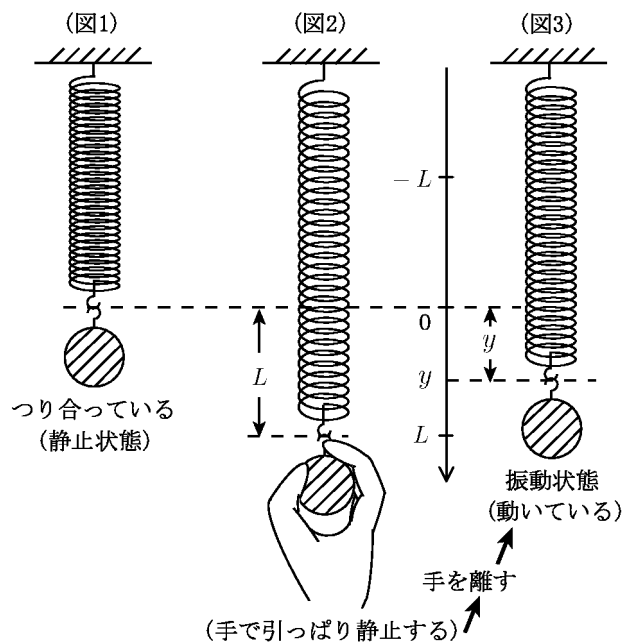
をみたす。ただし

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(  $m$  : おもりの質量 )  
(  $k$  : ばね定数 )

である。ここで

「最初にばねを  $L$  だけ伸ばし (図2)、静かに離す」とする。



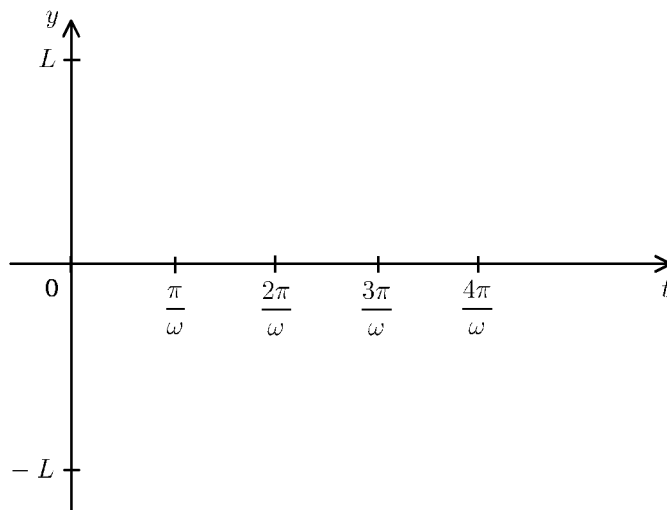
問 1 最初 ( $t = 0$  のとき) は伸びが  $L$  であり、そのときの速度は  $0$  になっている。この条件を数式で書け。

(\*)  $y(0) =$  \_\_\_\_\_ ,  $y'(0) =$  \_\_\_\_\_

問 2 微分方程式 (1) を初期条件 (\*) のもとで解け。

$y =$  \_\_\_\_\_

問 3 問 2 で求めた解のグラフを右図に描け。

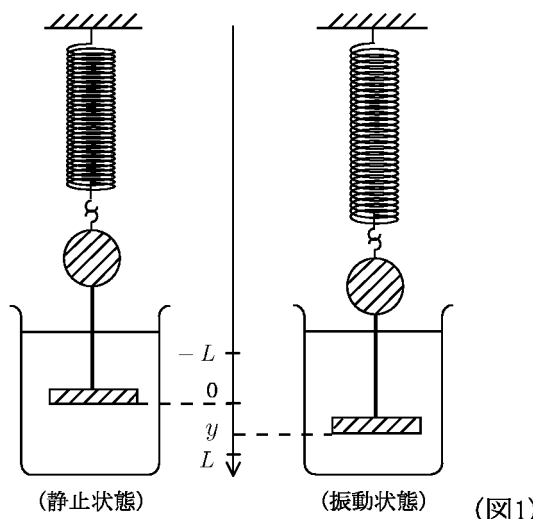


### < ばねの運動 3 >

図1のようにばねの先のおもりがある液体につかっているとき、これを振動させたときの変位  $y$  に関する微分方程式は一般に

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma \frac{dy}{dt} + (\gamma^2 + \omega^2)y = 0$$

となる。ここで  $\gamma$  は速度に比例する抵抗を意味する。また  $\omega$  は振動の速さ (ばねの強さ) を意味する。



例1  $\gamma = 2, \omega = 15$  の場合、微分方程式は

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 229y = 0$$

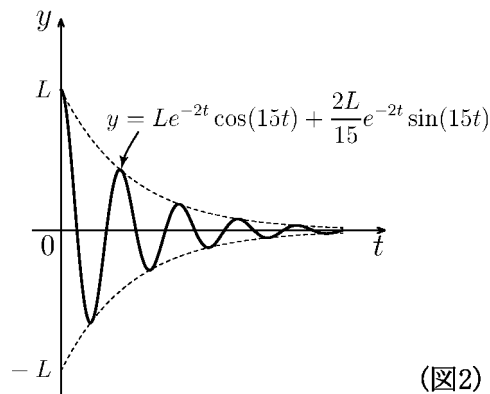
となる。ここで前ページと同じ初期条件「最初に  $L$  だけ伸ばし、静かに離す」

$$(*) \quad y(0) = L, \quad y'(0) = 0$$

を仮定すると、25 ページより (1) - (\*) の解は

$$y = Le^{-2t} \cos(15t) + \frac{2L}{15} e^{-2t} \sin(15t)$$

となる。このグラフは図2であり、ばねの振動が抵抗によってだんだん弱くなっていく。このような振動を減衰振動という。



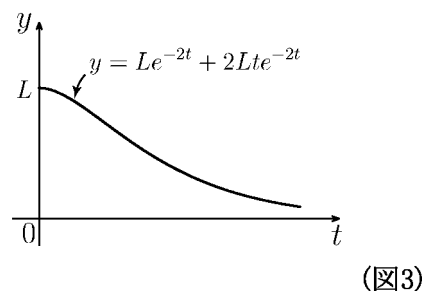
例2  $\gamma = 2, \omega = 0$  の場合、微分方程式は

$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$$

となる。上と同じ初期条件 (\*) をみたす解は

$$y = Le^{-2t} + 2Lte^{-2t}$$

となる。これは抵抗にくらべてばねの力が弱いので、振動しないで減衰していく (図3)



問 次の微分方程式を上期の初期条件 (\*) のもとで解け。

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$$

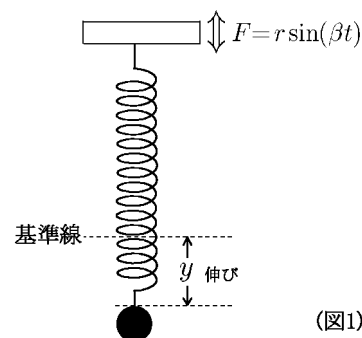
$$(2) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0$$



## &lt; 強制振動 1 &gt;

例 図1のようにばねの上端を強制的に振動させる。  
基準線からの伸びを  $y$ , 振動する外力  $F$  を  $r \sin(\beta t)$   
とする。抵抗を考えないとすると、 $y$  に関する微  
分方程式は

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = r \sin(\beta t)$$



(図1)

となる。ここで  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ( $m$  はおもりの質量、 $k$  はばね定数) である。

問1  $r = 1, \omega = 5, \beta = 4$  のとき微分方程式は

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 25y = \sin(4t)$$

となる。24 ページを参考にして (1) の一般解を求めよ。

$y =$

問2 「ばねの下端は最初基準線上に静止している」と仮定する。  
すなわち「 $t = 0$  のときの伸びは 0 であり、速度も 0 である」とする。  
この条件を数式で表せ。

$$(*) \quad y(0) = \quad , \quad y'(0) =$$

問3 微分方程式 (1) を問2の初期条件 (\*) のもとで解け。

$y =$

問4  $r = 1, \omega = 5, \beta \neq \pm 5$  のとき、微分方程式は

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)$$

となる。この微分方程式を問2の初期条件 (\*) のもとで解け。

$y =$

## < 強制振動 2 >

**例 1** 前ページ問 4 の場合 ( $r = 1, \omega = 5, \beta \neq \pm 5$ )  
微分方程式は

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 25y = \sin(\beta t)$$

となった。ここで初期条件

$$(*) \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$$

を満たす解は

$$y = -\frac{\beta}{5(25 - \beta^2)} \sin(5t) + \frac{1}{25 - \beta^2} \sin(\beta t)$$

となる。この解のグラフは図 2 ( $\beta = 4$ ), 図 3 ( $\beta = 4.5$ ),  
図 4 ( $\beta = 4.75$ ) のようになる。  
このような運動を強制振動という。

**例 2**  $r = 1, \omega = \beta = 5$  のとき微分方程式は

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 25y = \sin(5t)$$

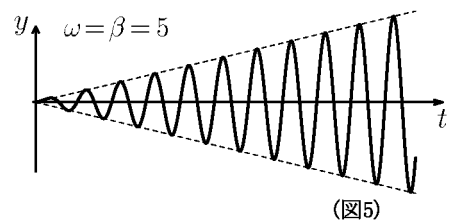
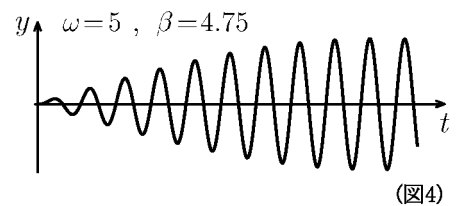
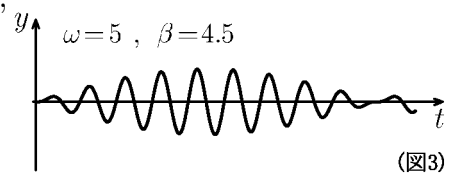
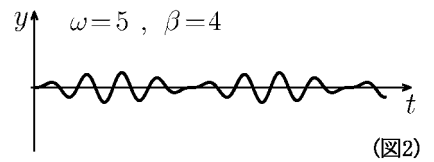
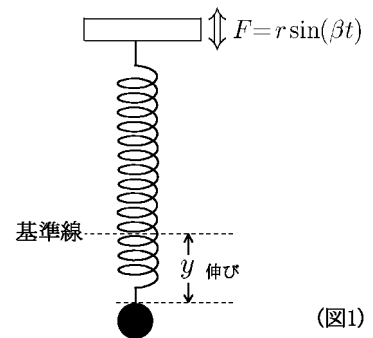
となる。

**問 1** 24 ページを参考にして、(2) の一般解を求めよ。

$$y =$$

**問 2** 上の初期条件 (\*) のもとで (2) の解を求めよ。

$$y =$$



(注) 問 2 の解のグラフは図 5 の実線である。図 5 の点線は直線  $y = \pm \frac{t}{2}$  である。つまり時刻  $t$  における振幅が  $\frac{t}{2}$  であり、時間とともに振幅が大きくなる。この現象を共振または共鳴という。

**問 3** 例 1 の解の  $\beta \rightarrow 5$  の極限を求めよ。(ヒント: 変数  $\beta$  に関するロピタルの定理を使う)

$$\lim_{\beta \rightarrow 5} \left\{ -\frac{\beta}{5(25 - \beta^2)} \sin(5t) + \frac{1}{25 - \beta^2} \sin(\beta t) \right\} = \lim_{\beta \rightarrow 5} \frac{-\beta \sin(5t) + 5 \sin(\beta t)}{125 - 5\beta^2}$$

=