高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	http://hdl.handle.net/10173/248

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series **A**

No. 7

内容

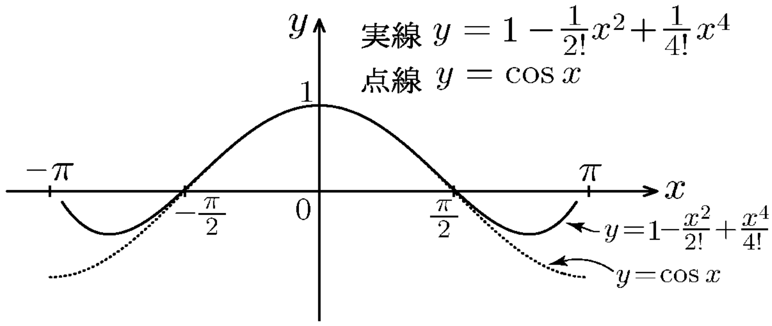
◎　高階導関数

◎　ロピタルの定理

◎　関数の近似

◎　マクローリン展開

◎　虚数



電子・光システム工学科

井上 昌昭　著

＜指数の復習＞

$a>0, m$ が整数、n が正の整数のとき

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$: a の n 乗根 (n 乗して a になる正の数)

$\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$: a の (正の) 平方根

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$: 負の指数

$a^0=1$: ゼロ乗 $=1$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$: 分数指数

〈指数法則〉 $a>0$, $b>0$, p と q は実数

1. $a^p\times a^q=a^{p+q}$, 2. $a^p\div a^q=a^{p-q}$
3. $(a^p)^q=a^{pq}$, 4. $(ab)^p=a^pb^p$

例 (1) $8^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{8})^4=2^4=16$, (2) $9^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{9^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{9}\right)^3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$

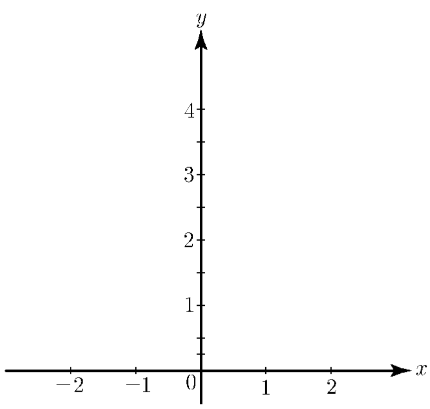
問 1 次の値を求めよ。

(1) $64^{\frac{1}{3}}$ (2) 7^0 (3) 3^{-2} (4) $4^{-\frac{1}{2}}$

(5) $27^{\frac{4}{3}}$ (6) $8^{-\frac{2}{3}}$ (7) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$ (8) $(0.0001)^{-0.25}$

問 2 下の表を完成し、右に
$y=2^x$ のグラフを描け。

x	-2	-1	0	1	2
2^x					



< 対数の復習 >

$a > 0$, $a \neq 1$ とする。正の数 M に対し $a^x = M$ をみたす実数 x を

$$x = \log_a M \quad (\Longleftrightarrow a^x = M)$$

と書き、a を底とする M の対数という。

例 1　$3 = \log_2 8 \quad (\Longleftrightarrow 2^3 = 8)$

記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例 2　(1)　$\log_2 32 = \log_2 (2^5) = 5$

(2)　$\log_9 3 = \log_9 (\sqrt{9}) = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(3)　$\log_4 0.5 = \log_4 \left(\dfrac{1}{2}\right) = \log_4 \left(\dfrac{1}{\sqrt{4}}\right) = \log_4 \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

〈対数の性質〉 $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, p は実数

(1)　$\log(M \times N) = \log_a M + \log_a N$　,　(2)　$\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(3)　$\log_a(M^p) = p \times \log_a M$

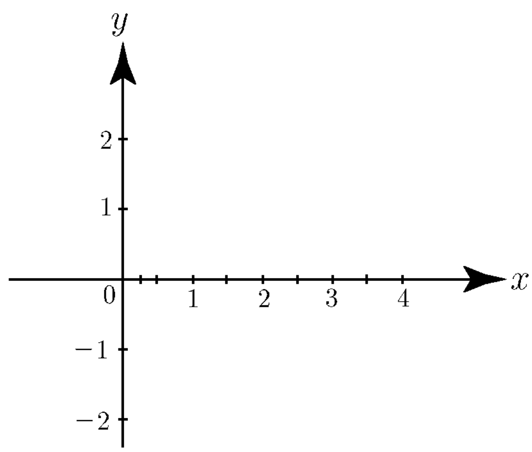
問 1　次の値を求めよ。

(1)　$\log_2 8$　　(2)　$\log_7 49$　　(3)　$\log_3 1$　　(4)　$\log_3 \left(\dfrac{1}{9}\right)$

(5)　$\log_{27} 3$　　(6)　$\log_{32} 8$　　(7)　$\log_{10} (0.01)$　　(8)　$\log_5 (0.2)$

問 2　下の表を完成し
$y = \log_2 x$ の
グラフを描け。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$					



＜ e の復習 ＞

数列 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ は

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2\ ,\ \ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25\ ,\ \ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37\ ,\ \cdots$$

$$a_{10} \fallingdotseq 2.59\ ,\ \cdots\ ,\ a_{100} \fallingdotseq 2.70\ ,\ \cdots\ ,\ a_{1000} \fallingdotseq 2.716\ ,\ \cdots\ ,\ a_{10000} \fallingdotseq 2.718\ ,\ \cdots$$

となり、少しずつ増えながら一定の値に近づく。その極限値を e で表す。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845\cdots$$

e は無理数であることが知られている。

e の定義から次の極限の式が導かれる。

$$\boxed{(1)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad , \qquad (2)\ \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

これらの式から e^x や $\log_e x$ の導関数の公式が導かれる。

底が e である対数を自然対数と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log x = \log_e x}\ (\text{自然対数})$$

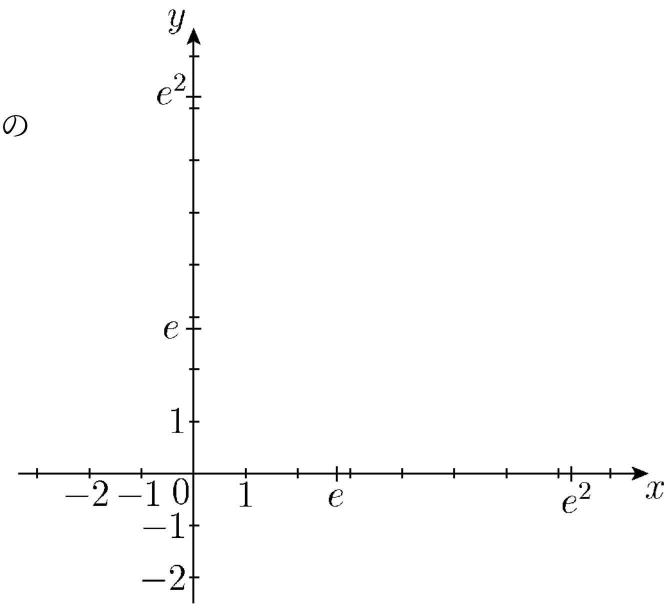
例 $\log(e^2) = \log_e(e^2) = 2$

$\log\left(\dfrac{1}{e}\right) = \log_e(e^{-1}) = -1$

問 下の表を完成し、$y = e^x$ と $y = \log x$ のグラフを右の座標平面に描け。

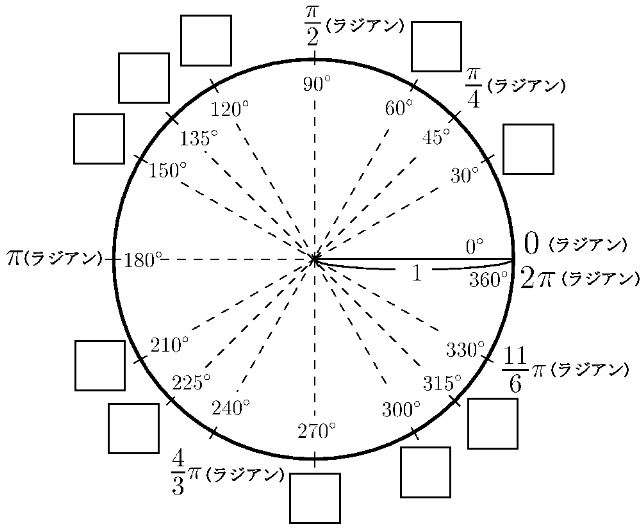
x	-2	-1	0	1	2
e^x					

x	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2
$\log x$					



＜三角関数の復習 1＞

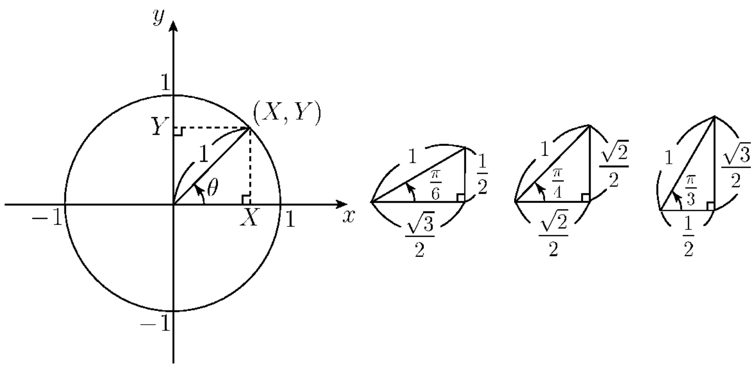
問 1　右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。
　この円の外の $\square$ 内に弧度法による角度を記せ。
(ただし単位ラジアンは省略してよい)



問 2　右図の場合に

$$\sin\theta = Y$$
$$\cos\theta = X$$
$$\tan\theta = \frac{Y}{X}$$

である。右の直角三角形の辺の長さを参考にして、下の表を完成せよ。



角度 θ	度数法	0°		45°	60°		120°		150°	180°
	弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		
$\sin\theta$										
$\cos\theta$										
$\tan\theta$										

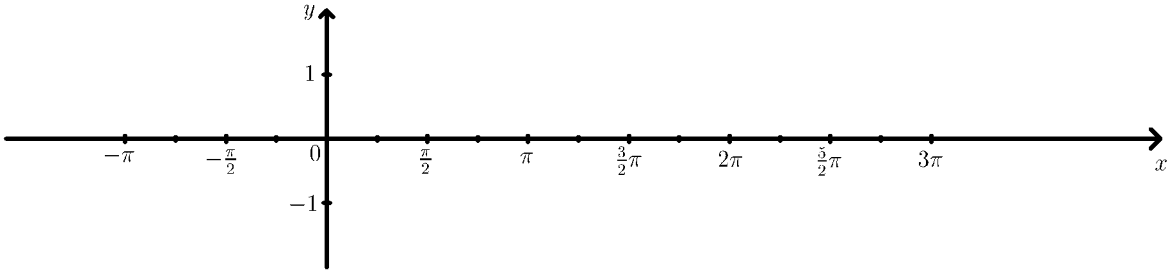
角度 θ	度数法		225°		270°			330°	
	弧度法	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		2π
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

< 三角関数の復習 2 >

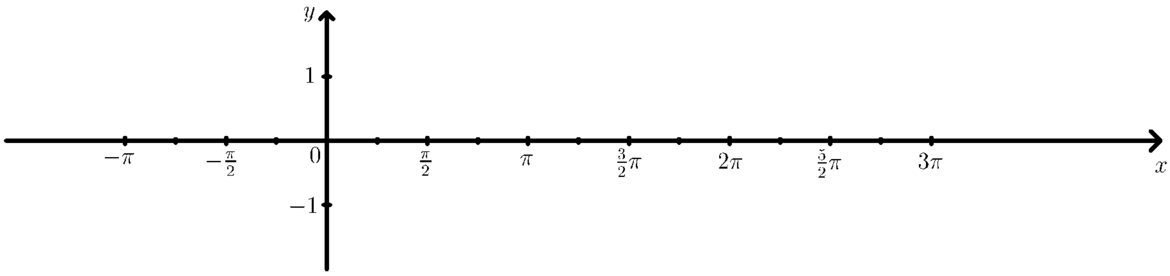
問 表を完成し、$y=\sin x$ と $y=\cos x$ および $y=\tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法		$-135°$		$-45°$	$0°$		$90°$		$180°$	$225°$		$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$		2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y=\sin x$

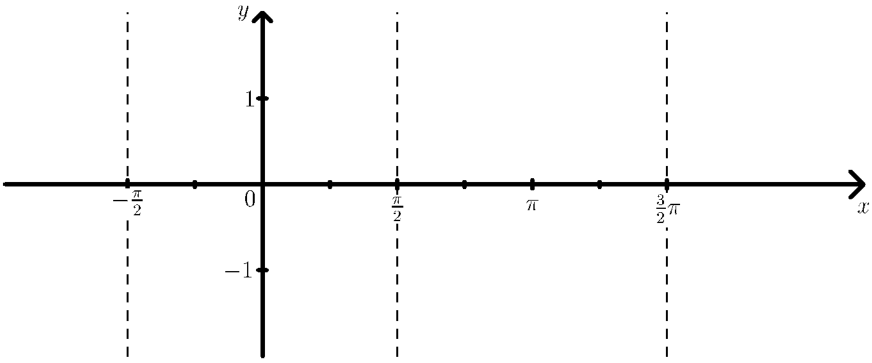


(2) $y=\cos x$



x																		
x	度数法	$-90°$		$-45°$		$0°$	$30°$		$60°$		$120°$		$150°$			$225°$		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		×								×								×

(3) $y=\tan x$



< 微分の復習 1 >

x の関数 $f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。実数 r に対し $f(x) = x^r$ のときは $f'(x) = rx^{r-1}$ となる。このことを

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

と書く。

例 1 ① $(1)' = (x^0)' = 0 \times x^{-1} = 0$

② $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

x の関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対し

$$\bigl(f(x) + g(x)\bigr)' = f'(x) + g'(x) \quad \text{(和の微分)}$$

$$\bigl(kf(x)\bigr)' = kf'(x) \quad \text{(定数倍の微分)}$$

が成り立つ。

例 2 ③ $(4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)' = 4(x^3)' - 5(x^2)' + 6(x)' - 7 \times (1)'$

$= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 6 \times 1 - 7 \times 0 = 12x^2 - 10x + 6$

④ $\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x}\right)' = (x + 2 - 3x^{-1})' = 1 + 0 - 3 \times (-1 \times x^{-2})$

$= 1 + \frac{3}{x^2}$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $(x^3 + x^2)'$ (2) $(3x^4 - 2x + 1)'$ (3) $(\sqrt[3]{x})'$

(4) $\left(\frac{1}{x}\right)'$ (5) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$ (6) $(\sqrt{x^3})'$

(7) $\left(\frac{2}{x^3}\right)'$ (8) $\left(\frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2}\right)'$ (9) $\left(\frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}\right)'$

＜微分の復習 2＞

三角関数、指数・対数関数の導関数は

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \quad , \quad (\cos x)' = -\sin x \\
(e^x)' &= e^x \quad , \quad (\log x)' = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

である。x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積と商の関数の微分は

$$
\bigl(f(x) \times g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
$$

$$
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\bigl(g(x)\bigr)^2} \quad , \quad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{\bigl(g(x)\bigr)^2}
$$

である。

例 (1) $(x^5 \cos x)' = (x^5)' \times \cos x + (x^5) \times (\cos x)' = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x$

(2) $$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $x \cos x$ (2) $e^x \sin x$ (3) $e^x \cos x$

(4) $x + x \log x$ (5) $\dfrac{1}{1-x}$ (6) $\dfrac{x}{1-x}$

(7) $\dfrac{2}{\sin x}$ (8) $\dfrac{1}{e^x}$ (9) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

< 微分の復習 3 >

$f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $y = f\big(g(x)\big)$ は $u = g(x)$ とおくと

$$y \ = \ f(u) \quad , \quad u \ = \ g(x)$$

より

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \big(f(u)\big)' \times \big(g(x)\big)' = f'(u) \times g'(x) = f'\big(g(x)\big) \times g'(x)}$$

例 (1) $y = \sin(3x+4)$ の微分は、$3x+4 = u$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\begin{aligned}\big(\sin(3x+4)\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} &= (\sin u)' \times (3x+4)' \\ &= \cos(u) \times 3 = 3\cos(3x+4)\end{aligned}$$

(2) $y = e^{x^2+1}$ の微分は、$x^2+1 = u$ とおくと $y = e^u$ より

$$(e^{x^2+1})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times (x^2+1)' = e^u \times (2x) = 2xe^{x^2+1}$$

(3) $y = (4x^2-3x)^7$ の微分は、$4x^2-3x = u$ とおくと $y = u^7$ より

$$\begin{aligned}\big((4x^2-3x)^7\big)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} &= (u^7)' \times (4x^2-3x)' = 7u^6 \times (8x-3) \\ &= 7(8x-3)(4x^2-3x)^6\end{aligned}$$

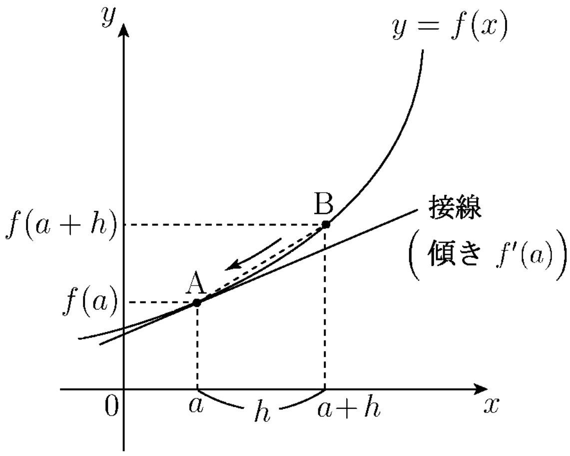
問 次の関数を微分せよ。

(1) $\sin(1-x)$ (2) $\cos(x^2+2)$ (3) e^{x^4}

(4) $(2x+1)^6$ (5) $\sqrt{2x-5}$ (6) $\cos(2x) + e^{x-1}$

(7) $e^{2x}\sin(2x)$ (8) $e^{4x}\sin(3x)$ (9) $\cos(-3x)\sin(2x)$

< 接線の傾き 1 >



関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で、$x = a$ の値

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

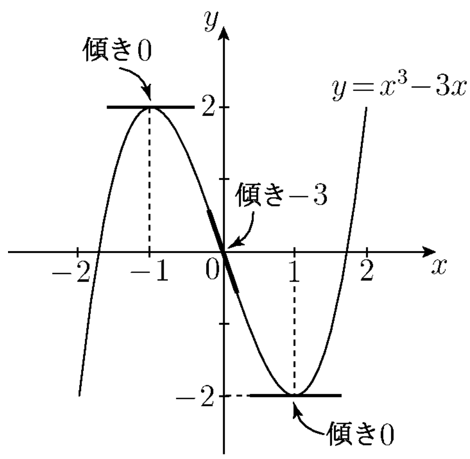
を $x = a$ における微分係数という。
右図において直線 AB の傾きが $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ であり、h を限りなく小さくした極限値 $f'(a)$ は点 A における接線の傾きを表す。

例　$f(x) = x^3 - 3x$ のグラフは右図のようである。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

であるから、$y = x^3 - 3x$ のグラフにおいて

$x = 1$ における接線の傾きは $f'(1) = 0$
$x = 0$ における接線の傾きは $f'(0) = -3$
$x = -1$ における接線の傾きは $f'(-1) = 0$
となる。



問　$f(x) = -x^3 + 3x^2$ の導関数 $f'(x)$ を求め、以下の各場合の接線の傾きを求め、$y = -x^3 + 3x^2$ のグラフの概形を右に描け。

$f'(x) =$

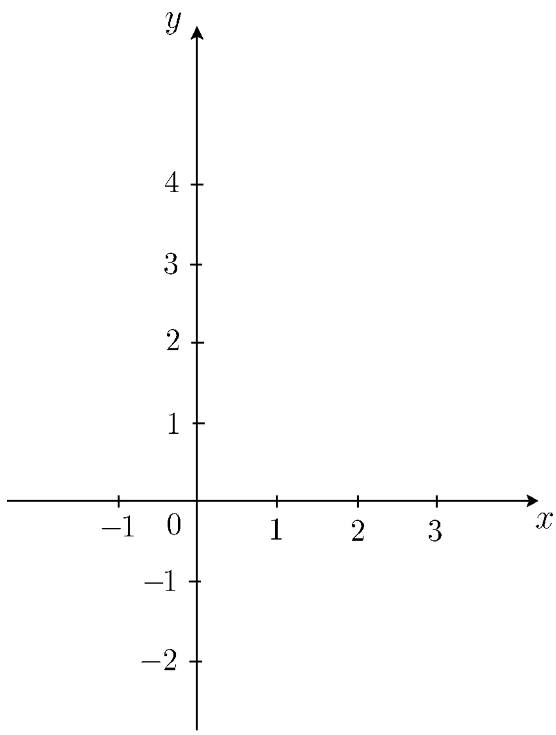
$x = -1$ における接線の傾き

$x = 0$ における接線の傾き

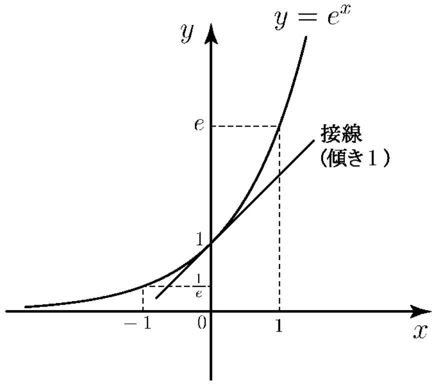
$x = 1$ における接線の傾き

$x = 2$ における接線の傾き

$x = 3$ における接線の傾き



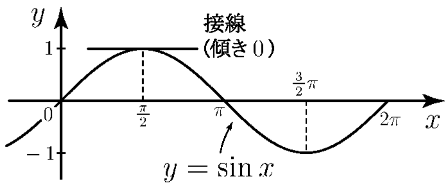
＜ 接線の傾き 2 ＞



例 1 $f(x) = e^x$ のとき $f'(x) = e^x$ より

$f'(0) = e^0 = 1$ であるから

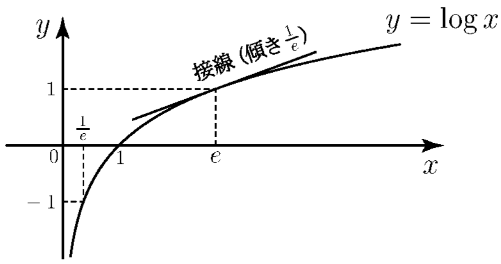
$y = e^x$ の $x = 0$ における接線の傾きは 1



例 2 $f(x) = \sin x$ のとき $f'(x) = \cos x$ より

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$y = \sin x$ の $x = \frac{\pi}{2}$ における接線の傾きは 0



例 3 $f(x) = \log x$ のとき $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ より

$f'(e) = \dfrac{1}{e}$ であるから

$y = \log x$ の $x = e$ における接線の傾きは $\dfrac{1}{e}$

問 次の関数のグラフの接線の傾きを求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 1$ における接線の傾き

(2) $y = e^x$ の $x = -1$ における接線の傾き

(3) $f(x) = \sin x$ の $x = 0$ における接線の傾き

(4) $f(x) = \sin x$ の $x = \pi$ における接線の傾き

(5) $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ における接線の傾き

(6) $f(x) = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の傾き

(7) $f(x) = \log x$ の $x = 1$ における接線の傾き

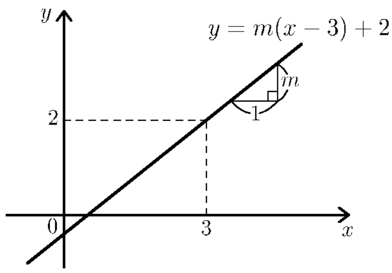
(8) $f(x) = \log x$ の $x = 2$ における接線の傾き

< 接線の方程式 1 >

例 1 m を定数とする関数

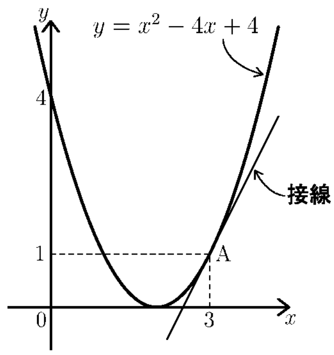
$$y = m(x-3)+2$$

は、$x=3$ のとき $y=2$ であるから、
点 $(3,2)$ を通り、傾き m の直線の方程式を意味する。



問 1 a, b, m を定数とする。**点 (a,b) を通り、傾き m の直線**の方程式を求めよ。
(答)

例 2 関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフ上の点 A$(3,1)$ における接線の方程式を求めたい。
$f(x) = x^2 - 4x + 4$ とおくと、接線の傾き m は $x = 3$ における微分係数 $f'(3)$ である。



$$f'(x) = (x^2-4x+4)' = \underset{\underset{2x}{\parallel}}{\underline{(x^2)'}} - 4 \times \underset{\underset{1}{\parallel}}{\underline{(x)'}} + \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{(4)'}} = 2x - 4$$

より
$$m = f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$$

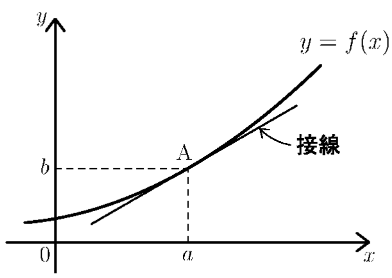
となる。点 A$(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y = m(x-3)+1$ だから

$$y = m(x-3)+1 = 2(x-3)+1 = 2x-5$$

より、接線の方程式は $\underline{y = 2x-5}$ となる。

問 2 $y = x^3 - x^2 + x$ 上の点 A$(1,1)$ における接線の方程式を求めよ。

問 3 一般の関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 A(a,b) における接線の傾きは $f'(a)$ である。接線の方程式を求めよ。



< 接線の方程式 2 >

前ページの結果より $y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線の方程式は

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)} \qquad \text{(接線の方程式)}$$

例 1 $f(x) = e^{2x}$ のとき $f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$, $f'(0) = 2e^0 = 2$

よって $y = e^{2x}$ の $x = 0$ における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2x + 1 \text{ より } \underline{y = 2x + 1} \text{ (接線)}$$

例 2 $f(x) = \log x$ のとき $f(e) = \log e = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f'(e) = \dfrac{1}{e}$

よって $y = \log x$ の $x = e$ における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x-e) + f(e) = \frac{1}{e}(x-e) + 1 = \frac{1}{e}x \text{ より } \underline{y = \frac{1}{e}x} \text{ (接線)}$$

例 3 $f(x) = \cos x$ のとき $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$f'(x) = -\sin x$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

よって $y = \cos x$ の $x = \dfrac{\pi}{2}$ における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \text{ より } \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}} \text{ (接線)}$$

例 4 $f(x) = \sqrt{x}$ のとき $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}} = \dfrac{1}{2}$

よって $y = \sqrt{x}$ の $x = 1$ における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ より } \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \text{ (接線)}$$

問 以下の接線の方程式を求めよ。

(1) $y = e^x$ の $x = 0$ における接線

(2) $y = \log x$ の $x = 1$ における接線

(3) $y = \sin x$ の $x = 0$ における接線

(4) $y = \sqrt{x}$ の $x = 4$ における接線

(5) $y = \dfrac{1}{x}$ の $x = 1$ における接線

＜関数の一次近似＞

関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である。
$x = a + h$ とおけば、$h \to 0$ のとき $x \to a$ より

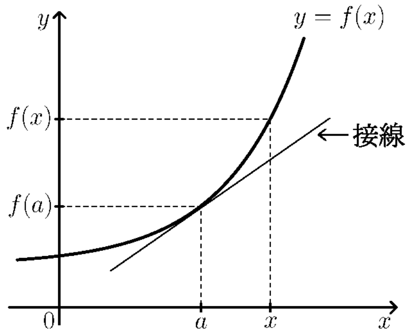
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って、x が a に十分近いとき（$x \fallingdotseq a$ のとき）

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \fallingdotseq f'(a)$$

とみなせる。よって

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x - a)}$$



が成り立つ。右辺は x の一次式であるから、
これを**一次近似式**という。右辺の式は直線

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \quad \text{（接線）}$$

を表すが、これは曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a\ ,\ f(a))$ における接線の方程式である。
すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例 $\sqrt[3]{1.1}$ の近似値を求めたい。$f(x) = \sqrt[3]{x}$ とおくと $f(a) = \sqrt[3]{a}$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ より } f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

であるから一次近似式は

$$\boxed{x \fallingdotseq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \fallingdotseq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a)}$$

となる。ここで $a = 1$, $x = 1.1$ とおけば

$$\sqrt[3]{1.1} \fallingdotseq \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0.1 = 1 + \frac{1}{30}$$

問 例にならって、$\sqrt[4]{1.1}$ を近似せよ。

< 高階導関数 >

関数 $f(x)$ を x について微分したときに求められる関数 $f'(x)$ を導関数をいうことは既に知っていると思う。$f'(x)$ をさらに微分したものを $f''(x)$ あるいは $f^{(2)}(x)$ と書き、これを 2 階導関数と呼ぶ。実際に 2 階導関数を求めてみよう。

例題 1 $f(x) = x^3$ の 2 階導関数を求めよ。

(解) $f'(x) = 3x^2$ より $f''(x) = 6x$ である。

問 1 次の関数の 2 階導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = \sin x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(3) $f(x) = \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

関数 $f(x)$ を 3 回微分したものを 3 階導関数と呼び $f'''(x)$ あるいは $f^{(3)}(x)$ で表す。

例題 2 $f(x) = x^3$ の 3 階導関数を求めよ。

(解) 例 1 より $f''(x) = 6x$ よって $f'''(x) = 6$ である。

問 2 次の関数について 3 階までの導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^5 - x^3 + x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(3) $f(x) = x \log x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

(4) $f(x) = e^{2x}$

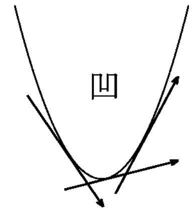
$f'(x) =$

$f''(x) =$

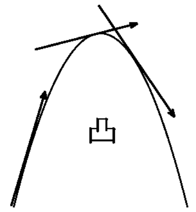
$f'''(x) =$

＜グラフの凹凸 1 ＞

[1] 関数 $f(x)$ の 2 階導関数が、ある x 範囲内で常に $f''(x) > 0$ のとき、
$f'(x)$ の値は、この範囲内で増加する。
したがって、グラフは、右の図のように
接線の傾きが増加していく。
このようなとき、グラフは**凹**であるという。



[2] これに対し、$f''(x) < 0$ である範囲内では、
$f'(x)$ の値は減少し、グラフでは、
右の図のように接線の傾きが減少していく。
このようなとき、グラフは**凸**であるという。



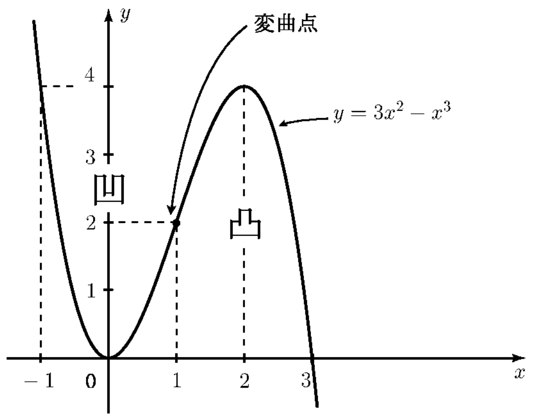
例 関数 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2$$
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だからグラフの凹凸は $x = 1$
を境にして変わる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

(凹凸表)



このグラフで凹凸の入れかわる点 (1, 2)
を**変曲点**という

問 次の関数の 2 階導関数 y'' を求め、凹凸を表にせよ。

(1) $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

$y'' =$

x	
y''	
y	

(2) $y = -x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 10$

$y'' =$

x	
y''	
y	

＜グラフの凹凸 2 ＞

例 1　2 次関数 $y = x^2 - 4x + 3$ は

$$y' = 2x - 4 = 2(x - 2)$$
$$y'' = 2$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。グラフは図 1 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

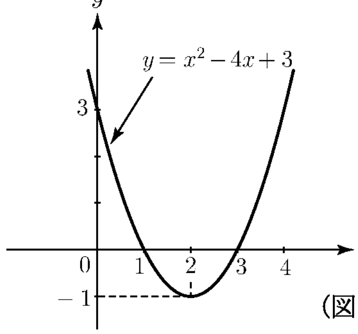
x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-1	↗

(増減表)

x	$\cdots$
y''	$+$
y	凹

(凹凸表)

x	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	⤷	-1	⤴



(図1)

例 2　2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 2$ は

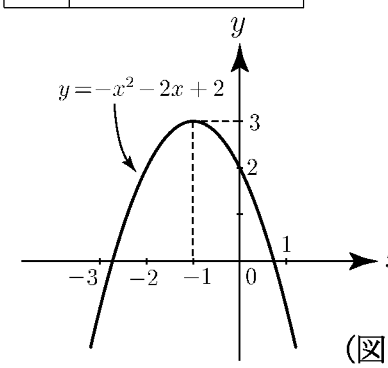
$$y' = -2x - 2 = -2(x + 1)$$
$$y'' = -2$$

より、増減表と凹凸表は右のようになり、グラフは図 2 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のように書く。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	3	↘

x	$\cdots$
y''	$-$
y	凸

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y''	$-$	$-$	$-$
y	⤴	3	⤵



(図2)

問　次の 2 次関数に対し上の例のような増減表と凹凸表をあわせた表を作れ。

(1)　$y = x^2 - 5x + 6$

x	
y'	
y''	
y	

(2)　$y = -x^2 + 4x - 5$

x	
y'	
y''	
y	

＜グラフの凹凸 3 ＞

例 $y = 3x^2 - x^3$ に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。
これを組み合わせると、下の表

増減表

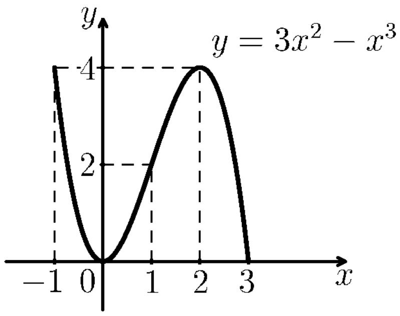
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	0	↗	4	↘

凹凸表

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	凹	2	凸

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	↘	0	↗	2	↗	4	↘

のようになる。実際のグラフは右のようになる。



以上の考察から、y' と y'' の $+, -$ によって y のグラフは
次のようになる。

y'	$-$ ↘	$+$ ↗	$+$ ↗	$-$ ↘
y''	$+$ 凹	$+$ 凹	$-$ 凸	$-$ 凸
y	↘	↗	↗	↘

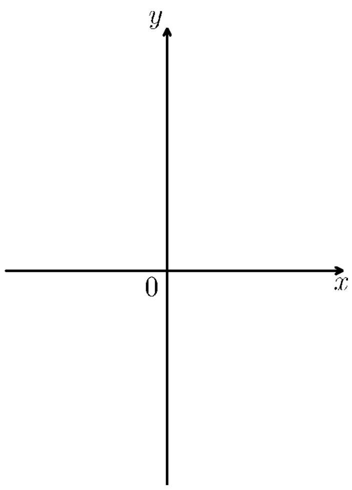
問 関数 $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ を 2 回微分し、
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$y' =$

$y'' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'							
y''							
y							



＜ 微分係数と極限値 ＞

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ での微分係数 $f'(a)$ の定義式

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \qquad \text{(微分係数)}$$

を逆に利用して極限値を求めることができる。

例 1　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$ を求めたい。

$f(x)=\cos x$ とおくと $f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x$　　, $f'(0)=-\sin 0=0$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=0$$

例 2　極限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。

$f(x)=x^5$ とおくと $f(1)=1^5=1$

$f'(x)=5x^4$　　, $f'(1)=5\times 1^4=5$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=5$$

例 3　極限 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$ を求めたい。

$f(x)=\log x$ とおくと $f(e)=\log e=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$　　, $f'(e)=\dfrac{1}{e}$ より

$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=\frac{1}{e}$$

問　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^6-64}{x-2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$

＜ロピタルの定理 1＞

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の $x=a$ における微分係数は

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad ,\qquad g'(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

である。もし $f(a)=g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のときは

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるので

$$\boxed{\begin{array}{c} f(a)=g(a)=0 \\ \left(\frac{0}{0}\text{ の型}\right)\end{array}\ \text{のとき}\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}\quad\text{(ロピタルの定理)}$$

が成り立つ。これを**ロピタルの定理**という。

(注) 前ページの極限の問題は $g'(x)=1$ となる場合である。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すると $\dfrac{0}{0}$ の型になる。分子を因数分解して

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^4+x^3+x^2+x+1)=5$$

と計算するが、この因数分解は難しい。ロピタルの定理を使うと以下のように求まる。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{5x^4}{1}=5\times 1^4=5$$

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}$ を求めたい。 $x=e$ を代入すると分母・分子共に 0

となるのでロピタルの定理より

$$\lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{(\log x-1)'}{(x-e)'}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{1}{x}-0}{1-0}=\lim_{x\to e}\frac{1}{x}=\frac{1}{e}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

＜ロピタルの定理 2＞

前ページより $f(a)=0$, $g(a)=0$, $g'(a)\neq 0$ のとき

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \qquad \text{(ロピタルの定理)}$$

がなり立つと書いたが正確には右辺の極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば $g'(a)=0$ であってもロピタルの定理はなりたつ。

例 1 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}$ を求めたい。 $x=1$ を代入すれば $\dfrac{0}{0}$ の形になるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}3\times\frac{x^5-1}{x-1}$$

となるが、最後の式は前ページ例 1 の結果 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=5$ より

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=3\times\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x-1}=3\times 5=15$$

(注) 極限が $\dfrac{0}{0}$ の形であればロピタルの定理が何度でも使える。

上の例 1 は次のように計算してよい。

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-6x+5}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^6-6x+5)'}{\left((x-1)^2\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5-6}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(6x^5-6)'}{\left(2(x-1)\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{30x^4}{2}=15$$

例 2 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)}{(x-1)^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5-5\times 2^4(x-2)}{(x-2)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1-4(x-1)-6(x-1)^2}{(x-1)^3}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1-5(x-1)-10(x-1)^2-10(x-1)^3}{(x-1)^4}$

< 微分記号 1 >

変数 x の関数 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を以下の記号で表す。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

全て同じ意味である。ここで $\dfrac{d}{dx}$ という記号は「変数 x で微分する」という意味である。

例 定数 a, b, c に対し次式が成り立つ。

(1) $\dfrac{d}{dx}(a) = 0$ (2) $\dfrac{d}{dx}(ax+b) = a$

(3) $\dfrac{d}{dx}(ax^2+bx+c) = 2ax+b$ (4) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^3\} = 3a(ax+b)^2$

(5) $\dfrac{d}{dx}(a^3x^5) = 5a^3x^4$ (6) $\dfrac{d}{dx}\{2a^3(x-a)^4\} = 8a^3(x-a)^3$

(注) (1) のように x のついていない項を微分すると 0(ゼロ) になる。

問 定数 a, b, c に対し次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4+c^2\}$, (2) $\dfrac{d}{dx}\{a^3+b^4x+c^5x^2\}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{(a+b)^3-c^4\}$, (4) $\dfrac{d}{dx}\{(a-b)^2x-c^3\}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{a^4(x-b)\}$, (6) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x+c)^2\}$

(7) $\dfrac{d}{dx}\{(ax+b)^4\}$, (8) $\dfrac{d}{dx}\{(x-a)^5\}$

(9) $\dfrac{d}{dx}\{a^3(x-a)^3\}$, (10) $\dfrac{d}{dx}\{4a^3(x-b)^4\}$

(11) $\dfrac{d}{dx}\{x^2-a^2-2a(x-a)\}$

(12) $\dfrac{d}{dx}\{x^3-a^3-3a^2(x-a)-6a(x-a)^2\}$

＜微分記号２＞

例１ 変数が x 以外の場合も同様な微分記号を用いる。

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, $\dfrac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1}$, $\dfrac{d}{dy}(y^n) = ny^{n-1}$

(2) $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\dfrac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$, $\dfrac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$

(3) $\dfrac{d}{dt}\cos t = -\sin t$, (4) $\dfrac{d}{dy}e^y = e^y$, (5) $\dfrac{d}{du}(\log u) = \dfrac{1}{u}$

問１ 以下の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}(4t^3 + 5t^2 - 2t + 3)$

(2) $\dfrac{d}{dy}(5y^6 - 7y^3 + 8y^4 - 4)$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(t+4)^5\}$

(4) $\dfrac{d}{dy}\{(3y+1)^6\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{10(t-5)^6\}$

(6) $\dfrac{d}{dy}\{15(y-4)^8\}$

例２ 定数 a, b, c に対し次式がなりたつ。

(1) $\dfrac{d}{dt}\{a^3 + b^4\} = 0$

(2) $\dfrac{d}{dy}\{a^3 + b^4 y + cy^2\} = b^4 + 2cy$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(t-a)^3\} = 3(t-a)^2$

(4) $\dfrac{d}{dy}(ay+b)^4 = 4a(ay+b)^3$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{a^4(t-a)^3\} = 3a^4(t-a)^2$

(6) $\dfrac{d}{dy}\{a^6(y-a)^5\} = 5a^6(y-a)^4$

問２ 定数 a, b, c に対して次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dt}\{(a-b)^2 t - c\}$

(2) $\dfrac{d}{dy}\{a^4(y-b)\}$

(3) $\dfrac{d}{dt}\{(at+b)^2\}$

(4) $\dfrac{d}{dy}\{(ay-b)^3\}$

(5) $\dfrac{d}{dt}\{a^4(t-1)^2\}$

(6) $\dfrac{d}{dy}\{a^5(y-b)^3\}$

(7) $\dfrac{d}{dt}\{a^5(t-a)^4\}$

(8) $\dfrac{d}{dy}\{3a^2(y+a)^5\}$

< ロピタルの定理 3 >

ロピタルの定理を微分記号 $\frac{d}{dx}$ を用いて書きなおすと以下のようになる。

< ロピタルの定理 >

関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 a に対して、

$$f(a) = 0 \quad , \quad g(a) = 0$$

でありかつ極限値

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)}$$

例

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3 - 3a^2(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}\{x^3 - a^3 - 3a^2(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^2\}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{3x^2 - 3a^2}{2(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{d}{dx}\{3x^2 - 3a^2\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{6x}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$$

問

(1) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2 - 2a(x-a)}{(x-a)^2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4 - 4a^3(x-a)}{(x-a)^2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a)}{(x-a)^2}$

＜ロピタルの定理４＞

ロピタルの定理は変数が x 以外でも同様になりたつ。

例１ $\displaystyle \lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{d}{dy}\{\log y\}}{\frac{d}{dy}\{y-1\}}=\lim_{y\to 1}\frac{\frac{1}{y}}{1}=1$

例２ $\displaystyle \lim_{t\to \pi}\frac{1+\cos t}{t-\pi}=\lim_{t\to \pi}\frac{\frac{d}{dt}\{1+\cos t\}}{\frac{d}{dt}\{t-\pi\}}=\lim_{t\to \pi}\frac{-\sin t}{1}=\frac{-\sin\pi}{1}=0$

例３ $\displaystyle \lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)}{a^3-a\beta^2}=\lim_{\beta\to a}\frac{\frac{d}{d\beta}\{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)\}}{\frac{d}{d\beta}\{a^3-a\beta^2\}}$

$$=\lim_{\beta\to a}\frac{2a\cos(2\beta)-\sin(2a)}{-2a\beta}=\frac{2a\cos(2a)-\sin(2a)}{-2a^2}$$

(注) 例１, 例２, 例３は極限のパラメータを x にかえても同じ結果が得られる。
すなわち

$$\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{y-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

$$\lim_{t\to \pi}\frac{1+\cos t}{t-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}$$

$$\lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(2\beta)-\beta\sin(2a)}{a^3-a\beta^2}=\lim_{x\to a}\frac{a\sin(2x)-x\sin(2a)}{a^3-ax^2}$$

とおきかえて答を求めてもよい。

問 定数 a,b に対し次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{y\to a}\frac{\log y-\log a}{y-a}$

(2) $\displaystyle \lim_{t\to b}\frac{\cos t-\cos b}{t-b}$

(3) $\displaystyle \lim_{\beta\to a}\frac{a\sin(b\beta)-\beta\sin(ab)}{a^3-a\beta^2}$

＜ロピタルの定理５＞

例 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2}{(x-a)^3}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^3\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)}{3(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{5x^4-5a^4-20a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{3(x-a)^2\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{20x^3-20a^3}{6(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{20x^3-20a^3\}}{\frac{d}{dx}\{6(x-a)\}}=\lim_{x\to a}\frac{60x^2}{6}=10a^2$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4-4a^3(x-a)-6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2}{(x-a)^3}$

＜ロピタルの定理 6＞

例 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2-20a^3(x-a)^3}{(x-a)^4}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{x^6-a^6-6a^5(x-a)-15a^4(x-a)^2-20a^3(x-a)^3\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^4\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{6x^5-6a^5-30a^4(x-a)-60a^3(x-a)^2}{4(x-a)^3}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{6x^5-6a^5-30a^4(x-a)-60a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{4(x-a)^3\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{30x^4-30a^4-120a^3(x-a)}{12(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{30x^4-30a^4-120a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{12(x-a)^2\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{120x^3-120a^3}{24(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{120x^3-120a^3\}}{\frac{d}{dx}\{24(x-a)\}}=\lim_{x\to a}\frac{360x^2}{24}=\frac{360a^2}{24}=15a^2$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^5-a^5-5a^4(x-a)-10a^3(x-a)^2-10a^2(x-a)^3}{(x-a)^4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7-7a^6(x-a)-21a^5(x-a)^2-35a^4(x-a)^3}{(x-a)^4}$

＜関数の高次近似１＞

例　関数 $f(x)$ と定数 a に対し、$f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ は定数だから

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f''(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f'(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(x)\} = f'''(x) \quad , \qquad \frac{d}{dx}\{f''(a)\} = 0$$

である。これらを組み合わせると。

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - f(a)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a)\} = f''(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(a)(x-a)\} = f'(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)\} = f'(a) \times 1 = f'(a)$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(a)(x-a)^2\} = f''(a) \times \frac{d}{dx}\{(x-a)^2\} = f''(a) \times 2(x-a) = 2f''(a)(x-a)$$

等がわかる。

問　関数 $f(x)$ と定数 a に対して、次の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)\}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a)\}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f'''(a)(x-a)^2\}$

(5) $\dfrac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \dfrac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3\}$

< 関数の高次近似２ >

例 関数 $f(x)$ と定数 a に対し、極限 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}$

を求めたい。$x=a$ を代入すると $\frac{0}{0}$ の型になるのでロピタルの定理が使える。

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\}}{\frac{d}{dx}(x-a)^2}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{d}{dx}\{f'(x)-f'(a)\}}{\frac{d}{dx}\{2(x-a)\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

問 例のようにロピタルの定理を何回か使って次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2-\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}{(x-a)^4}$

< 関数の高次近似 3 >

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って x が a に十分近い時は

$$\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)^2}\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。両辺に $(x-a^2)$ をかけると

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\fallingdotseq\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

よって

$$\boxed{x\fallingdotseq a \text{ のとき } \ f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}$$

が成り立つ。右辺は x の 2 次式であるから、これを**2 次近似式**という。

例 2 前のページの問 (1) の結果より

$$x\fallingdotseq a \text{ のとき } \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3}\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)$$

これを変形すると

$$f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2\fallingdotseq\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

$$\boxed{f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3}$$

この式は x が a に限りなく近い場合に $f(x)$ を

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

に書き換えることができることを言っている。このような書き換えを近似するという。この場合は 3 次式なので **3 次近似式**という。

問 前ページの問 (2) の結果を使って、関数 $f(x)$ の 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x\fallingdotseq a$ のとき

$f(x)\fallingdotseq$

< 高階微分係数 >

関数 $f(x)$ の n 階導関数を $f^{(n)}$ と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x),\ f''(x) = f^{(2)}(x),\ f'''(x) = f^{(3)}(x), f''''(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、n 階導関数の $x = a$ における値 $f^{(n)}(a)$ を $x = a$ における$\boldsymbol{n}$**階微分係数**という。

例 (1) $f(x) = x^5$ のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4,\ f^{(2)}(x) = 20x^3,\ f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、$x = 2$ における４階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80,\quad f^{(2)}(2) = 160,\quad f^{(3)}(2) = 240,\quad f^{(4)}(2) = 240$$

(2) $f(x) = \cos x$ のとき

$$f^{(1)}(x) = -\sin x,\ f^{(2)}(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x,\ f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin x,\ f^{(6)}(x) = -\cos x,\ f^{(7)}(x) = \sin x,\ f^{(8)}(x) = \cos x$$

より $x = 0$ における８階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 0,\ f^{(2)}(0) = -1,\ f^{(3)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 1$$
$$f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(6)}(0) = -1,\ f^{(7)}(0) = 0,\ f^{(8)}(0) = 1$$

問 (1) $f(x) = e^x$ の４階導関数 $f^{(4)}(x)$ を求め、$x = 0$ における４階微分係数 $f^{(4)}(0)$ を求めよ。

(2) $f(x) = e^x$ の n 階導関数 $f^{(n)}(x)$ を求め、$x = 0$ おける n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

(3) $f(x) = \sin x$ の８階までの導関数 $\left(f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)\right)$ を求め、$x = 0$ における８階までの微分係数 $\left(f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)\right)$ を求めよ。

＜ 関数の n 次近似 1 ＞

29 ページの結果から、関数 $f(x)$ の 4 次近似式は

$$(※)\quad \boxed{f(x) \fallingdotseq f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4}$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$ の係数は順に

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{24},\ \cdots$$

となるが、この分母の数は、28 ページの計算からロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は $(x-a)^4$ を 4 回微分して得られる。つまり、

$$\big((x-a)^4\big)'''' = \big(4(x-a)^3\big)''' = \big(3\times 4(x-a)^2\big)'' = \big(2\times 3\times 4(x-a)\big)' = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$$

である。つまり $24 = 1\times 2\times 3\times 4$ と書ける。

ここで階乗の記号を使って式を見やすいものにする。階乗とは数字を順番に $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\cdots(n-1)\times n$ というふうに計算することで、 n までかけた時には $n!$ というふうに書く。

$24 = 1\times 2\times 3\times 4$ ということは 4 までかけているので $4!$ と表す。

上の例の係数は

$$\frac{1}{1},\ \frac{1}{1\times 2},\ \frac{1}{1\times 2\times 3},\ \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}$$

ここで階乗の記号を使うと

$$\frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \frac{1}{4!}$$

と書くことができる。

問　上の 4 次近似式 ((※) 式) を階乗の記号を用いて書け。

$f(x) \fallingdotseq$

< 関数の n 次近似 2 >

前のページでは $f(x)$ は階乗の記号を使うと

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

というふうに書けることを説明した。

さて、上の式について

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 \quad , \quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 \quad , \quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

同じ数字　　同じ数字　　同じ数字

という同じ数字が使われているパターンに気づくと思う。

したがって、 4 のところを n にして $f(x)$ を書き直すと、

$x \fallingdotseq a$ のとき
$$f(x) \fallingdotseq f(a)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

というふうになる。この式を ***n* 次近似式**という。

例 $f(x)=e^x$ のとき、 $f^{(n)}(x)=e^x$ より $f^{(n)}(4)=e^4$ である。

したがって $x \fallingdotseq 4$ における n 次近似式は

$x \fallingdotseq 4$ のとき

$$e^x \fallingdotseq e^4+e^4(x-4)+\frac{e^4}{2!}(x-4)^2+\frac{e^4}{3!}(x-4)^3+\cdots+\frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

問 $f(x)=e^x$ に対し、 $x \fallingdotseq a$ における n 次近似式を求めよ。

< テーラー展開 >

関数 $f(x)$ の n 次近似式

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数 n が大きくなるほど、近似の精度が上がる。x が a に十分近くなくても、n を大きくすれば近似できる。ここで n を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**テーラー展開**という。

例 $f(x)=e^x$ の $x=2$ におけるテーラー展開を求めたい。$f^{(n)}(x)=e^x$ であるから

$$f(2)=e^2 \ , \ f^{(1)}(2)=e^2 \ , \ f^{(2)}(2)=e^2 \ , \ f^{(3)}(2)=e^2 \ , \ \cdots \ , \ f^{(n)}(2)=e^2$$

となるので $x=2$ におけるテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

問 1 $f(x)=e^x$ に対し、$x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

問 2 $f(x)=e^x$ に対し、a が次の場合の $x=a$ におけるテーラー展開を求めよ。

(1) $a=1$

(2) $a=0$

< マクローリン展開 1 >

関数 $f(x)$ の $x=0$ におけるテーラー展開

$$\boxed{f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x+\frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3+\cdots}$$

を**マクローリン展開**という。前ページの問 2 (2) では $f(x)=e^x$ の
マクローリン展開を求めた。
すなわち

$$\boxed{e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\cdots}$$

となる。

例 $f(x)=\cos(x)$ のとき、30 ページの例より

$$f^{(1)}(0)=0\ ,\ f^{(2)}(0)=-1\ ,\ f^{(3)}(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=1$$
$$f^{(5)}(0)=0\ ,\ f^{(6)}(0)=-1\ ,\ f^{(7)}(0)=0\ ,\ f^{(8)}(0)=1$$

で数列 $\left\{f^{(n)}(0)\right\}$ は、 $0,\ -1,\ 0,\ 1$ を 4 項おきに繰り返す。

又、 $f(0)=\cos 0=1$ だから $f(x)=\cos x$ のマクローリン展開は

$$\boxed{\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8-\frac{1}{10!}x^{10}+\cdots}$$

となる。

問 30 ページの結果を使って、 $f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ。

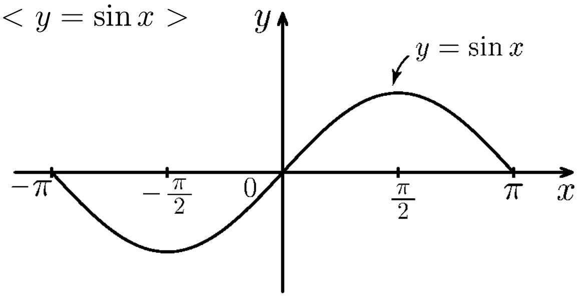
＜マクローリン展開 2＞

例 1　前ページより $\sin x$ のマクローリン展開は

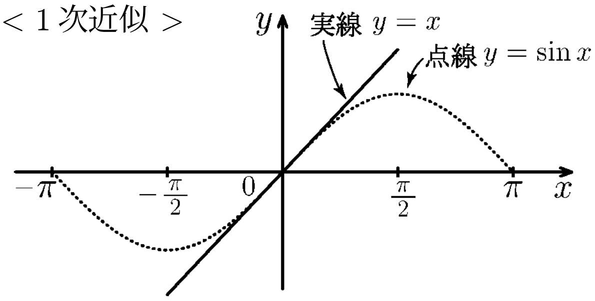
$$\boxed{\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\sin x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

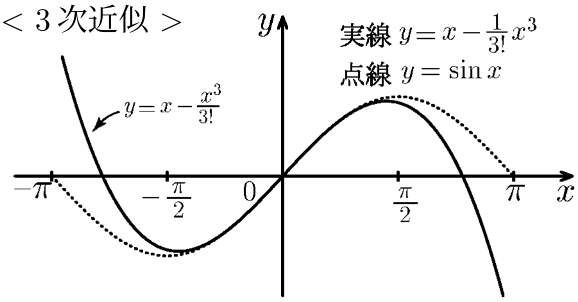
＜ $y = \sin x$ ＞



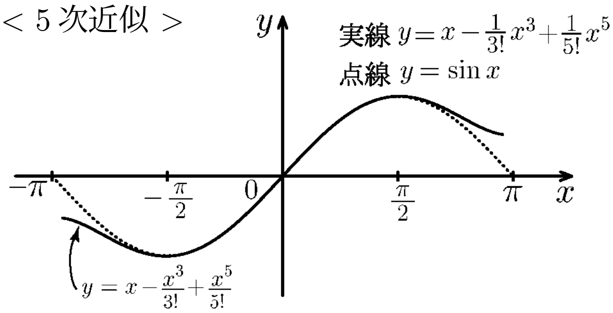
＜ 1 次近似 ＞



＜ 3 次近似 ＞



＜ 5 次近似 ＞

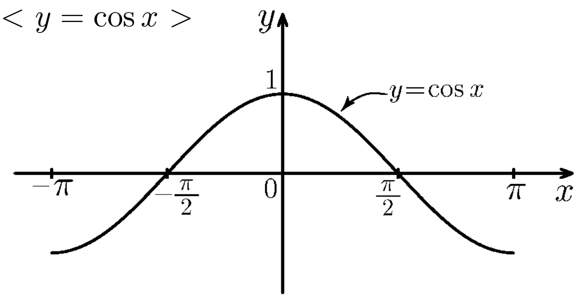


例 2　$\cos x$ のマクローリン展開は

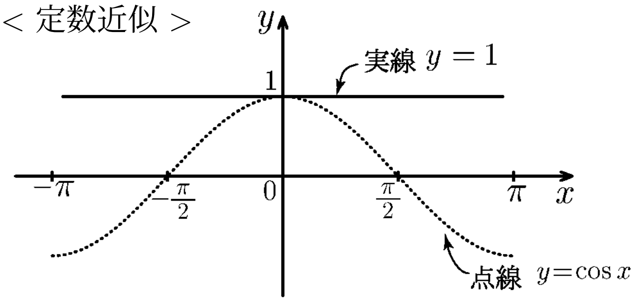
$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots}$$

となる。以下の図のように $\cos x$ のグラフの $x=0$ の近くを近似していることがわかる。

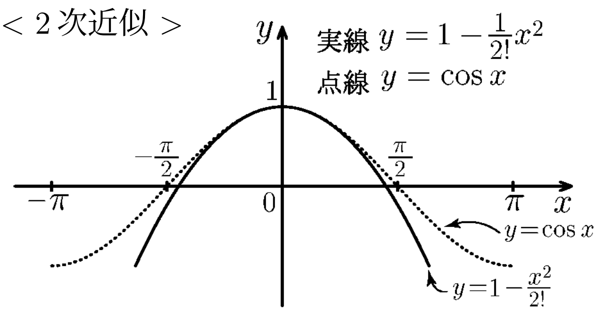
＜ $y = \cos x$ ＞



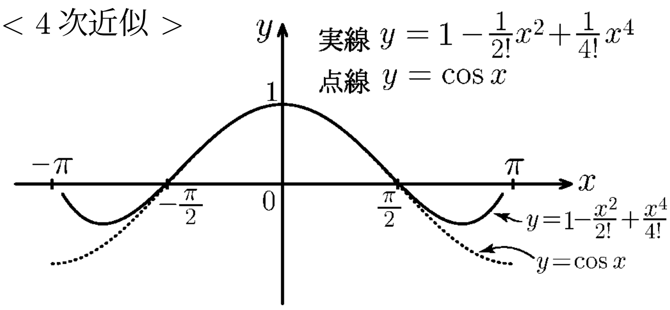
＜ 定数近似 ＞



＜ 2 次近似 ＞



＜ 4 次近似 ＞



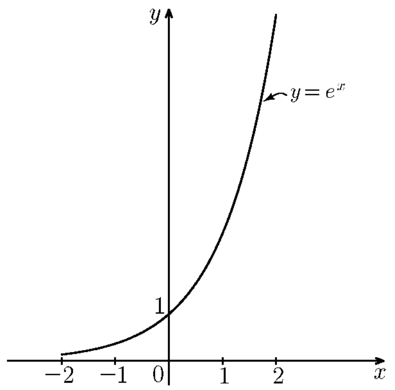
< マクローリン展開 3 >

指数関数 e^x のマクローリン展開は

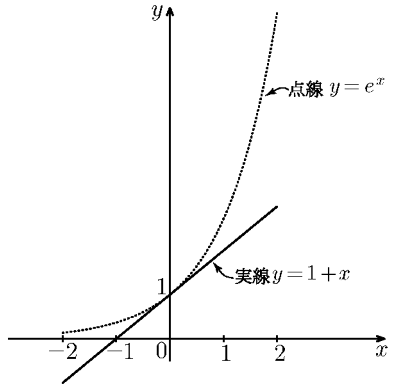
$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots}$$

となる。以下の図のように e^x のグラフの $x = 0$ の近くを近似していることがわかる。

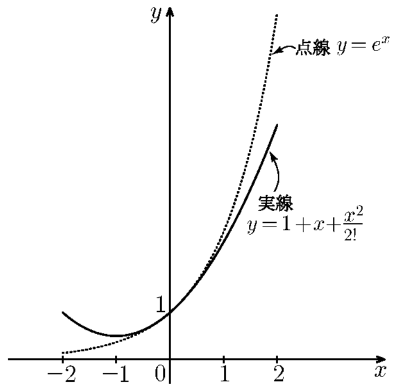
$< y = e^x >$



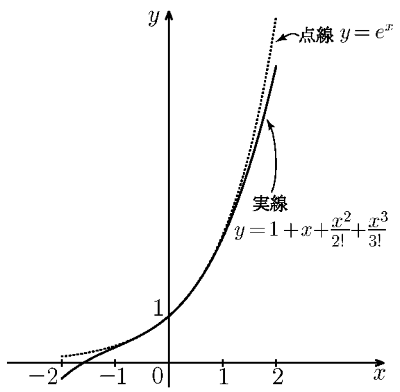
< 1 次近似 >



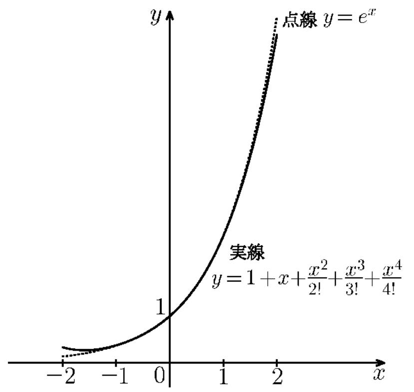
< 2 次近似 >



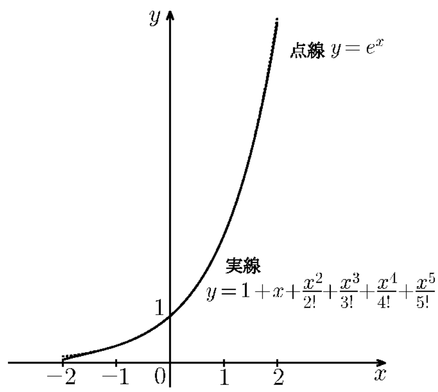
< 3 次近似 >



< 4 次近似 >



< 5 次近似 >



上の図からわかるように 4 次関数 $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で e^x のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式がなりたつ。

$$\boxed{-1 \leqq x \leqq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \fallingdotseq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4}$$

問　この近似式で $x = 1$ とおくと

$$e \fallingdotseq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

となる。この式の右辺を計算することにより e の近似値を求めよ。

＜実数＞

自然数 (natural number) の全体を $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

整数 (integer) の全体を $\boldsymbol{Z}$.

$$\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

で表す。また整数 a,b の比 (ratio) $\dfrac{b}{a}$ で表される分数を有理数 (rational number) といい, 有理数の全体を $\boldsymbol{Q}$ で表す。

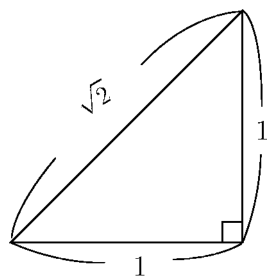
(注) 有限小数および循環小数は分数で表されるので有理数である。
逆に全ての有理数は有限小数か循環する無限小数で表される。

例 1 $\dfrac{3}{8} = 0.375$, $\dfrac{5}{12} = 0.41666\cdots = 0.41\dot{6}$, $\dfrac{3}{11} = 0.27272727\cdots = 0.\dot{2}\dot{7}$

問 1 次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{5}{8}$ (2) $\dfrac{1}{15}$ (3) $\dfrac{2}{11}$

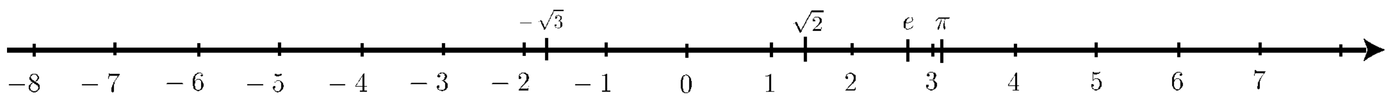
例 2 2 の平方根 $\sqrt{2}$ は右図の直角三角形の斜辺の長さであるが これは有理数 (整数の比) ではないことがわかっている。このような数を無理数 (irrational number) という。



有理数と無理数を総称して実数 (real number) とよぶ。
実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す。

$$\text{自然数}\,(\boldsymbol{R})\begin{cases}\text{有理数}\,(\boldsymbol{Q})\begin{cases}\text{整数}\,(\boldsymbol{Z})\begin{cases}\text{正の整数} = \text{自然数}\,(\boldsymbol{N})\\ \text{零 } 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\ \\ \text{分数}\end{cases}\\ \\ \text{無理数}\cdots\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}(\text{立方根}), \pi(\text{円周率}), e(\text{自然対数の底})\text{ など}\end{cases}$$

問 2 $\sqrt{3}$, $-e$, 2π , $-3\sqrt{2}$ を数直線上の点として表示せよ。



＜ 虚数の導入 1 ＞

2 次方程式

(1) $$x^2 = -1$$

をみたす実数 x は存在しない。しかし、この方程式を満足する数、つまり 2 乗すれば -1 となるような新しい数があるものと考えることにして、それを $\boldsymbol{i}$ という記号で表すことにする。すなわち

$$i^2 = -1$$

である。

さらにこの新しい数 i に対しても、いままでの計算の規則が成り立つと考えることにする。そうすれば

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

であるから

$x^2 = -1$ の解は i と $-i$ の 2 つである

と考えられる。

次に 2 次方程式

(2) $$x^2 = -9$$

を考える。この式の両辺を 3^2 で割ると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -1$$

であるから、いま導入した i を用いて

$$\frac{x}{3} = \pm\, i$$

より (2) の解は

$$x = 3i \quad \text{および} \quad x = -3i$$

という新しい数であるとするのがいいであろう。

問　次の 2 次方程式の解を i を用いて表せ。

(1) $x^2 = -16$　　(2) $4x^2 = -25$　　(3) $6x^2 = -2$

＜虚数の導入２＞

２次方程式

$$(*) \qquad x^2 - 2x + 10 = 0$$

を考える。この式の両辺から 9 を引くと

$$x^2 - 2x + 1 = -9$$

$$(x-1)^2 = -9$$

となる。ここで

$$x - 1 = X$$

とおくと

$$X^2 = -9$$

となるから、前ページの i を用いて

$$X = 3i \quad \text{および} \quad X = -3i$$

すなわち

$$x - 1 = 3i \quad \text{および} \quad x - 1 = -3i$$

より $(*)$ 式の解は、新しい数

$$x = 1 + 3i \quad \text{および} \quad x = 1 - 3i$$

であると考えるのがいいであろう。
このような数

$$i, \ \ -i, \ \ 3i, \ \ -3i, \ \ 1+3i, \ \ 1-3i$$

等を総称して **虚数** と呼ぶ。２次方程式の解の範囲を
虚数にまで拡張すれば、２次方程式は必ず解が存在
する。

問　次の２次方程式の解を i を用いて表せ。（ただし $a, \ b, \ c$ は実数）

(1) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = -3$

(2) $x^2 - 6x + 13 = 0$

(3) $(x-a)^2 = -\dfrac{c^2}{b^2}$

< 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数 i を **虚数単位** という。虚数単位は $i = \sqrt{-1}$ と書く場合もある。（電気関係の本は虚数単位を j で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は i で統一してある。）

実数 a, b に対し

$$z = a + bi$$

の形を **複素数** ($complex\ number$) とよび、複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ という記号で表す。実数 a, b をそれぞれ複素数 z の **実部** ($real\ part$) および **虚部** ($imaginary\ part$) とよび、

$$a = \mathrm{Re}(z)\ ,\ b = \mathrm{Im}(z)$$

という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき} \quad z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また $b \neq 0$ のとき、 z を **虚数** とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を **純虚数** という。

$$\text{複素数}(\boldsymbol{C})\begin{cases}\text{実数}(\boldsymbol{R})\\[2em] \text{虚数}\begin{cases}\text{純虚数} & \cdots\ 2i\ ,\ \frac{1}{3}i\ ,\ -\sqrt{2}i\ \text{など}\\ \text{その他の虚数} & \cdots\ 1+2i\ ,\ -2+\sqrt{3}i\ \text{など}\end{cases}\end{cases}$$

２つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、２つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに} \quad a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

例

(1) $a + bi = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3},\ \ b = 0$

(2) $a + bi = -3i \quad \Leftrightarrow \quad a = 0,\ \ b = -3$

(3) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{2},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

問 次式をみたす実数 a, b を求めよ。

(1) $a + bi = \dfrac{1 + 3i}{2}$ (2) $a + bi = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{3}\, i$