

## 2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10173/248">http://hdl.handle.net/10173/248</a>

高知工科大学  
基礎数学ワークブック

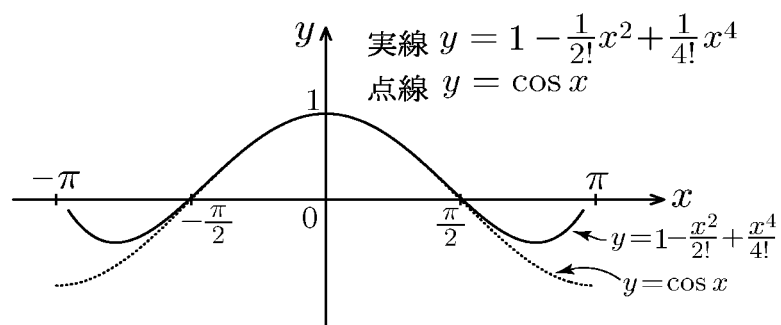
(2002年度版)

Series **A**

No. 7

内容

- ◎ 高階導関数
- ◎ ロピタルの定理
- ◎ 関数の近似
- ◎ マクローリン展開
- ◎ 虚数



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

## &lt; 指数の復習 &gt;

 $a > 0, m$  が整数、 $n$  が正の整数のとき

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad : a \text{ の } n \text{ 乗根 (} n \text{ 乗して } a \text{ になる正の数)}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad : a \text{ の (正の) 平方根}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad : \text{負の指数}$$

$$a^0 = 1 \quad : \text{ゼロ乗} = 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \quad : \text{分数指数}$$

<指数法則>  $a > 0, b > 0, p$  と  $q$  は実数

$$1. a^p \times a^q = a^{p+q} \quad , \quad 2. a^p \div a^q = a^{p-q}$$

$$3. (a^p)^q = a^{pq} \quad , \quad 4. (ab)^p = a^p b^p$$

例 (1)  $8^{\frac{4}{3}} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$  , (2)  $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt{9})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

問1 次の値を求めよ。

(1)  $64^{\frac{1}{3}}$

(2)  $7^0$

(3)  $3^{-2}$

(4)  $4^{-\frac{1}{2}}$

(5)  $27^{\frac{4}{3}}$

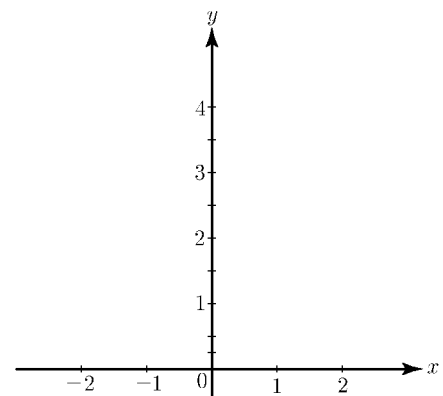
(6)  $8^{-\frac{2}{3}}$

(7)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$

(8)  $(0.0001)^{-0.25}$

問2 下の表を完成し、右に  $y = 2^x$  のグラフを描け。

$x$	-2	-1	0	1	2
$2^x$					



## < 対数の復習 >

$a > 0$  ,  $a \neq 1$  とする。正の数  $M$  に対し  $a^x = M$  をみたす実数  $x$  を

$$x = \log_a M \quad (\iff a^x = M)$$

と書き、 $a$  を底とする  $M$  の対数という。

**例 1**  $3 = \log_2 8 \quad (\iff 2^3 = 8)$

記号  $\log_a$  は  $a$  を何乗すれば になるか? という意味である。

**例 2** (1)  $\log_2 32 = \log_2 (2^5) = 5$

(2)  $\log_9 3 = \log_9 (\sqrt{9}) = \log_9 (9^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$

(3)  $\log_4 0.5 = \log_4 \left(\frac{1}{2}\right) = \log_4 \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right) = \log_4 (4^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}$

<対数の性質>  $a > 0$  ,  $a \neq 1$  ,  $M > 0$  ,  $N > 0$  ,  $p$  は実数

$$(1) \log(M \times N) = \log_a M + \log_a N \quad , \quad (2) \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a (M^p) = p \times \log_a M$$

**問 1** 次の値を求めよ。

(1)  $\log_2 8$                       (2)  $\log_7 49$                       (3)  $\log_3 1$                       (4)  $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

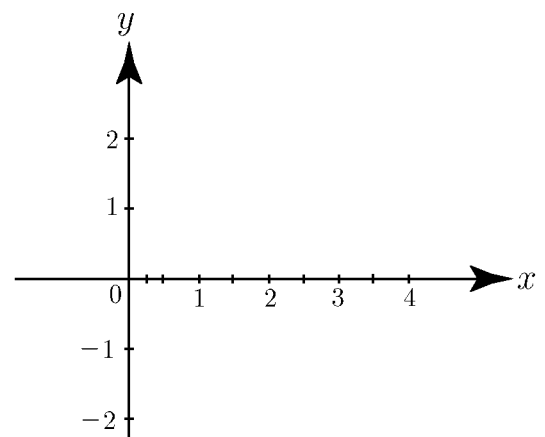
(5)  $\log_{27} 3$                       (6)  $\log_{32} 8$                       (7)  $\log_{10} (0.01)$                       (8)  $\log_5 (0.2)$

**問 2** 下の表を完成し

$$y = \log_2 x \text{ の}$$

グラフを描け。

$x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$					



<  $e$  の復習 >

数列  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  は

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25, \quad a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \doteq 2.37, \quad \dots$$

$$a_{10} \doteq 2.59, \quad \dots, \quad a_{100} \doteq 2.70, \quad \dots, \quad a_{1000} \doteq 2.716, \quad \dots, \quad a_{10000} \doteq 2.718, \quad \dots$$

となり、少しずつ増えながら一定の値に近づく。その極限値を  $e$  で表す。

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845\dots$$

$e$  は無理数であることが知られている。

$e$  の定義から次の極限の式が導かれる。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

これらの式から  $e^x$  や  $\log_e x$  の導関数の公式が導かれる。

底が  $e$  である対数を自然対数と呼び、底を省略する。

$$\log x = \log_e x \quad (\text{自然対数})$$

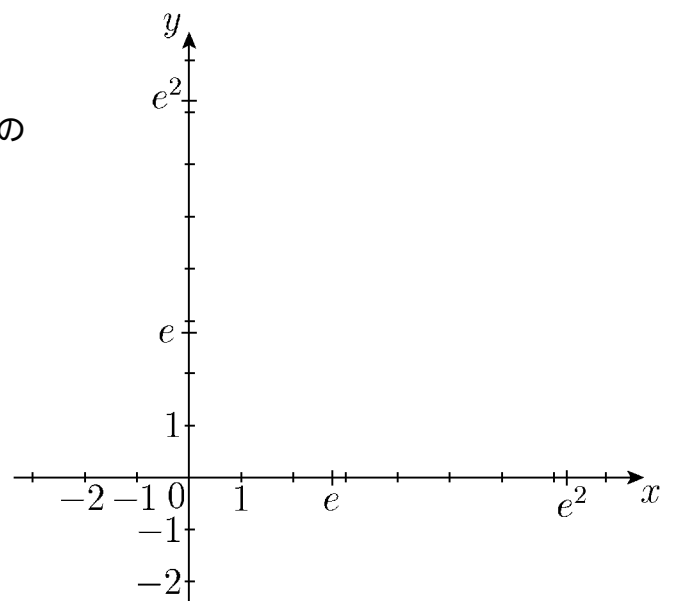
例  $\log(e^2) = \log_e(e^2) = 2$

$$\log\left(\frac{1}{e}\right) = \log_e(e^{-1}) = -1$$

問 下の表を完成し、 $y = e^x$  と  $y = \log x$  のグラフを右の座標平面に描け。

$x$	-2	-1	0	1	2
$e^x$					

$x$	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	$e$	$e^2$
$\log x$					

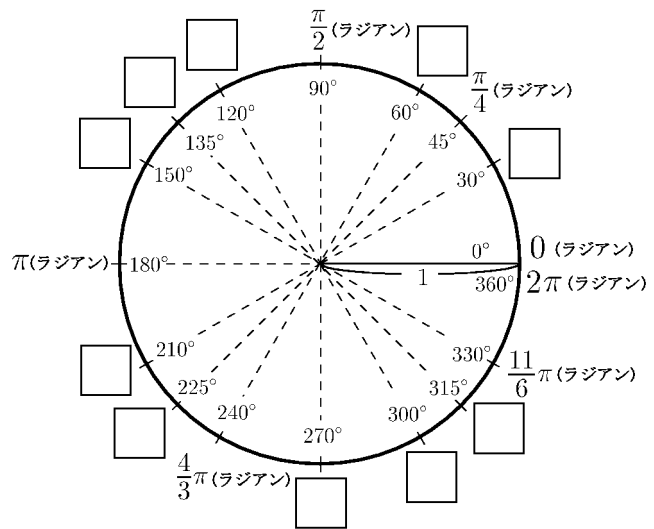


### < 三角関数の復習 1 >

問 1 右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。

この円の外の  内に弧度法による角度を記せ。

(ただし単位ラジアンは省略してよい)



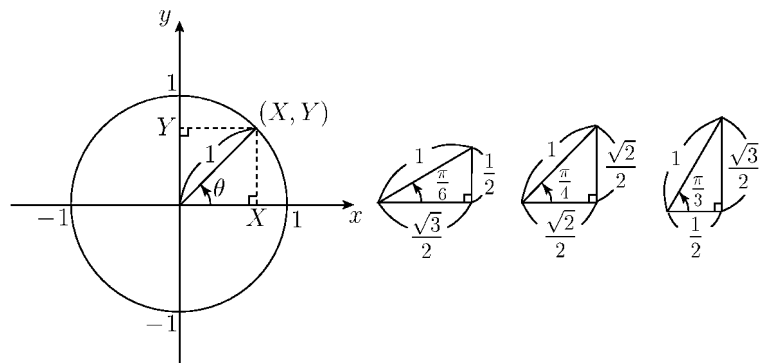
問 2 右図の場合に

$$\sin \theta = Y$$

$$\cos \theta = X$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X}$$

である。右の直角三角形の辺の長さを参考にして、下の表を完成せよ。



角度 $\theta$	度数法	$0^\circ$		$45^\circ$	$60^\circ$		$120^\circ$		$150^\circ$	$180^\circ$
	弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		
$\sin \theta$										
$\cos \theta$										
$\tan \theta$						X				

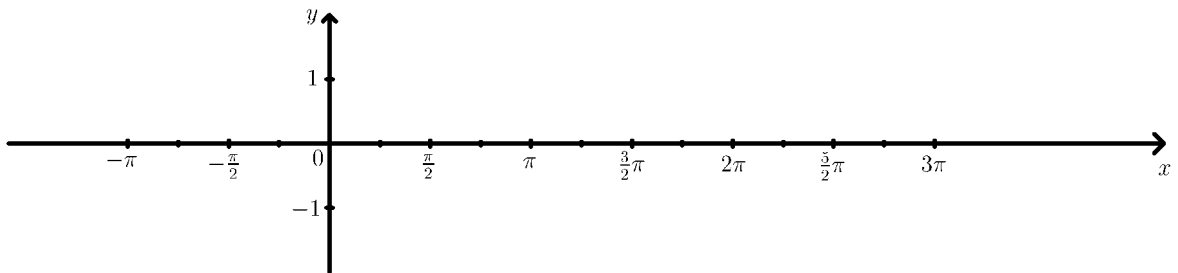
角度 $\theta$	度数法		$225^\circ$		$270^\circ$			$330^\circ$	
	弧度法	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		$2\pi$
$\sin \theta$									
$\cos \theta$									
$\tan \theta$					X				

## < 三角関数の復習 2 >

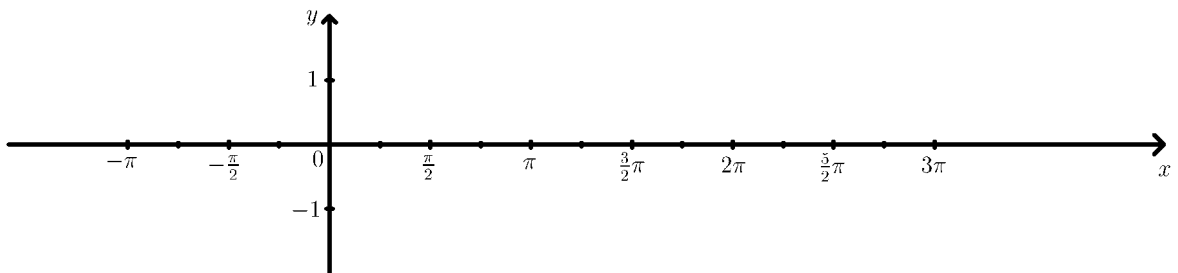
問 表を完成し、 $y = \sin x$  と  $y = \cos x$  および  $y = \tan x$  のグラフを書け。

$x$	度数法		$-135^\circ$		$-45^\circ$	$0^\circ$		$90^\circ$		$180^\circ$	$225^\circ$		$315^\circ$		$405^\circ$		$495^\circ$
	弧度法	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$		$2\pi$		$\frac{5}{2}\pi$		$3\pi$	
$\sin x$																	
$\cos x$																	

(1)  $y = \sin x$

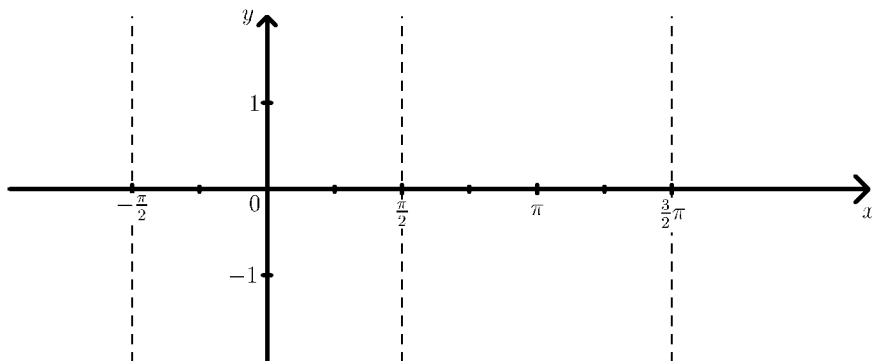


(2)  $y = \cos x$



$x$	度数法	$-90^\circ$		$-45^\circ$		$0^\circ$	$30^\circ$		$60^\circ$		$120^\circ$		$150^\circ$		$225^\circ$		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		$\times$							$\times$								$\times$

(3)  $y = \tan x$



## &lt; 微分の復習 1 &gt;

$x$  の関数  $f(x)$  の導関数の定義は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

である。実数  $r$  に対し  $f(x) = x^r$  のときは  $f'(x) = rx^{r-1}$  となる。このことを

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

と書く。

**例 1**  $(1)' = (x^0)' = 0 \times x^{-1} = 0$   
 $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$x$  の関数  $f(x), g(x)$  と定数  $k$  に対し

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) && \text{(和の微分)} \\ (kf(x))' &= kf'(x) && \text{(定数倍の微分)} \end{aligned}$$

が成り立つ。

**例 2**  $(4x^3 - 5x^2 + 6x - 7)' = 4(x^3)' - 5(x^2)' + 6(x)' - 7 \times (1)'$   
 $= 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 6 \times 1 - 7 \times 0 = 12x^2 - 10x + 6$   
 $\left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x}\right)' = (x + 2 - 3x^{-1})' = 1 + 0 - 3 \times (-1 \times x^{-2})$   
 $= 1 + \frac{3}{x^2}$

**問** 次の導関数を求めよ。

(1)  $(x^3 + x^2)'$                       (2)  $(3x^4 - 2x + 1)'$                       (3)  $(\sqrt[3]{x})'$

(4)  $\left(\frac{1}{x}\right)'$                       (5)  $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$                       (6)  $(\sqrt{x^3})'$

(7)  $\left(\frac{2}{x^3}\right)'$                       (8)  $\left(\frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2}\right)'$                       (9)  $\left(\frac{x^2 - x}{\sqrt{x}}\right)'$





## &lt; 微分の復習 3 &gt;

$f(x)$  と  $g(x)$  との合成関数  $y = f(g(x))$  は  $u = g(x)$  とおくと

$$y = f(u) \quad , \quad u = g(x)$$

より

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (f(u))' \times (g(x))' = f'(u) \times g'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

例 (1)  $y = \sin(3x + 4)$  の微分は、 $3x + 4 = u$  とおくと  $y = \sin u$  より

$$\begin{aligned} (\sin(3x + 4))' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times (3x + 4)' \\ &= \cos(u) \times 3 = 3 \cos(3x + 4) \end{aligned}$$

(2)  $y = e^{x^2+1}$  の微分は、 $x^2 + 1 = u$  とおくと  $y = e^u$  より

$$(e^{x^2+1})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times (x^2 + 1)' = e^u \times (2x) = 2xe^{x^2+1}$$

(3)  $y = (4x^2 - 3x)^7$  の微分は、 $4x^2 - 3x = u$  とおくと  $y = u^7$  より

$$\begin{aligned} ((4x^2 - 3x)^7)' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (4x^2 - 3x)' = 7u^6 \times (8x - 3) \\ &= 7(8x - 3)(4x^2 - 3x)^6 \end{aligned}$$

問 次の関数を微分せよ。

(1)  $\sin(1 - x)$

(2)  $\cos(x^2 + 2)$

(3)  $e^{x^4}$

(4)  $(2x + 1)^6$

(5)  $\sqrt{2x - 5}$

(6)  $\cos(2x) + e^{x-1}$

(7)  $e^{2x} \sin(2x)$

(8)  $e^{4x} \sin(3x)$

(9)  $\cos(-3x) \sin(2x)$

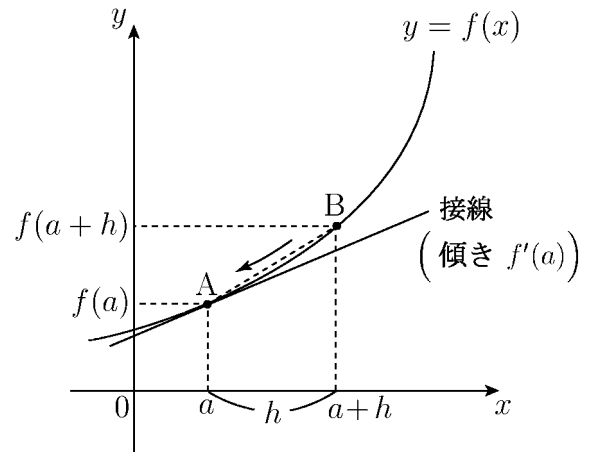
## < 接線の傾き 1 >

関数  $f(x)$  の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で、 $x = a$  の値

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



を  $x = a$  における微分係数という。

右図において直線 AB の傾きが  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  であり、 $h$  を限りなく小さくした極限值  $f'(a)$  は点 A における接線の傾きを表す。

例  $f(x) = x^3 - 3x$  のグラフは右図のようである。

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

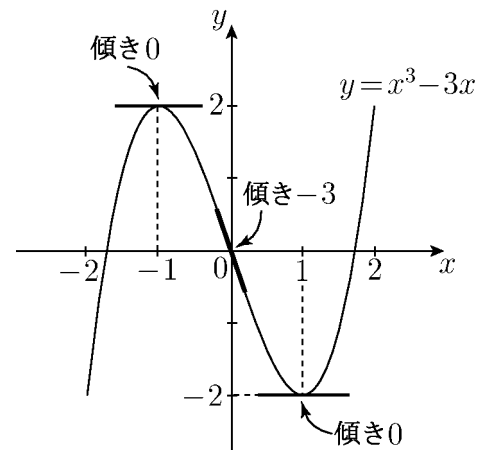
であるから、 $y = x^3 - 3x$  のグラフにおいて

$$x = 1 \text{ における接線の傾きは } f'(1) = 0$$

$$x = 0 \text{ における接線の傾きは } f'(0) = -3$$

$$x = -1 \text{ における接線の傾きは } f'(-1) = 0$$

となる。



問  $f(x) = -x^3 + 3x^2$  の導関数  $f'(x)$

を求め、以下の各場合の

接線の傾きを求め、 $y = -x^3 + 3x^2$  のグラフの概形を右に描け。

$$f'(x) =$$

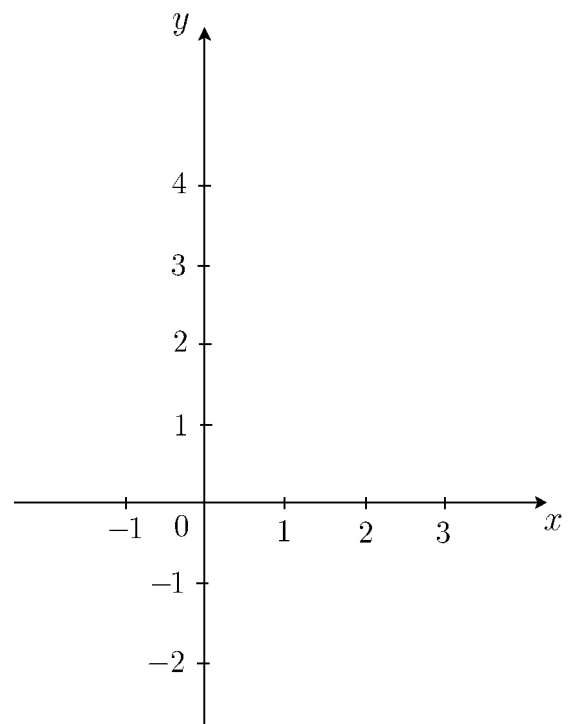
$x = -1$  における接線の傾き

$x = 0$  における接線の傾き

$x = 1$  における接線の傾き

$x = 2$  における接線の傾き

$x = 3$  における接線の傾き

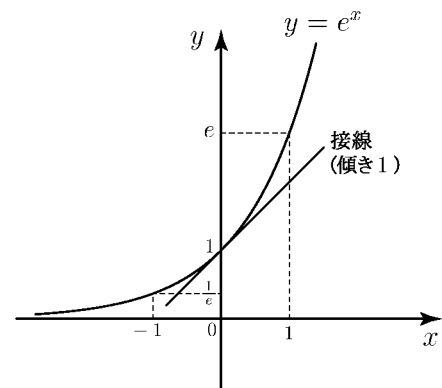


## &lt; 接線の傾き 2 &gt;

例 1  $f(x) = e^x$  のとき  $f'(x) = e^x$  より

$$f'(0) = e^0 = 1 \text{ であるから}$$

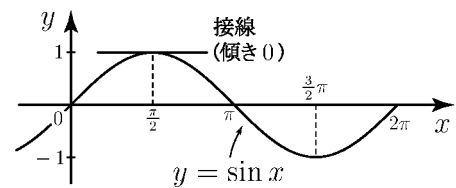
$y = e^x$  の  $x = 0$  における接線の傾きは 1



例 2  $f(x) = \sin x$  のとき  $f'(x) = \cos x$  より

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ であるから}$$

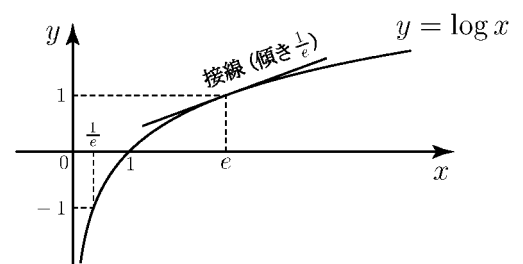
$y = \sin x$  の  $x = \frac{\pi}{2}$  における接線の傾きは 0



例 3  $f(x) = \log x$  のとき  $f'(x) = \frac{1}{x}$  より

$$f'(e) = \frac{1}{e} \text{ であるから}$$

$y = \log x$  の  $x = e$  における接線の傾きは  $\frac{1}{e}$



問 次の関数のグラフの接線の傾きを求めよ。

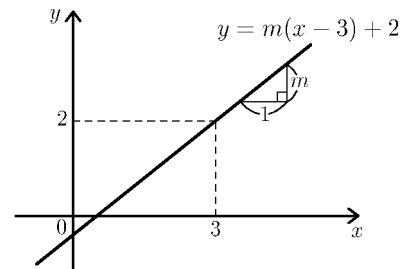
- (1)  $y = e^x$  の  $x = 1$  における接線の傾き
- (2)  $y = e^x$  の  $x = -1$  における接線の傾き
- (3)  $f(x) = \sin x$  の  $x = 0$  における接線の傾き
- (4)  $f(x) = \sin x$  の  $x = \pi$  における接線の傾き
- (5)  $f(x) = \cos x$  の  $x = 0$  における接線の傾き
- (6)  $f(x) = \cos x$  の  $x = \frac{\pi}{2}$  における接線の傾き
- (7)  $f(x) = \log x$  の  $x = 1$  における接線の傾き
- (8)  $f(x) = \log x$  の  $x = 2$  における接線の傾き

## < 接線の方程式 1 >

例 1  $m$  を定数とする関数

$$y = m(x - 3) + 2$$

は、 $x = 3$  のとき  $y = 2$  であるから、  
点  $(3, 2)$  を通り、傾き  $m$  の直線の方程式を意味する。



問 1  $a, b, m$  を定数とする。点  $(a, b)$  を通り、傾き  $m$  の直線の方程式を求めよ。

(答)

例 2 関数  $y = x^2 - 4x + 4$  のグラフ上の点  $A(3, 1)$

における接線の方程式を求めたい。

$f(x) = x^2 - 4x + 4$  とおくと、接線の傾き  $m$  は  $x = 3$  における微分係数  $f'(3)$  である。

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 4)' = \frac{(x^2)'}{2x} - 4 \times \frac{(x)'}{1} + \frac{(4)'}{0} = 2x - 4$$

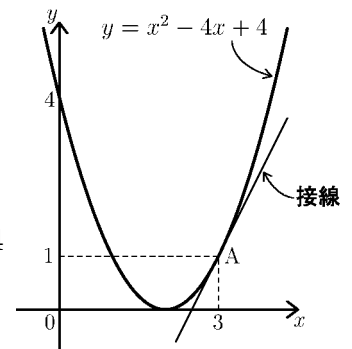
より

$$m = f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$$

となる。点  $A(3, 1)$  を通り傾き  $m$  の直線の方程式は  $y = m(x - 3) + 1$  だから

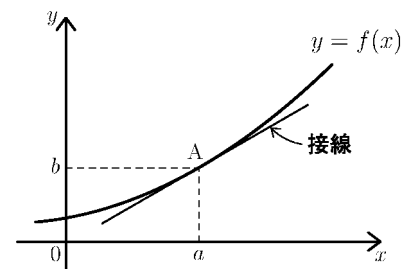
$$y = m(x - 3) + 1 = 2(x - 3) + 1 = 2x - 5$$

より、接線の方程式は  $y = 2x - 5$  となる。



問 2  $y = x^3 - x^2 + x$  上の点  $A(1, 1)$  における接線の方程式を求めよ。

問 3 一般の関数  $y = f(x)$  のグラフ上の  
点  $A(a, b)$  における接線の傾きは  $f'(a)$   
である。接線の方程式を求めよ。



## &lt; 接線の方程式 2 &gt;

前ページの結果より  $y = f(x)$  のグラフの  $x = a$  における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (\text{接線の方程式})$$

**例 1**  $f(x) = e^{2x}$  のとき  $f(0) = e^0 = 1$

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad , \quad f'(0) = 2e^0 = 2$$

よって  $y = e^{2x}$  の  $x = 0$  における接線の方程式は

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 2x + 1 \quad \text{より} \quad \underline{y = 2x + 1} \quad (\text{接線})$$

**例 2**  $f(x) = \log x$  のとき  $f(e) = \log e = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(e) = \frac{1}{e}$$

よって  $y = \log x$  の  $x = e$  における接線の方程式は

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) = \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e}x \quad \text{より} \quad \underline{y = \frac{1}{e}x} \quad (\text{接線})$$

**例 3**  $f(x) = \cos x$  のとき  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

よって  $y = \cos x$  の  $x = \frac{\pi}{2}$  における接線の方程式は

$$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \quad \text{より} \quad \underline{y = -x + \frac{\pi}{2}} \quad (\text{接線})$$

**例 4**  $f(x) = \sqrt{x}$  のとき  $f(1) = \sqrt{1} = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

よって  $y = \sqrt{x}$  の  $x = 1$  における接線の方程式は

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{より} \quad \underline{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}} \quad (\text{接線})$$

**問** 以下の接線の方程式を求めよ。

(1)  $y = e^x$  の  $x = 0$  における接線

(2)  $y = \log x$  の  $x = 1$  における接線

(3)  $y = \sin x$  の  $x = 0$  における接線

(4)  $y = \sqrt{x}$  の  $x = 4$  における接線

(5)  $y = \frac{1}{x}$  の  $x = 1$  における接線

## < 関数の一次近似 >

関数  $y = f(x)$  の  $x = a$  における微分係数は  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  である。

$x = a + h$  とおけば、 $h \rightarrow 0$  のとき  $x \rightarrow a$  より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

である。従って、 $x$  が  $a$  に十分近いとき ( $x \doteq a$  のとき)

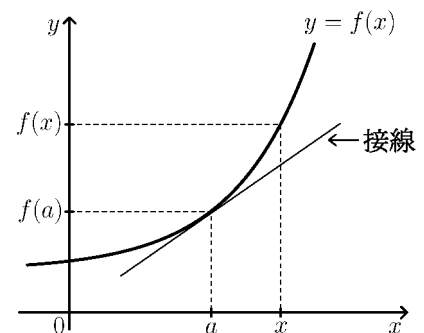
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \doteq f'(a)$$

とみなせる。よって

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x - a)$$

が成り立つ。右辺は  $x$  の一次式であるから、これを一次近似式という。右辺の式は直線

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (\text{接線})$$



を表すが、これは曲線  $y = f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線の方程式である。すなわち、曲線を接線で近似するのが一次近似式である。

例  $\sqrt[3]{1.1}$  の近似値を求めたい。  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  とおくと  $f(a) = \sqrt[3]{a}$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ より } f'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

であるから一次近似式は

$$x \doteq a \text{ のとき } \sqrt[3]{x} \doteq \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}(x - a)$$

となる。ここで  $a = 1$  ,  $x = 1.1$  とおけば

$$\sqrt[3]{1.1} \doteq \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{3} \times 0.1 = 1 + \frac{1}{30}$$

問 例にならって、 $\sqrt[4]{1.1}$  を近似せよ。

## < 高階導関数 >

関数  $f(x)$  を  $x$  について微分したときに求められる関数  $f'(x)$  を導関数をいうことは既に知っていると思う。 $f'(x)$  をさらに微分したものを  $f''(x)$  あるいは  $f^{(2)}(x)$  と書き、これを 2 階導関数と呼ぶ。実際に 2 階導関数を求めてみよう。

**例題 1**  $f(x) = x^3$  の 2 階導関数を求めよ。

(解)  $f'(x) = 3x^2$  より  $f''(x) = 6x$  である。

**問 1** 次の関数の 2 階導関数を求めよ。

(1)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$

(2)  $f(x) = \sin x$

(3)  $f(x) = \log x$

$f'(x) =$

$f'(x) =$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f''(x) =$

$f''(x) =$

関数  $f(x)$  を 3 回微分したものを 3 階導関数と呼び  $f'''(x)$  あるいは  $f^{(3)}(x)$  で表す。

**例題 2**  $f(x) = x^3$  の 3 階導関数を求めよ。

(解) 例 1 より  $f''(x) = 6x$  よって  $f'''(x) = 6$  である。

**問 2** 次の関数について 3 階までの導関数を求めよ。

(1)  $f(x) = x^5 - x^3 + x$

(2)  $f(x) = \cos x$

$f'(x) =$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

$f'''(x) =$

(3)  $f(x) = x \log x$

(4)  $f(x) = e^{2x}$

$f'(x) =$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f''(x) =$

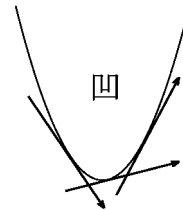
$f'''(x) =$

$f'''(x) =$

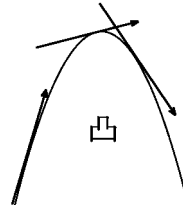


## < グラフの凹凸 1 >

- [1] 関数  $f(x)$  の2階導関数が、ある  $x$  範囲内で常に  $f''(x) > 0$  のとき、 $f'(x)$  の値は、この範囲内で増加する。  
したがって、グラフは、右の図のように接線の傾きが増加していく。  
このようなとき、グラフは凹であるという。



- [2] これに対し、 $f''(x) < 0$  である範囲内では、 $f'(x)$  の値は減少し、グラフでは、右の図のように接線の傾きが減少していく。  
このようなとき、グラフは凸であるという。



例 関数  $y = 3x^2 - x^3$  に対し、

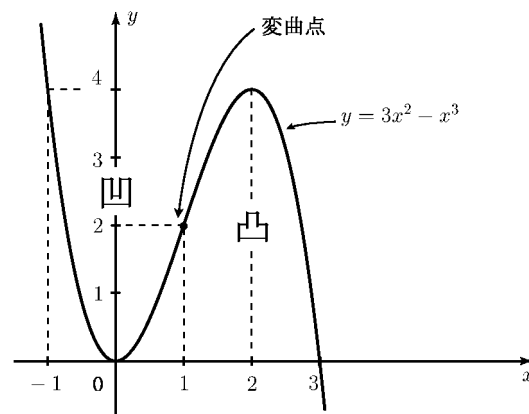
$$y' = 6x - 3x^2$$

$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

だからグラフの凹凸は  $x = 1$  を境にして変わる。

$x$	...	1	...
$y''$	+	0	-
$y$	凹	2	凸

(凹凸表)



このグラフで凹凸の入れかわる点  $(1, 2)$  を変曲点という

問 次の関数の2階導関数  $y''$  を求め、凹凸を表にせよ。

(1)  $y = x^3 + 3x^2 - 9x$

$y'' =$

$x$	
$y''$	
$y$	

(2)  $y = -x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 10$

$y'' =$

$x$	
$y''$	
$y$	

## < グラフの凹凸 2 >

例 1 2 次関数  $y = x^2 - 4x + 3$  は

$$y' = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

$$y'' = 2$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。グラフは図 1 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のようを書く。

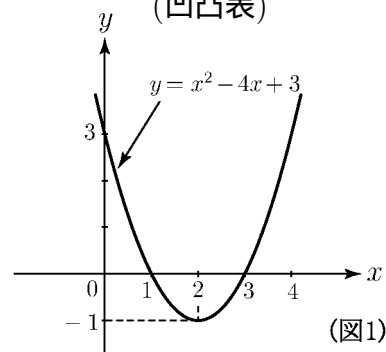
$x$	...	2	...
$y'$	-	0	+
$y''$	+	+	+
$y$	↘	-1	↗

$x$	...	2	...
$y'$	-	0	+
$y$	↘	-1	↗

(増減表)

$x$	...
$y''$	+
$y$	凹

(凹凸表)



例 2 2 次関数  $y = -x^2 - 2x + 2$  は

$$y' = -2x - 2 = -2(x + 1)$$

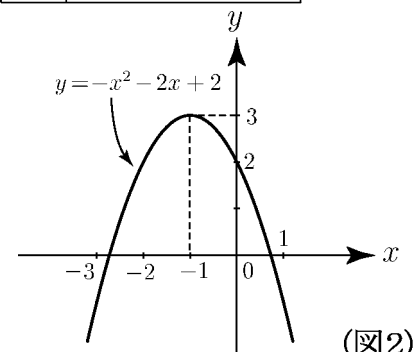
$$y'' = -2$$

より、増減表と凹凸表は右のようになり、グラフは図 2 のようになる。そこで増減表と凹凸表をあわせた表を下のようを書く。

$x$	...	-1	...
$y'$	+	0	-
$y''$	-	-	-
$y$	↗	3	↘

$x$	...	-1	...
$y'$	+	0	-
$y$	↗	3	↘

$x$	...
$y''$	-
$y$	凸



問 次の 2 次関数に対し上の例のような増減表と凹凸表をあわせた表を作れ。

(1)  $y = x^2 - 5x + 6$

$x$	
$y'$	
$y''$	
$y$	

(2)  $y = -x^2 + 4x - 5$

$x$	
$y'$	
$y''$	
$y$	

### < グラフの凹凸 3 >

例  $y = 3x^2 - x^3$  に対し、

$$y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$$

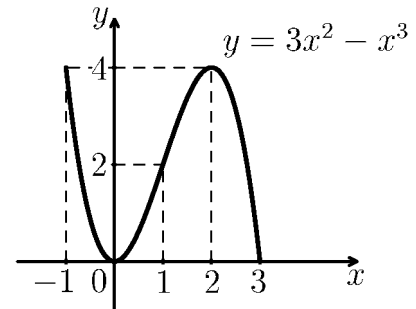
$$y'' = 6 - 6x = 6(1 - x)$$

より、増減表と凹凸表は右のようになる。  
これを組み合わせると、下の表

増 減 表	$x$	...	0	...	2	...
	$y'$	-	0	+	0	-
	$y$		↘	0	↗	4

凹 凸 表	$x$	...	1	...
	$y''$	+	0	-
	$y$	凹	2	凸

$x$	...	0	...	1	...	2	...	
$y'$	-	0	+	+	+	0	-	
$y''$	+	+	+	0	-	-	-	
$y$		↘	0	↗	2	↗	4	↘



のようになる。実際のグラフは右のようになる。

以上の考察から、 $y'$  と  $y''$  の +, - によって  $y$  のグラフは次のようになる。

$y'$	- ↘	+ ↗	+ ↗	- ↘
$y''$	+ 凹	+ 凹	- 凸	- 凸
$y$	↘	↗	↗	↘

問 関数  $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$  を 2 回微分し、

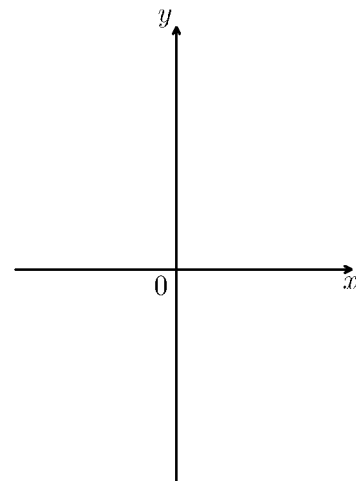
増減表と凹凸表を合わせた表を作り、グラフの概形をかけ。

(解)

$$y' =$$

$$y'' =$$

$x$	...		...		...		...
$y'$							
$y''$							
$y$							



## ＜ 微分係数と極限值 ＞

関数  $y = f(x)$  の  $x = a$  での微分係数  $f'(a)$  の定義式

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \quad (\text{微分係数})$$

を逆に利用して極限值を求めることができる。

**例 1** 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$  を求めたい。

$$f(x) = \cos x \text{ とおくと } f(0) = 1$$

$$f'(x) = -\sin x \quad , \quad f'(0) = -\sin 0 = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$$

**例 2** 極限  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$  を求めたい。

$$f(x) = x^5 \text{ とおくと } f(1) = 1^5 = 1$$

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(1) = 5 \times 1^4 = 5 \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 5$$

**例 3** 極限  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}$  を求めたい。

$$f(x) = \log x \text{ とおくと } f(e) = \log e = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f'(e) = \frac{1}{e} \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = f'(e) = \frac{1}{e}$$

**問** 次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

## < ロピタルの定理 1 >

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  の  $x = a$  における微分係数は

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

である。もし  $f(a) = g(a) = 0$  ,  $g'(a) \neq 0$  のときは

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

となるので

$$\boxed{f(a) = g(a) = 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (\text{ロピタルの定理})$$

が成り立つ。これをロピタルの定理という。

(注) 前ページの極限の問題は  $g'(x) = 1$  となる場合である。

**例 1**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$  を求めたい。  $x = 1$  を代入すると  $\frac{0}{0}$  の型になる。分子を因数分解して

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 5$$

と計算するが、この因数分解は難しい。ロピタルの定理を使うと以下のように求まる。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^5 - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{1} = 5 \times 1^4 = 5$$

**例 2**  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e}$  を求めたい。  $x = e$  を代入すると分母・分子共に 0

となるのでロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\log x - 1}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\log x - 1)'}{(x - e)'} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\frac{1}{x} - 0}{1 - 0} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e}$$

**問** 次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

## ＜ ロピタルの定理 2 ＞

前ページより  $f(a) = 0$  ,  $g(a) = 0$  ,  $g'(a) \neq 0$  のとき

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \quad (\text{ロピタルの定理})$$

がなり立つと書いたが正確には右辺の極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在

すれば  $g'(a) = 0$  であってもロピタルの定理はなりたつ。

**例 1**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x - 1)^2}$  を求めたい。  $x = 1$  を代入すれば  $\frac{0}{0}$  の形になるので

ロピタルの定理より

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 - 6x + 5)'}{((x - 1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5 - 6}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \times \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

となるが、最後の式は前ページ例 1 の結果  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 5$  より

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x - 1)^2} = 3 \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 3 \times 5 = 15$$

(注) 極限が  $\frac{0}{0}$  の形であればロピタルの定理が何度でも使える。

上の例 1 は次のように計算してよい。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^6 - 6x + 5)'}{((x - 1)^2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5 - 6}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(6x^5 - 6)'}{(2(x - 1))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{30x^4}{2} = 15$$

**例 2**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

**問** 次の極限值を求めよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1 - 5(x - 1)}{(x - 1)^2}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 2^5 - 5 \times 2^4(x - 2)}{(x - 2)^2}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1 - 4(x - 1) - 6(x - 1)^2}{(x - 1)^3}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1 - 5(x - 1) - 10(x - 1)^2 - 10(x - 1)^3}{(x - 1)^4}$

## < 微分記号 1 >

変数  $x$  の関数  $f(x)$  の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を以下の記号で表す。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

全て同じ意味である。ここで  $\frac{d}{dx}$  という記号は「変数  $x$  で微分する」という意味である。

例 定数  $a, b, c$  に対し次式が成り立つ。

$$(1) \frac{d}{dx}(a) = 0$$

$$(2) \frac{d}{dx}(ax + b) = a$$

$$(3) \frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

$$(4) \frac{d}{dx}\{(ax + b)^3\} = 3a(ax + b)^2$$

$$(5) \frac{d}{dx}(a^3x^5) = 5a^3x^4$$

$$(6) \frac{d}{dx}\{2a^3(x - a)^4\} = 8a^3(x - a)^3$$

(注) (1) のように  $x$  のついていない項を微分すると 0(ゼロ)になる。

問 定数  $a, b, c$  に対し次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx}\{a^3 + b^4 + c^2\}$$

$$(2) \frac{d}{dx}\{a^3 + b^4x + c^5x^2\}$$

$$(3) \frac{d}{dx}\{(a + b)^3 - c^4\}$$

$$(4) \frac{d}{dx}\{(a - b)^2x - c^3\}$$

$$(5) \frac{d}{dx}\{a^4(x - b)\}$$

$$(6) \frac{d}{dx}\{a^3(x + c)^2\}$$

$$(7) \frac{d}{dx}\{(ax + b)^4\}$$

$$(8) \frac{d}{dx}\{(x - a)^5\}$$

$$(9) \frac{d}{dx}\{a^3(x - a)^3\}$$

$$(10) \frac{d}{dx}\{4a^3(x - b)^4\}$$

$$(11) \frac{d}{dx}\{x^2 - a^2 - 2a(x - a)\}$$

$$(12) \frac{d}{dx}\{x^3 - a^3 - 3a^2(x - a) - 6a(x - a)^2\}$$

## &lt; 微分記号 2 &gt;

例1 変数が $x$ 以外の場合も同様な微分記号を用いる。

$$(1) \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad , \quad \frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1} \quad , \quad \frac{d}{dy}(y^n) = ny^{n-1}$$

$$(2) \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad , \quad \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t \quad , \quad \frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \quad , \quad (4) \frac{d}{dy} e^y = e^y \quad , \quad (5) \frac{d}{du}(\log u) = \frac{1}{u}$$

問1 以下の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt}(4t^3 + 5t^2 - 2t + 3)$$

$$(2) \frac{d}{dy}(5y^6 - 7y^3 + 8y^4 - 4)$$

$$(3) \frac{d}{dt}\{(t+4)^5\}$$

$$(4) \frac{d}{dy}\{(3y+1)^6\}$$

$$(5) \frac{d}{dt}\{10(t-5)^6\}$$

$$(6) \frac{d}{dy}\{15(y-4)^8\}$$

例2 定数 $a, b, c$ に対し次式がなりたつ。

$$(1) \frac{d}{dt}\{a^3 + b^4\} = 0$$

$$(2) \frac{d}{dy}\{a^3 + b^4y + cy^2\} = b^4 + 2cy$$

$$(3) \frac{d}{dt}\{(t-a)^3\} = 3(t-a)^2$$

$$(4) \frac{d}{dy}(ay+b)^4 = 4a(ay+b)^3$$

$$(5) \frac{d}{dt}\{a^4(t-a)^3\} = 3a^4(t-a)^2$$

$$(6) \frac{d}{dy}\{a^6(y-a)^5\} = 5a^6(y-a)^4$$

問2 定数 $a, b, c$ に対して次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt}\{(a-b)^2t - c\}$$

$$(2) \frac{d}{dy}\{a^4(y-b)\}$$

$$(3) \frac{d}{dt}\{(at+b)^2\}$$

$$(4) \frac{d}{dy}\{(ay-b)^3\}$$

$$(5) \frac{d}{dt}\{a^4(t-1)^2\}$$

$$(6) \frac{d}{dy}\{a^5(y-b)^3\}$$

$$(7) \frac{d}{dt}\{a^5(t-a)^4\}$$

$$(8) \frac{d}{dy}\{3a^2(y+a)^5\}$$



### < ロピタルの定理 3 >

ロピタルの定理を微分記号  $\frac{d}{dx}$  を用いて書きなおすと以下のようになる。

< ロピタルの定理 >

関数  $f(x)$  ,  $g(x)$  と定数  $a$  に対して、

$$f(a) = 0 \quad , \quad g(a) = 0$$

でありかつ極限值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が存在すれば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{\frac{d}{dx} g(x)}$$

例 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3 - 3a^2(x - a)}{(x - a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} \{x^3 - a^3 - 3a^2(x - a)\}}{\frac{d}{dx} \{(x - a)^2\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{3x^2 - 3a^2}{2(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx} \{3x^2 - 3a^2\}}{\frac{d}{dx} \{2(x - a)\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{6x}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$$

問 (1) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2 - 2a(x - a)}{(x - a)^2}$$

(2) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4 - 4a^3(x - a)}{(x - a)^2}$$

(3) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x - a)}{(x - a)^2}$$

## < ロピタルの定理 4 >

ロピタルの定理は変数が  $x$  以外でも同様になりたつ。

$$\text{例 1} \quad \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dy} \{\log y\}}{\frac{d}{dy} \{y - 1\}} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{y}}{1} = 1$$

$$\text{例 2} \quad \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos t}{t - \pi} = \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{\frac{d}{dt} \{1 + \cos t\}}{\frac{d}{dt} \{t - \pi\}} = \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{-\sin t}{1} = \frac{-\sin \pi}{1} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{例 3} \quad \lim_{\beta \rightarrow a} \frac{a \sin(2\beta) - \beta \sin(2a)}{a^3 - a\beta^2} &= \lim_{\beta \rightarrow a} \frac{\frac{d}{d\beta} \{a \sin(2\beta) - \beta \sin(2a)\}}{\frac{d}{d\beta} \{a^3 - a\beta^2\}} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow a} \frac{2a \cos(2\beta) - \sin(2a)}{-2a\beta} = \frac{2a \cos(2a) - \sin(2a)}{-2a^2} \end{aligned}$$

(注) 例 1, 例 2, 例 3 は極限のパラメータを  $x$  にかえても同じ結果が得られる。

すなわち

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\log y}{y - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} \\ \lim_{t \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos t}{t - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{x - \pi} \\ \lim_{\beta \rightarrow a} \frac{a \sin(2\beta) - \beta \sin(2a)}{a^3 - a\beta^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a \sin(2x) - x \sin(2a)}{a^3 - ax^2} \end{aligned}$$

とおきかえて答を求めてもよい。

問 定数  $a, b$  に対し次の極限值を求めよ。

$$(1) \quad \lim_{y \rightarrow a} \frac{\log y - \log a}{y - a}$$

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow b} \frac{\cos t - \cos b}{t - b}$$

$$(3) \quad \lim_{\beta \rightarrow a} \frac{a \sin(b\beta) - \beta \sin(ab)}{a^3 - a\beta^2}$$

## < ロピタルの定理 5 >

$$\begin{aligned}
 \text{例} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a) - 10a^3(x-a)^2}{(x-a)^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a) - 10a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^3\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{5x^4 - 5a^4 - 20a^3(x-a)}{3(x-a)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{5x^4 - 5a^4 - 20a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{3(x-a)^2\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{20x^3 - 20a^3}{6(x-a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{20x^3 - 20a^3\}}{\frac{d}{dx}\{6(x-a)\}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{60x^2}{6} = 10a^2
 \end{aligned}$$

問 次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4 - 4a^3(x-a) - 6a^2(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^6 - a^6 - 6a^5(x-a) - 15a^4(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^7 - a^7 - 7a^6(x-a) - 21a^5(x-a)^2}{(x-a)^3}$$

## ＜ ロピタルの定理 6 ＞

例 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^6 - a^6 - 6a^5(x-a) - 15a^4(x-a)^2 - 20a^3(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{x^6 - a^6 - 6a^5(x-a) - 15a^4(x-a)^2 - 20a^3(x-a)^3\}}{\frac{d}{dx}\{(x-a)^4\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{6x^5 - 6a^5 - 30a^4(x-a) - 60a^3(x-a)^2}{4(x-a)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{6x^5 - 6a^5 - 30a^4(x-a) - 60a^3(x-a)^2\}}{\frac{d}{dx}\{4(x-a)^3\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{30x^4 - 30a^4 - 120a^3(x-a)}{12(x-a)^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{30x^4 - 30a^4 - 120a^3(x-a)\}}{\frac{d}{dx}\{12(x-a)^2\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{120x^3 - 120a^3}{24(x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{120x^3 - 120a^3\}}{\frac{d}{dx}\{24(x-a)\}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{360x^2}{24} = \frac{360a^2}{24} = 15a^2$$

問 次の極限值を求めよ。

(1) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^5 - a^5 - 5a^4(x-a) - 10a^3(x-a)^2 - 10a^2(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

(2) 
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^7 - a^7 - 7a^6(x-a) - 21a^5(x-a)^2 - 35a^4(x-a)^3}{(x-a)^4}$$

## < 関数の高次近似 1 >

例 関数  $f(x)$  と定数  $a$  に対し、 $f(a)$  ,  $f'(a)$  ,  $f''(a)$  は定数だから

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(x)\} = f''(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(a)\} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(x)\} = f'''(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f''(a)\} = 0$$

である。これらを組み合わせると。

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - f(a)\} = f'(x) \quad , \quad \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a)\} = f''(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f'(a)(x - a)\} = f'(a) \times \frac{d}{dx}\{(x - a)\} = f'(a) \times 1 = f'(a)$$

$$\frac{d}{dx}\{f''(a)(x - a)^2\} = f''(a) \times \frac{d}{dx}\{(x - a)^2\} = f''(a) \times 2(x - a) = 2f''(a)(x - a)$$

等がわかる。

問 関数  $f(x)$  と定数  $a$  に対して、次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)\}$$

$$(2) \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x - a)\}$$

$$(3) \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2\}$$

$$(4) \frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a) - f''(a)(x - a) - \frac{1}{2}f'''(a)(x - a)^2\}$$

$$(5) \frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 - \frac{1}{6}f'''(a)(x - a)^3\}$$

## ＜ 関数の高次近似 2 ＞

例 関数  $f(x)$  と定数  $a$  に対し、極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2}$

を求めたい。 $x = a$  を代入すると  $\frac{0}{0}$  の型になるのでロピタルの定理が使える。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{(x - a)^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)\}}{\frac{d}{dx}(x - a)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{d}{dx}\{f'(x) - f'(a)\}}{\frac{d}{dx}\{2(x - a)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2}f''(a) \end{aligned}$$

問 例のようにロピタルの定理を何回か使って次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2}{(x - a)^3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 - \frac{1}{6}f'''(a)(x - a)^3}{(x - a)^4}$$

## < 関数の高次近似 3 >

例 1 前ページの例より

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a)$$

である。従って  $x$  が  $a$  に十分近い時は

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \doteq \frac{1}{2}f''(a)$$

とみなせる。両辺に  $(x-a)^2$  をかけると

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \doteq \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

よって

$$x \doteq a \text{ のとき } f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

が成り立つ。右辺は  $x$  の 2 次式であるから、これを 2 次近似式という。

例 2 前のページの間 (1) の結果より

$$x \doteq a \text{ のとき } \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2}{(x-a)^3} \doteq \frac{1}{6}f'''(a)$$

これを变形すると

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \doteq \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

この式は  $x$  が  $a$  に限りなく近い場合に  $f(x)$  を

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3$$

に書き換えることができることを言っている。このような書き換えを近似するという。この場合は 3 次式なので 3 次近似式という。

問 前ページの間 (2) の結果を使って、関数  $f(x)$  の 4 次近似式を求めよ。

(解)

4 次近似式

$x \doteq a$  のとき

$$f(x) \doteq$$

## < 高階微分係数 >

関数  $f(x)$  の  $n$  階導関数を  $f^{(n)}$  と書く。たとえば

$$f'(x) = f^{(1)}(x), f''(x) = f^{(2)}(x), f'''(x) = f^{(3)}(x), f^{(4)}(x) = f^{(4)}(x)$$

のように書く。又、 $n$  階導関数の  $x = a$  における値  $f^{(n)}(a)$  を  $x = a$  における  $n$  階微分係数という。

例 (1)  $f(x) = x^5$  のとき

$$f^{(1)}(x) = 5x^4, f^{(2)}(x) = 20x^3, f^{(3)}(x) = 60x^2, f^{(4)}(x) = 120x$$

より、 $x = 2$  における 4 階までの微分係数は、

$$f^{(1)}(2) = 80, f^{(2)}(2) = 160, f^{(3)}(2) = 240, f^{(4)}(2) = 240$$

(2)  $f(x) = \cos x$  のとき

$$f^{(1)}(x) = -\sin x, f^{(2)}(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x, f^{(6)}(x) = -\cos x, f^{(7)}(x) = \sin x, f^{(8)}(x) = \cos x$$

より  $x = 0$  における 8 階までの微分係数は

$$f^{(1)}(0) = 0, f^{(2)}(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(0) = 0, f^{(6)}(0) = -1, f^{(7)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 1$$

問 (1)  $f(x) = e^x$  の 4 階導関数  $f^{(4)}(x)$  を求め、 $x = 0$  における 4 階微分係数  $f^{(4)}(0)$  を求めよ。

(2)  $f(x) = e^x$  の  $n$  階導関数  $f^{(n)}(x)$  を求め、 $x = 0$  における  $n$  階微分係数  $f^{(n)}(0)$  を求めよ。

(3)  $f(x) = \sin x$  の 8 階までの導関数 ( $f^{(1)}(x) \sim f^{(8)}(x)$ ) を求め、 $x = 0$  における 8 階までの微分係数 ( $f^{(1)}(0) \sim f^{(8)}(0)$ ) を求めよ。



## < 関数の $n$ 次近似 1 >

29 ページの結果から、関数  $f(x)$  の 4 次近似式は

$$( ) \quad f(x) \doteq f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

となる。ここで、 $f^{(n)}(x-a)^n$  の係数は順に

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots$$

となるが、この分母の数は、28 ページの計算からロピタルの定理を何回使ったかによって決まる。たとえば 24 は  $(x-a)^4$  を 4 回微分して得られる。つまり、

$$((x-a)^4)^{''''} = (4(x-a)^3)^{'''} = (3 \times 4(x-a)^2)^{''} = (2 \times 3 \times 4(x-a))' = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

である。つまり  $24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$  と書ける。

ここで階乗の記号を使って式を見やすいものにする。階乗とは数字を順番に  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n-1) \times n$  というふうに計算することで、 $n$  までかけた時には  $n!$  というふうを書く。

$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$  ということは 4 までかけているので  $4!$  と表す。

上の例の係数は

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{1 \times 2 \times 3}, \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

ここで階乗の記号を使うと

$$\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}$$

と書くことができる。

問 上の 4 次近似式 ( ( ) 式 ) を階乗の記号を用いて書け。

$$f(x) \doteq$$

## < 関数の $n$ 次近似 2 >

前のページでは  $f(x)$  は階乗の記号を使うと

$$f(x) \doteq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

というふうにはけることを説明した。

さて、上の式について

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2, \quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3, \quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(a)(x-a)^4$$

という同じ数字が使われているパターンに気づくと思う。

したがって、4 のところを  $n$  にして  $f(x)$  を書き直すと、

$x \doteq a$  のとき

$$f(x) \doteq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

というふうになる。この式を  $n$  次近似式という。

**例**  $f(x) = e^x$  のとき、 $f^{(n)}(x) = e^x$  より  $f^{(n)}(4) = e^4$  である。

したがって  $x \doteq 4$  における  $n$  次近似式は

$x \doteq 4$  のとき

$$e^x \doteq e^4 + e^4(x-4) + \frac{e^4}{2!}(x-4)^2 + \frac{e^4}{3!}(x-4)^3 + \cdots + \frac{e^4}{n!}(x-4)^n$$

**問**  $f(x) = e^x$  に対し、 $x \doteq a$  における  $n$  次近似式を求めよ。

## < テーラー展開 >

関数  $f(x)$  の  $n$  次近似式

$$f(x) \doteq f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

は、次数  $n$  が大きくなるほど、近似の精度が上がる。 $x$  が  $a$  に十分近くなくても、 $n$  を大きくすれば近似できる。ここで  $n$  を限りなく大きくすると、近似式の右辺は無限級数となり、それが収束する場合は両辺が一致する。

この極限の式

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots$$

を関数  $f(x)$  の  $x = a$  におけるテーラー展開という。

**例**  $f(x) = e^x$  の  $x = 2$  におけるテーラー展開を求めたい。 $f^{(n)}(x) = e^x$  であるから

$$f(2) = e^2, f^{(1)}(2) = e^2, f^{(2)}(2) = e^2, f^{(3)}(2) = e^2, \dots, f^{(n)}(2) = e^2$$

となるので  $x = 2$  におけるテーラー展開は

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{1}{2!}e^2(x-2)^2 + \frac{1}{3!}e^2(x-2)^3 + \frac{1}{4!}e^2(x-2)^4 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!}e^2(x-2)^n + \cdots$$

となる。

**問1**  $f(x) = e^x$  に対し、 $x = a$  におけるテーラー展開を求めよ。

**問2**  $f(x) = e^x$  に対し、 $a$  が次の場合の  $x = a$  におけるテーラー展開を求めよ。

(1)  $a = 1$

(2)  $a = 0$

## < マクローリン展開 1 >

関数  $f(x)$  の  $x = 0$  におけるテーラー展開

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f^{(1)}(0)x + \frac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \cdots$$

をマクローリン展開という。前ページの問 2 (2) では  $f(x) = e^x$  のマクローリン展開を求めた。

すなわち

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

となる。

例  $f(x) = \cos(x)$  のとき、30 ページの例より

$$f^{(1)}(0) = 0, f^{(2)}(0) = -1, f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(5)}(0) = 0, f^{(6)}(0) = -1, f^{(7)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 1$$

で数列  $\{f^{(n)}(0)\}$  は、0, -1, 0, 1 を 4 項おきに繰り返す。

又、 $f(0) = \cos 0 = 1$  だから  $f(x) = \cos x$  のマクローリン展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \cdots$$

となる。

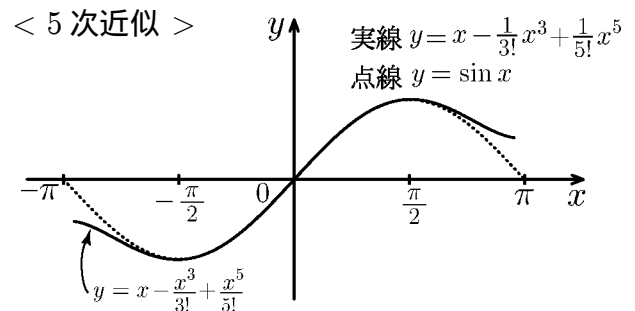
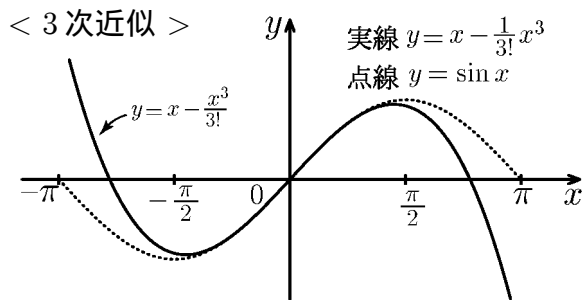
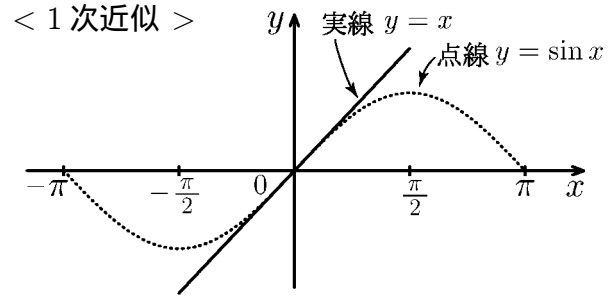
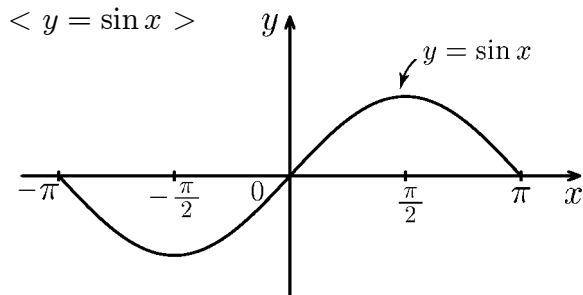
問 30 ページの結果を使って、 $f(x) = \sin x$  のマクローリン展開を求めよ。

## < マクローリン展開 2 >

例 1 前ページより  $\sin x$  のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 - \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

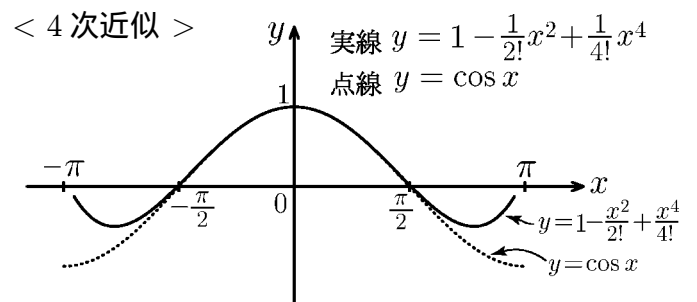
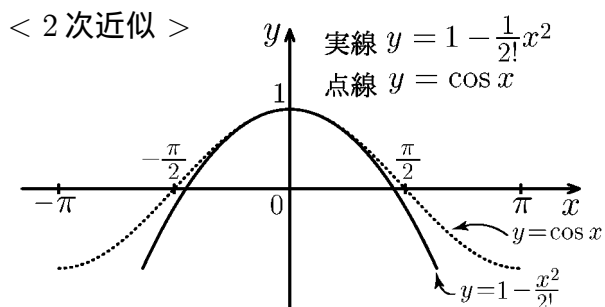
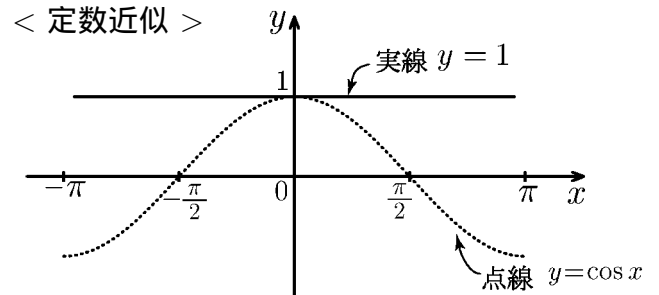
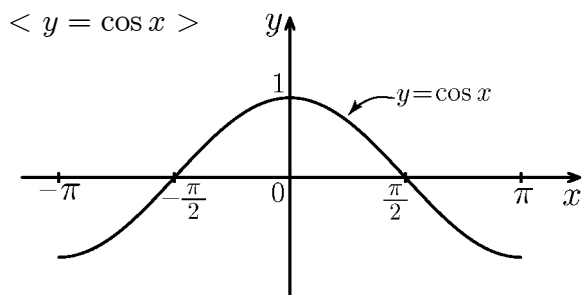
となる。以下の図のように  $\sin x$  のグラフの  $x = 0$  の近くを近似していることがわかる。



例 2  $\cos x$  のマクローリン展開は

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10} + \dots$$

となる。以下の図のように  $\cos x$  のグラフの  $x = 0$  の近くを近似していることがわかる。



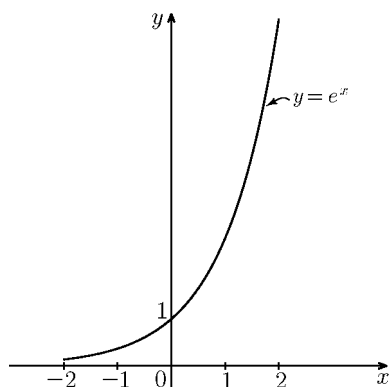
## < マクローリン展開 3 >

指数関数  $e^x$  のマクローリン展開は

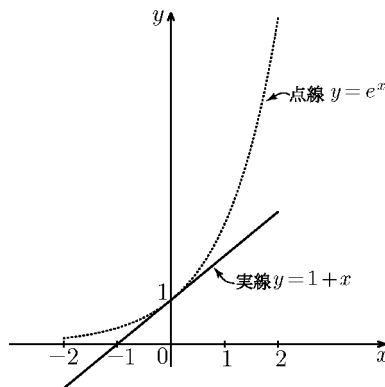
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

となる。以下の図のように  $e^x$  のグラフの  $x=0$  の近くを近似していることがわかる。

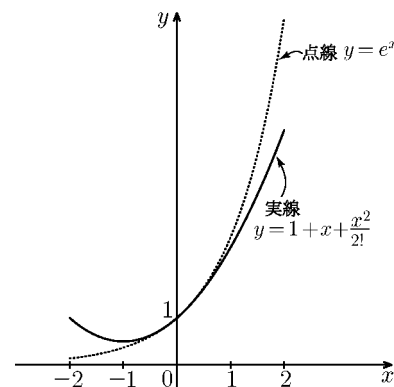
<  $y = e^x$  >



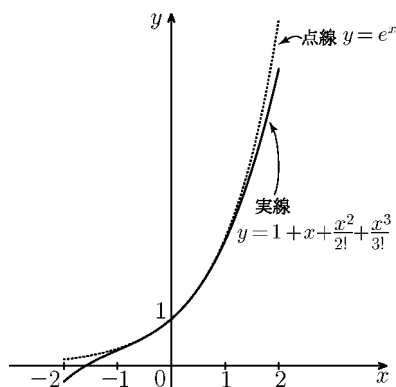
< 1次近似 >



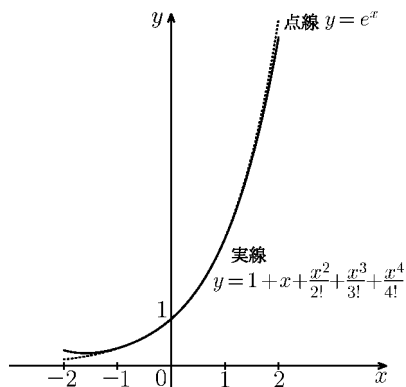
< 2次近似 >



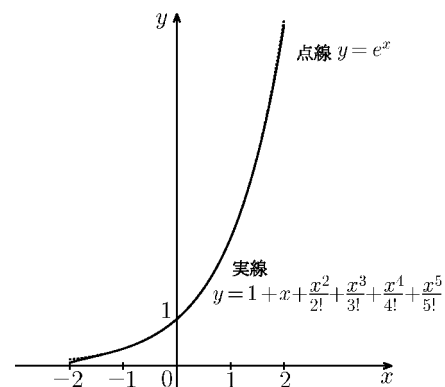
< 3次近似 >



< 4次近似 >



< 5次近似 >



上の図からわかるように4次関数  $1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$  は  $-1 \leq x \leq 1$  の範囲で  $e^x$  のグラフとほぼ一致している。従って次の近似式がなりたつ。

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{のとき} \quad e^x \doteq 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

問 この近似式で  $x=1$  とおくと

$$e \doteq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$$

となる。この式の右辺を計算することにより  $e$  の近似値を求めよ。

## &lt; 実数 &gt;

自然数 (natural number) の全体を  $N$

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

整数 (integer) の全体を  $Z$ .

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

で表す。また整数  $a, b$  の比 (ratio)  $\frac{b}{a}$  で表される  
分数を有理数 (rational number) といい、有理数の  
全体を  $Q$  で表す。

(注) 有限小数および循環小数は分数で表されるので有理数である。

逆に全ての有理数は有限小数か循環する無限小数で表される。

例 1  $\frac{3}{8} = 0.375$  ,  $\frac{5}{12} = 0.41666\dots = 0.41\dot{6}$  ,  $\frac{3}{11} = 0.27272727\dots = 0.\dot{2}7$

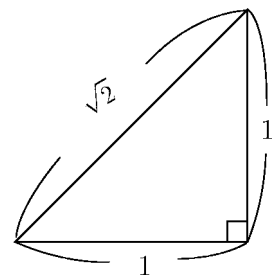
問 1 次の分数を小数になおせ。

(1)  $\frac{5}{8}$

(2)  $\frac{1}{15}$

(3)  $\frac{2}{11}$

例 2 2 の平方根  $\sqrt{2}$  は右図の直角三角形の斜辺の長さ  
であるが これは有理数 (整数の比) ではないことがわ  
かっている。このような数を無理数 (irrational number)  
という。

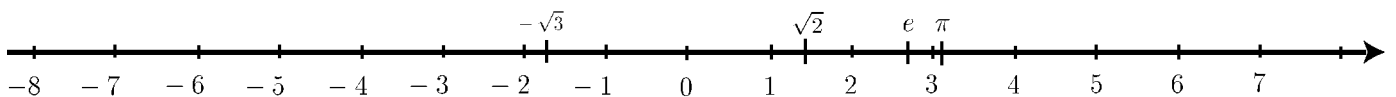


有理数と無理数を総称して実数 (real number) とよぶ。

実数全体の集合を  $R$  で表す。

$$\text{自然数 } (R) \left\{ \begin{array}{l} \text{有理数 } (Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{整数 } (Z) \left\{ \begin{array}{l} \text{正の整数} = \text{自然数 } (N) \\ \text{零 } 0 \\ \text{負の整数} \end{array} \right. \\ \text{分数} \end{array} \right. \\ \text{無理数 } \dots \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{2} (\text{立方根}), \pi (\text{円周率}), e (\text{自然対数の底}) \text{ など} \end{array} \right.$$

問 2  $\sqrt{3}$ ,  $-e$ ,  $2\pi$ ,  $-3\sqrt{2}$  を数直線上の点として表示せよ。



## < 虚数の導入 1 >

2 次方程式

$$(1) \quad x^2 = -1$$

をみたす実数  $x$  は存在しない。しかし、この方程式を満足する数、つまり 2 乗すれば  $-1$  となるような新しい数があるものと考えことにして、それを  $i$  という記号で表すことにする。すなわち

$$i^2 = -1$$

である。

さらにこの新しい数  $i$  に対しても、いままでの計算の規則が成り立つと考えることにする。そうすれば

$$(-i)^2 = i^2 = -1$$

であるから

$$x^2 = -1 \text{ の解は } i \text{ と } -i \text{ の 2 つである}$$

と考えられる。

次に 2 次方程式

$$(2) \quad x^2 = -9$$

を考える。この式の両辺を  $3^2$  で割ると

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = -1$$

であるから、いま導入した  $i$  を用いて

$$\frac{x}{3} = \pm i$$

より (2) の解は

$$x = 3i \quad \text{および} \quad x = -3i$$

という新しい数であるとするのがいいであろう。

問 次の 2 次方程式の解を  $i$  を用いて表せ。

$$(1) \quad x^2 = -16$$

$$(2) \quad 4x^2 = -25$$

$$(3) \quad 6x^2 = -2$$



## < 虚数の導入 2 >

2 次方程式

$$(*) \quad x^2 - 2x + 10 = 0$$

を考える。この式の両辺から 9 を引くと

$$x^2 - 2x + 1 = -9$$

$$(x - 1)^2 = -9$$

となる。ここで

$$x - 1 = X$$

とおくと

$$X^2 = -9$$

となるから、前ページの  $i$  を用いて

$$X = 3i \quad \text{および} \quad X = -3i$$

すなわち

$$x - 1 = 3i \quad \text{および} \quad x - 1 = -3i$$

より (\*) 式の解は、新しい数

$$x = 1 + 3i \quad \text{および} \quad x = 1 - 3i$$

であると考えるのがいいであろう。

このような数

$$i, -i, 3i, -3i, 1 + 3i, 1 - 3i$$

等を総称して 虚数 と呼ぶ。2 次方程式の解の範囲を虚数にまで拡張すれば、2 次方程式は必ず解が存在する。

問 次の 2 次方程式の解を  $i$  を用いて表せ。(ただし  $a, b, c$  は実数)

$$(1) \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -3$$

$$(2) x^2 - 6x + 13 = 0$$

$$(3) (x - a)^2 = -\frac{c^2}{b^2}$$

## < 複素数の定義 >

$$i^2 = -1$$

となる数を考え、この数  $i$  を 虚数単位 という。虚数単位は  $i = \sqrt{-1}$  と書く場合もある。(電気関係の本は虚数単位を  $j$  で表すことがあるが数学や物理学の本では虚数単位は  $i$  で統一してある。)

実数  $a, b$  に対し

$$z = a + bi$$

の形を 複素数 (complex number) とよび、複素数全体の集合を  $\mathbb{C}$  という記号で表す。実数  $a, b$  をそれぞれ複素数  $z$  の 実部 (real part) および 虚部 (imaginary part) とよび、

$$a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

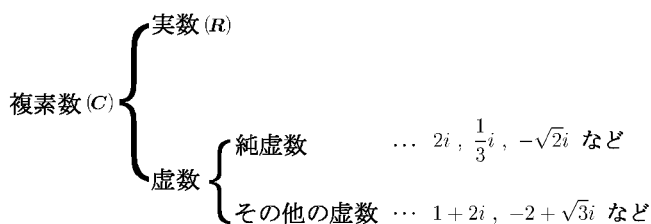
という記号で表す。とくに

$$b = 0 \text{ のとき } z = a + 0i = a$$

と定める。つまり実数は虚部が 0 の特別な複素数と考えることにする。また  $b \neq 0$  のとき、 $z$  を 虚数 とよび、とくに

$$bi \quad (a = 0, b \neq 0)$$

の形の虚数を 純虚数 という。



2つの複素数の実部と虚部がそれぞれ等しい場合に限り、2つの複素数が等しいという。すなわち

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \text{ かつ } b = d$$

$$\text{とくに } a + bi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

例 (1)  $a + bi = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \sqrt{3}, \quad b = 0$

(2)  $a + bi = -3i \quad \Leftrightarrow \quad a = 0, \quad b = -3$

(3)  $a + bi = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 次式をみたす実数  $a, b$  を求めよ。

(1)  $a + bi = \frac{1 + 3i}{2}$

(2)  $a + bi = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} i$