高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2002年度版）

Series **A**

No. **5**

内容

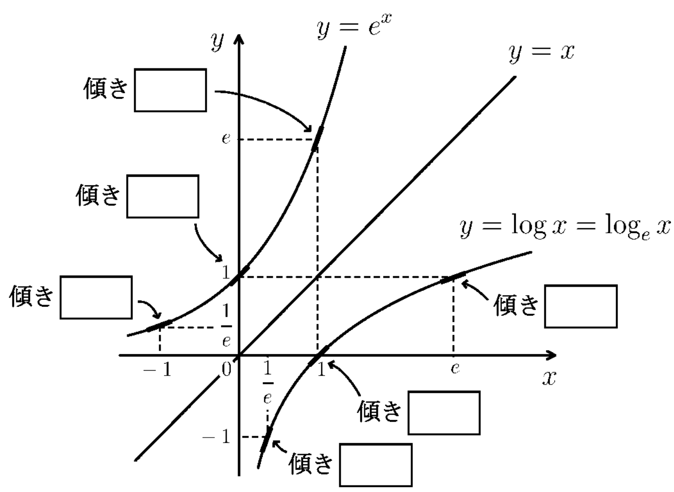
◎ 逆関数・合成関数

◎ 合成関数の微分

◎ 積・商の微分

◎ 不定積分

◎ 置換積分



電子・光システム工学科

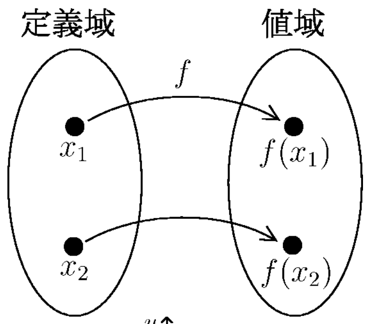
井上 昌昭 著

< 1 対 1 関数 >

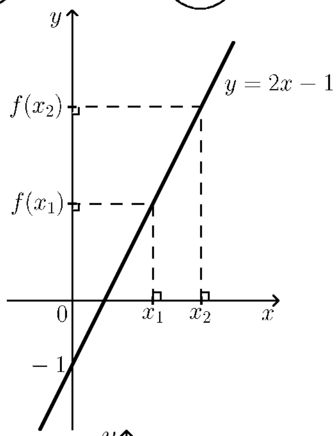
関数 $y = f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり

(∗) $\underline{x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)}$

が成り立つとき、関数 $y = f(x)$ は **1 対 1** であるという。



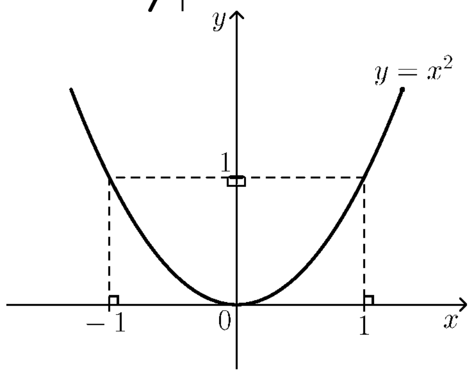
例 1 $f(x) = 2x - 1$ のとき、
関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 である。



例 2 $f(x) = x^2$ のとき、定義域を実数全体とすれば、関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 ではない。
なぜなら、$x_1 = -1,\ x_2 = 1$ のとき

$f(x_1) = f(x_2) = 1$

となり (∗) 式が成立しないから。

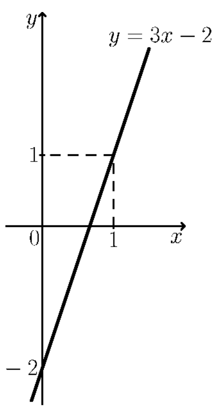


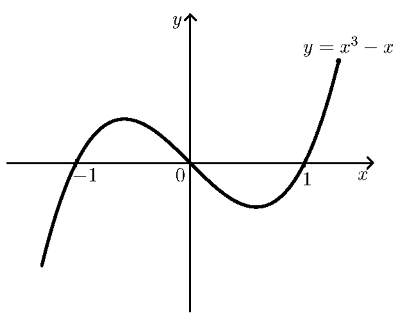
(注) このような $x_1,\ x_2$ が 1 組でもあれば 1 対 1 ではない。

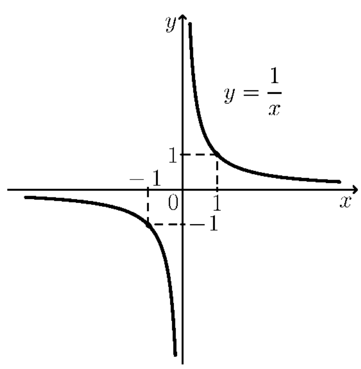
問 次の関数が 1 対 1 であるかどうか判定せよ。

(1) $y = 3x - 2$ (2) $y = x^3 - x$ (3) $y = \dfrac{1}{x}\ (x \neq 0)$

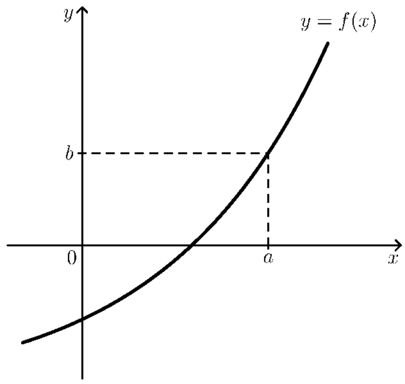
(答)________ (答)________ (答)________







＜逆関数１＞



関数 $f(x)$ が１対１であるとき、y の値 b に対して、

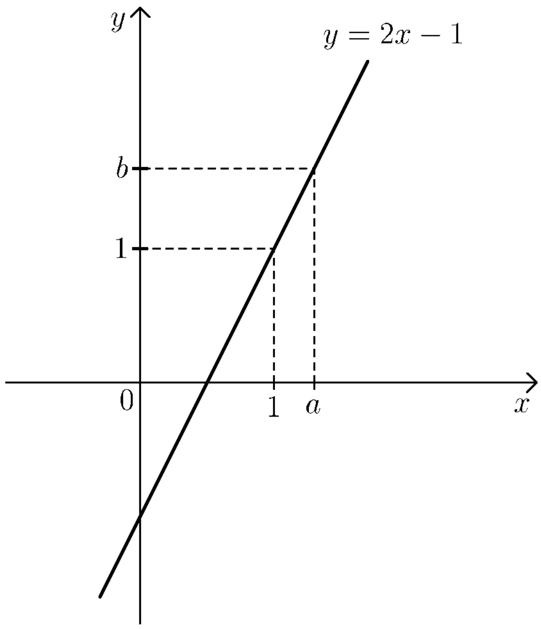
$$\boxed{b = f(a)}$$

となるような x の値 a がただ１つ定まる。このとき

$$\boxed{a = f^{-1}(b)}$$

と書く。

例 $\boxed{f(x) = 2x - 1}$ のとき、



関数 $y = f(x)$ は１対１である。

$$b = f(a)$$

とおくと、$f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。$a = f^{-1}(b)$ であるから

$$\boxed{f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}}$$

となる。

問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて１対１である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$

(解)

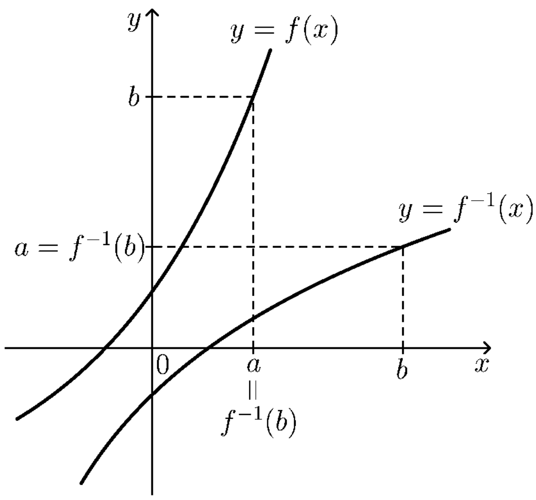
(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$

(解)

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

(解)

＜逆関数 2＞



関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 のとき、y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y=f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y=f(x)$ の**逆関数**という。

例 $f(x)=2x+1$ の逆関数を求める。

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

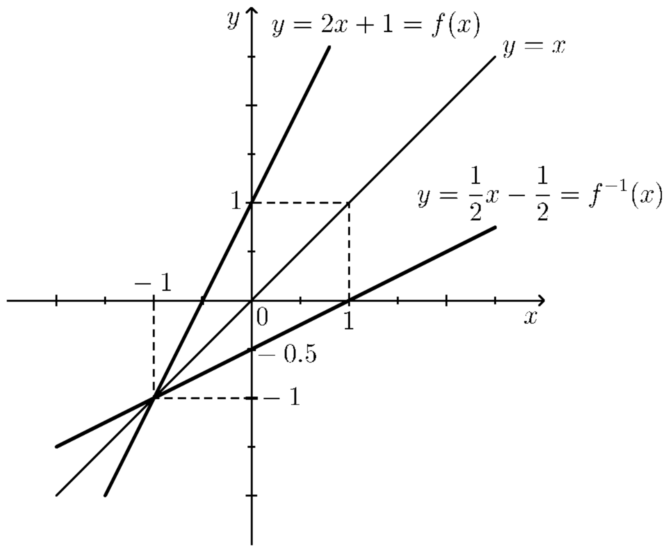
より

$$b=2a+1 \iff a=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}=f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

である。



元の関数 $y=f(x)$ と逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面上に書くと、右図のように直線 $y=x$ に関して対称になる。

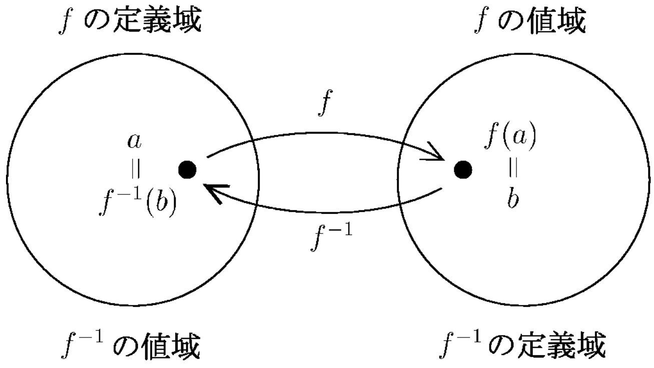
問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=3x+2$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$　　(3) $f(x)=\sqrt{x}$

(解)　　(解)　　(解)

＜ 逆関数 3 ＞

関数 $y=f(x)$ が 1 対 1 であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例 $f(x)=x^2+1$ のとき、f の定義域を $x\geqq 0$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 にある。
この逆関数を以下のようにして求める。

$$b=f(a) \iff a=f^{-1}(b)$$

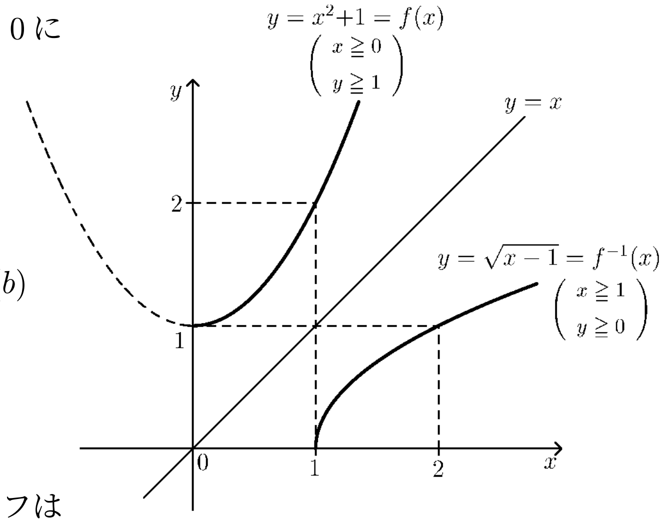
より

$$b=a^2+1 \iff a=\sqrt{b-1}=f^{-1}(b)$$
$$(a\geqq 0,\ b\geqq 1) \qquad\qquad (a\geqq 0,\ b\geqq 1)$$

となる。b を x でおきかえると、逆関数

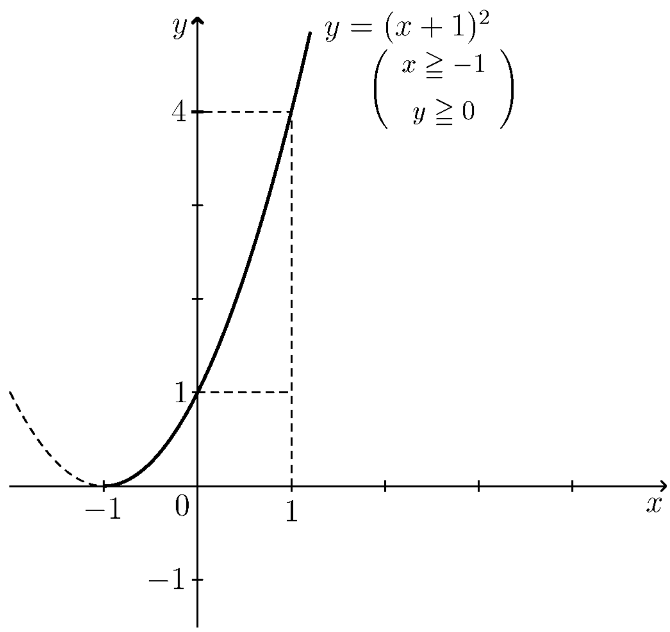
$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-1} \quad (\text{定義域}\ x\geqq 1)$$

が求まる。$y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y=x$ に関し、対称になる。



問 $f(x)=(x+1)^2$ のとき f の定義域を $x\geqq -1$ に制限すれば $y=f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を求め、グラフを右図に描け。

(解)



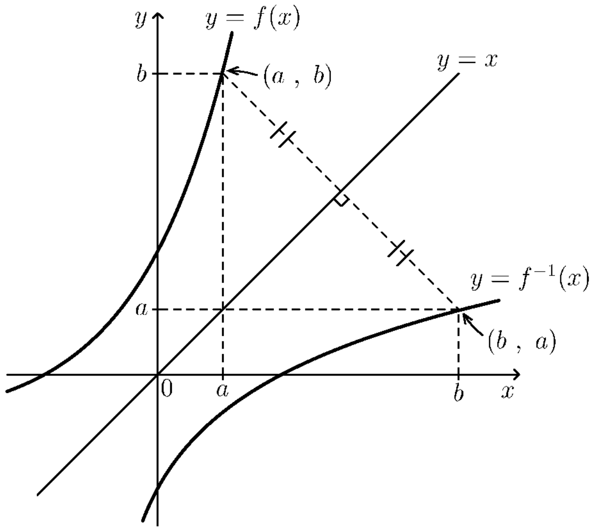
< 逆関数 4 >

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 であるとき、$y = f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a, b) とすると

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より、点 (b, a) は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = x$ に関して、対称に折り返したものになっている。



例 $f(x) = 3^x$ のとき、

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

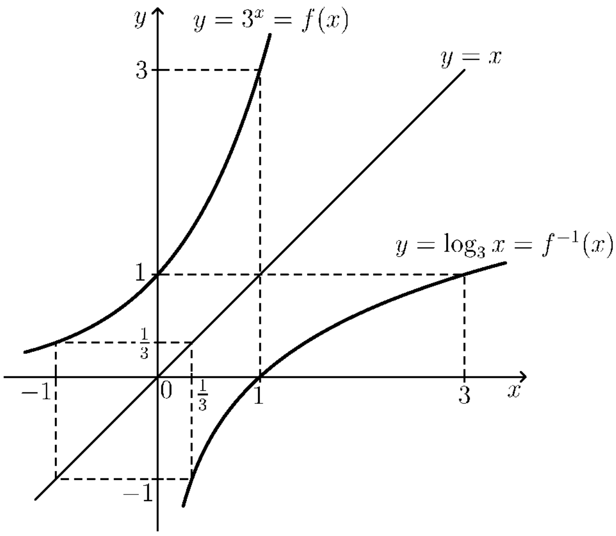
より

$$b = 3^a \iff a = \log_3 b = f^{-1}(b)$$

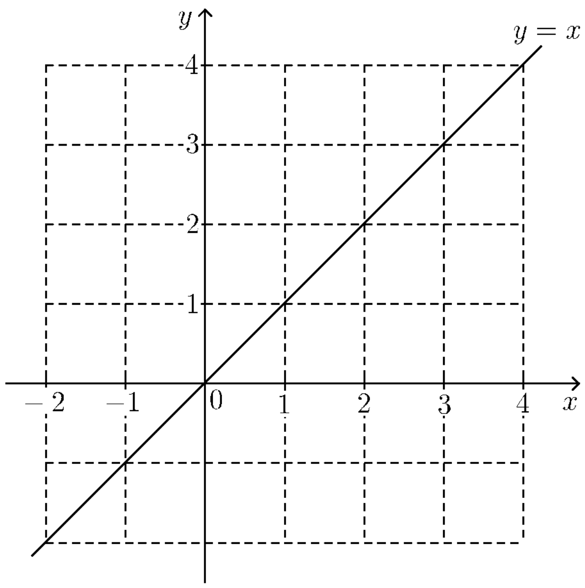
であるから、逆関数は

$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

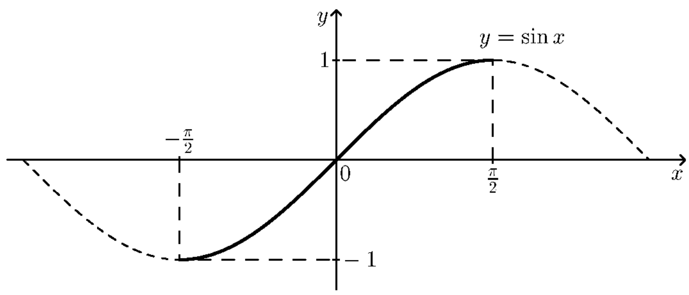
である。対数関数 $y = \log_3 x$ は指数関数 $y = 3^x$ の逆関数である。
$y = \log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。



問 指数関数 $y = 2^x$ と対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



＜逆三角関数 1 ＞



正弦関数 $y=\sin x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、1 対 1 になる。このとき、関数

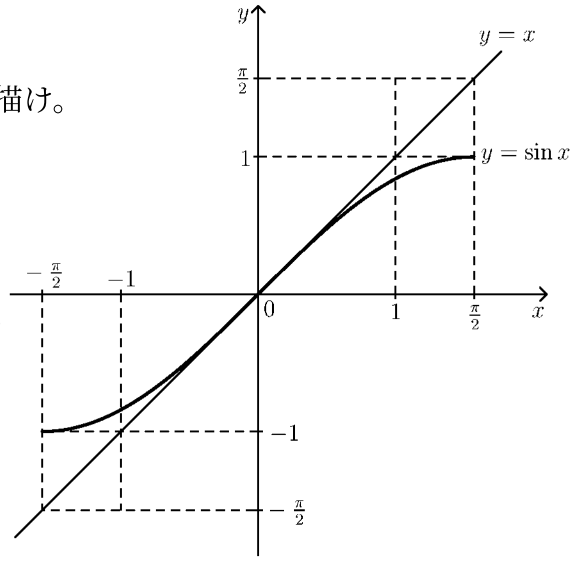
$$y=\sin x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y=\sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y=\arcsin x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン)　(アークサイン)

と表す。$y=\sin^{-1} x$ のグラフは、$y=\sin x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。



問 1　右の座標平面上に $y=\sin^{-1} x$ のグラフを描け。

例　逆関数の定義より、

$$a=\sin^{-1} b \iff b=\sin a$$

である。例えば $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\sin\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

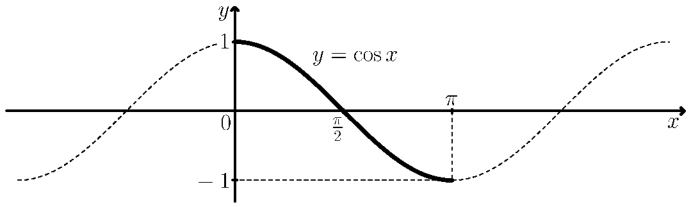
$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるから (答)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

問 2　表を完成させよ。

問 3　次の値を求めよ。

(1)　$\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$　　　(2)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$　　　(3)　$\sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

＜ 逆三角関数 2 ＞



余弦関数 $y=\cos x$ の通常の定義域は実数全体であり、値域は $-1 \leqq y \leqq 1$ である。この関数の定義域を $0 \leqq x \leqq \pi$ に制限すると、1 対 1 になる。そのとき、関数

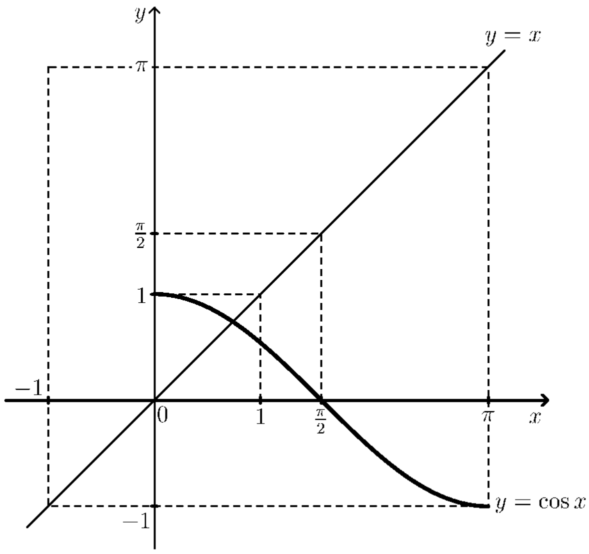
$$y=\cos x \quad (\text{定義域: } 0 \leqq x \leqq \pi,\ \text{値域: } -1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y=\cos^{-1} x \quad \text{又は} \quad y=\arccos x \quad (\text{定義域: } -1 \leqq x \leqq 1,\ \text{値域: } 0 \leqq y \leqq \pi)$$

(インバースコサイン) (アークコサイン)

と表す。$y=\cos^{-1} x$ のグラフは、$y=\cos x$ のグラフを直線 $y=x$ に関して対称に折り返したものである。



問 1 右の座標平面上に $y=\cos^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の定義より、

$$a=\cos^{-1} b \iff b=\cos a$$

である。例えば $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \iff \frac{1}{2}=\cos\theta$$

より、$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で $\cos\theta$ が $\dfrac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ であるから (答) $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

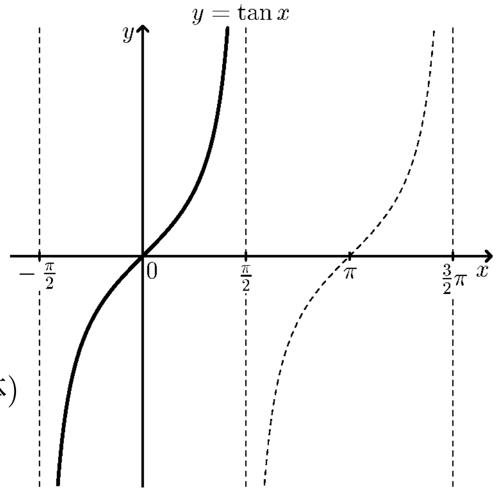
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1) $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=$ (2) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=$ (3) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=$

< 逆三角関数 3 >



正接関数 $y = \tan x$ の通常の定義域は

$\dfrac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、

値域は実数全体である。この関数の

定義域を $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ に制限すると、

1 対 1 になる。そのとき、関数

$$y = \tan x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\text{ , 値域: 実数全体})$$

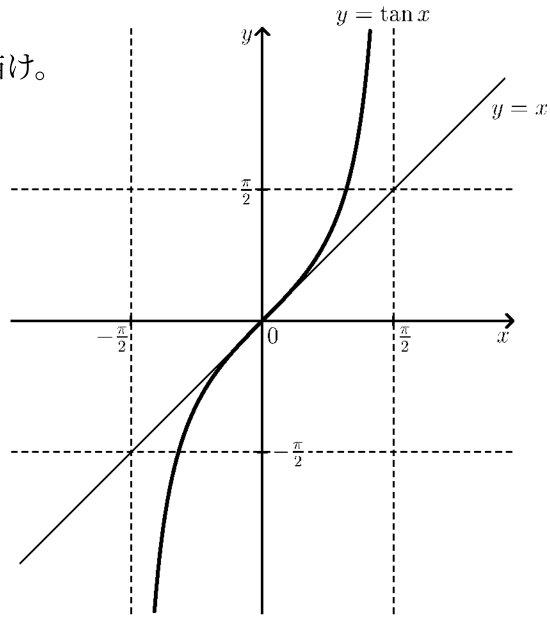
の逆関数が存在して、これを、

$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{又は} \qquad y = \arctan x \quad (\text{定義域: 実数全体 , 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。$y = \tan^{-1} x$ のグラフは、$y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

問 1 右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。



例 逆関数の定義より、

$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) \iff \sqrt{3} = \tan\theta$$

より、$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan\theta$ が $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$(\text{答})\quad \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan\theta$				0			$\sqrt{3}$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

(1) $\tan^{-1}(1) =$ (2) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) =$ (3) $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$

＜合成関数 1 ＞

2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成関数**という。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問 1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例 2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。
例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問 2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - x + 2)^7$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

＜合成関数 2 ＞

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数を

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) \qquad , \ (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right)$$

という記号で表すことがある。

例 1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

問 1 次の合成関数を求めよ。

(1) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x - 2$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = \cos x$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(3) $f(x) = x^4 + 3x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(4) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_3 x$, $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

関数 $f(x)$ どうしの合成関数を

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f\Big(f(x)\Big) \quad , \quad f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f\Bigg(f\Big(f(x)\Big)\Bigg)$$

のように書くことがある。

例 2 $f(x) = 2x - 1$ のとき

$$f^2(x) = f\left(f(x)\right) = f(2x-1) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$$

$$f^3(x) = f\left(f^2(x)\right) = f(4x-3) = 2(4x-3) - 1 = 8x - 7$$

問 2 $f(x) = 3x - 2$ のとき、次の合成関数を求めよ。

$f^2(x) =$, $f^3(x) =$

問 3 $f(x) = 2x - 1$ に対し

(1) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

$f^{-1}(x) =$

(2) 次の合成関数を求めよ。

$(f^2 \circ f^{-1})(x) = f^2\left(f^{-1}(x)\right) =$

$(f^3 \circ f^{-1})(x) = f^3(f^{-1}(x)) =$

＜ 合成関数 3 ＞

問 1 次の合成関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ のとき $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ のとき $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

例 1 $2^{\log_2 8} = 2^{\log_2 (2^3)} = 2^3 = 8$

問 2 次の値を求めよ。(ただし、$x > 0$ とする)

(1) $2^{\log_2 4} =$ (2) $2^{\log_2 16} =$ (3) $2^{\log_2 32} =$ (4) $2^{\log_2 x} =$

問 3 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ のとき次の合成関数を求めよ。

$(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

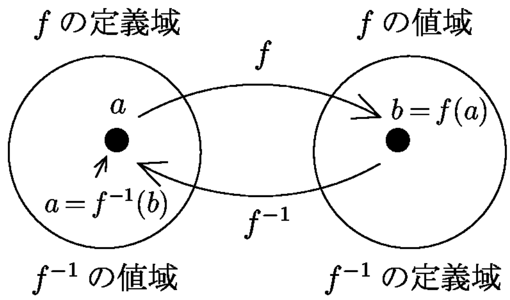
一般に関数 $f(x)$ が 1 対 1 関数のとき

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

であるから

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$



例 2 $f(x) = 2^x$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_2 x$ であるから

$2^{\log_2 3} = f(\log_2 3) = f(f^{-1}(3)) = (f \circ f^{-1})(3) = 3$

問 4 次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 3}$ (2) $e^{\log 5}$

(3) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ (4) $\tan(\tan^{-1}(1))$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。
変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\quad \dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\quad \dfrac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\quad \dfrac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\quad \dfrac{dS}{dr} =$

(5) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\quad \dfrac{dV}{dr} =$

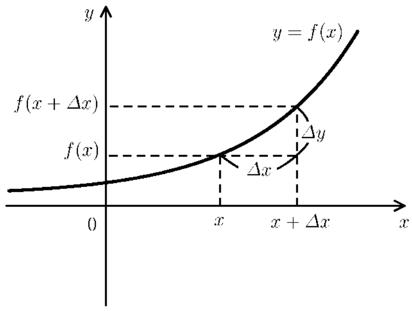
＜増分記号 Δ(デルタ) ＞

変数 x の増えた量を「x の増分」といい、「Δx」という記号で表す。
Δx は文字が 2 つであるが 1 つの量を表す。

関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、
y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \to 0$ のときの平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\dfrac{dy}{dx}$ と書く。



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても同様である。

例

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問　次の極限値を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\displaystyle \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

＜合成関数の微分１＞

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad \Big(= \sin\big((x + \Delta x)^3\big) - \sin(x^3)\Big)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}\right)$$

$$= (\sin u)' \times (x^3)'$$

$$= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$$

問１ 関数 $y = \cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^4$ とおくと、 $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^4 - x^4$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right) \times \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx} =$

問２ 関数 $y = \sin(x^3 + 2x^2)$ の導関数を例にならって求めよ。

(解) $\dfrac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 2 >

問 1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = f(x)$ とおくと $y = g(u)$ となる。

このとき、 $\dfrac{dy}{dx}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ を、 $\boxed{\dfrac{dy}{du}}\left(= \lim_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}\right)$ と $\boxed{\dfrac{du}{dx}}\left(= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right)$ で表せ。

(答) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad}$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3 + 5x^2$ とおくと $y = u^7$ となる。よって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \left(u^7\right)' \times \left(x^3 + 5x^2\right)' = 7u^6 \times \left(3x^2 + 10x\right) = 7\left(x^3 + 5x^2\right)^6\left(3x^2 + 10x\right)$$

問 2 次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 2x + 5)^3$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^5 - 2x^2)$, $\dfrac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 3 >

例 1　$y=(x^3+4x)^7$ を考える。$u=x^3+4x$ とおくと $y=u^7$ より

$$\big((x^3+4x)^7\big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times(x^3+4x)'=7u^6\times(3x^2+4)=7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$$

問 1　次の導関数をもとめよ。

(1) $\big((3x+5)^7\big)'=$

(2) $\big((4x^2+5x)^8\big)'=$

例 2　$y=\big(f(x)\big)^7$ を考える。$u=f(x)$ とおくと $y=u^7$ より

$$\Big(\big(f(x)\big)^7\Big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(u^7)'\times\big(f(x)\big)'=7u^6\times f'(x)=7\big(f(x)\big)^6\times f'(x)$$

問 2　自然数 n に対し、次の導関数を求めよ。

$$\Big(\big(f(x)\big)^n\Big)'=$$

例 3　$\big((x^5+6x)^8\big)'=8(x^5+6x)^7\times(x^5+6x)'=8(x^5+6x)^7(5x^4+6)=8(5x^4+6)(x^5+6x)^7$

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\big((3x+4)^5\big)'=$

(2) $\big((4x^2+9x)^6\big)'=$

(3) $\big((x^4-2x^3)^{10}\big)'=$

(4) $\big((3+4\sin x)^5\big)'=$

(5) $\big((x-3\cos x)^7\big)'=$

＜ 合成関数の微分 4 ＞

例 1　$y=\sin(x^3+4x)$ を考える。$u=x^3+4x$ とおくと $y=\sin u$ より

$$\big(\sin(x^3+4x)\big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\sin u)'\times(x^3+4x)'=\cos u\times(3x^2+4)$$
$$=(3x^2+4)\cos(x^3+4x)$$

例 2　$y=\cos(x^7+5x^3)$ を考える。$u=x^7+5x^3$ とおくと $y=\cos u$ より

$$\big(\cos(x^7+5x^3)\big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\cos u)'\times(x^7+5x^3)'=-\sin u\times(7x^6+15x^2)$$
$$=-(7x^6+15x^2)\sin(x^7+5x^3)$$

問 1　次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\sin(5x-4)\big)'=$　　　　(2) $\big(\sin(x^6+7x^2-3)\big)'=$

(3) $\big(\cos(4x+3)\big)'=$　　　　(4) $\big(\cos(x^5-2x+1)\big)'=$

例 3　一般の関数 $f(x)$ に対して $\sin\big(f(x)\big)$ の導関数を求めたい。

$y=\sin\big(f(x)\big)$, $u=f(x)$ とおくと $y=\sin u$ より

$$\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\sin u)'\times\big(f(x)\big)'=\cos u\times f'(x)=\cos\big(f(x)\big)\times f'(x)$$

よって

$$\boxed{\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)'=\cos\big(f(x)\big)\times f'(x)}$$

問 2　次の導関数を求めよ。

$\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)'=$

例 4　$\big(\sin(x^3-4x^2+5x)\big)'=\cos(x^3-4x^2+5x)\times(x^3-4x^2+5x)'$

$$=(3x^2-8x+5)\cos(x^3-4x^2+5x)$$

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\big(\sin(x^6+7x^5-3x^2+4x)\big)'$

$=$

(2) $\big(\sin(x^7-8x^5+4x^3-6x+1)\big)'$

$=$

＜合成関数の微分 5＞

例　関数 $y=\log(x^2+3x+4)$ の導関数を求めたい。

$u=x^2+3x+4$ 　とおくと　$y=\log u$ 　となる。

合成関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log u)'\times(x^2+3x+4)'$$
$$=\frac{1}{u}\times(2x+3)=\frac{1}{x^2+3x+4}\times(2x+3)=\frac{2x+3}{x^2+3x+4}$$

問 1　例にならって、次の関数の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y=\log(x^3+2x-5)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log(1+\sin x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log(5-\cos x)$

$\dfrac{dy}{dx}=$

問 2　上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し
合成関数 $y=\log\big(f(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'$ を
$f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)　$\boxed{\Big(\log\big(f(x)\big)\Big)'=\qquad\qquad}$

例 2　$\Big(\log(\cos x)\Big)'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

問 3　問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $\Big(\log(x^2+2x)\Big)'$

$=$

(2) $\Big(\log(x^6+3x^4)\Big)'$

$=$

(3) $\Big(\log(\sin x)\Big)'$

$=$

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (18 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、} (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) 両辺の自然対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2 $a > 0$ $(a \neq 1)$ に対し、$y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3 $a = e$ (ネピア数) のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

＜ 対数微分法 2 ＞

例 $y = x^{\frac{3}{2}}$ $\left(= \sqrt{x^3}\right)$ の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \quad \left(= \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

問 1 $y = x^{\frac{4}{3}}$ $\left(= \sqrt[3]{x^4}\right)$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' =$

問 2 一般の実数 r に対し、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)' =$

$<$ x^r の微分 $>$

前のページより

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1}}$$

が成り立つ。

例 1 $y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\boxed{\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}}$ から

$$\left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \left(x^{\frac{5}{3}}\right)' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1 次の導関数を求め、結果を根号 ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ 等) で表せ。

(1) $\left(\sqrt[4]{x^5}\right)' =$ (2) $\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' =$ (3) $\left(\sqrt{x^3}\right)' =$

例 2 $y = \dfrac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\boxed{\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2 次の導関数を求め、結果を分数の形にせよ。

(1) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$ (2) $\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' =$ (3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' =$

例 3 $(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3 次の導関数を求め、結果を例 3 のように根号で表せ。

(1) $(\sqrt[4]{x})' =$ (2) $\left(\sqrt[5]{x^4}\right)' =$ (3) $(\sqrt{x})' =$

例 4 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \left(= -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}\right)$

問 4 次の導関数を求め、結果を例 4 のように根号で表せ。

(1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' =$ (2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' =$ (3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$

＜逆関数の微分 1 ＞

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta y \to 0$ より

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問 1 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

$y = \cos^{-1} x$

$\dfrac{dy}{dx} =$

問 2 $\tan x$ の導関数の公式 $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ (30 ページ参照) を使って $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

$y = \tan^{-1} x$

$\dfrac{dy}{dx} =$

(ヒント) $\dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

＜ 逆関数の微分 2 ＞

問 1　$f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ とおく。

(1) 次の導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ および微分係数を求め、右図の $\boxed{}$ 内に傾きを示す数を入れよ。

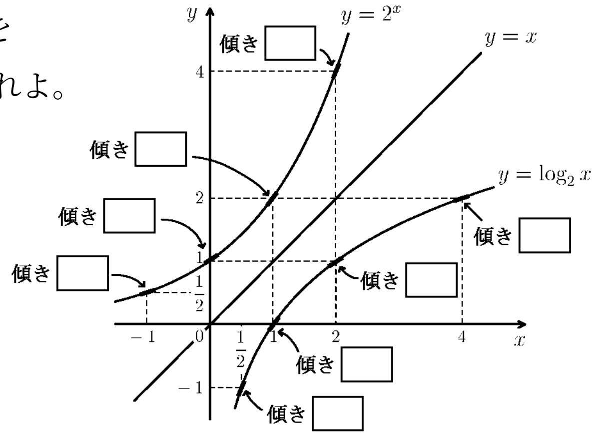
$f'(x) =$ 　　　　　, $g'(x) =$

$f'(-1) =$ 　　　　　, $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) =$

$f'(0) =$ 　　　　　, $g'(1) =$

$f'(1) =$ 　　　　　, $g'(2) =$

$f'(2) =$ 　　　　　, $g'(4) =$



(2) 対数の性質 $\log_2 e = \dfrac{1}{\log_e 2} = \dfrac{1}{\log 2}$ を使って、以下の微分係数を $f'(\ \ )$ を用いて表せ。

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ 　　　　, $g'(1) =$ 　　　　, $g'(2) =$ 　　　　, $g'(4) =$

問 2　1 対 1 の関数 $f(x)$ に対し、その逆関数を $g(x) = f^{-1}(x)$ とおく。$y = g(x) = f^{-1}(x)$ とおくと

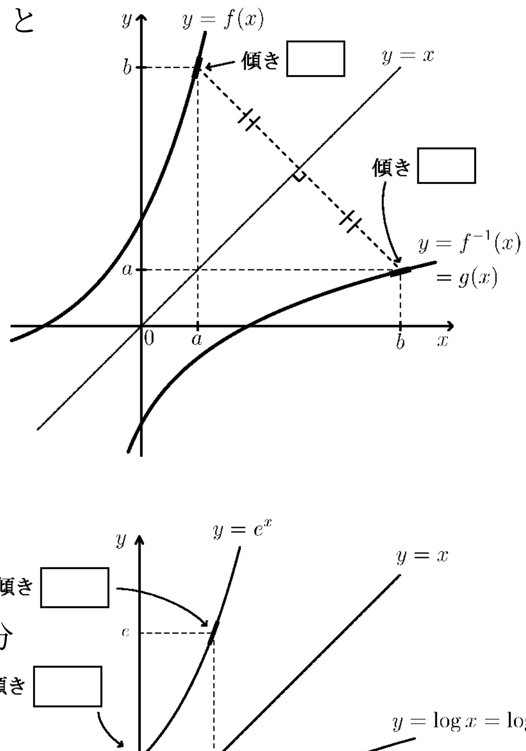
$$y = f^{-1}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = f(y)$$

より

$$(*) \quad \boxed{g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}}$$

となる。$a = f^{-1}(b)$ のとき $(*)$ 式で $x = b$, $y = a$ とおくことによって $g'(b)$ を f' と a で表し、右図の $\boxed{}$ 内に傾きを $\big(f'(a)$ を用いて$\big)$ 記入せよ。

$g'(b) =$



問 3　$f(x) = e^x$ とする。

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ。$f^{-1}(x) =$

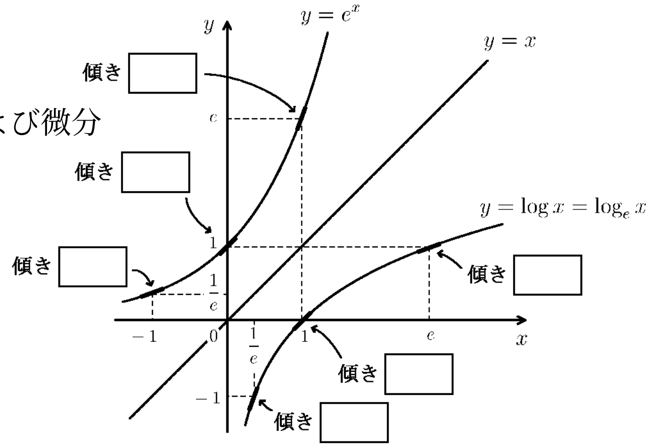
(2) $g(x) = f^{-1}(x)$ とする。以下の導関数および微分係数を求めよ。

$f'(x) =$ 　　　　, $g'(x) =$

$f'(-1) =$ 　　　　, $g'\left(\dfrac{1}{e}\right) =$

$f'(0) =$ 　　　　, $g'(1) =$

$f'(1) =$ 　　　　, $g'(e) =$



(3) 右図の $\boxed{}$ 内に傾きをいれよ。

＜ 指数関数の微分 ＞

$a>0$, $a\neq 1$ なす数 a に対して指数関数 a^x の導関数は

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log_e a = a^x \log a}$$

である。特に $a=e\ (=2.73\cdots)$ のときは $\log e = \log_e e = 1$ より

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

である。この指数関数 e^x と他の関数との合成関数の導関数の求め方を示す。

例 1　$y=e^{x^2}$ の導関数を求めたい。 $u=x^2$ とおくと $y=e^u$ より

$$\left(e^{x^2}\right)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = (e^u)'\times\left(x^2\right)' = e^u\times(2x) = e^{x^2}\times 2x = 2xe^{x^2}$$

問 1　次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{3x})' =$

(2) $\left(e^{x^2+3}\right)' =$

(3) $\left(e^{-x^2+2x}\right)' =$

問 2　例 1 を参考にして $y=e^{f(x)}$ の導関数を求め、$f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ。

$\left(e^{f(x)}\right)' =$

例 2　$\left(e^{-3x^2}\right)' = e^{-3x^2}\times(-3x^2)' = e^{-3x^2}\times(-6x) = -6xe^{-3x^2}$

問 3　次の導関数を求めよ。

(1) $\left(e^{-3x}\right)' =$

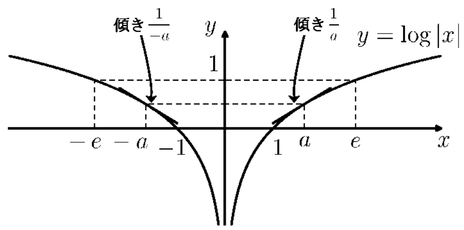
(2) $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' =$

$<\log|x|$ の微分 $>$

例 1　関数 $y=\log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a>0$ に対し

$$\log|-a|=\log a=\log|a|$$

より、 $y=\log|x|$ のグラフは右図のように y 軸対称となる。
この導関数は



(1) $x>0$ のとき $|x|=x$ より $y'=(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

(2) $x<0$ のとき $|x|=-x$ より $y'=(\log|x|)'=(\log(-x))'=\dfrac{(-x)'}{-x}=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$

(1), (2) より $x\neq 0$ のとき

$$\boxed{(\log|x|)'=\frac{1}{x}}$$

となる。

例 2　関数 $y=\log|\cos x|$ を微分したい。
$u=\cos x$ とおくと $y=\log|u|$
より合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=(\log|u|)'\times(\cos x)'=\frac{1}{u}\times(-\sin x)=\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)$$

$$=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

問 1　次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=\log|\tan x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=\log|x^2+3x|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

(3) $y=\log|f(x)|$, $\dfrac{dy}{dx}=$

< 積の微分 1 >

例 $f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

であるから、$\sin x$ と $\log x$ の導関数は次の極限

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$(\log x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}$$

である。従って $\sin x\times\log x$ の導関数は

$$\begin{aligned}(\sin x\times\log x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\log(x+h)-\sin x\log x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\log(x+h)-\sin x\log(x+h)+\sin x\log(x+h)-\sin x\log x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)\times\log(x+h)+(\sin x)\times\left(\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\right)\right\}\\ &= (\sin x)'\times\log x+\sin x\times(\log x)'\end{aligned}$$

問 1 $\sin x$ と $\log x$ の微分の公式を使って例の計算を完成せよ。

$(\sin x\times\log x)'=$

問 2 $f(x)\times g(x)$ の導関数を求めたい。以下の$\boxed{\quad\quad}$内に適当な文字式を入れよ。

$(f(x)\times g(x))'$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-\boxed{\quad\quad\quad\quad}+\boxed{\quad\quad\quad}-f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\left(\frac{\boxed{\quad\quad\quad}-\boxed{\quad\quad\quad}}{h}\right)\times g(x+h)+f(x)\times\left(\frac{\boxed{\quad\quad\quad}-\boxed{\quad\quad\quad}}{h}\right)\right\}$$

$$= \left(\boxed{\quad\quad}\right)'\times g(x)+f(x)\times\left(\boxed{\quad\quad}\right)'$$

＜ 積の微分 2 ＞

前ページの結果より、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数は

$$\boxed{\big(f(x) \times g(x)\big)' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)}$$

である。

例 (1) $\big(x^3 \sin x\big)' = \big(x^3\big)' \times \sin x + x^3 \times (\sin x)'$

$$= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

(2) $\big(\cos^2 x\big)' = (\cos x \times \cos x)'$

$$= (\cos x)' \times \cos x + \cos x \times (\cos x)'$$

$$= -\sin x \times \cos x + \cos x \times (-\sin x)$$

$$= -2 \sin x \cos x$$

問 次の関数の微分せよ。

(1) $(x \sin x)' =$

(2) $\big(x^2 \cos x\big)' =$

(3) $\big(\sin^2 x\big)' =$

(4) $\big(e^x \sin x\big)' =$

(5) $\big(\sin x \cos x\big)' =$

< 商の微分 1 >

例　導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ より

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

である。$\dfrac{1}{\sin x}$ の導関数は

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h) \sin x} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{h}}{\sin(x+h)\sin x} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \\
&= \frac{-(\sin x)'}{(\sin x)^2}
\end{aligned}$$

問 1　$\sin x$ の微分の公式を使って例の計算を完成させよ。

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' =$$

問 2　導関数の定義 $g'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ を用いて以下の$\boxed{\quad}$内に適当な文字を入れよ。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\boxed{\quad} - \boxed{\quad}}{\boxed{\quad} \times \boxed{\quad}}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{\quad} - \boxed{\quad}}{h \times \boxed{\quad} \times \boxed{\quad}} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{\boxed{\quad} - \boxed{\quad}}{h}}{\boxed{\quad} \times \boxed{\quad}} \\
&= \frac{-\left(\boxed{\quad}\right)'}{\left(\boxed{\quad}\right)^2}
\end{aligned}$$

＜商の微分 2＞

前ページの結果より

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}}$$

が成り立つ。

例 (1) $\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$

(2) $\left(\frac{1}{x+\sin x}\right)' = -\frac{(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2} = -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}$

(注) 例 (1) は $(x^n)' = nx^{n-1}$ の公式で

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

と計算してよい。どちらで求めても同じ結果になる。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\frac{1}{x}\right)' =$

(2) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$

(3) $\left(\frac{1}{x^3}\right)' =$

(4) $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' =$

(5) $\left(\frac{1}{e^x}\right)' =$

＜分数関数の微分＞

問 1 27ページ , 29ページを参考にして、以下の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\times\frac{1}{g(x)}\right)' = \left(\boxed{}\right)'\times\left(\frac{1}{\boxed{}}\right) + \left(\boxed{}\right)\times\left(\frac{1}{\boxed{}}\right)'$$

$$= \frac{\left(\boxed{}\right)'}{\boxed{}} + \left(\boxed{}\right)\times\left(-\frac{\left(\boxed{}\right)'}{\left(\boxed{}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\left(\boxed{}\right)'\times\boxed{} - \boxed{}\times\left(\boxed{}\right)'}{\left(\boxed{}\right)^2}$$

例

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\times\cos x - \sin x\times(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\times\cos x - \sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\dfrac{x}{e^x}\right)' =$

(2) $\left(\dfrac{\sin x}{e^x}\right)' =$

(3) $\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' =$

< 微分の練習 >

問 1　次の導関数の公式を書け。(ただし k は定数とする)

(1) $(k)' =$

(2) $(x^n)' =$

(3) $(\sin x)' =$

(4) $(\cos x)' =$

(5) $(\log x)' =$

(6) $(e^x)' =$

(7) $(\sin^{-1} x)' =$

(8) $(\tan^{-1} x)' =$

問 2　次の導関数の公式を $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ で表せ。(ただし k は定数とする)

(1) 和の微分　$\big(f(x) + g(x)\big)' =$

(2) 差の微分　$\big(f(x) - g(x)\big)' =$

(3) 定数倍の微分　$\big(kf(x)\big)' =$

(4) 積の微分　$\big(f(x) \times g(x)\big)' =$

(5) 分数関数の微分　$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

問 3　合成関数の微分の公式 $\boxed{\Big(g\big(f(x)\big)\Big)' = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)}$ を使って次の関数の導関数を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(1) $\Big(\big(f(x)\big)^n\Big)' =$

(2) $\Big(\sin\big(f(x)\big)\Big)' =$

(3) $\Big(\cos\big(f(x)\big)\Big)' =$

(4) $\Big(\log|f(x)|\Big)' =$

(5) $\big(e^{f(x)}\big)' =$

問 4　次の導関数を求めよ。

(1) $(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 8)' =$

(2) $(\sqrt{x})' =$

(3) $(x\sqrt{x})' =$

(4) $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' =$

(5) $(\sin x \cos x)' =$

(6) $(\tan x)' =$

(7) $(x \log x - x)' =$

(8) $(-\log|\cos x|)' =$

(9) $(e^{2x} \sin(3x))' =$

(10) $\Big(\log\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)\Big)' =$

< 原始関数 >

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\dfrac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\dfrac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\dfrac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C \text{ は定数})$$

である。

問 次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 =

(2) x^5 の原始関数の一般形 =

(3) x^6 の原始関数の一般形 =

< 不定積分 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり、その一般形は

$$F(x) + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 $\int$ はインテグラル ($integral$) と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注) 記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4 dx =$

(2) $\displaystyle\int x^5 dx =$

(3) $\displaystyle\int x^6 dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

< 不定積分 2 >

前ページより n が正の整数のとき

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

がなりたつ。微分の性質

$$\Big(kf(x)\Big)' = k \times f'(x) \qquad (k\text{ は定数})$$

$$\Big(f(x)+g(x)\Big)' = f'(x) + g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int kf(x)dx = k \times \int f(x)dx \qquad (k\text{ は定数}) \\ \displaystyle\int \Big\{f(x)+g(x)\Big\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx\end{array}}$$

が得られる。

例 1 $$\begin{aligned}\int \left(9x^2 - 4x + 3\right) dx &= 9\int x^2 dx - 4\int x dx + 3\int dx \\ &= 9 \times \frac{1}{3}x^3 - 4 \times \frac{1}{2}x^2 + 3 \times x + C \\ &= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \qquad (C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

（注 1）例の様な不定積分では、積分定数は 1 つにまとめて書いておけばよい。
(注 2) $(x)' = 1$ より $\int 1dx = x + C$ である。1 を略して $\int dx = x + C$ と書く。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 3x^3 dx =$　　　　(2) $\displaystyle\int (5-4x)\, dx =$

(3) $\displaystyle\int \left(3x^2 - 10x + 7\right) dx =$

例 2 $\displaystyle\int \left(-2x^2 - 3x + 6\right) dx - \int \left(x^2 - 3x + 5\right) dx$

$$= \int \Big\{\left(-2x^2 - 3x + 6\right) - \left(x^2 - 3x + 5\right)\Big\} dx = \int \left(-3x^2 + 1\right) dx = -x^3 + x + C$$

問 2　例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int \left(4x^2 - 3x + 2\right) dx - 2\int \left(2x^2 - 3x - 4\right) dx$$

$=$

< 不定積分 3 >

微分と不定積分は互いに逆の演算である。

例 1 < 微分 > < 不定積分 >

$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n \quad \Leftrightarrow \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

問 1 左の微分の式を求めて、右の不定積分の形に変えよ。

< 微分 > < 不定積分 >

$$(\sin x)' = \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos x dx =$$

$$(-\cos x)' = \quad \Leftrightarrow \quad \int \sin x dx =$$

$$(\log|x|)' = \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx =$$

$$(e^x)' = \quad \Leftrightarrow \quad \int e^x dx =$$

例 2 (1) $\displaystyle\int (2\cos x + 3\sin x)\,dx = 2\int \cos x dx + 3\int \sin x dx = 2\sin x - 3\cos x + C$

(2) $\displaystyle\int \left(4e^x - \frac{5}{x}\right) dx = 4\int e^x dx - 5\int \frac{1}{x}dx = 4e^x - 5\log|x| + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 5e^x)\,dx =$ (2) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2x} - 3\cos x\right) dx =$

例 3 (1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

問 3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}dx =$

(2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}dx =$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx =$

＜合成関数の不定積分＞

例 1　25 ページ問 (3) より

$$\big(\log|f(x)|\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \text{(微分)}$$

となる。これを不定積分の形にすると

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad \text{(不定積分)}$$

となる。

問 1　左の微分の式を不定積分の式に変えよ。

(微分)　　　　　　　　　　　　(不定積分)

(1)　$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$

(2)　$\big(\sin(f(x))\big)' = \cos(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$

(3)　$\big(-\cos(f(x))\big)' = \sin(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$

例 2　(1) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x}dx = \int \frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x}dx = \log|x^2+3x| + C$

(2) $\displaystyle\int 3x^2 e^{x^3+1}dx = \int e^{x^3+1} \times (x^3+1)'dx = e^{x^3+1} + C$

(3) $\displaystyle\int (2x-1)\sin(x^2-x)dx = \int \sin(x^2-x) \times (x^2-x)'dx = \cos(x^2-x) + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{4x^3+5}{x^4+5x}dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

(3) $\displaystyle\int (2x+3)e^{x^2+3x}dx$　　　(4) $\displaystyle\int (-x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

(5) $\displaystyle\int 4x^3\cos(x^4+3)dx$　　　(6) $\displaystyle\int (3x-2)\sin\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right)dx$

＜積分記号＞

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1 $\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ より $\int 3x^2dx = x^3 + C$

$\frac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$ より $\int 3t^2dt = t^3 + C$

$\frac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$ より $\int 3u^2du = u^3 + C$

例 2 (1) $\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\int e^u du =$

(4) $\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\int \cos u du =$

< 置換積分 1 >

積分変数を u にした不定積分の公式は以下のようになる。

$$\int e^u du = e^u + C \quad , \quad \int \frac{1}{u} du = \log|u| + C$$
$$\int \cos u du = \sin u + C \quad , \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$
$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad (\text{ただし } n \neq -1)$$

この公式さえ覚えておけば、37 ページの合成関数の積分の公式は覚える必要がない。

例 1 $\displaystyle\int e^{f(x)} f'(x) dx$ を考える。

$u = f(x)$ とおくと $f'(x) = \dfrac{du}{dx}$ $\quad$ ($u = f(x)$ を x で微分)

となる。すると

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx$$

と書ける。そこで形式的に

$$\boxed{\frac{du}{dx} dx = du}$$

とおくと

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{f(x)} + C$$

例 2 $\displaystyle\int \cos(f(x)) f'(x) dx$ を考える。上と同様に $u = f(x)$ とおくと

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \int \cos(u) du = \sin u + C = \sin(f(x)) + C$$

このように積分変数を x から u におきかえる方法を**置換積分法**という。

問 上の例と同様に $u = f(x)$ とおいて、合成関数の積分の公式を導け。
(式変形を書くこと)

(1) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(f(x)) f'(x) dx =$

(3) $\displaystyle\int (f(x))^n f'(x) dx =$

< 置換積分 2 >

例 1 不定積分 $\int e^{3x-2}dx$ を考える。

$$u = 3x-2 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (3x-2)' = 3 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

となる。ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3 \implies du = 3dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$$

とおくと

$$\int e^{3x-2}dx = \int e^u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{3x-2} + C$$

例 2 定数 $a,\ b\ (a \neq 0)$ に対し $\int e^{ax+b}dx$ を考える。

$$u = ax+b \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = a \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = adx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a}du}$$

とおくと

$$\int e^{ax+b}dx = \int e^u \frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int e^u du = \frac{1}{a}e^u + C = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

がわかる。

例 3 定数 $a,\ b\ (a \neq 0)$ に対し $\int \cos(ax+b)dx$ を考える。上と同様に $u = ax+b$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = adx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a}du}$$

より

$$\int \cos(ax+b)dx = \int \cos(u)\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int \cos(u)du = \frac{1}{a}\sin(u) + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

問 1 上と同様にして定数 $a,\ b\ (a \neq 0),\ (n \neq -1)$ に対して $u = ax+b$ とおくことにより次の不定積分を求めよ。(式変形を書くこと)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx =$

(2) $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx =$

(3) $\displaystyle\int (ax+b)^n dx =$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{4x+5}dx$ (2) $\displaystyle\int \cos(3x-5)dx$ (3) $\displaystyle\int \frac{1}{5x+6}dx$

(4) $\displaystyle\int \sin(2x+\pi)dx$ (5) $\displaystyle\int (8x+7)^5 dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x+6)^2}dx$

＜置換積分３＞

例１ $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ を考える。

$$\boxed{u = x^3} \qquad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies du = 3x^2 dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とおくと

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int e^{x^3} du = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例２ $\int x^2 e^{x^3} dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおき

$$\boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とすると

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

例３ $\int x \cos(x^2+1) dx$ を考える。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2+1)' = 2x \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{2x} du}$$

とおくと

$$\int x \cos(x^2+1) dx = \int x \cos(x^2+1) \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$
$$= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2+1) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x e^{x^2+1} dx =$

(2) $\int x^3 e^{x^4} dx =$

(3) $\int x^2 \cos(x^3+2) dx =$

(4) $\int x \sin(x^2+3) dx =$

(5) $\int \frac{x}{x^2+3} dx =$

(6) $\int x(x^2+1)^5 dx =$