2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2002年度版）

Series **A**

No. **3**

内容

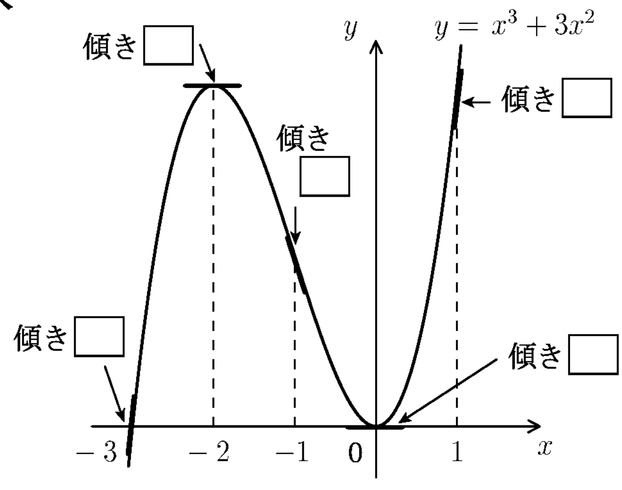
◎　弧度法と三角関数

◎　接線と微分係数

◎　整関数の微分

◎　関数の増減

◎　速度・加速度

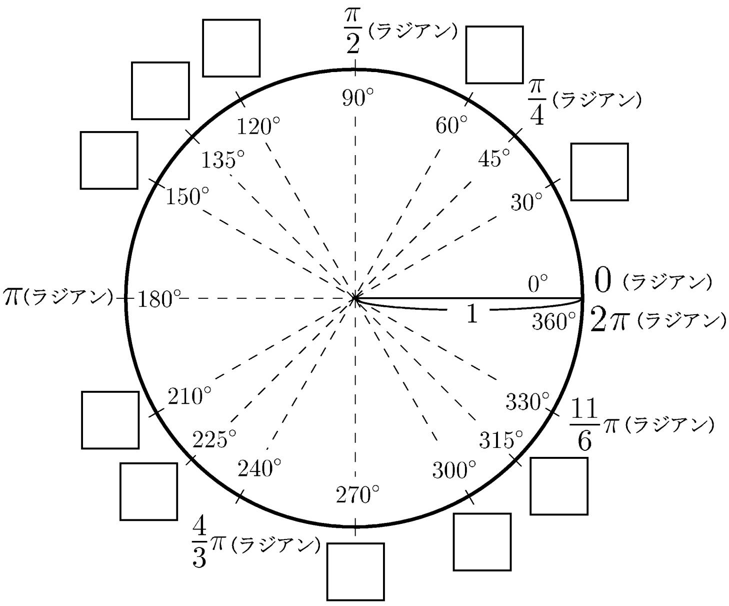


電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

＜ 弧度法 2 ＞

問 1　右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の □ 内に弧度法にによる角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例　0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1)　$420° = 360° + 60° = 2\pi + \frac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \frac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

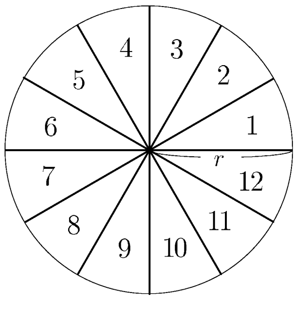
(2)　$-510° = -360° - 150° = -2\pi - \frac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\frac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

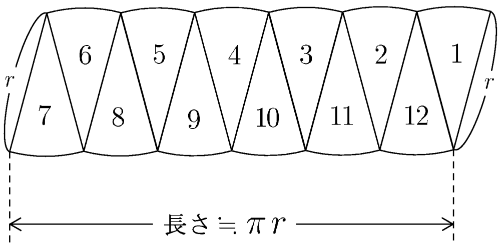
問 2　次の角度を弧度法で表せ。

(1)　540°　　(2)　$-270°$　　(3)　630°

(4)　$-405°$　　(5)　750°　　(6)　$-855°$

問 3　Ser. **A** , *No.* **2** の 40 ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)



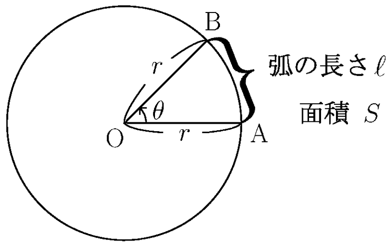


(1)　半径 r の円周の長さ ℓ を求めよ。　　$\ell =$

(2)　半径 r の円の面積 S を求めよ。　　$S =$

＜弧度法3＞

中心角 θ、半径 r の扇形 OAB の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を求めたい。



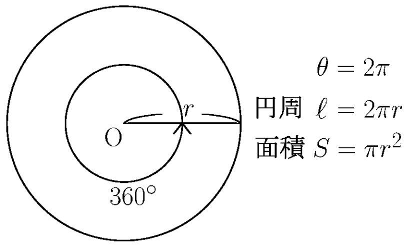
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは

ℓ は円周の長さだから

$\ell = 2\pi r$

であり S は円の面積だから

$S = \pi r^2$

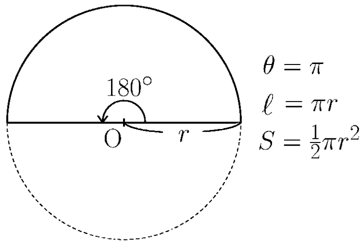


(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは

(1) の半分であるから

$\ell = \pi r$

$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$

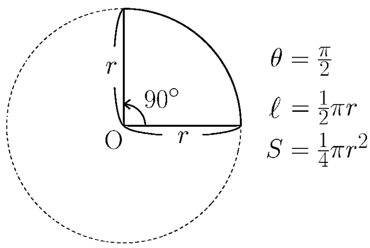


(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90^\circ$ のときは

(1) の $\dfrac{1}{4}$ であるから

$\ell = \dfrac{1}{2}\pi r$

$S = \dfrac{1}{4}\pi r^2$



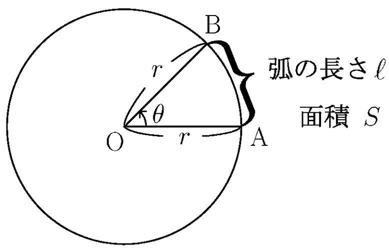
問 1 次の表を完成させよ。

度数法		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

問 2 上の表を参考にして、一般に角度が θ（ラジアン）であるとき弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$

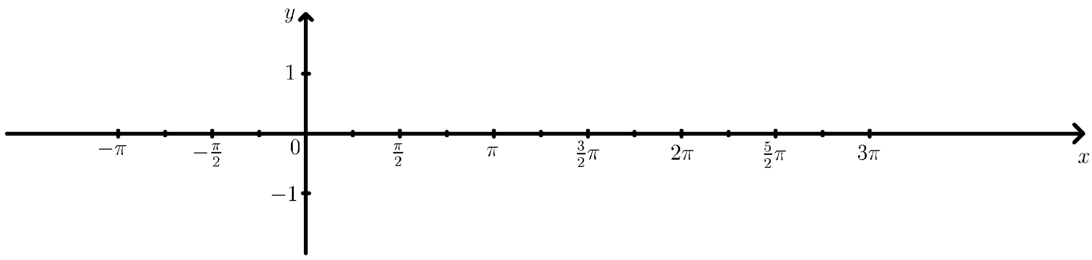


＜三角関数のグラフ＞

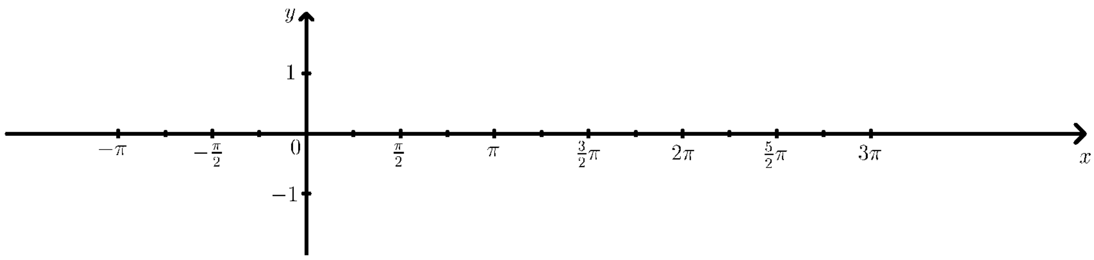
問 表を完成し、$y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x																		
x	度数法	$-180°$			$-45°$	$0°$		$90°$				$270°$	$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

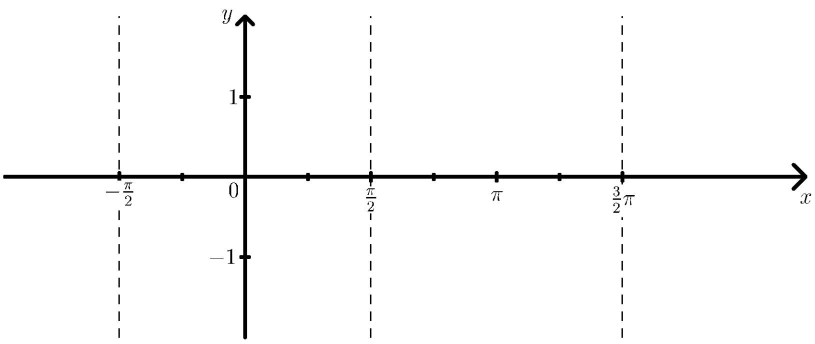


(2) $y = \cos x$



x																		
x	度数法	$-90°$			$-30°$	$0°$	$30°$		$60°$		$120°$			$180°$		$225°$	$240°$	
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		×								×								×

(3) $y = \tan x$



< 正弦波１ >

定数 A , B , C に対し、正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを
正弦波という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

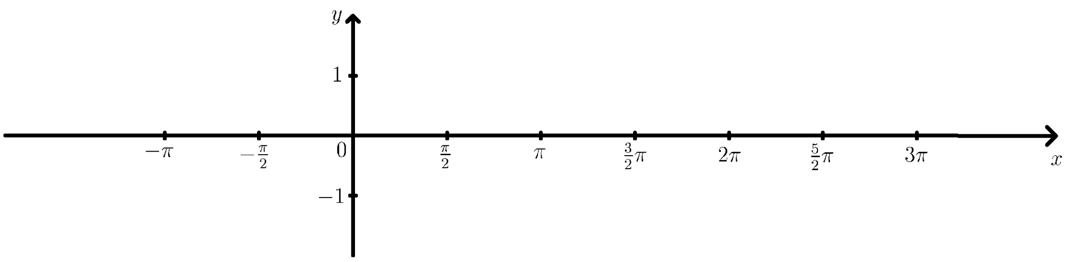
であるが $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの
$y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより**位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**」という。
一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において、(　　) の中の部分（この場合は $Bx + C$）を**位相**という。

問 次の表を完成し、$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

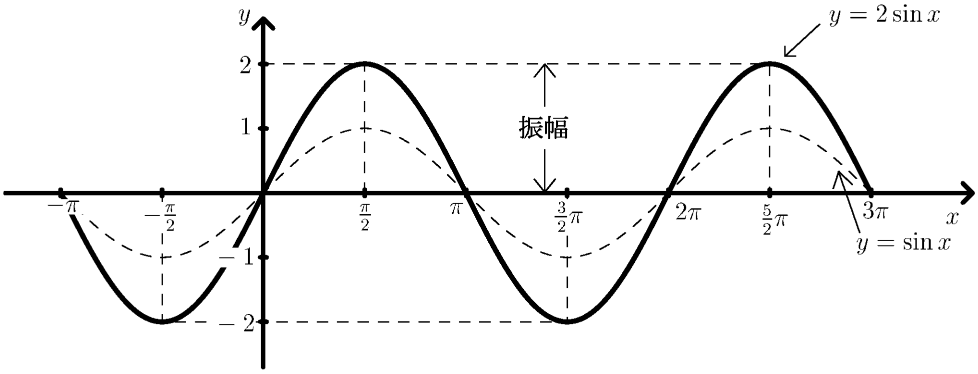
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



＜ 正弦波２ ＞

例 $y = 2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、
それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	−1	0	1	0	−1	0	1	0
$2\sin x$	0	−2	0	2	0	−2	0	2	0

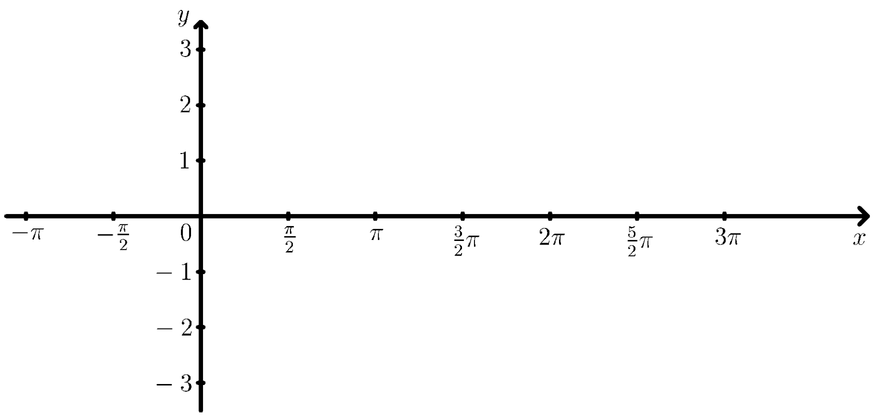


このグラフでは実線が $y = 2\sin x$ のグラフであり、点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は −2 である。

このような場合に「この正弦波の**振幅は 2**」という。

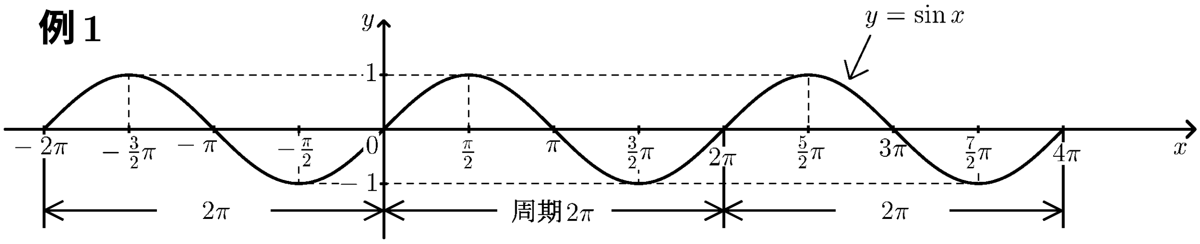
一般の正弦波の場合に、x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問 $y = -3\sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。



＜正弦波３＞

例１

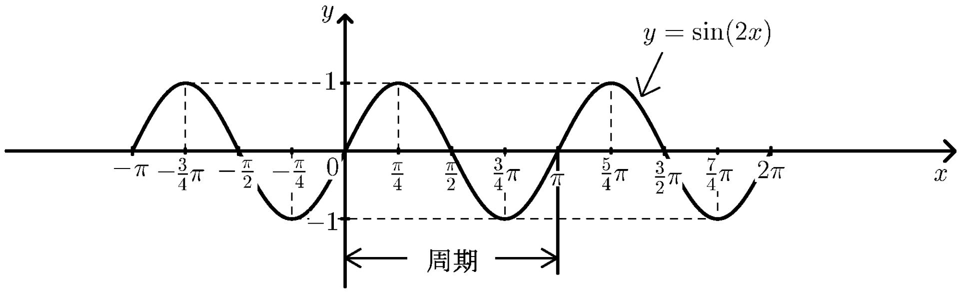


このグラフは $y=\sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい、一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$y=\sin x$ の周期は 2π である。

例２ $y=\sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

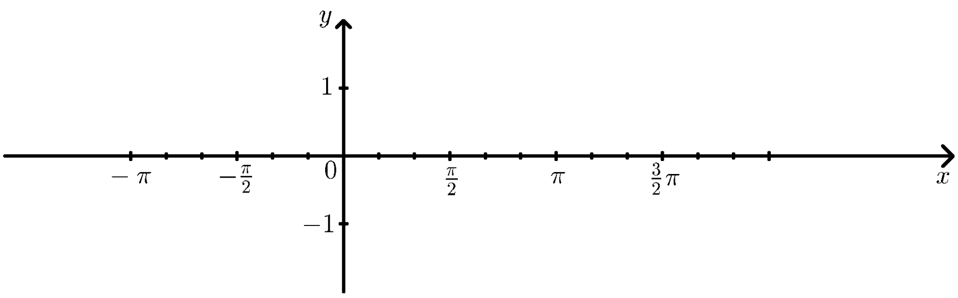


このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、

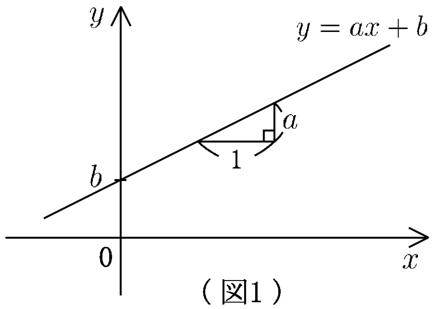
$y=\sin(2x)$ の周期は π である。

問 次の表を完成し、$y=\sin(3x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													



＜ 1 次関数のグラフ ＞

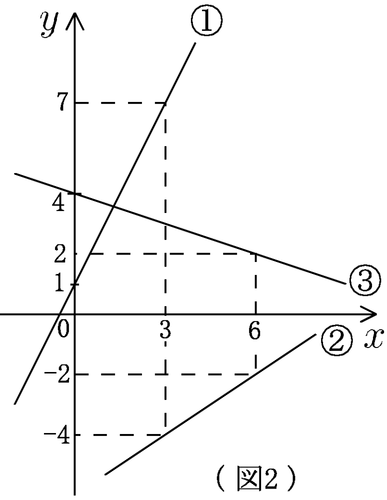


(図1)

y が x の 1 次式で表される関数を **1 次関数**という。
$a,\ b$ を定数とする 1 次関数

$$y = ax + b \qquad \cdots\cdots(*)$$

のグラフは座標平面上の直線になる。(図 1)
このとき a は**傾き**, b は y **切片**を表す。
$(*)$ 式を「傾き a , y 切片 b の直線の方程式」という。



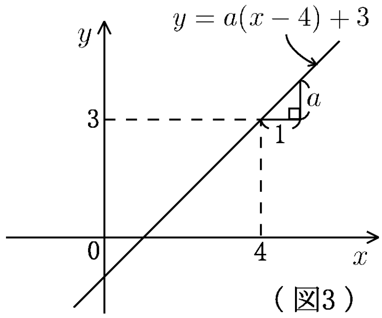
(図2)

問 1 図 2 の直線①, ②, ③の方程式を求めよ。

①

②

③



(図3)

例 点 $(4, 3)$ を通り傾き a の直線の方程式は

$$y = a(x-4) + 3 \quad \cdots(**)$$

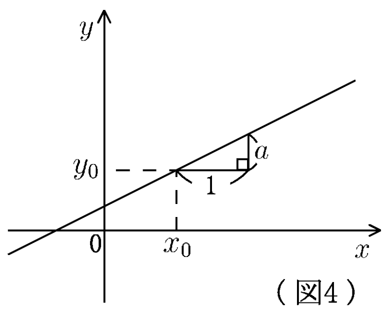
となる (図 3)。なぜならば

$$y = ax + 3 - 4a \quad \cdots(\text{傾き } a,\ y \text{ 切片 } 3-4a \text{ の直線})$$

となり傾きが a であることがわかり、さらに

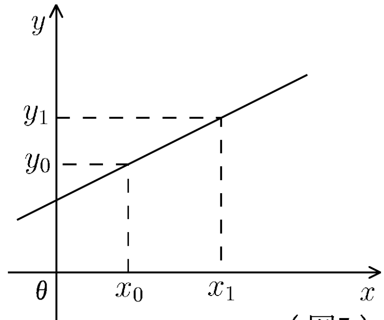
$$x = 4 \text{ のとき } y = 3$$

であるから点 $(4, 3)$ を通ることがわかる。



(図4)

問 2 点 (x_0, y_0) を通り傾き a の直線 (図 4) の方程式を $(**)$ 式の形で表せ。



(図5)

問 3 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る直線 (図 5) を考える。

(1) この直線の傾きを x_0, x_1, y_0, y_1 の式で表せ。

傾き $=$

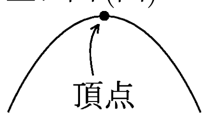
(2) 問 2 の結果を用いてこの直線の方程式を表せ。

＜２次関数のグラフ１＞

y が x の 2 次式で表される関数を 2 次関数という。物を投げたときの軌道が 2 次関数のグラフとして表されるので、2 次関数のグラフを**放物線**という。

$y = x^2,\ y = -4x^2,\ y = -\frac{1}{4}x^2$ などのグラフを**上に凸**または単に**凸**という (図 1)。このようなグラフで y 座標が最大になる点を、この放物線の頂点という。

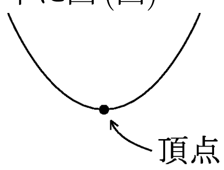
上に凸 (凸)



(図1)

$y = x^2,\ y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2$ などのグラフを**下に凸**または単に**凹**という (図 2)。このグラフで y 座標が最小になる点を (同様に) 頂点という。

下に凸 (凹)



(図2)

$a,\ x_0,\ y_0$ を定数とする 2 次関数

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

のグラフは $y = ax^2$ のグラフを

$$\begin{cases} x \text{ 軸方向に } x_0 \\ y \text{ 軸方向に } y_0 \end{cases}$$

だけ平行移動したものである。
その頂点は (x_0, y_0) である。$a > 0$ のときは図 3 のようなグラフになる。

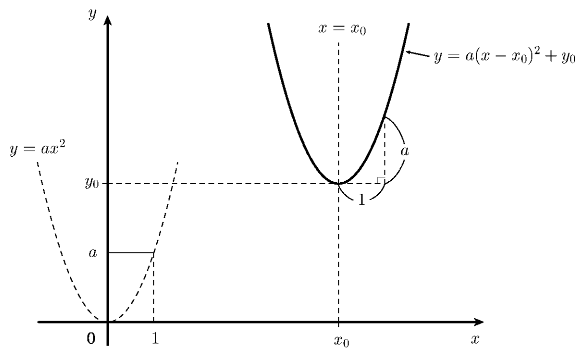


図 3 の放物線は直線 $x = x_0$ を対称軸として左右対称になっている。
このような時直線 $x = x_0$ を**軸**または**対称軸**という。

問　次の 2 次関数の対応表とグラフを書き、頂点と軸を求めよ。

(1)　$y = -(x - 3)^2 + 2$

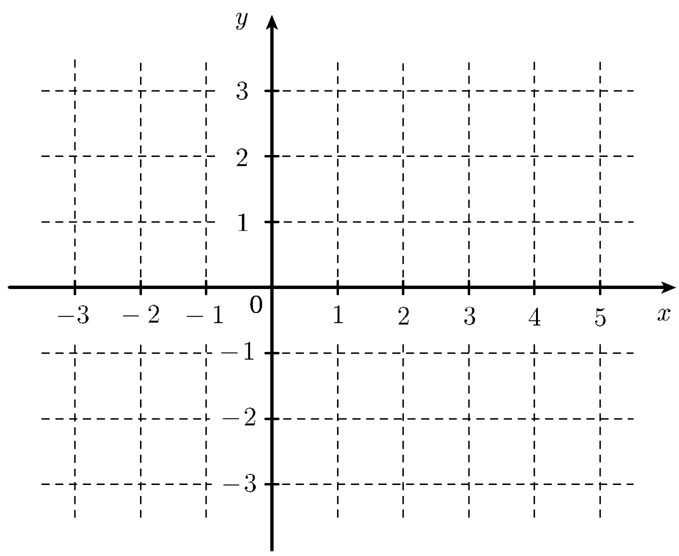
頂点 (　,　) , 軸 $x =$

x	1	2	3	4	5
y					

(2)　$y = (x + 1)^2 - 2$

頂点 (　,　) , 軸 $x =$

x	−3	−2	−1	0	1
y					



＜ 2 次関数のグラフ 2 ＞

例 1　2 次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフを書きたい。

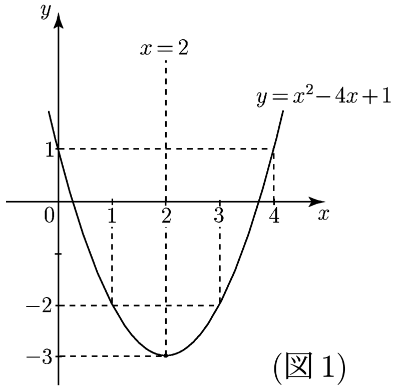
$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$$

より

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$$

であるから頂点 $(2, -3)$、軸 $x = 2$ の放物線である。(図 1)

$x = 0$ のとき $y = 1$ より y 切片は 1 である。

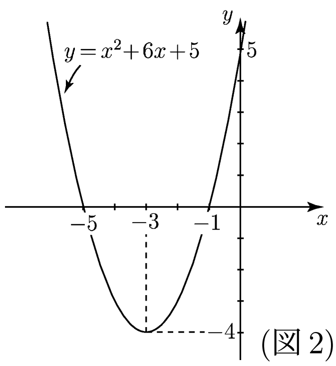


(図 1)

例 2　$y = x^2 + 6x + 5$
$= (x+3)^2 - 4$

より、頂点 $(-3, -4)$ の放物線である。(図 2)

$x = 0$ のとき $y = 5$ より y 切片は 5。



(図 2)

一般に

(∗)
$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$$

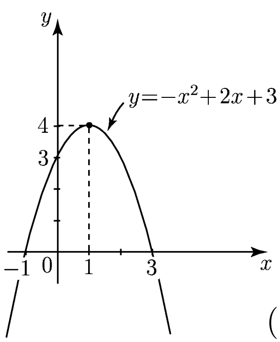
となる。

問 1　(∗) 式の右辺を展開して整理し、左辺と等しくなることを示せ。

例 3　$y = -x^2 + 2x + 3$
$= -(x-1)^2 + 4$

より、頂点 $(1, 4)$ の放物線である。(図 3)

$x = 0$ のとき $y = 3$ より y 切片は 3。

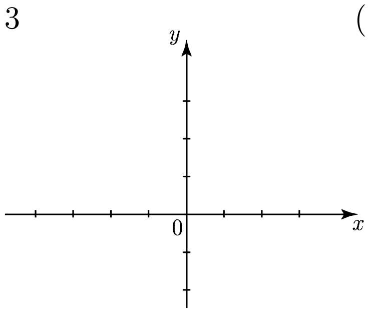


(図 3)

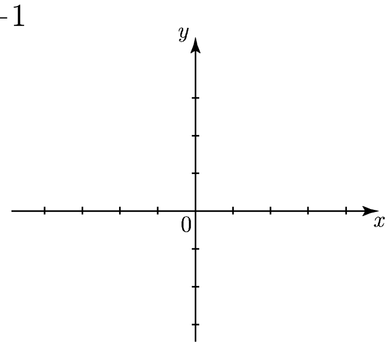
(注) 放物線のグラフを書くときは、まず頂点の位置をはっきりわかるように書くこと。その次に頂点以外に通る点を少なくとも 1 点は書いておくこと。普通は y 切片 (y 軸との交点) を書く。

問 2 次の放物線の頂点を求め、グラフを書け。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$



(2) $y = -x^2 + 2x + 1$



＜ 2次関数のグラフ3 ＞

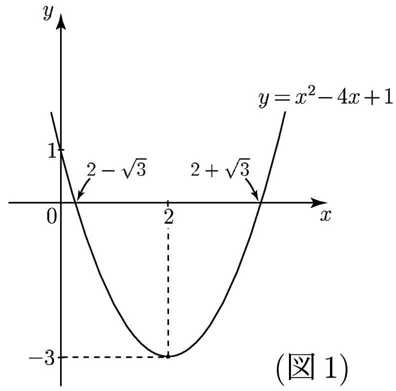
例 2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは前ページ例1より頂点 $(2, -3)$、軸 $x = 2$ の放物線である。このグラフの x 切片（x 軸との交点）を求めたい。
x 軸は直線 $y = 0$ であるから

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0$

とおくと解の公式より

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

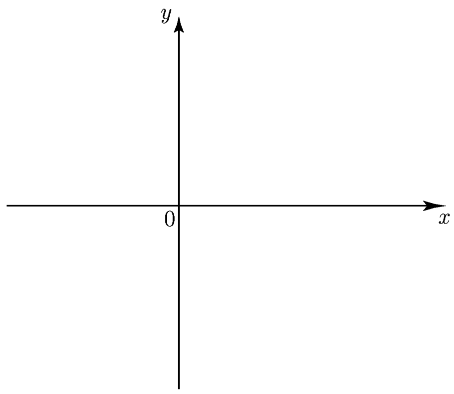
であるから x 切片は $2 - \sqrt{3}$ と $2 + \sqrt{3}$ である。



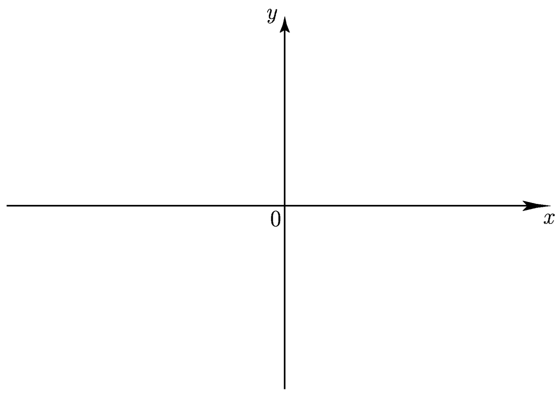
(図1)

問1 次の放物線の頂点と x 切片を求め、グラフを書け。

(1) $x^2 - 2x - 3$



(2) $x^2 + 4x + 2$



例題 不等式 $x^2 - 4x + 1 \geqq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(解) $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは上の図1の放物線である。このグラフから

(1)	$x < 2 - \sqrt{3}$	のとき	$y > 0 \quad \Rightarrow$	$x^2 - 4x + 1 > 0$
(2)	$x = 2 - \sqrt{3}$	のとき	$y = 0 \quad \Rightarrow$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
(3)	$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$	のとき	$y < 0 \quad \Rightarrow$	$x^2 - 4x + 1 < 0$
(4)	$x = 2 + \sqrt{3}$	のとき	$y = 0 \quad \Rightarrow$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
(5)	$x > 2 + \sqrt{3}$	のとき	$y > 0 \quad \Rightarrow$	$x^2 - 4x + 1 > 0$

となることがわかる。よって求める範囲は (3) 以外である。

<u>(答) $x \leqq 2 - \sqrt{3}$ か又は $2 + \sqrt{3} \leqq x$</u>

(注) (解) で y の正 $(y > 0)$, 負 $(y < 0)$ は放物線が x 軸 $(y = 0)$ より上 $(y > 0)$ にあるか、x 軸より下 $(y < 0)$ にあるかによって決まる。

問2 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

(1) $x^2 - 2x - 3 > 0$

(2) $x^2 + 4x + 2 \leqq 0$

< 関数の値 >

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例1 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \qquad \left(f(\square) = \square^2 + 5 \times \square - 4 \right)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 2^3 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問1 $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(2) =$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$, $f(1) =$, $f(2) =$, $f(3) =$

(3) $f(x) = x^4 - x^3$, $f(-3) =$, $f(0) =$, $f(3) =$

(4) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(5) =$

例2 $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 + 3(1 + h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h)$$

問2 $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a + h)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^3$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

(2) $f(x) = x + 1$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

(3) $f(x) = 2x^2 - 5$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

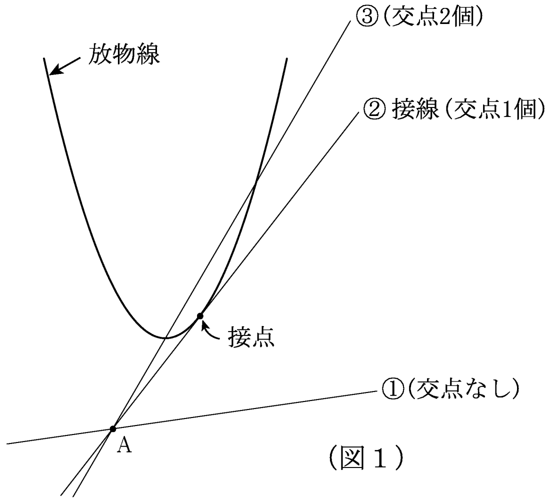
(4) $f(x) = x^2 + 3x$, $f(a) =$, $f(a+h) =$

＜ 接線 ＞

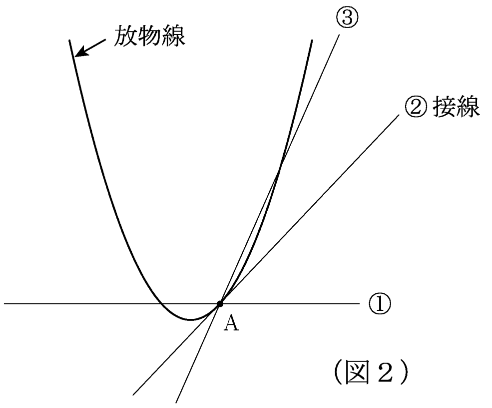
放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると、

①:交点なし
②:交点は 1 個
③:交点は 2 個

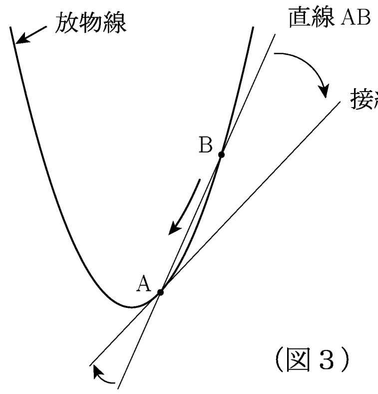
となる。直線②を**接線**といい、そのときの交点を**接点**という。
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線②が接線であり、点 A が接点である。



(図１)



(図２)



(図３)

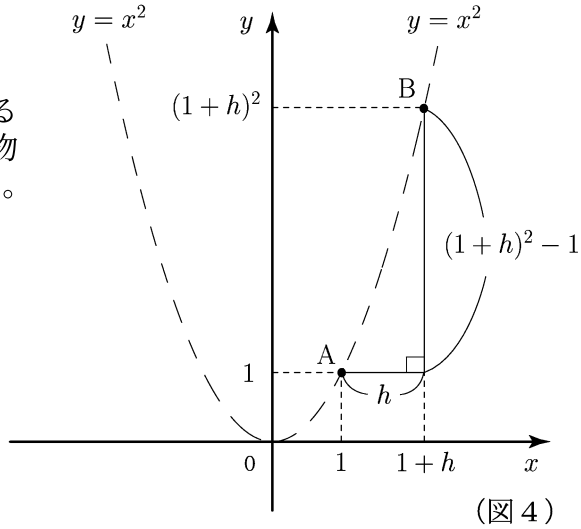
図 2 の接線②を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y = x^2$ 上の点 A $(1\,,1)$ を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(\ 1+h\,, (1+h)^2\ )$ とする (図 4)。

(1) 直線 AB の傾きを h で表せ。

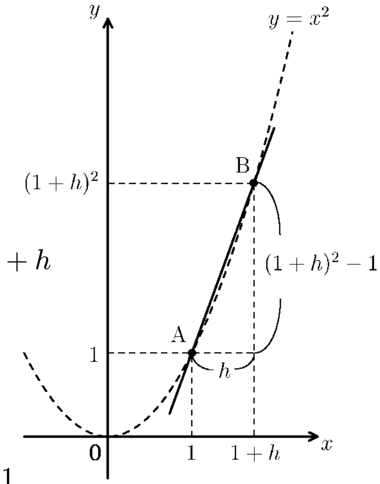
(2) $h = 0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。

(3) $h = 0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。



(図４)

＜ 極限 1 ＞



前ページの問の結果より、放物線 $y = x^2$ 上の点 A$(1, 1)$ と B$(1 + h\ ,\ (1 + h)^2)$ に対し、直線 AB の傾きは

$$\text{直線 AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

となる。ここで

$$h = 0.1 \quad \text{のとき} \quad \text{AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = 0.01 \quad \text{のとき} \quad \text{AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \quad \text{のとき} \quad \text{AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \quad \text{のとき} \quad \text{AB の傾き} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h = 2.0001$$

となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。
このことを記号→を使って

(1) $\qquad h \to 0 \quad$ のとき $\quad$ 直線 AB の傾き $\to\ 2$

とか

(2) $\qquad h \to 0 \quad$ のとき $\quad \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h \ \to\ 2$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の**極限値**
または単に**極限** (limit) という。(2) を記号 lim を使って次のように書く。

(3) $\qquad \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$

問 1 $h \to 0$ のとき直線 AB は放物線上の点 A$(1, 1)$ を接点とする接線に近づく。
(3) 式の極限値 2 は接線の何を意味するか？

例 (1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\frac{1}{4}}{h}$

＜ 極限 2 ＞

例 1 (1) $h \to 0$ のとき $3h \to 0$ である。つまり $\lim_{h\to 0} 3h = 0$

(2) $h \to 0$ のとき $(2+h)(3+h) \to 6$ つまり $\lim_{h\to 0}(2+h)(3+h) = 6$

（注）(1) は $\lim_{h\to 0} 3h = 3 \times 0 = 0$, (2) は $\lim_{h\to 0}(2+h)(3+h) = (2+0)\times(3+0) = 6$

と考える。このように $h \to 0$ の極限値は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合、$\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$ の式で $h=0$ を代入

すると $\dfrac{0}{0}$ の形で答がわからないので、$\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h)$

の形になおしてから $h=0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2-3}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3(1+2h+h^2)-3}{h} = \lim_{h\to 0}(6+3h) = 6$

(2) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h} - \lim_{h\to 0} \dfrac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h\to 0}(12+6h+h^2) = 12$

（注）ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ を用いた。

問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0} \dfrac{5(1+h)^2-5}{h}$

(2) $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(2+h)^2-12}{h}$

(3) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

(4) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^3-27}{h}$

例 3 (1) $\lim_{h\to 0} \dfrac{5(a+h)-5a}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(a+h)^2-3a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{3(a^2+2ah+h^2)-3a^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6a+3h) = 6a$

問 2 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(a+h)-3a}{h}$

(2) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h}$

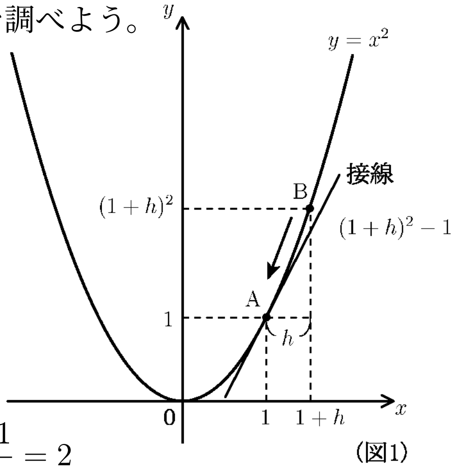
(3) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

＜接線の傾き 1＞

直線の傾きは常に一定だが、曲線の傾きは場所によって変る。

$$\boxed{\text{曲線の傾き} = \text{接線の傾き}}$$

と考えて。接線の傾きを求めることによって曲線の傾きを調べよう。



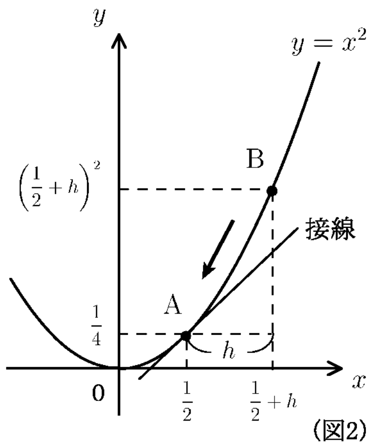
(図1)

例 放物線 $y = x^2$ 上の点 A(1,1) における放物線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。
この接線の傾きは放物線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。
15 ページより

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \to 0}(\text{直線 AB の傾き}) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

である。つまり点 A(1,1) における放物線の傾きは 2 である。

問 1 図 2 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

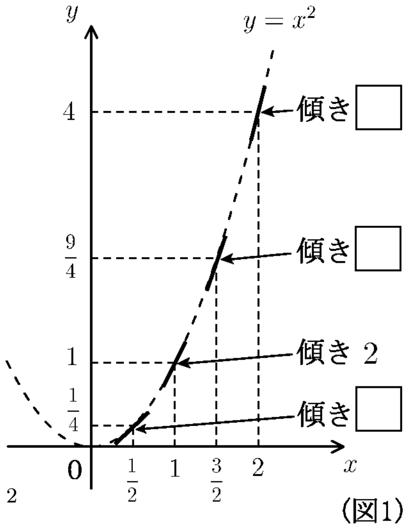


(図2)

問 2 上の例を問 1 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 A(2,4) における傾きを求めよ。

問 3 上の例と問 1、問 2 を参考にして放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

＜接線の傾き 2＞



(図1)

問 1 (1) 前ページの例と問の結果をグラフで表すと図１のようになる。図１の□の中に傾きを表す数を入れよ。

(2) 前ページの例と問の計算をまとめると以下のようになる。□の中に適当な数を入れよ。

$$x = 2 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \square$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\square + h\right)^2 - \left(\square\right)^2}{h} = \square$$

$$x = 1 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\square + h\right)^2 - \left(\square\right)^2}{h} = \square$$

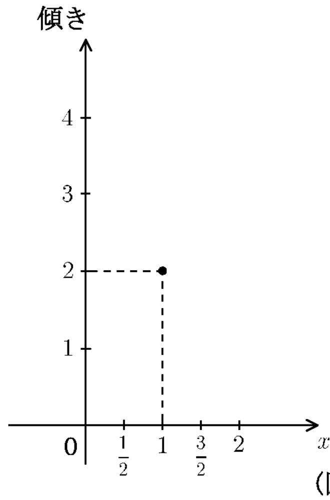
$$x = 0 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\square + h\right)^2 - \left(\square\right)^2}{h} = \square$$

(3) 上の結果を表にまとめたい。下の表の空欄に適当な数を入れよ。

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
傾き			2		

またこの表の結果を図２上に黒丸で作図せよ。さらにこの表および図２において、x と傾きの関係を式で表せ。(傾きを x の式で表す)

傾き＝

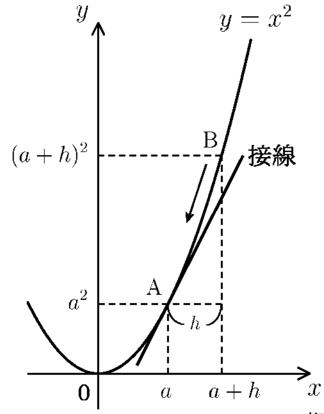


(図2)

問 2 放物線 $y = x^2$ 上の任意の点 $\mathrm{A}(a, a^2)$ における傾きを求めたい。図３を参考にして接戦の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

$$x = a \text{ のときの傾き} = \lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h}$$

$$=$$



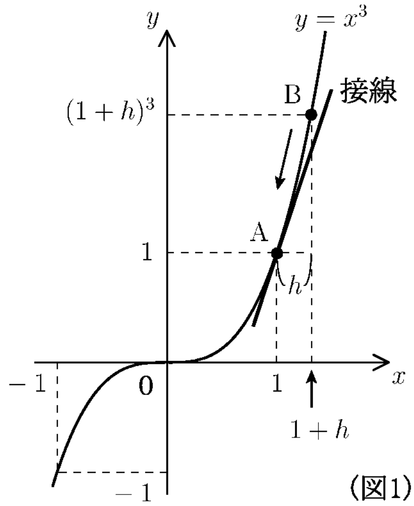
(図3)

問 3 問２の結果を用いて放物線 $y = x^2$ における以下の傾きを求めよ。

(1) $x = -1$ のときの傾き＝

(2) $x = -2$ のときの傾き＝

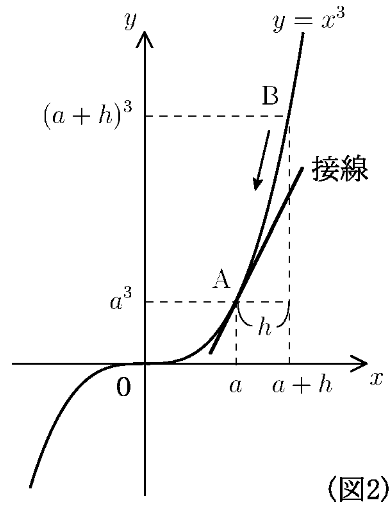
＜接線の傾き 3＞



(図1)

問 1　3 次曲線 $y = x^3$ 上の点 A$(1, 1)$ における 3 次曲線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きは 3 次曲線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。15 ページの例と右図を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を用いて、点 A における傾きを求めよ。

(解)　接線の傾き $= \lim_{h \to 0} \dfrac{\qquad\qquad\qquad}{h} =$

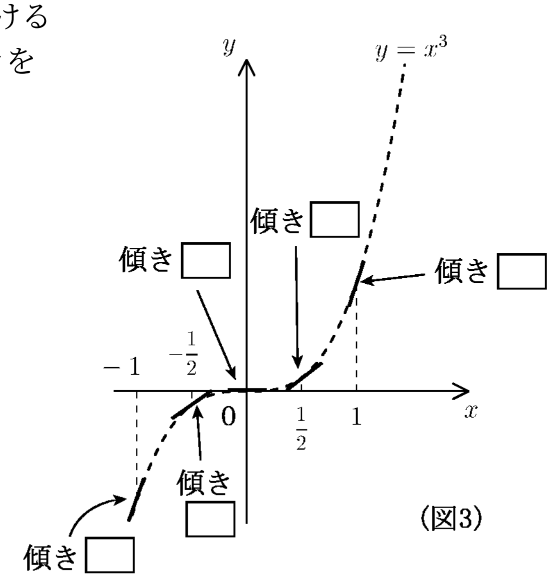


(図2)

問 2　3 次曲線 $y = x^3$ 上の任意の点 A(a, a^3) における 3 次曲線の傾きを求めたい。図 2 を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

接線の傾き $= \lim_{h \to 0} \dfrac{\qquad\qquad\qquad}{h}$

$=$



(図3)

問 3　問 2 の結果を用いて 3 次曲線 $y = x^3$ における以下の傾きを求め、図 3 の□内にその傾きを表す数を入れよ。

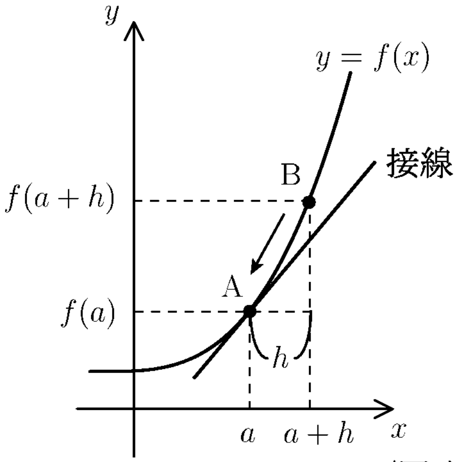
(1) $x = \dfrac{1}{2}$ のときの傾き $=$

(2) $x = 0$ のときの傾き $=$

(3) $x = -\dfrac{1}{2}$ のときの傾き $=$

(4) $x = -1$ のときの傾き $=$

＜微分係数１＞



(図1)

問１ 関数 $y=f(x)$ のグラフが図１のような曲線である場合に、点 $\mathrm{A}\big(a, f(a)\big)$ における曲線の傾きは点Aを接点とする接線の傾きである。この接線の傾きはこの曲線上に点Bをとり、BをAに近づけたときの直線ABの傾きの極限である。図１を参考にして接線の傾きを極限の式で表せ。

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad\qquad}{h}$$

一般の関数 $y=f(x)$ と任意の数 a に対して次の極限値

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい、記号 $f'(a)$ で表す。すなわち

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad \text{(微分係数)}$$

問２ 関数 $f(x)$ が問１のような場合、微分係数 $f'(a)$ は図１の何を意味するか答えよ。

例 (1) $f(x)=x^3$ のとき $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^3-a^3}{h}$

(2) $f(x)=5x^2$ のとき $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{5(a+h)^2-5a^2}{h}$

(3) $f(x)=x^2+3x$ のとき $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(a+h)^2+3(a+h)-a^2-3a}{h}$

問３ 関数 $f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を例のような極限の式で表せ。

(1) $f(x)=x^4$ のとき $f'(a)=$

(2) $f(x)=4x^3$ のとき $f'(a)=$

(3) $f(x)=x^2-4x$ のとき $f'(a)=$

(4) $f(x)=x^3+3x^2$ のとき $f'(a)=$

＜微分係数2＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

である。$f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ のときの傾きを意味する。このページでは $f'(a)$ の計算方法を示す。

例1 $f(x)=5x^2$ のとき

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(a+h)^2-5a^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{5(a^2+2ah+h^2)-5a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{10ah+5h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(10a+5h)=10a\end{aligned}$$

例2 $f(x)=x^2-2x$ のとき

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-2(a+h)-(a^2-2a)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(a^2+2ah+h^2)-2a-2h-a^2+2a}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2-2h}{h}=\lim_{h\to 0}(2a+h-2)=2a-2\end{aligned}$$

例3 $f(x)=x^3+x^2$ のとき

$$\begin{aligned}f'(a)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^3+(a+h)^2-(a^3+a^2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(a^3+3a^2h+3ah^2+h^3)+(a^2+2ah+h^2)-a^3-a^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3a^2h+3ah^2+h^3+2ah+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(3a^2+3ah+h^2+2a+h)=3a^2+2a\end{aligned}$$

問 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ を極限の計算によって求めよ。

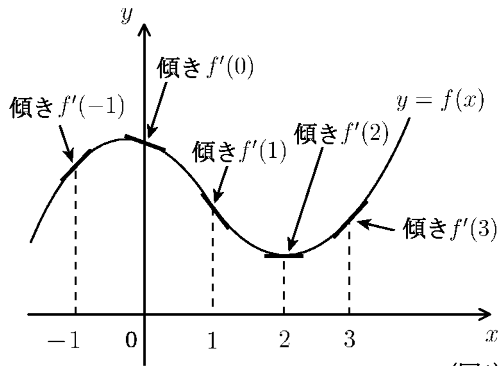
(1) $f(x)=3x^2$, $f'(a)=$

(2) $f(x)=x^2-4x$, $f'(a)=$

(3) $f(x)=x^3+3x^2$, $f'(a)=$

＜ 微分係数 3 ＞

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ のときの傾きを意味する。$f(x)$ が右図 (図 1) のようなときには $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ のときの傾きは $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ である。



(図1)

例　$y=x^2-2x$ のグラフは図 2 のようになる。
$f(x)=x^2-2x$ のとき前ページの例より

$$f'(a)=2a-2$$

であるから傾きは以下のように計算できる。

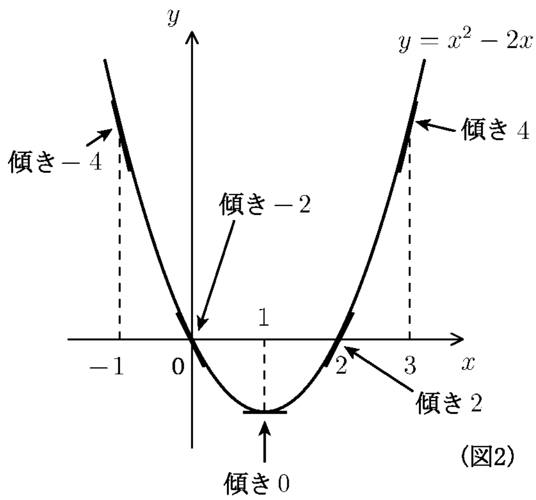
$f'(-1)=2\times(-1)-2=-4 \;\Rightarrow\; x=-1$ のときの傾き -4

$f'(0)=2\times 0-2=-2 \;\Rightarrow\; x=0$ のときの傾き -2

$f'(1)=2\times 1-2=0 \;\Rightarrow\; x=1$ のときの傾きは 0

$f'(2)=2\times 2-2=2 \;\Rightarrow\; x=2$ のときの傾きは 2

$f'(3)=2\times 3-2=4 \;\Rightarrow\; x=3$ のときの傾きは 4



(図2)

問 1　$f(x)=x^2-4x$ に対し以下の微分係数を求め、図 3 の□内に傾きを記入せよ。(前ページ問の結果を使ってよい)

$f'(a)=$

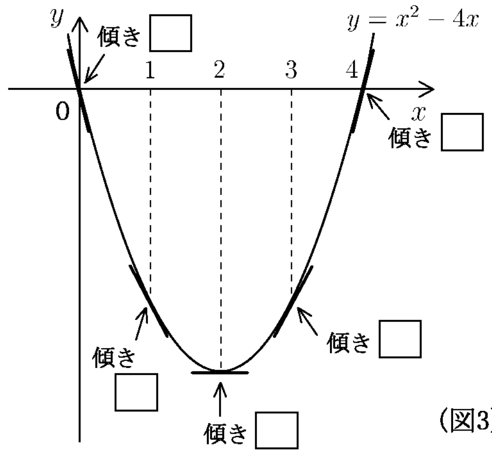
$f'(0)=$

$f'(1)=$

$f'(2)=$

$f'(3)=$

$f'(4)=$



(図3)

問 2　$f(x)=x^3+3x^2$ に対し以下の微分係数を求め、図 4 の□内に傾きを記入せよ。

$f'(a)=$

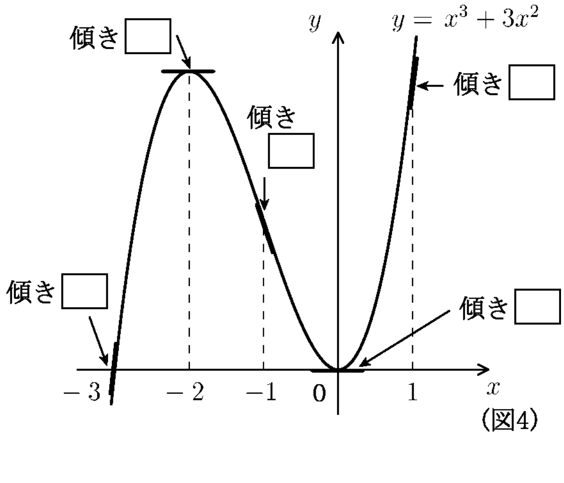
$f'(-3)=$

$f'(-2)=$

$f'(-1)=$

$f'(0)=$

$f'(1)=$



(図4)

< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}} \qquad \text{(微分係数)}$$

は a の値によって変る。$f'(a)$ を a の関数と考え、 a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} \qquad \text{(導関数)}$$

を元の関数 $f(x)$ の**導関数**という。

例 $f(x)=x^2-2x$ のとき前ページの例より微分係数は

$$f'(a)=2a-2 \qquad \text{(微分係数)}$$

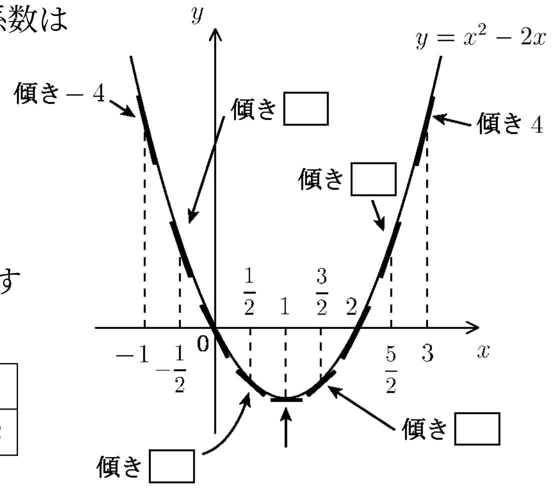
であったから、導関数は

$$f'(x)=2x-2 \qquad \text{(導関数)}$$

となる。

微分係数 $f'(a)$ はもとの関数 $f(x)$ の傾きを表すから導関数 $f'(x)$ も傾きを表す。

x	-1	0	1	2	3	a	x
傾き $f'(x)$	-4	-2	0	2	4	$2a-2$	$2x-2$



問 1 例の導関数 $f'(x)=2x-2$ に対し以下の値を求め、右図の□の中に傾きを記入せよ。

(1) $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=$ (2) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=$ (3) $f'\left(\frac{3}{2}\right)=$ (4) $f'\left(\frac{5}{2}\right)=$

問 2 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ と導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(16, 17, 19 ページの結果を使ってよい)

(1) $f(x)=x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(2) $f(x)=x^3$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(3) $f(x)=5x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(4) $f(x)=x^2-4x$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(5) $f(x)=x^3+x^2$

$f'(a)=$

$f'(x)=$

(6) $f(x)=x^3+3x^2$

$f'(a)=$

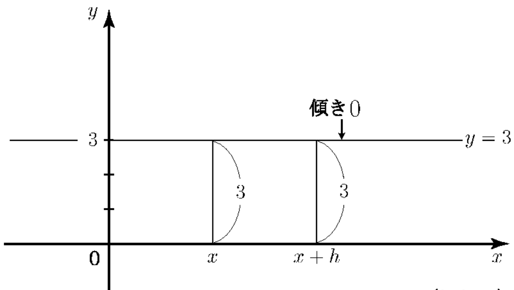
$f'(x)=$

＜導関数２＞

例１ $f(x)=3$ のとき $f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$

である。このように関数 $f(x)$ が x によらない数である場合を**定数関数**という。定数関数のグラフは図１のように傾きが 0 (ゼロ) の直線である。



（図１）

例２ $f(x)=2x-1$ のとき

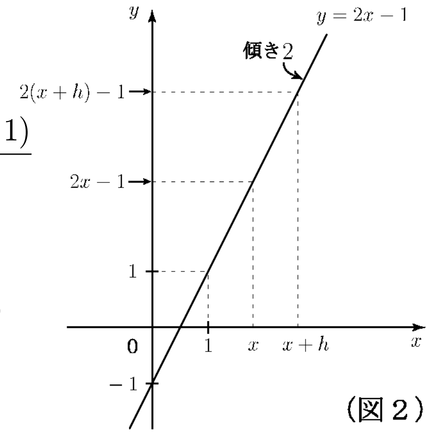
$$f(x+h)=2(x+h)-1$$

より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-1-(2x-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2x+2h-1-2x+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}=2$$

(注)　$f(x)$ が一次関数 (または定数関数) の場合 $y=f(x)$ のグラフは図１、図２のような直線である。このとき導関数 $f'(x)$ はその直線の傾きを表す。



（図２）

問１ $f(x)$ が以下の場合に導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=2$,　$f'(x)=$　　　　(2) $f(x)=5x-2$,　$f'(x)=$

例３ $f(x)=x^3$ のとき導関数は $f'(x)=3x^2$ である。このことを略して

$$\boxed{\left(x^3\right)'=3x^2}$$

と書く。同様にして

$f(x)=x^2$ のとき $f'(x)=2x$ のことを　$\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$

$f(x)=x$ のとき $f'(x)=1$ のことを　$\boxed{\left(x\right)'=1}$

$f(x)=1$ のとき $f'(x)=0$ のことを　$\boxed{\left(1\right)'=0}$

と略記する。

問２ 前ページおよびこのページの結果を利用して、次の導関数を求めよ。

(1) $\left(3\right)'=$　　(2) $\left(2\right)'=$　　(3) $\left(2x-1\right)'=$

(4) $\left(5x-2\right)'=$　　(5) $\left(5x^2\right)'=$　　(6) $\left(x^2-2x\right)'=$

(7) $\left(x^2-4x\right)'=$　　(8) $\left(x^3+x^2\right)'=$　　(9) $\left(x^3+3x^2\right)'=$

< 導関数 3 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y = f(x)$ を「**微分**する」という。

例 1 前ページの結果より

$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad , \qquad \left(5x^2\right)' = 10x = 5 \times 2x$$

であった。従って

$$\left(5x^2\right)' = 5 \times \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に定数 k と関数 $f(x)$ に対して

$$\boxed{\left(kf(x)\right)' = k \times \left(f(x)\right)'} \qquad \text{(定数倍の微分)}$$

が成り立つ。

例 2 前ページの結果より

$$\left(x^3\right)' = 3x^2 \quad , \qquad \left(x^2\right)' = 2x \quad , \qquad \left(x^3 + x^2\right)' = 3x^2 + 2x$$

である。従って

$$\left(x^3 + x^2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^2\right)'$$

が成り立つ。

一般に 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(f(x) + g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' + \left(g(x)\right)' \\ \left(f(x) - g(x)\right)' = \left(f(x)\right)' - \left(g(x)\right)' \end{array}} \qquad \begin{array}{l} \text{(和の微分)} \\ \text{(差の微分)} \end{array}$$

が成り立つ。

例 3 (1) $\left(5x^3 + 7x^2\right)' = \left(5x^3\right)' + \left(7x^2\right)' = 5 \times \left(x^3\right)' + 7 \times \left(x^2\right)'$

$$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$$

(2) $\left(x^2 - 4x + 3\right)' = (x^2)' - 4 \times \left(x\right)' + \left(3\right)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。
定数関数の傾きは 0(ゼロ) だからである。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x^3 + 2)'$　　(2) $(3x^2 - 2x^3)'$

(3) $(x^2 - 3x + 2)'$　　(4) $(3x^3 - x^2 + 5x - 1)'$

< パスカルの三角形 >

例 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$$= a(a^2+2ab+b^2) + b(a^2+2ab+b^2)$$
$$= a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$$
$$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

問 1 次の展開式を求めたい。$\square$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$= \square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4$$

(2) $(a\ +\ b)^5 = (a\ +\ b)\left(\square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4\right)$

$$= \square \times a^5 + \square \times a^4b + \square \times a^3b^2 + \square \times a^2b^3 + \square \times ab^4 + \square \times b^5$$

問 2 $(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$(a+b)^0 = 1$ ………………………… 1

$(a+b)^1 = 1\times a + 1\times b$ ………………………… 1　1

$(a+b)^2 = 1\times a^2 + 2\times ab + 1\times b^2$ ………………………… 1　2　1

$(a+b)^3 = 1\times a^3 + 3\times a^2b + 3\times ab^2 + 1\times b^3$ ………………………… 1　3　3　1

$(a+b)^4 = \square\times a^4 + \square\times a^3b + \square\times a^2b^2 + \square\times ab^3 + \square\times b^4$ ………… $\square\ \square\ \square\ \square\ \square$

$(a+b)^5 = \square\times a^5 + \square\times a^4b + \square\times a^3b^2 + \square\times a^2b^3 + \square\times ab^4 + \square\times b^5$ $\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し、$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$$(a+b)^6 = \square\times a^6 + \square\times a^5b + \square\times a^4b^2 + \square\times a^3b^3 + \square\times a^2b^4 + \square\times ab^5 + \square\times b^6$$

< 整関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、$f(x)$ を**整関数**という。
$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

であった。$f(x)$ が整関数の場合にこの極限値を調べる。

例 1 $f(x) = 1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

例 2 $f(x) = x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

例 3 $f(x) = x^2$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^2\right)' = f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x\end{aligned}$$

例 4 $f(x) = x^3$ のとき

$$\begin{aligned}\left(x^3\right)' = f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2\end{aligned}$$

問 $f(x) = x^4$ のとき $f(x)$ を極限の計算によって求めよ。（途中式も書くこと）

$$(x^4)' = f'(x) =$$

＜整関数の微分 2 ＞

問 1 24, 25 ページを参考にして、 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^5)' = f'(x) =$

問 2 $f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$(x^6)' = f'(x) =$

問 3 下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$ である。

元の関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問 4 n が一般の自然数のとき、 x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$(x^n)' =$

＜ 整関数の微分 3 ＞

導関数の定義から以下の性質がわかる。

関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$\big(kf(x)\big)' = k \times f'(x)$	(定数倍の微分)
$\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$	(和の微分)
$\big(f(x)-g(x)\big)' = f'(x)-g'(x)$	(差の微分)

が成り立つ。

例 (1) $(x^5+x^6)' = (x^5)' + (x^6)' = 5x^4 + 6x^5$

(2) $(7x^4)' = 7 \times (x^4)' = 7 \times 4x^3 = 28x^3$

(3) $(6x^5+5x^4)' = (6x^5)' + (5x^4)' = 30x^4 + 20x^3$

(4) $(x^7 - 4x^5 + 5x^2 - 8)' = (x^7)' - (4x^5)' + (5x^2)' - (8)'$
$= 7x^6 - 20x^4 + 10x$

(5) $\big((x^2+3)(x^2-4)\big)' = (x^4 - x^2 - 12)' = 4x^3 - 2x$

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x - x^3)'$

(2) $(7x^6)'$

(3) $(10x^4 + 8x^7)'$

(4) $(6x^5 - 2x^3 + 3)'$

(5) $(3x^5 - 6x^2 + 9)'$

(6) $(4x^7 - 4x^4 + 9x^2 - 5x)'$

(7) $\big((x-1)(x+4)\big)'$

(8) $\big((x^2-3)(x^2-2)\big)'$

＜関数の増減１＞

例 2 次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは図 1 のような放物線である。このグラフの頂点の座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y' = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6$$

を求める。次に $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

であるから $x = 3$ のとき傾き y' が 0（ゼロ）になるのでそこが頂点である。

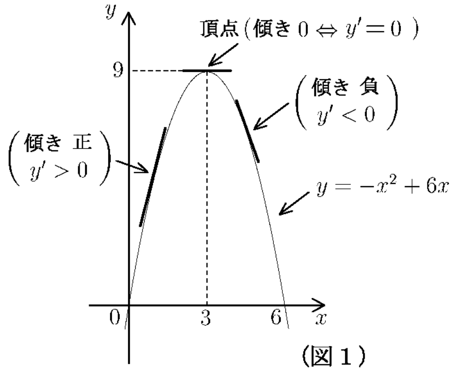
$x = 3$ のとき $y = -x^2+6x = -3^2+6\times3 = 9$

であるから頂点の座標は $(3, 9)$ である。
y' のグラフ（図２）より

$$x < 3 \text{ のとき } y' > 0$$
$$x = 3 \text{ のとき } y' = 0$$
$$x > 3 \text{ のとき } y' < 0$$

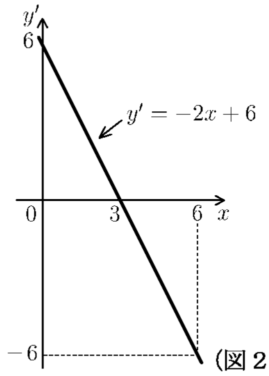
となる。$y' > 0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。$y' < 0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を**増減表**という。

＜元の関数 $y = -x^2 + 6x$ ＞



（図１）

＜導関数 $y' = -2x + 6$ ＞



（図２）

x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	+	0	−
y	↗	9	↘

（注） 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

(1) $y' = 0$ となる x（この場合は $x = 3$）を求める。

(2) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より小さい数 x（例えば $x = 0$）を代入してプラスであれば（$x < 3$ の列で）y' の欄に + と書き入れ、y の欄に ↗（右上がり）の記号を入れる。

(3) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より大きい数 x（例えば $x = 4$）を代入してマイナスであれば（$x > 3$ の列で）y' の欄に − と書き入れ、y の欄に ↘（右下がり）の記号を入れる。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$ 　　　　　　, 頂点 (　,　)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

< 関数の増減 2 >

例 3 次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。導関数のグラフ (図 2) より

$$\begin{array}{ccc} x < -1 & \text{のとき} & y' > 0 \\ x = -1 & \text{のとき} & y' = 0 \\ -1 < x < 1 & \text{のとき} & y' < 0 \\ x = 1 & \text{のとき} & y' = 0 \\ 1 < x & \text{のとき} & y' > 0 \end{array}$$

となる。$x = \pm 1$ のとき y の値は

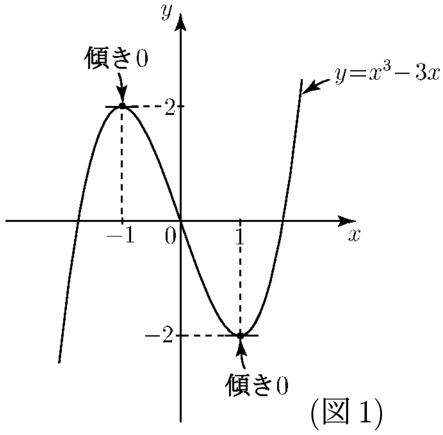
$x = -1$ のとき $y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$

$x = 1$ のとき $y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

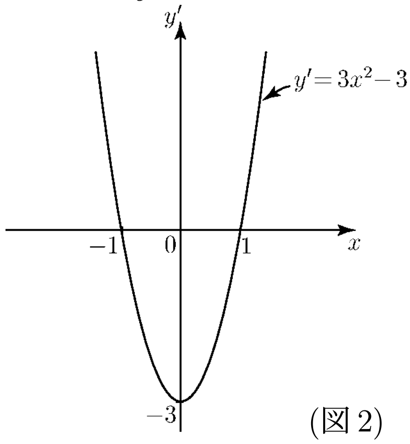
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

< 元の関数 $y = x^3 - 3x$ >



(図 1)

< 導関数 $y' = 3x^2 - 3$ >

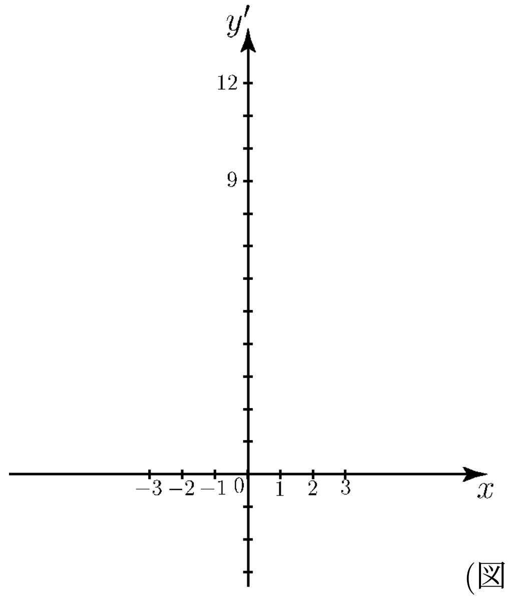


(図 2)

問 関数 $y = 12x - x^3$ を微分し、導関数 y' のグラフを図 3 に書き、増減表を作れ。

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					

$y' =$



(図 3)

< 関数の増減 3 >

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合、たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$x = -2$ のとき
$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 \ > 0$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に + 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し、$y' < 0$ となれば、y' の欄に − 記号を書き入れる。(表 2)

(表 1)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

$\Downarrow$

(表 2)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

$\Downarrow$

(表 3)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Downarrow$

(表 4)

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(6) y' が + であれば傾き正であるから y は右上がり $\nearrow$ となる。
y' が − であれば傾き負であるから y は右下がり $\searrow$ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

問 次の関数を微分し、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$ 　, $y' =$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 　, $y' =$

x					
y'					
y					

＜ 極大・極小 1 ＞

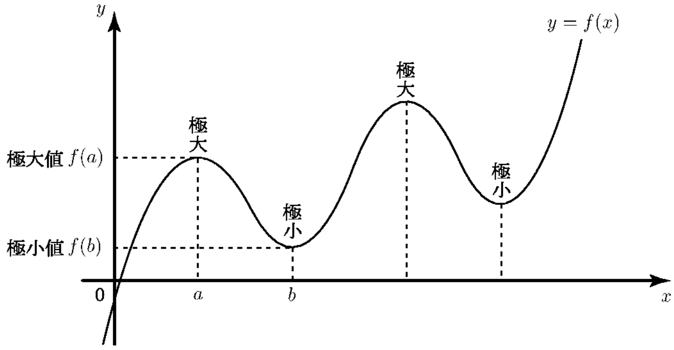
関数 $f(x)$ について、 a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で**極大**になるといい、 $f(a)$ を**極大値**という。

また、 b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



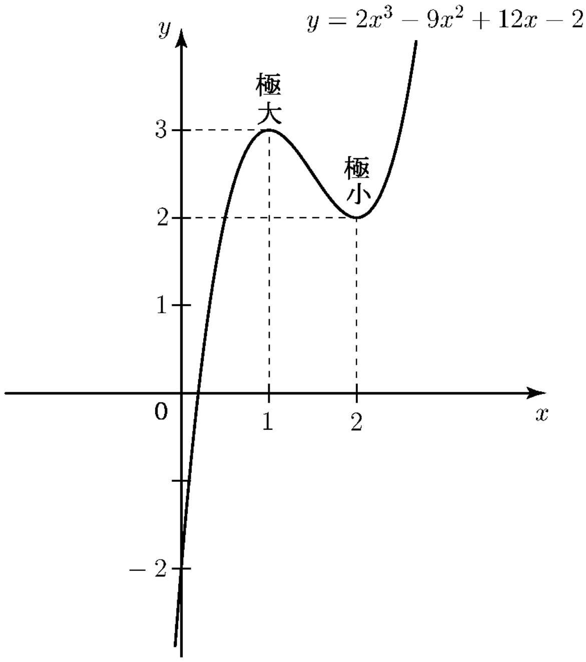
が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = b$ で**極小**になるといい、 $f(b)$ を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて**極値**という。

例 3 次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	2	↗
		極大		極小	



増減表より

$x = 1$ のとき 極大値 $y = 3$

$x = 2$ のとき 極小値 $y = 2$

であることがわかる。

(注) 上の増減表の x の欄の $\cdots$ は以下の意味である。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$

$\Longleftrightarrow$

x	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x$

今後はこのように x の範囲を省略してよい。

問 3 次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$x =$ 　　　 のとき極大値 $y =$

$x =$ 　　　 のとき極小値 $y =$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

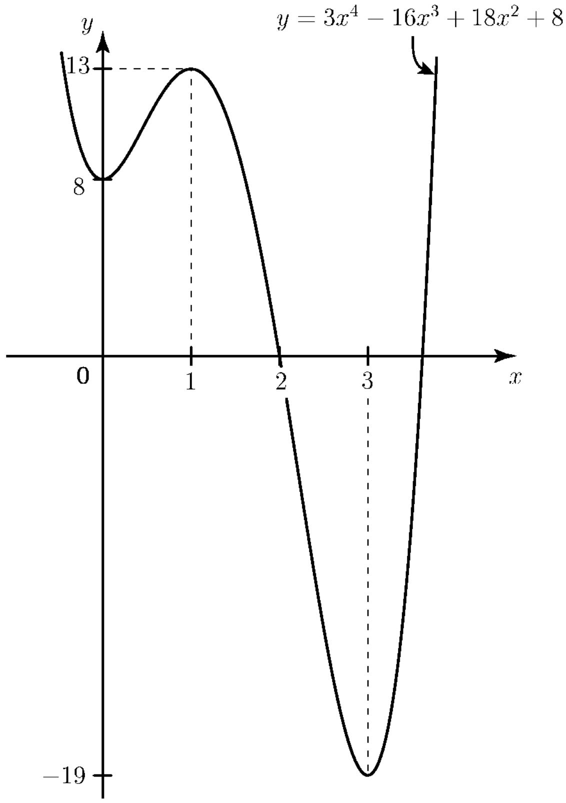
例 4次関数 $y=3x^4-16x^3+18x^2+8$ の極値を調べるには、3次関数と同様に増減表を作ればよい。
微分すると

$$
\begin{aligned}
y' &= 12x^3-48x^2+36x \\
&= 12x(x^2-4x+3) \\
&= 12x(x-1)(x-3)
\end{aligned}
$$

より、$x=0,\ x=1,\ x=3$ のとき $y'=0$ となる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	

増減表より
$x=1$ のとき極大値 $y=13$
$x=0$ のとき極小値 $y=8$
$x=3$ のとき極小値 $y=-19$
であることがわかる。



問 以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y=-x^4+2x^2+5$

x	
y'	
y	

(2) $y=3x^4-8x^3-18x^2$

x	
y'	
y	

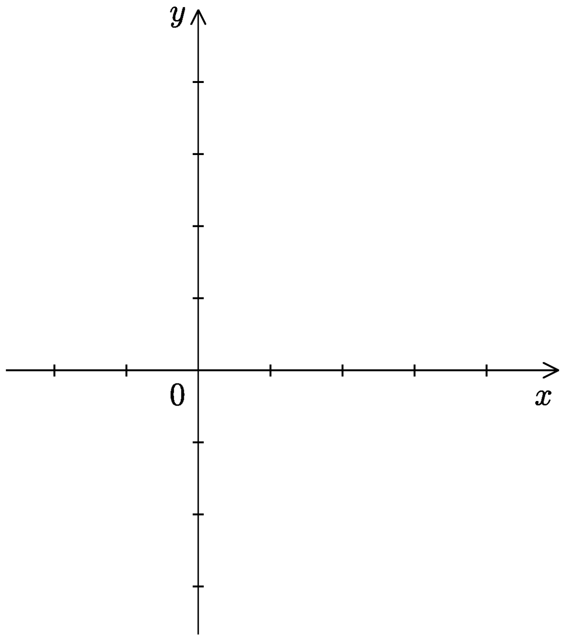
< 関数のグラフ >

問 次の関数を微分し、増減表を作り、極値を調べよ。また右図の上にその関数のグラフを書け。(グラフは極値の座標が分かるように目盛りを書く)

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$y' =$

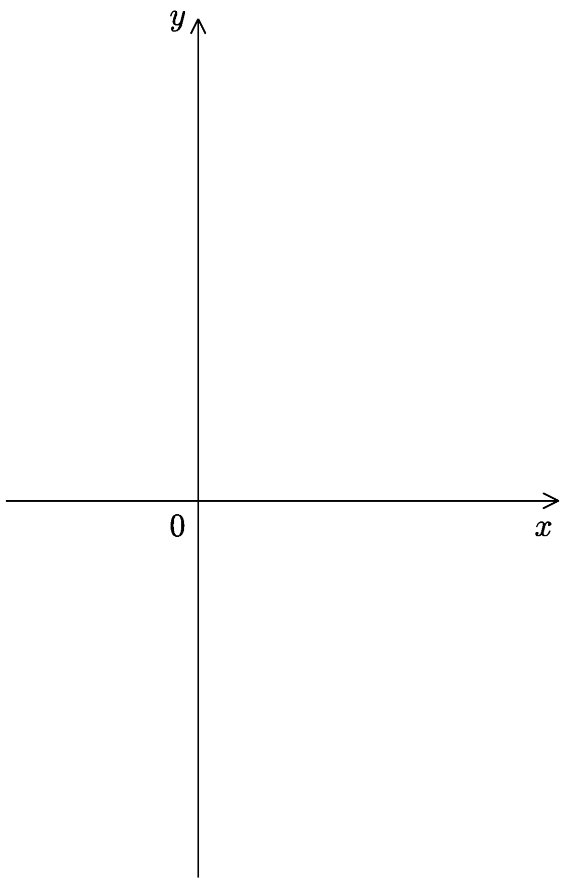
x	
y'	
y	



(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

$y' =$

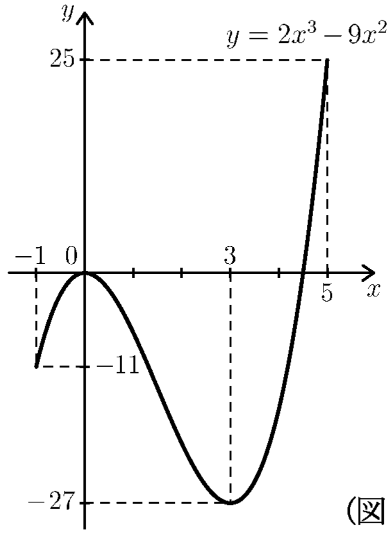
x	
y'	
y	



＜最大・最小１＞

例題 次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leqq x \leqq 5)$$



(図1)

(解) 導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

を求め、$y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leqq x \leqq 5$ の範囲で増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-11	↗	0	↘	-27	↗	25

この表よりグラフは図１のようになるから

(答) <u>$x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$</u> をとり、<u>$x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$</u> をとる。

(注) 最大や最小は定義域によって違ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域} -2 \leqq x \leqq 4)$$

のとき 増減表は右表のようになり、

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-52	↗	0	↘	-27	↗	-16

この場合の答えは <u>$x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$</u> , <u>$x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$</u> である。

問 次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \qquad (\text{定義域 } 0 \leqq x \leqq 4)$$

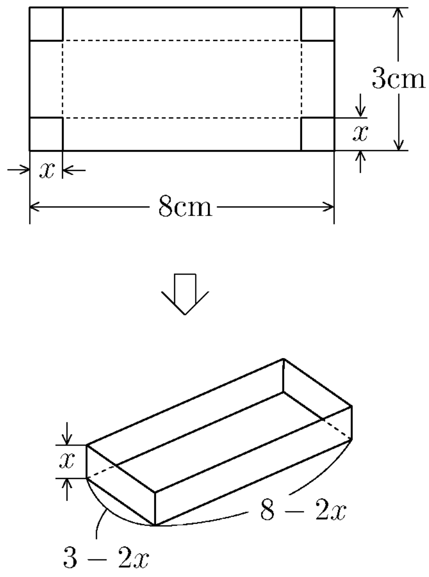
x	0		4
y'			
y			

(答) $x =$ 　　　　のとき最大値 $y =$

$x =$ 　　　　のとき最小値 $y =$

＜最大・最小2＞

例題 たて3cm , よこ8cmの長方形のブリキの板の4角から、一辺$x$cmの正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積$y$cm^{3}を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さxを何cmにすればよいか？



(解) 容器のたては$3-2x$(cm), よこは$8-2x$(cm), 高さはx(cm)だから、容積y(cm^3)は

$$y = (3-2x)(8-2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

である。題意より$x>0$でしかも$2x<3$であるから、xの範囲は$0<x<\dfrac{3}{2}$である。

この範囲内で増減表を作り、yの最大値を求める。yを微分すれば

$$y' = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x-2)(x-3)$$

でかつ、

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{27}$$

より、増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x = \dfrac{2}{3}$(cm)のとき、最大容積$y = \dfrac{200}{27}$(cm^3)をとる。

問 一辺4cmの正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積y(cm^3)を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さxを何cmにすればよいか？

xの範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、yの最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

< 時間の関数 >

時間 $(time)$ を表す文字として t がよく使われるので、時間の関数を表すのに t を変数として使う。例えば $f(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $v(t)$ などである。

例 1 球を静かに手離すとき、落ち始めてから t 秒間に落下した距離を $f(t)$ m とすると

$$f(t) = 4.9t^2$$

の関係がある。従って 3 秒後に落下した距離は

$$f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1 \quad (\mathrm{m})$$

である。

問 1 例 1 の $f(t)$ に対して次の値を求めよ。(単位不要)

(1) $f(2) =$ (2) $f(4) =$ (3) $f(3.5) =$

問 2 $x(t) = 19.6t, \quad y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ のとき次の値を求めよ。

$x(0) =$ $y(0) =$

$x(1) =$ $y(1) =$

$x(2) =$ $y(2) =$

例 2 x を変数とする関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (x についての導関数)

である。同様にして変数 t についての導関数 $f'(t)$ は

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} \quad (\text{変数 } t \text{ についての導関数})$$

で定義される。同様に t の関数 $y(t)$ の導関数は

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

で定められる。

問 3 変数 t の関数 $x(t)$, $v(t)$ の導関数の定義を例 2 のような極限の式で表せ。

$x'(t) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿ , $v'(t) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿

例 3 $f(t) = 4.9t^2$ のとき、$t = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次の極限式になる。

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9 \times (2+h)^2 - 4.9 \times 2^2}{h}$$

問 4 $f(t) = 4.9t^2$ に対し次の微分係数を例 3 の右辺のような極限の式で表せ。

(1) $f'(3) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿ (2) $f'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\qquad}{h}$

例 4 $f(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ の導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = (-4.9t^2 + 19.6t)' = -4.9 \times 2t + 19.6 \times 1 = -9.8t + 19.6$$

問 5 $x(t) = 29.4t,\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t,\ v(t) = 29.4$ の導関数を求めよ。

$x'(t) =$ $y'(t) =$ $v'(t) =$

< 速度１ >

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{平均速度 = \frac{距離}{時間}}$$

例１　車が 144 km を 2 時間で走ったときの平均速度は

$$平均速度 = \frac{144\ \mathrm{km}}{2\ \mathrm{h}} = 72\ (\mathrm{km/h}) \quad \Big(= 時速\ \ 72\ \mathrm{km}\Big)$$

問１　72 (km/h) を分速 (km/min) および秒速 (m/s) になおせ。

$$72\ (\mathrm{km/h}) = \frac{72\ \mathrm{km}}{60\ \mathrm{min}} = \boxed{}\ (\mathrm{km/min}) = \boxed{}\ (\mathrm{m/s})$$

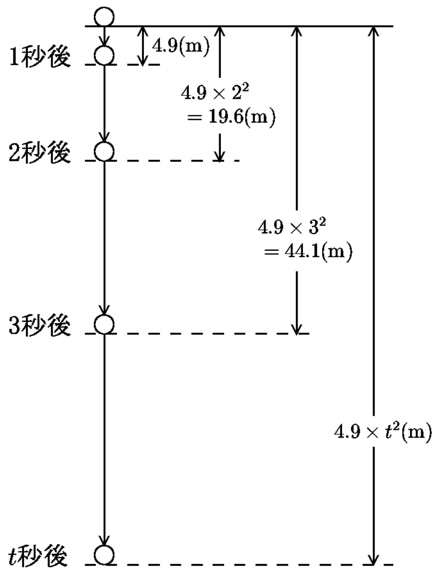
例２　(自由落下) 球を静かに手離すとき落ち始めてから t 秒間の落下距離は

$$t\,秒後の落下距離 = 4.9 \times t^2\ (\mathrm{m})$$

となる。2 秒後から 4 秒後の 2 秒間の平均速度は

$$2\,秒後から\,4\,秒後の平均速度 = \frac{落下距離}{時間}$$

$$= \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{4 - 2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4\ (\mathrm{m/s})$$



問２　例 2 の場合に以下の平均速度を求めよ。

(1)　1 秒後から 3 秒後までの平均速度

(2)　3 秒後から 4 秒後までの平均速度

(3)　3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度

(4)　3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度

< 速度2 >

車が 144 (km) を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 (km/h) であるが、常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし、72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると、スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。

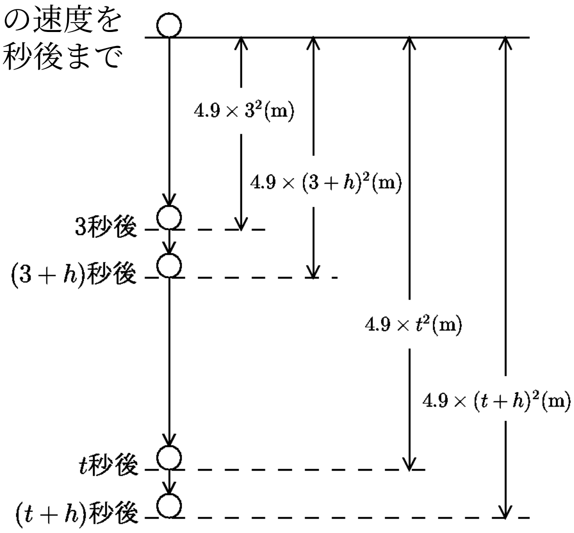
このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「**瞬間の速度**」といい、「平均速度」と区別する。

このページでは「瞬間の速度」を求めることを目標にする。

問1 前ページ例 2(自由落下) の場合に 3 秒後の瞬間の速度を求めたい。前ページ問 2(4) より 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は

$$\frac{4.9 \times 3.1^2 - 4.9 \times 3^2}{3.1 - 3} = \frac{2.989}{0.1} = 29.89 \ (\mathrm{m/s})$$

である。



(1) 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度を求めよ。

(2) 3 秒後から 3+h 秒後までの平均速度を求めよ。

(3) 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{h \to 0}\Big(3\text{ 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}\Big) =$$

(4) 以下の場合の極限値を求めよ。

$$\lim_{h \to 0}\Big(t\text{ 秒後から } (t+h) \text{ 秒後までの平均速度}\Big) =$$

問2 $f(t) = 4.9 \times t^2$ とおく。問 1 の (3) および (4) で計算した極限の式を f と (または t) と h を用いた極限の式にしたい。以下の (　) の中に適当な数、文字または式を入れよ。

$$\lim_{h \to 0}(3\text{ 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \to 0}\frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0}(t\text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \to 0}\frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

問3 問 1(3), (4) の結果から以下の瞬間の速度を求めよ。

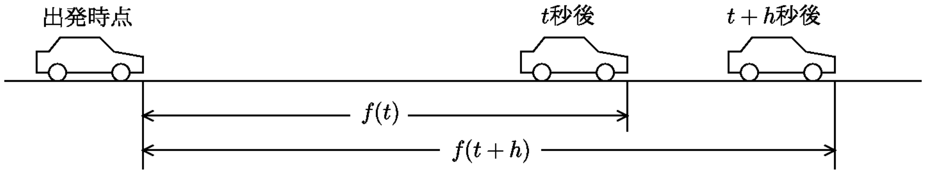
(1) 3 秒後の瞬間の速度 = 　　　　(m/s) , (2) t 秒後の瞬間の速度 = 　　　　(m/s)

問4 問 2 の結果から以下の瞬間の速度を関数 $f(t) = 4.9t^2$ の微分係数として $f'(\square)$ の形で表せ。

(1) 3 秒後の瞬間の速度 = 　　　　, (2) t 秒後の瞬間の速度 =

＜速度3＞

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。$t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ である。
「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから、時間間隔 h を 0(ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

$$\boxed{t\text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h\to 0}(t\text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)}$$

となる。この「瞬間の」というのを略して、単に「t 秒後の速度」という。

例1　前ページの問では $f(t)=4.9t^2$ だから

$$t\text{ 秒後の速度} = f'(t) = 4.9\times 2t = 9.8t \text{ (m/s)}$$

であり　$3\text{ 秒後の速度} = f'(3) = 9.8\times 3 = 29.4 \text{ (m/s)}$

となる。

問1　例 1 の場合に以下の速度を求めよ。

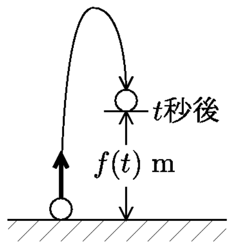
(1)　2 秒後の速度　　(2)　4 秒後の速度

例2　地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。
t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えないと)

$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad \text{(m)}$$

となる。t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad \text{(m/s)}$$



となる。ボールが最高点に達するとき速度は 0(ゼロ) になるから

$$v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 2$$

より 2 秒後に最高点に達する。このときの高さは $f(2) = -4.9\times 2^2 + 19.6\times 2 = 19.6$ (m) である。

問2　地上 39.2 (m) の高さから真上にボールを投げ上げたとき t 秒後の高さ $f(t)$ は

$$f(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 39.2 \text{ (m)}$$

となった。

(1)　t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2)　初速 ($t=0$ のときの速度) を求めよ。

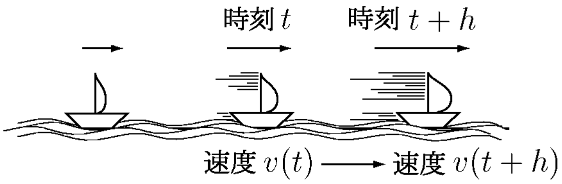
(3)　ボールが最高点に達するのは何秒後か。

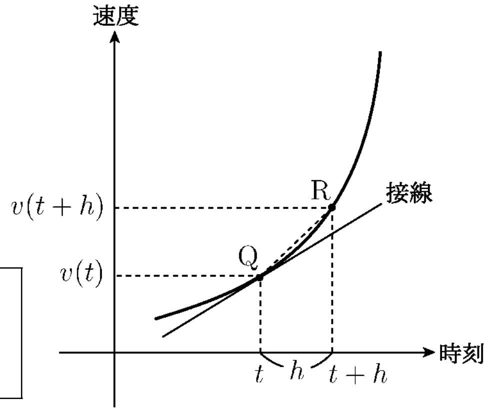
(4)　最高点の高さを求めよ。

< 加速度 >

速度の変化の割合 (= 変化率) を**加速度**という。

例 1 湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。





時刻 t における速度 $v(t)$ のグラフが右図の場合

平均の加速度 (t から $t+h$ までの速度の上昇率)	$= \dfrac{v(t+h)-v(t)}{h} =$ 線分 QR の傾き

瞬間の加速度 (時刻 t での速度の上昇率)	$= \ v'(t) \ =$ 点 Q における接線の傾き

一般に時刻 t での速度が $v(t)$ のとき、

$$\boxed{\text{時刻 } t \text{ での瞬間の加速度} = \lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)}$$

と定め、これを単に「**時刻 t での加速度**」と略す。

(注) 上の例 1 は速度が上昇していく場合であり、加速度はプラスになる。逆に速度が減少していく場合は加速度はマイナスになる。

例 2 前ページ例 2 の場合

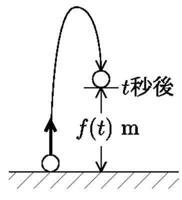
t 秒後の高さ $= f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad$ (m)

t 秒後の速度 $= v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad$ (m/s)

であった。t 秒後の加速度は

t 秒後の加速度 $= v'(t) = (-9.8t+19.6)' = -9.8 \quad (\mathrm{m/s^2})$

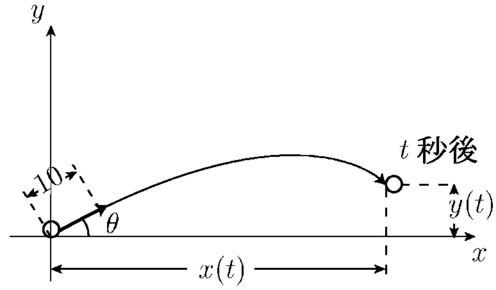
であり、下向きに $9.8(\mathrm{m/s^2})$ という**重力加速度**が作用していることがわかる。



問 水平から θ の角度で (初速 10m/s で) ボールを投げた。空気抵抗を考えなければ t 秒後の水平距離 $x(t)$ と高さ $y(t)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 10(\cos\theta)t & \text{(m)} \\ y(t) = -4.9t^2 + 10(\sin\theta)t & \text{(m)} \end{cases}$$

となる。



(1) 水平方向の速度 $v_x(t)$ と垂直方向の速度 $v_y(t)$ を求めよ。

(2) 水平方向の加速度 $v_x{}'(t)$ と垂直方向の加速度 $v_y{}'(t)$ を求めよ。