

2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	http://hdl.handle.net/10173/248

高知工科大学
基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series **A**

No. **3**

内容

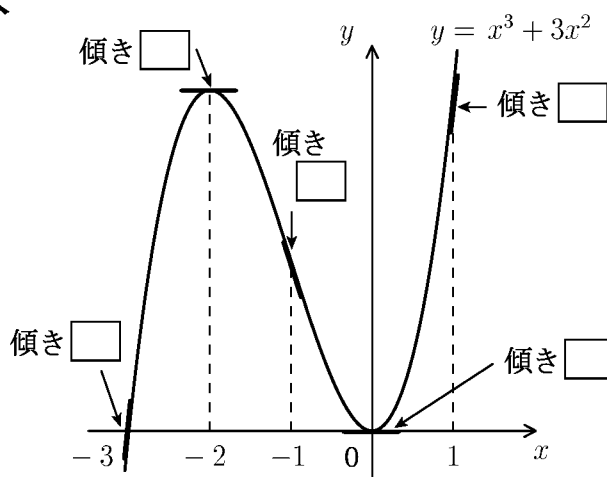
◎ 弧度法と三角関数

◎ 接線と微分係数

◎ 整関数の微分

◎ 関数の増減

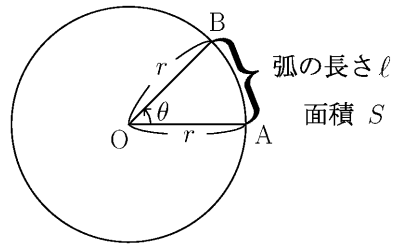
◎ 速度・加速度



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

< 弧度法 3 >

中心角 θ 、半径 r の扇形 OAB
の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の
面積 S を求めたい。



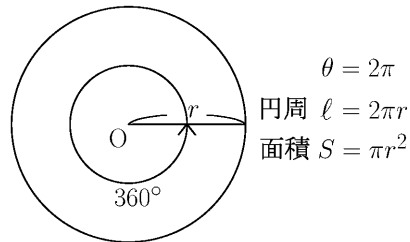
(1) $\theta = 2\pi$ (ラジアン) = 360° のときは

ℓ は円周の長さだから

$$\ell = 2\pi r$$

であり S は円の面積だから

$$S = \pi r^2$$

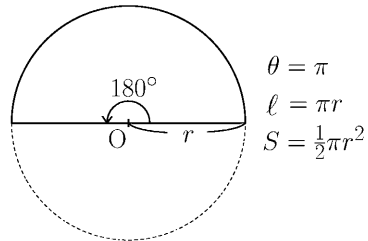


(2) $\theta = \pi$ (ラジアン) = 180° のときは

(1) の半分であるから

$$\ell = \pi r$$

$$S = \frac{1}{2}\pi r^2$$

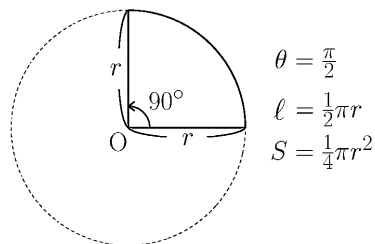


(3) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ラジアン) = 90° のときは

(1) の $\frac{1}{4}$ であるから

$$\ell = \frac{1}{2}\pi r$$

$$S = \frac{1}{4}\pi r^2$$



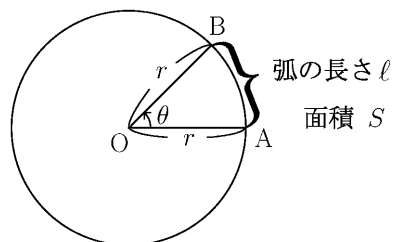
問 1 次の表を完成させよ。

度数法		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

問 2 上の表を参考にして、一般に角度が θ (ラジアン) であるとき
弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$$\ell =$$

$$S =$$

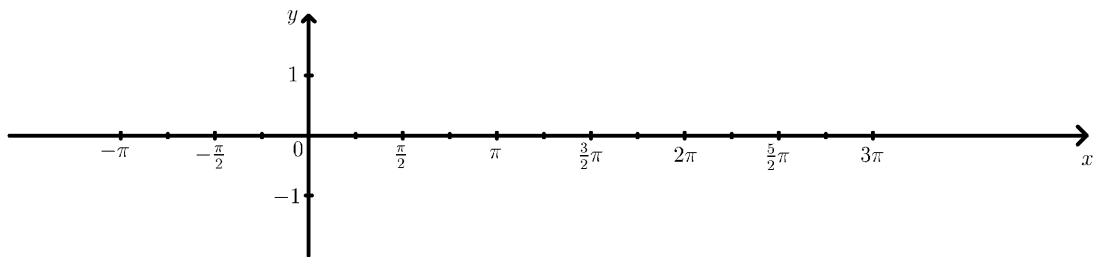


＜ 三角関数のグラフ ＞

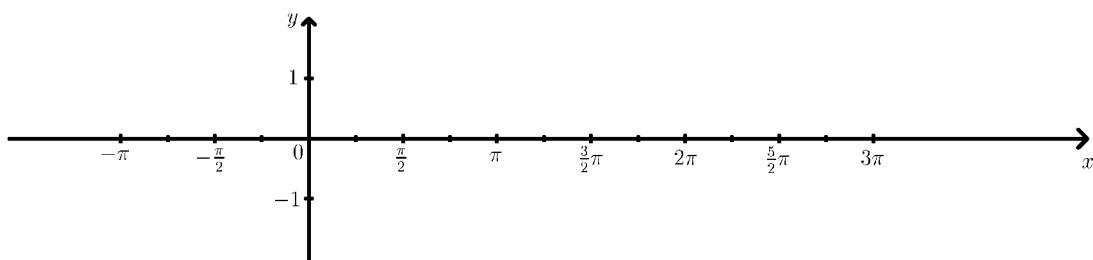
問 表を完成し、 $y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを書け。

x	度数法	-180°			-45°	0°		90°				270°	315°		405°		495°	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
	$\sin x$																	
	$\cos x$																	

(1) $y = \sin x$

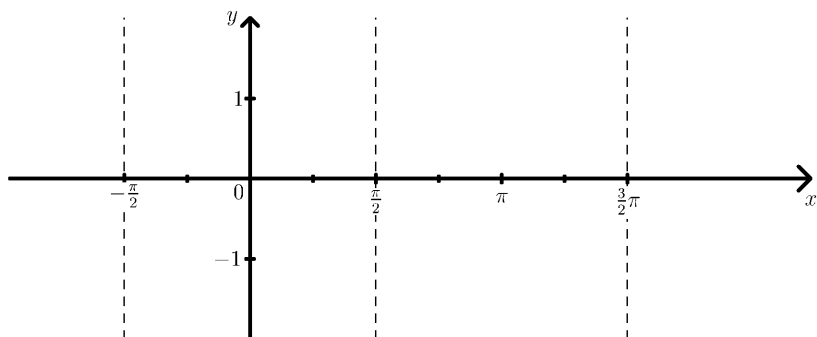


(2) $y = \cos x$



x	度数法	-90°		-30°	0°	30°		60°		120°		180°	225°	240°		
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{3}{2}\pi$
	$\tan x$	X							X							X

(3) $y = \tan x$



< 正弦波 1 >

定数 A , B , C に対し、正弦関数 $y = A \sin(Bx + C)$ のグラフを正弦波という。

例 加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2}$$

であるが $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

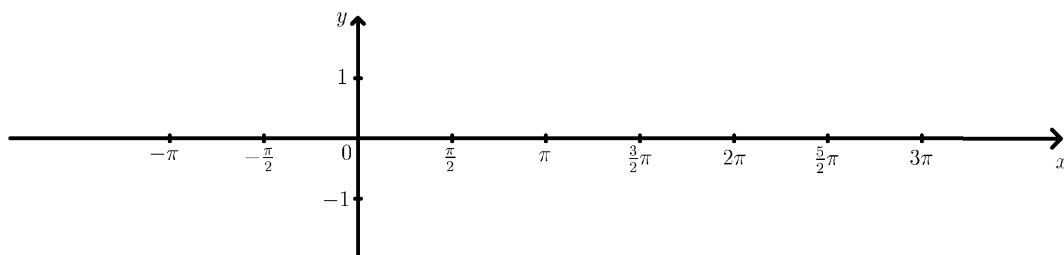
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。 $y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。このようなとき「 $\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている」という。あるいは「 $\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる」という。

一般の正弦波関数 $y = A \sin(Bx + C)$ において、() の中の部分 (この場合は $Bx + C$) を位相という。

問 次の表を完成し、 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

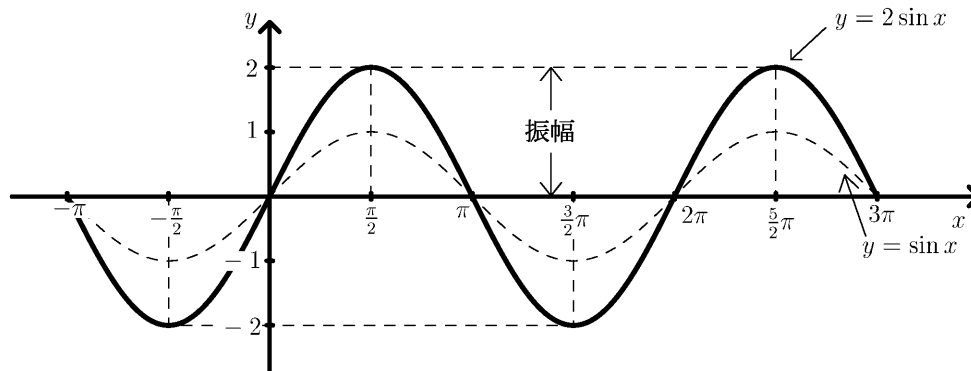
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$									



< 正弦波 2 >

例 $y = 2 \sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り、それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2 \sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0

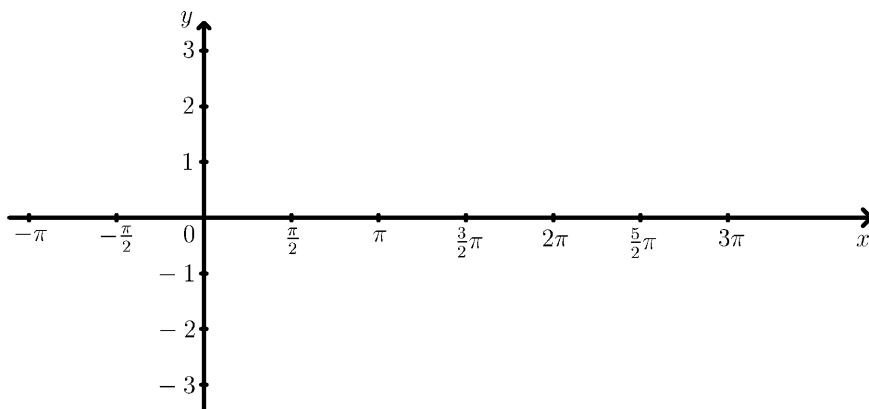


このグラフでは実線が $y = 2 \sin x$ のグラフであり、点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが、 $y = 2 \sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり、最小値は -2 である。

このような場合に「この正弦波の振幅は 2」という。

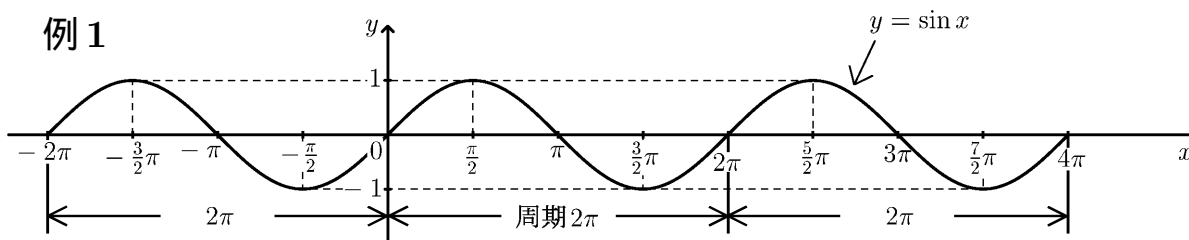
一般の正弦波の場合に、 x 軸からの距離の最大値を振幅という。

問 $y = -3 \sin x$ のグラフを描き、その振幅を求めよ。



< 正弦波 3 >

例 1

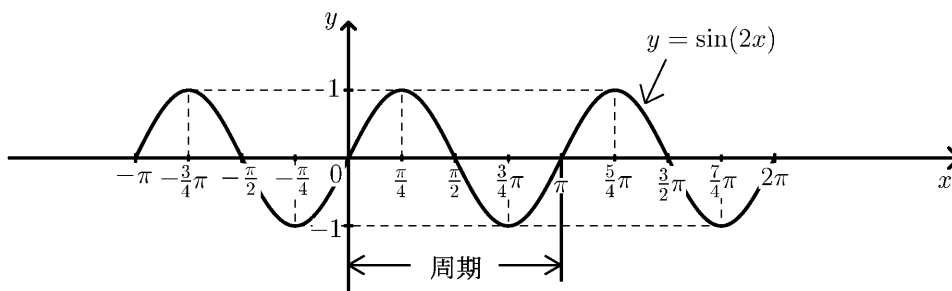


このグラフは $y = \sin x$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を周期関数といい、一つの波形の (x 軸方向の) 長さを周期という。

$y = \sin x$ の周期は 2π である。

例 2 $y = \sin(2x)$ のグラフを、次の表を元にして描く。

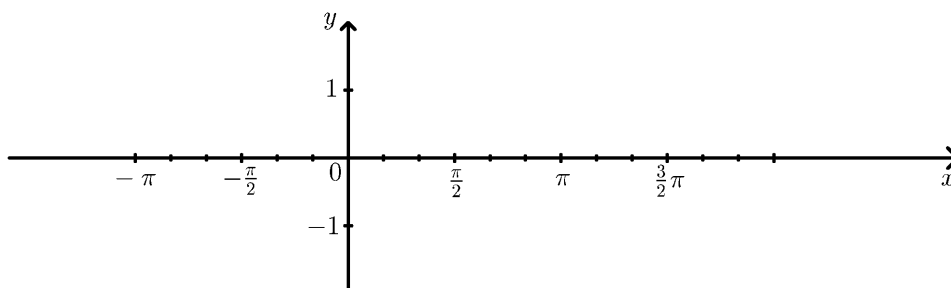
x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので、
 $y = \sin(2x)$ の周期は π である。

問 次の表を完成し、 $y = \sin(3x)$ のグラフを描き、その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													



< 1 次関数のグラフ >

y が x の 1 次式で表される関数を 1 次関数という。

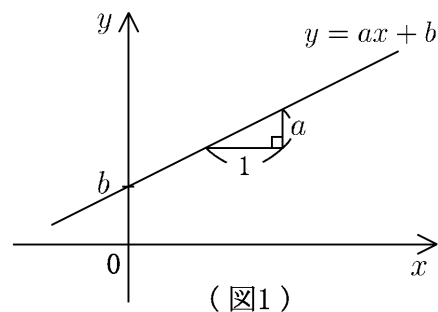
a, b を定数とする 1 次関数

$$y = ax + b \quad \dots\dots (*)$$

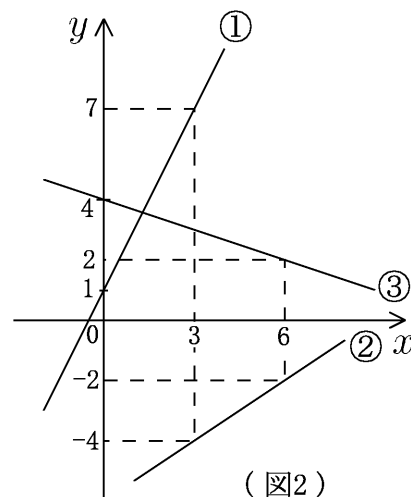
のグラフは座標平面上の直線になる。(図 1)

このとき a は傾き, b は y 切片を表す。

(*) 式を「傾き a , y 切片 b の直線の方程式」という。



問 1 図 2 の直線 ①, ②, ③ の方程式を求めよ。



例 点 (4, 3) を通り傾き a の直線の方程式は

$$y = a(x - 4) + 3 \quad \dots (**)$$

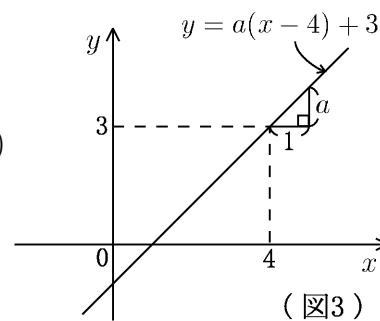
となる(図 3)。なぜならば

$$y = ax + 3 - 4a \quad \dots (\text{傾き } a, y \text{ 切片 } 3 - 4a \text{ の直線})$$

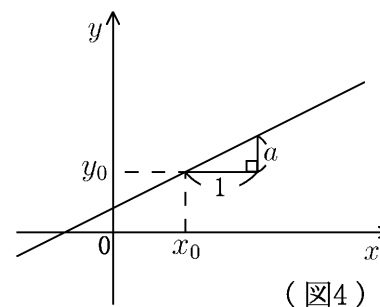
となり傾きが a であることがわかり、さらに

$$x = 4 \text{ のとき } y = 3$$

であるから点 (4, 3) を通ることがわかる。



問 2 点 (x_0, y_0) を通り傾き a の直線(図 4)の方程式を (***) 式の形で表せ。

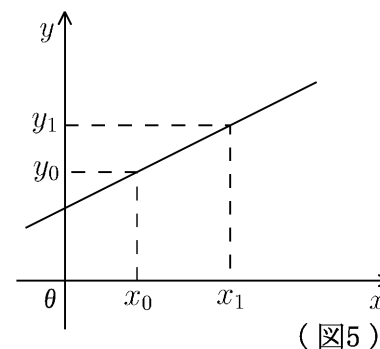


問 3 2 点 $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ を通る直線(図 5)を考える。

(1) この直線の傾きを x_0, x_1, y_0, y_1 の式で表せ。

傾き =

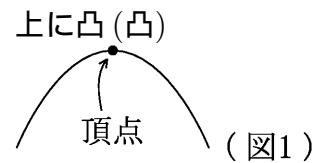
(2) 問 2 の結果を用いてこの直線の方程式を表せ。



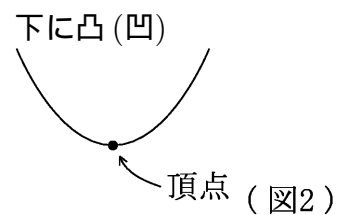
< 2 次関数のグラフ 1 >

y が x の 2 次式で表される関数を 2 次関数という。物を投げたときの軌道が 2 次関数のグラフとして表されるので、2 次関数のグラフを放物線という。

$y = x^2, y = -4x^2, y = -\frac{1}{4}x^2$ などのグラフを上にも凸または単に凸という (図 1)。このようなグラフで y 座標が最大になる点を、この放物線の頂点という。



$y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2$ などのグラフを下にも凸または単に凹という (図 2)。このグラフで y 座標が最小になる点を (同様に) 頂点という。



a, x_0, y_0 を定数とする 2 次関数

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

のグラフは $y = ax^2$ のグラフを

$$\begin{cases} x \text{ 軸方向に } x_0 \\ y \text{ 軸方向に } y_0 \end{cases}$$

だけ平行移動したものである。その頂点は (x_0, y_0) である。 $a > 0$ のときは図 3 のようなグラフになる。

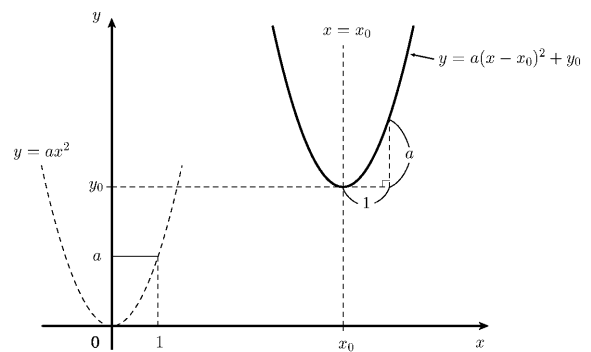


図 3 の放物線は直線 $x = x_0$ を対称軸として左右対称になっている。このようなとき直線 $x = x_0$ を軸または対称軸という。

問 次の 2 次関数の対応表とグラフを書き、頂点と軸を求めよ。

(1) $y = -(x - 3)^2 + 2$

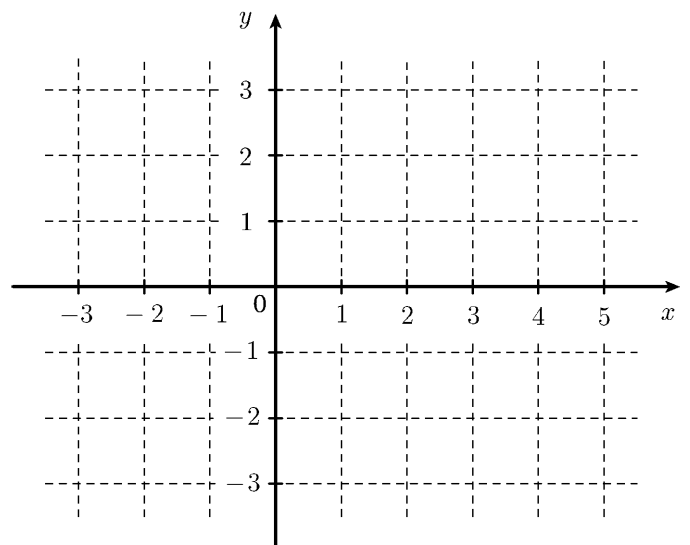
頂点 (,), 軸 $x =$

x	1	2	3	4	5
y					

(2) $y = (x + 1)^2 - 2$

頂点 (,), 軸 $x =$

x	-3	-2	-1	0	1
y					



< 2 次関数のグラフ 2 >

例 1 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフを書きたい。

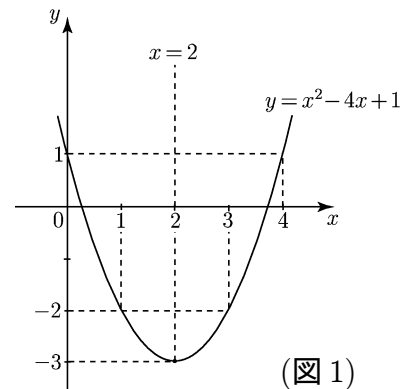
$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$$

より

$$y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$$

であるから頂点 $(2, -3)$ 、軸 $x = 2$ の放物線である。(図 1)

$x = 0$ のとき $y = 1$ より y 切片は 1 である。



例 2 $y = x^2 + 6x + 5$

$$= (x + 3)^2 - 4$$

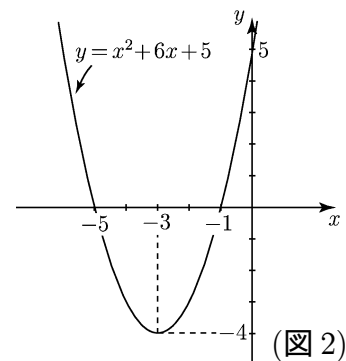
より、頂点 $(-3, -4)$ の放物線である。(図 2)

$x = 0$ のとき $y = 5$ より y 切片は 5。

一般に

$$(*) \quad \boxed{ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$$

となる。



問 1 $(*)$ 式の右辺を展開して整理し、左辺と等しくなることを示せ。

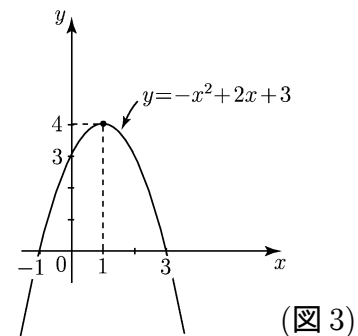
例 3 $y = -x^2 + 2x + 3$

$$= -(x - 1)^2 + 4$$

より、頂点 $(1, 4)$ の放物線である。(図 3)

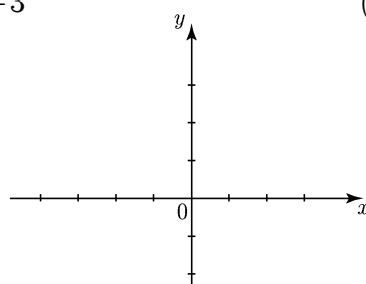
$x = 0$ のとき $y = 3$ より y 切片は 3。

(注) 放物線のグラフを書くときは、まず頂点の位置をはっきりわかるように書くこと。その次に頂点以外に通る点を少なくとも 1 点は書いておくこと。普通は y 切片 (y 軸との交点) を書く。

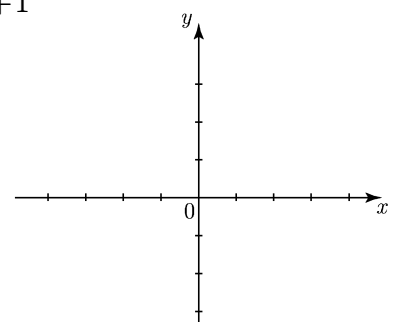


問 2 次の放物線の頂点を求め、グラフを書け。

(1) $y = x^2 - 4x + 3$



(2) $y = -x^2 + 2x + 1$



< 2 次関数のグラフ 3 >

例 2 次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは前ページ例 1 より頂点 $(2, -3)$ 、軸 $x = 2$ の放物線である。このグラフの x 切片 (x 軸との交点) を求めたい。

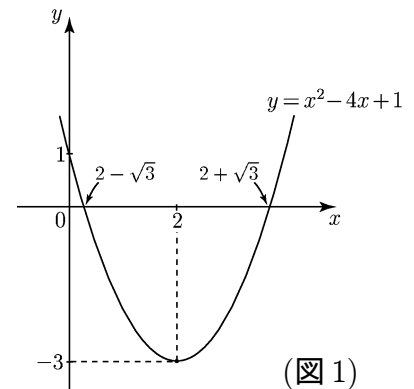
x 軸は直線 $y = 0$ であるから

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

とおくと解の公式より

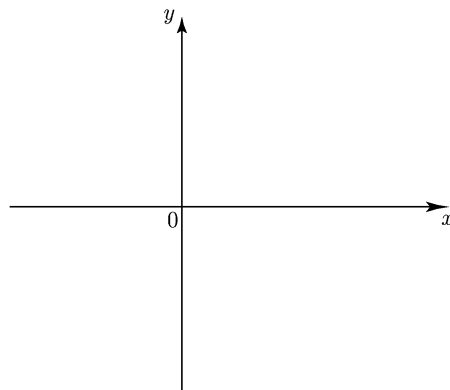
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

であるから x 切片は $2 - \sqrt{3}$ と $2 + \sqrt{3}$ である。

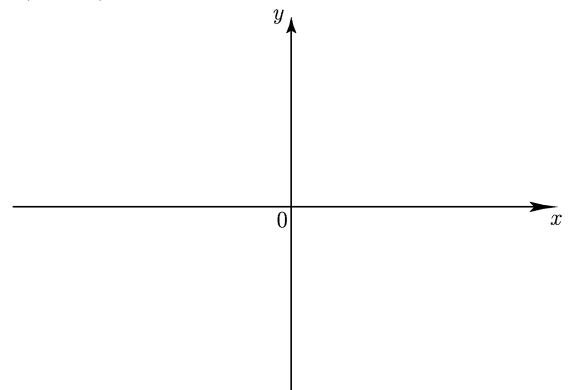


問 1 次の放物線の頂点と x 切片を求め、グラフを書け。

(1) $x^2 - 2x - 3$



(2) $x^2 + 4x + 2$



例題 不等式 $x^2 - 4x + 1 \geq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。

(解) $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフは上の図 1 の放物線である。このグラフから

(1) $x < 2 - \sqrt{3}$ のとき $y > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 > 0$

(2) $x = 2 - \sqrt{3}$ のとき $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

(3) $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ のとき $y < 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$

(4) $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

(5) $x > 2 + \sqrt{3}$ のとき $y > 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 > 0$

となることがわかる。よって求める範囲は (3) 以外である。

(答) $x \leq 2 - \sqrt{3}$ か又は $2 + \sqrt{3} \leq x$

(注) (解) で y の正 ($y > 0$)、負 ($y < 0$) は放物線が x 軸 ($y = 0$) より上 ($y > 0$) にあるか、 x 軸より下 ($y < 0$) にあるかによって決まる。

問 2 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

(1) $x^2 - 2x - 3 > 0$

(2) $x^2 + 4x + 2 \leq 0$

< 関数の値 >

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例 1 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \quad (f() = \quad^2 + 5 \times \quad - 4)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 3^2 + 5 \times 3 - 4 = 9 + 15 - 4 = 20$$

問 1 $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

$$(1) f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(2) =$$

$$(2) f(x) = x^3 - 2x \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(2) = \quad , \quad f(3) =$$

$$(3) f(x) = x^4 - x^3 \quad , \quad f(-3) = \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(3) =$$

$$(4) f(x) = (x^2 - 1)(x + 1) \quad , \quad f(0) = \quad , \quad f(1) = \quad , \quad f(5) =$$

例 2 $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 + 3(1 + h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h)$$

問 2 $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a + h)$ を求めよ。

$$(1) f(x) = x^3 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(2) f(x) = x + 1 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(3) f(x) = 2x^2 - 5 \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

$$(4) f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad f(a) = \quad , \quad f(a + h) =$$

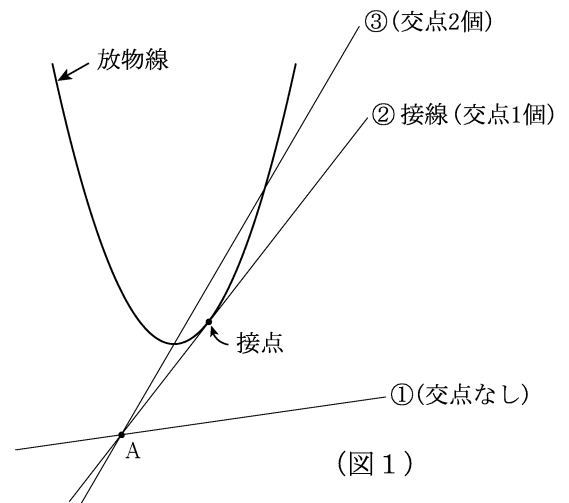
< 接線 >

放物線の外側にある点 A を通る直線は図 1 のように 3 通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると、

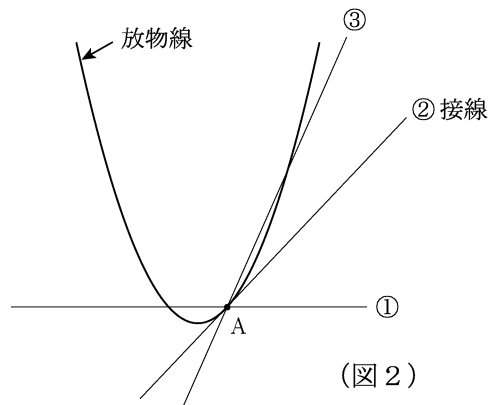
- : 交点なし
- : 交点は 1 個
- : 交点は 2 個

となる。直線を接線といい、そのときの交点を接点という。

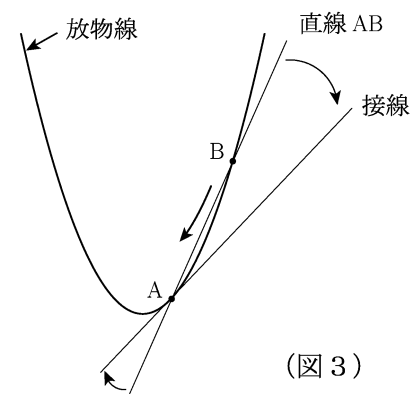
図 2 のように点 A が放物線上にあるときは、直線が接線であり、点 A が接点である。



(図 1)



(図 2)

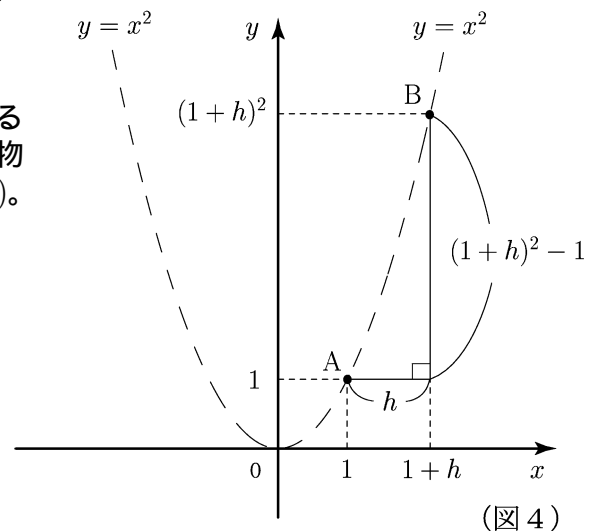


(図 3)

図 2 の接線を求めるためには、図 3 のように放物線上に A 以外の点 B をとり、直線 AB を引く。点 B を点 A に近づけると直線 AB は接線に近づく。

問 放物線 $y = x^2$ 上の点 A (1, 1) を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し、放物線上の点を B $(1+h, (1+h)^2)$ とする (図 4)。

- (1) 直線 AB の傾きを h で表せ。
- (2) $h = 0.1$ のときの AB の傾きを求めよ。



(図 4)

- (3) $h = 0.01$ のときの AB の傾きを求めよ。

< 極限 1 >

前ページの問の結果より、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(1, 1)$ と $B(1+h, (1+h)^2)$ に対し、直線 AB の傾きは

$$\text{直線 } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

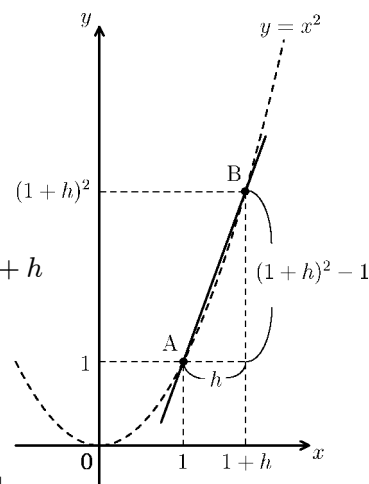
となる。ここで

$$h = 0.1 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.1$$

$$h = 0.01 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.01$$

$$h = 0.001 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.001$$

$$h = 0.0001 \text{ のとき } AB \text{ の傾き} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2.0001$$



となり h が 0 に限りなく近づけば直線 AB の傾きは 2 に限りなく近づく。このことを記号 \lim を使って

$$(1) \quad h \rightarrow 0 \text{ のとき } \text{直線 } AB \text{ の傾き} = 2$$

とか

$$(2) \quad h \rightarrow 0 \text{ のとき } \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2+h = 2$$

などと書く。この値 2 を h が 0 に近づくときの $\frac{(1+h)^2 - 1}{h}$ の極限值

または単に極限 (limit) という。(2) を記号 \lim を使って次のように書く。

$$(3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

問 1 $h \rightarrow 0$ のとき直線 AB は放物線上の点 $A(1, 1)$ を接点とする接線に近づく。

(3) 式の極限值 2 は接線の何を意味するか？

例 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4+h) = 4$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$

問 2 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}+h)^2 - \frac{1}{4}}{h}$

< 極限 2 >

例 1 (1) $h \rightarrow 0$ のとき $3h \rightarrow 0$ である。つまり $\lim_{h \rightarrow 0} 3h = 0$

(2) $h \rightarrow 0$ のとき $(2+h)(3+h) \rightarrow 6$ つまり $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)(3+h) = 6$

(注) (1) は $\lim_{h \rightarrow 0} 3h = 3 \times 0 = 0$, (2) は $\lim_{h \rightarrow 0} (2+h)(3+h) = (2+0) \times (3+0) = 6$

と考える。このように $h \rightarrow 0$ の極限值は $h = 0$ を代入すると答がわかる。

ただし前ページのような場合、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$ の式で $h = 0$ を代入

すると $\frac{0}{0}$ の形で答がわからないので、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h)$

の形になおしてから $h = 0$ を代入する。

例 2 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) = 6$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+6h+h^2) = 12$

(注) ここで 3 乗の展開公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ を用いた。

問 1 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h)^2 - 12}{h}$

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h}$

(4) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^3 - 27}{h}$

例 3 (1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h) - 5a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2+2ah+h^2) - 3a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6a+3h) = 6a$

問 2 次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h) - 3a}{h}$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$

(3) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

< 接線の傾き 1 >

直線の傾きは常に一定だが、曲線の傾きは場所によって変る。

曲線の傾き = 接線の傾き

と考える。接線の傾きを求めることによって曲線の傾きを調べよう。

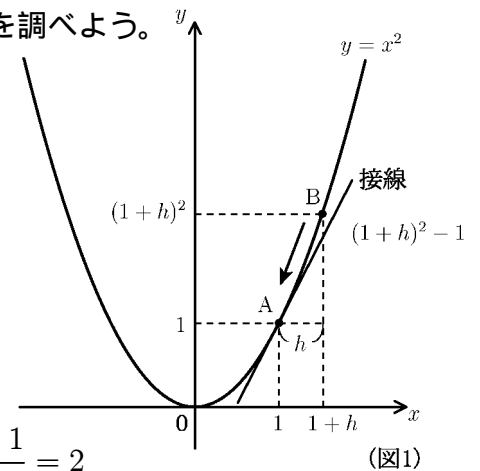
例 放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(1, 1)$ における放物線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。

この接線の傾きは放物線上に点 B をとり、 B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。

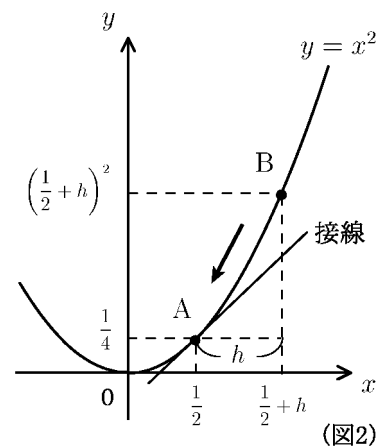
15 ページより

$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{直線 } AB \text{ の傾き}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = 2$$

である。つまり点 $A(1, 1)$ における放物線の傾きは 2 である。



問 1 図 2 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

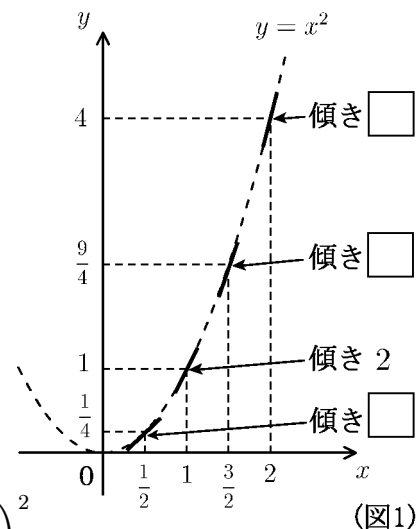


問 2 上の例を問 1 を参考にして、放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(2, 4)$ における傾きを求めよ。

問 3 上の例と問 1、問 2 を参考にして放物線 $y = x^2$ 上の点 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ における傾きを求めよ。

< 接線の傾き 2 >

- 問1 (1) 前ページの例と問の結果をグラフで表すと図1のようになる。図1の の中に傾きを表す数を入れよ。
- (2) 前ページの例と問の計算をまとめると以下のようになる。 の中に適当な数を入れよ。



$$x = 2 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \square$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

$$x = 1 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = 2$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

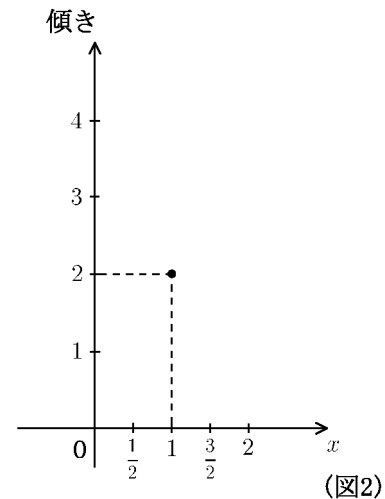
$$x = 0 \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\square + h)^2 - (\square)^2}{h} = \square$$

- (3) 上の結果を表にまとめたい。下の表の空欄に適当な数を入れよ。

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
傾き			2		

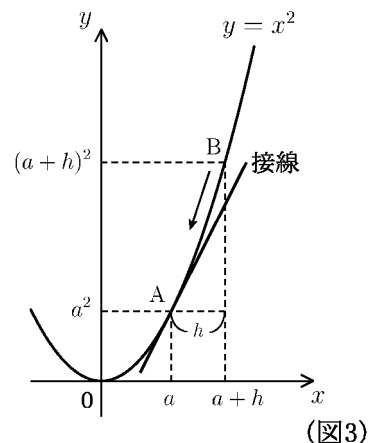
またこの表の結果を図2上に黒丸で作図せよ。さらにこの表および図2において、 x と傾きの関係を式で表せ。(傾きを x の式で表す)

傾き =



- 問2 放物線 $y = x^2$ 上の任意の点 $A(a, a^2)$ における傾きを求めたい。図3を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

$$x = a \text{ のときの傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{---}}{h} = \text{---}$$



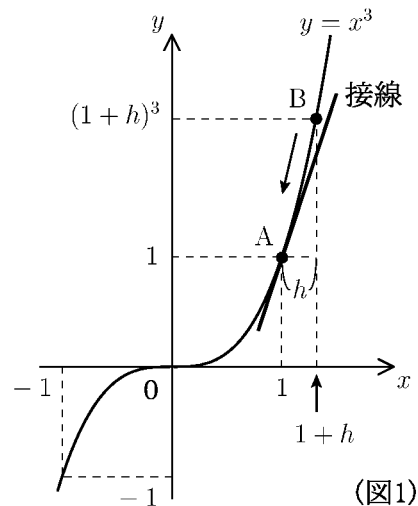
- 問3 問2の結果を用いて放物線 $y = x^2$ における以下の傾きを求めよ。

(1) $x = -1$ のときの傾き =

(2) $x = -2$ のときの傾き =

< 接線の傾き 3 >

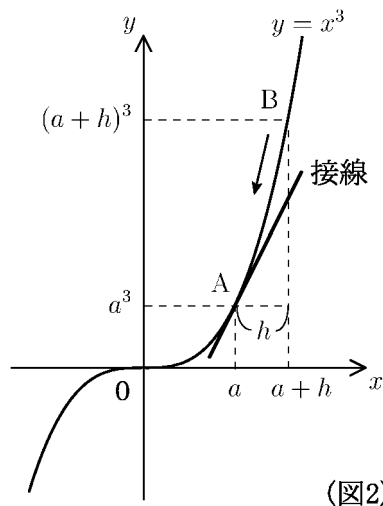
問 1 3次曲線 $y = x^3$ 上の点 $A(1, 1)$ における3次曲線の傾きは、点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きは3次曲線上に点 B をとり、 B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。15 ページの例と右図を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を用いて、点 A における傾きを求めよ。



(解) 接線の傾き $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h} =$

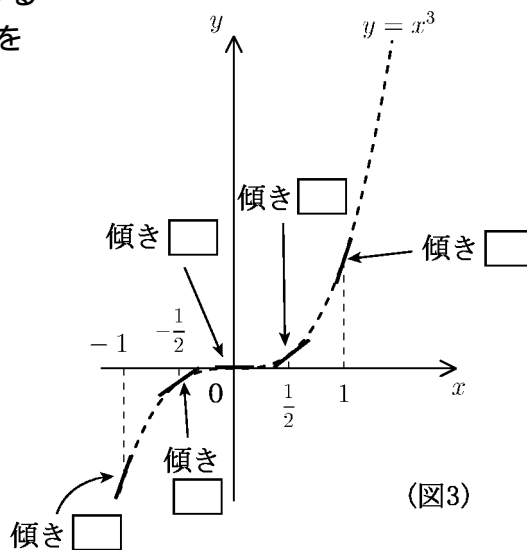
問 2 3次曲線 $y = x^3$ 上の任意の点 $A(a, a^3)$ における3次曲線の傾きを求めたい。図2を参考にして接線の傾きを極限の式で表し、その結果を a の式で表せ。

接線の傾き $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$
 $=$



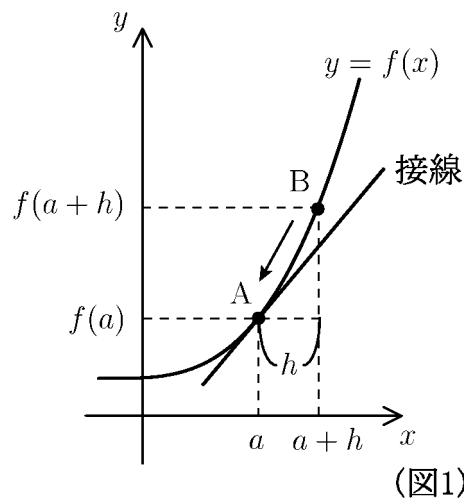
問 3 問2の結果を用いて3次曲線 $y = x^3$ における以下の傾きを求め、図3の 内にその傾きを表す数を入れよ。

- (1) $x = \frac{1}{2}$ のときの傾き =
- (2) $x = 0$ のときの傾き =
- (3) $x = -\frac{1}{2}$ のときの傾き =
- (4) $x = -1$ のときの傾き =



< 微分係数 1 >

問 1 関数 $y = f(x)$ のグラフが図 1 のような曲線である場合に、点 $A(a, f(a))$ における曲線の傾きは点 A を接点とする接線の傾きである。この接線の傾きはこの曲線上に点 B をとり、B を A に近づけたときの直線 AB の傾きの極限である。図 1 を参考にして接線の傾きを極限の式で表せ。



$$\text{接線の傾き} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$$

一般の関数 $y = f(x)$ と任意の数 a に対して次の極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数といい、記号 $f'(a)$ で表す。すなわち

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (\text{微分係数})$$

問 2 関数 $f(x)$ が問 1 のような場合、微分係数 $f'(a)$ は図 1 の何を意味するか答えよ。

例 (1) $f(x) = x^3$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h}$

(2) $f(x) = 5x^2$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h)^2 - 5a^2}{h}$

(3) $f(x) = x^2 + 3x$ のとき $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 3(a+h) - a^2 - 3a}{h}$

問 3 関数 $f(x)$ が以下の場合に $f'(a)$ を例のような極限の式で表せ。

(1) $f(x) = x^4$ のとき $f'(a) =$

(2) $f(x) = 4x^3$ のとき $f'(a) =$

(3) $f(x) = x^2 - 4x$ のとき $f'(a) =$

(4) $f(x) = x^3 + 3x^2$ のとき $f'(a) =$

< 微分係数 2 >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

である。 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ のときの傾きを意味する。このページでは $f'(a)$ の計算方法を示す。

例 1 $f(x) = 5x^2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a+h)^2 - 5a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(a^2 + 2ah + h^2) - 5a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10ah + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10a + 5h) = 10a \end{aligned}$$

例 2 $f(x) = x^2 - 2x$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - 2(a+h) - (a^2 - 2a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - 2a - 2h - a^2 + 2a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 2) = 2a - 2 \end{aligned}$$

例 3 $f(x) = x^3 + x^2$ のとき

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 + (a+h)^2 - (a^3 + a^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) + (a^2 + 2ah + h^2) - a^3 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2 + 2a + h) = 3a^2 + 2a \end{aligned}$$

問 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ を極限の計算によって求めよ。

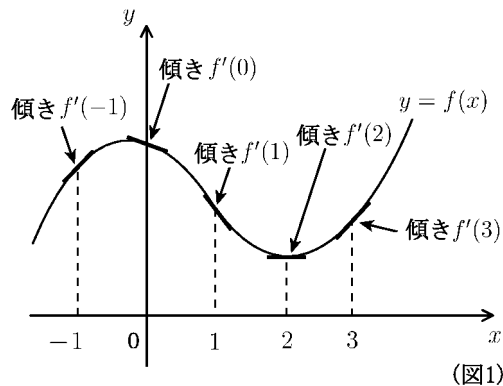
(1) $f(x) = 3x^2$, $f'(a) =$

(2) $f(x) = x^2 - 4x$, $f'(a) =$

(3) $f(x) = x^3 + 3x^2$, $f'(a) =$

< 微分係数 3 >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ のときの傾きを意味する。 $f(x)$ が右図 (図1) のようなときには $x = -1, x = 0, x = 1, x = 2, x = 3$ のときの傾きは $f'(-1), f'(0), f'(1), f'(2), f'(3)$ である。



例 $y = x^2 - 2x$ のグラフは図2のようになる。
 $f(x) = x^2 - 2x$ のとき前ページの例より

$$f'(a) = 2a - 2$$

であるから傾きは以下のように計算できる。

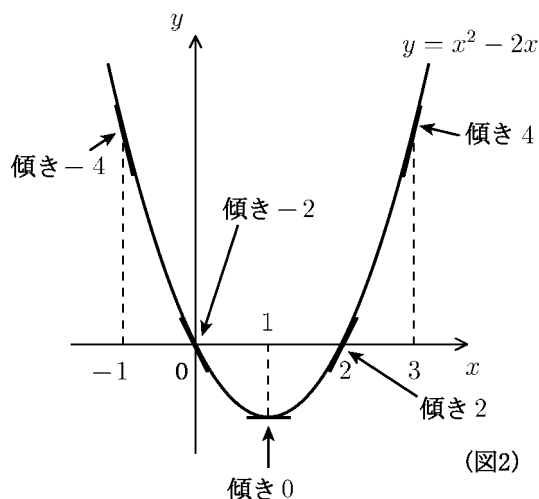
$$f'(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4 \Rightarrow x = -1 \text{ のときの傾き } -4$$

$$f'(0) = 2 \times 0 - 2 = -2 \Rightarrow x = 0 \text{ のときの傾き } -2$$

$$f'(1) = 2 \times 1 - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ のときの傾きは } 0$$

$$f'(2) = 2 \times 2 - 2 = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ のときの傾きは } 2$$

$$f'(3) = 2 \times 3 - 2 = 4 \Rightarrow x = 3 \text{ のときの傾きは } 4$$



問1 $f(x) = x^2 - 4x$ に対し以下の微分係数を求め、図3の 内に傾きを記入せよ。
 (前ページ問の結果を使ってよい)

$$f'(a) =$$

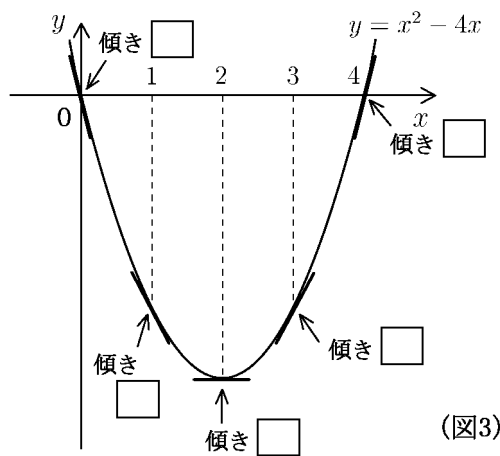
$$f'(0) =$$

$$f'(1) =$$

$$f'(2) =$$

$$f'(3) =$$

$$f'(4) =$$



問2 $f(x) = x^3 + 3x^2$ に対し以下の微分係数を求め、図4の 内に傾きを記入せよ。

$$f'(a) =$$

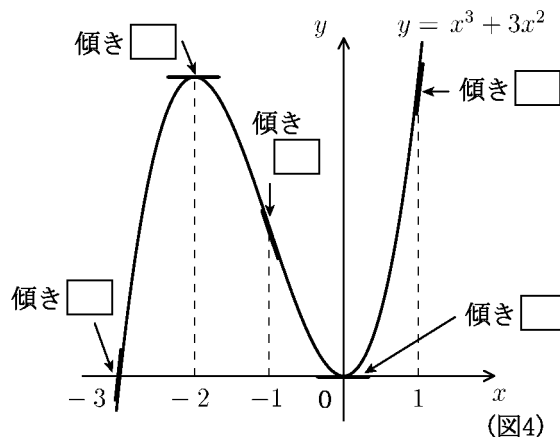
$$f'(-3) =$$

$$f'(-2) =$$

$$f'(-1) =$$

$$f'(0) =$$

$$f'(1) =$$



< 導関数 1 >

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (\text{微分係数})$$

は a の値によって変る。 $f'(a)$ を a の関数と考え、 a を x でおきかえた関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (\text{導関数})$$

を元の関数 $f(x)$ の導関数という。

例 $f(x) = x^2 - 2x$ のとき前ページの例より微分係数は

$$f'(a) = 2a - 2 \quad (\text{微分係数})$$

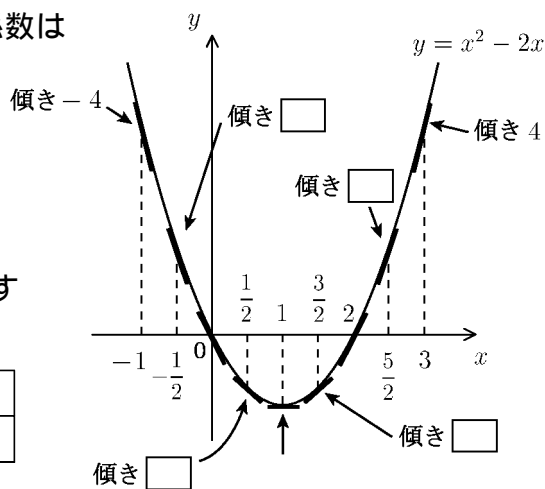
であったから、導関数は

$$f'(x) = 2x - 2 \quad (\text{導関数})$$

となる。

微分係数 $f'(a)$ はもとの関数 $f(x)$ の傾きを表すから導関数 $f'(x)$ も傾きを表す。

x	-1	0	1	2	3	a	x
傾き $f'(x)$	-4	-2	0	2	4	$2a - 2$	$2x - 2$



問 1 例の導関数 $f'(x) = 2x - 2$ に対し以下の値を求め、右図の \square の中に傾きを記入せよ。

(1) $f'(-\frac{1}{2}) =$ (2) $f'(\frac{1}{2}) =$ (3) $f'(\frac{3}{2}) =$ (4) $f'(\frac{5}{2}) =$

問 2 関数 $f(x)$ が以下の場合に微分係数 $f'(a)$ と導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(16, 17, 19 ページの結果を使ってよい)

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| (1) $f(x) = x^2$ | (2) $f(x) = x^3$ | (3) $f(x) = 5x^2$ |
| $f'(a) =$ | $f'(a) =$ | $f'(a) =$ |
| $f'(x) =$ | $f'(x) =$ | $f'(x) =$ |
| (4) $f(x) = x^2 - 4x$ | (5) $f(x) = x^3 + x^2$ | (6) $f(x) = x^3 + 3x^2$ |
| $f'(a) =$ | $f'(a) =$ | $f'(a) =$ |
| $f'(x) =$ | $f'(x) =$ | $f'(x) =$ |

< 導関数 3 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを、関数 $y = f(x)$ を「微分する」という。

例 1 前ページの結果より

$$(x^2)' = 2x \quad , \quad (5x^2)' = 10x = 5 \times 2x$$

であった。従って

$$(5x^2)' = 5 \times (x^2)'$$

が成り立つ。

一般に定数 k と関数 $f(x)$ に対して

$$(kf(x))' = k \times (f(x))' \quad (\text{定数倍の微分})$$

が成り立つ。

例 2 前ページの結果より

$$(x^3)' = 3x^2 \quad , \quad (x^2)' = 2x \quad , \quad (x^3 + x^2)' = 3x^2 + 2x$$

である。従って

$$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)'$$

が成り立つ。

一般に 2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

$$(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))' \quad (\text{和の微分})$$

$$(f(x) - g(x))' = (f(x))' - (g(x))' \quad (\text{差の微分})$$

が成り立つ。

$$\text{例 3 (1) } (5x^3 + 7x^2)' = (5x^3)' + (7x^2)' = 5 \times (x^3)' + 7 \times (x^2)'$$

$$= 5 \times 3x^2 + 7 \times 2x = 15x^2 + 14x$$

$$(2) (x^2 - 4x + 3)' = (x^2)' - 4 \times (x)' + (3)' = 2x - 4 \times 1 + 0 = 2x - 4$$

(注) $(3)' = 0$ のように x のついてない項 (定数項) を微分すると 0 になる。

定数関数の傾きは 0(ゼロ) だからである。

問 次の関数を微分せよ。

(1) $(x^3 + 2)'$

(2) $(3x^2 - 2x^3)'$

(3) $(x^2 - 3x + 2)'$

(4) $(3x^3 - x^2 + 5x - 1)'$

< パスカルの三角形 >

例 $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$
 $= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$
 $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

問 1 次の展開式を求めたい。□の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a + b)^4 = (a + b)(a + b)^3 = (a + b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$
 $= \square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4$

(2) $(a + b)^5 = (a + b) \left(\square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4 \right)$
 $= \square \times a^5 + \square \times a^4b + \square \times a^3b^2 + \square \times a^2b^3 + \square \times ab^4 + \square \times b^5$

問 2 $(a + b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと、右のようになる。

$(a + b)^0 = 1 \dots\dots\dots 1$
 $(a + b)^1 = 1 \times a + 1 \times b \dots\dots\dots 1 \quad 1$
 $(a + b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2 \dots\dots\dots 1 \quad 2 \quad 1$
 $(a + b)^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3 \dots\dots\dots 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$
 $(a + b)^4 = \square \times a^4 + \square \times a^3b + \square \times a^2b^2 + \square \times ab^3 + \square \times b^4 \dots\dots\dots \square \square \square \square \square$
 $(a + b)^5 = \square \times a^5 + \square \times a^4b + \square \times a^3b^2 + \square \times a^2b^3 + \square \times ab^4 + \square \times b^5 \square \square \square \square \square \square$

右のようにピラミッド状に並んだ数をパスカルの三角形という。
 これは上の段の数字がわかると、下の段の数字がわかるようになっている。
 この法則を発見し、 $(a + b)^6$ の展開式を求めよ。

$(a + b)^6 = \square \times a^6 + \square \times a^5b + \square \times a^4b^2 + \square \times a^3b^3 + \square \times a^2b^4 + \square \times ab^5 + \square \times b^6$

< 整関数の微分 1 >

関数 $f(x)$ が x の整式で表されているとき、 $f(x)$ を整関数という。
 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であった。 $f(x)$ が整関数の場合にこの極限值を調べる。

例 1 $f(x) = 1$ のとき

$$(1)' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

例 2 $f(x) = x$ のとき

$$(x)' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

例 3 $f(x) = x^2$ のとき

$$\begin{aligned} (x^2)' = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

例 4 $f(x) = x^3$ のとき

$$\begin{aligned} (x^3)' = f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

問 $f(x) = x^4$ のとき $f(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^4)' = f'(x) =$$

< 整関数の微分 2 >

問1 24, 25 ページを参考にして、 $f(x) = x^5$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^5)' = f'(x) =$$

問2 $f(x) = x^6$ のときの $f'(x)$ を極限の計算によって求めよ。(途中式も書くこと)

$$(x^6)' = f'(x) =$$

問3 下の表を完成せよ。ただし $x^0 = 1$ である。

元関数 $f(x)$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
導関数 $f'(x)$							

問4 n が一般の自然数のとき、 x^n の導関数 $(x^n)'$ を類推せよ。

$$(x^n)' =$$

< 整関数の微分 3 >

導関数の定義から以下の性質がわかる。

関数 $f(x), g(x)$ と定数 k に対して

$$(kf(x))' = k \times f'(x) \quad (\text{定数倍の微分})$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (\text{和の微分})$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (\text{差の微分})$$

が成り立つ。

- 例 (1) $(x^5 + x^6)' = (x^5)' + (x^6)' = 5x^4 + 6x^5$
 (2) $(7x^4)' = 7 \times (x^4)' = 7 \times 4x^3 = 28x^3$
 (3) $(6x^5 + 5x^4)' = (6x^5)' + (5x^4)' = 30x^4 + 20x^3$
 (4) $(x^7 - 4x^5 + 5x^2 - 8)' = (x^7)' - (4x^5)' + (5x^2)' - (8)'$
 $= 7x^6 - 20x^4 + 10x$
 (5) $((x^2 + 3)(x^2 - 4))' = (x^4 - x^2 - 12)' = 4x^3 - 2x$

問 次の関数を微分せよ。

- (1) $(x - x^3)'$ (2) $(7x^6)'$
- (3) $(10x^4 + 8x^7)'$ (4) $(6x^5 - 2x^3 + 3)'$
- (5) $(3x^5 - 6x^2 + 9)'$ (6) $(4x^7 - 4x^4 + 9x^2 - 5x)'$
- (7) $((x - 1)(x + 4))'$ (8) $((x^2 - 3)(x^2 - 2))'$

< 関数の増減 1 >

例 2 次関数 $y = -x^2 + 6x$ のグラフは図 1 のような放物線である。このグラフの頂点の座標を求めるには次のようにすればよい。まず導関数

$$y' = (-x^2 + 6x)' = -2x + 6$$

を求める。次に $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

であるから $x = 3$ のとき傾き y' が 0 (ゼロ) になるのでそこが頂点である。

$$x = 3 \text{ のとき } y = -x^2 + 6x = -3^2 + 6 \times 3 = 9$$

であるから頂点の座標は (3, 9) である。

y' のグラフ (図 2) より

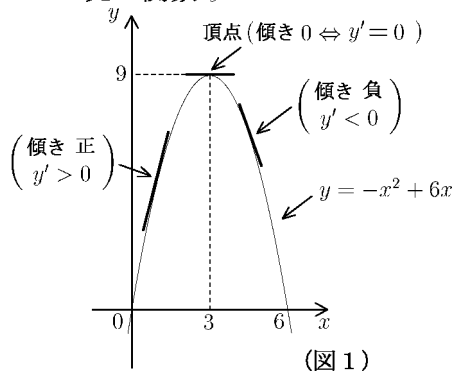
$$x < 3 \text{ のとき } y' > 0$$

$$x = 3 \text{ のとき } y' = 0$$

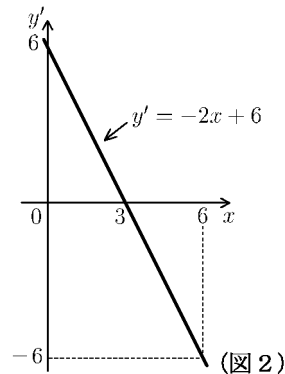
$$x > 3 \text{ のとき } y' < 0$$

となる。 $y' > 0$ ならば傾きは正だから y のグラフは右上がり (↗) になる。 $y' < 0$ ならば傾き負だから y のグラフは右下がり (↘) になる。以上の結果をまとめたのが右の表である。このような表を増減表という。

<元の関数 $y = -x^2 + 6x$ >



<導関数 $y' = -2x + 6$ >



x	$x < 3$	3	$3 < x$
y'	+	0	-
y	↗	9	↘

(注) 増減表を作るには次のようにやると簡単である。

- (1) $y' = 0$ となる x (この場合は $x = 3$) を求める。
- (2) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より小さい数 x (例えば $x = 0$) を代入してプラスであれば ($x < 3$ の列で) y' の欄に + と書き入れ、 y の欄に ↗ (右上がり) の記号を入れる。
- (3) $y' = -2x + 6$ の式に 3 より大きい数 x (例えば $x = 4$) を代入してマイナスであれば ($x > 3$ の列で) y' の欄に - と書き入れ、 y の欄に ↘ (右下がり) の記号を入れる。

問 次の関数を微分し、増減表を作り、頂点の座標を求めよ。

(1) $y = x^2 - 2x + 3$

$y' =$, 頂点 (,)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

(2) $y = -2x^2 + 8x - 1$

$y' =$, 頂点 (,)

x	$x <$		$< x$
y'		0	
y			

< 関数の増減 2 >

例 3 次関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表を作りたい。
導関数は

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

である。 $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

であるから $x = \pm 1$ のとき $y' = 0$ となる。

導関数のグラフ (図 2) より

- $x < -1$ のとき $y' > 0$
- $x = -1$ のとき $y' = 0$
- $-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
- $x = 1$ のとき $y' = 0$
- $1 < x$ のとき $y' > 0$

となる。 $x = \pm 1$ のとき y の値は

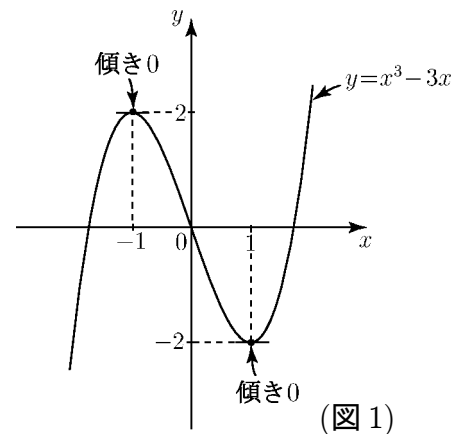
$$x = -1 \text{ のとき } y = x^3 - 3x = (-1)^3 - 3 \times (-1) = 2$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = x^3 - 3x = 1^3 - 3 \times 1 = -2$$

である。以上をまとめると次の増減表ができる。

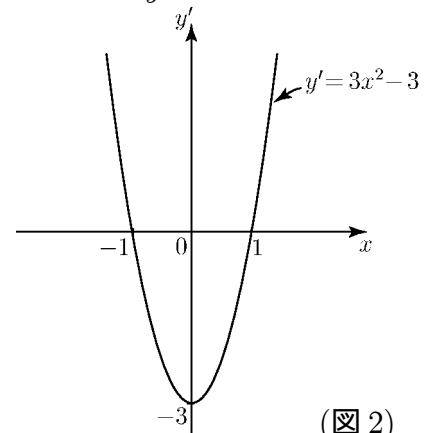
x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

< 元の関数 $y = x^3 - 3x$ >



(図 1)

< 導関数 $y' = 3x^2 - 3$ >

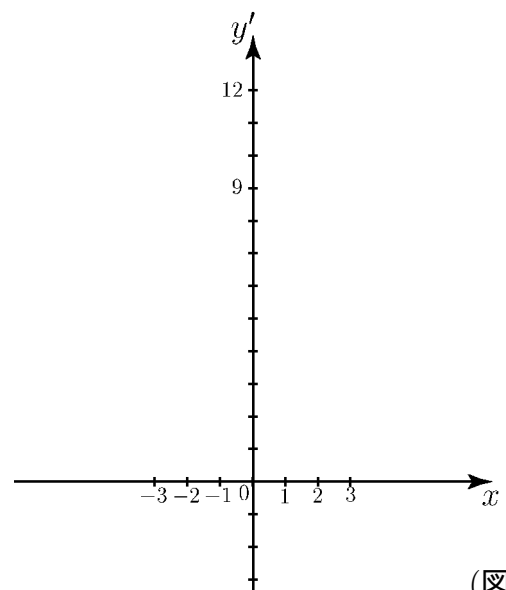


(図 2)

問 関数 $y = 12x - x^3$ を微分し、導関数 y' の
グラフを図 3 に書き、増減表を作れ。

x	$x <$		$< x <$		$< x$
y'		0		0	
y					

$$y' =$$



(図 3)

< 関数の増減 3 >

例 前ページの例の関数 $y = x^3 - 3x$ の増減表は (表 1)
導関数

$$y' = 3x^2 - 3$$

のグラフ (前ページの図 2) を書かなくても作れる。次のような手順でやる。

(1) まず導関数を求める。

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$$

(2) $y' = 0$ となる x を求める。

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

(3) 表 1 の x の欄に $x = 1$ と $x = -1$ を記入。
その下の y' の欄に 0 を記入。

(4) x の欄に x の範囲を書く。(表 2)
(右の方が x の値が大きい範囲であるように書く)

(5) $x < -1$ の範囲の場合、たとえば $x = -2$ を y' の式に代入すると

$$x = -2 \text{ のとき}$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$$

より $y' > 0$ であるから y' の欄に + 記号を書き入れる。以下同様に $-1 < x < 1$ の範囲では $x = 0$ を y' の式に代入し、 $y' < 0$ となれば、 y' の欄に - 記号を書き入れる。
(表 2)

(6) y' が + であれば傾き正であるから y は右上がり ↗ となる。
 y' が - であれば傾き負であるから y は右下がり ↘ となる。(表 3)

(7) 最後に $x = \pm 1$ のときの $y = x^3 - 3x$ の値を代入して終わり。(表 4)

x		-1		1	
y'		0		0	
y					

↓

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y					

↓

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗

↓

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	1	$1 < x$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	2	↘	-2	↗

問 次の関数を微分し、増減表を作れ。

(1) $y = -x^3 + 3x^2$, $y' =$

x					
y'					
y					

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$, $y' =$

x					
y'					
y					

< 極大・極小 1 >

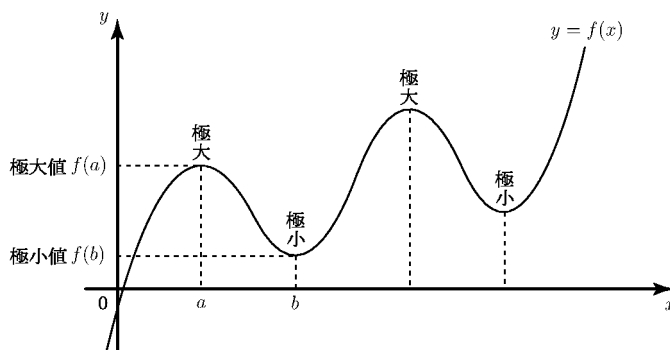
関数 $f(x)$ について、 a の近くの x に対し

$$f(a) > f(x)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で極大になるといい、 $f(a)$ を極大値という。

また、 b の近くの x に対し

$$f(b) < f(x)$$



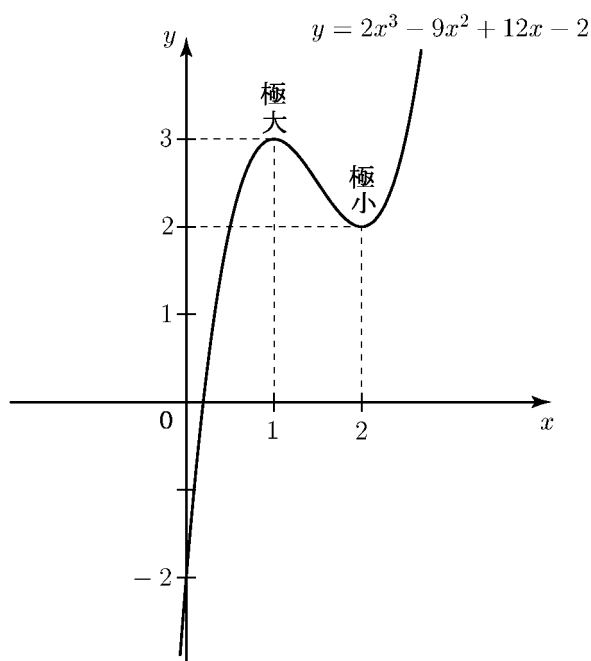
が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = b$ で極小になるといい、 $f(b)$ を極小値という。
極大値と極小値をまとめて極値という。

例 3次関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を調べるには、増減表を作ればよい。微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

より $x = 1$ と $x = 2$ のとき $y' = 0$ となる。

x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	3	↘	2	↗
		極大		極小	



増減表より

$$\underline{x = 1 \text{ のとき 極大値 } y = 3}$$

$$\underline{x = 2 \text{ のとき 極小値 } y = 2}$$

であることがわかる。

(注) 上の増減表の x の欄の ... は以下の意味である。

x	...	1	...	2	...	\iff	x	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$2 < x$
-----	-----	---	-----	---	-----	--------	-----	---------	---	-------------	---	---------

今後はこのように x の範囲を省略してよい。

問 3次関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の増減表を作り、極値を調べよ。

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ のとき極大値 } y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ のとき極小値 } y = \underline{\hspace{2cm}}$$

x	
y'	
y	

< 極大・極小 2 >

例 4次関数 $y = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 8$
の極値を調べるには、3次関数と
同様に増減表を作ればよい。

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、 $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$ のとき $y' = 0$ となる。

x	...	0	...	1	...	3	...
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	↘	8	↗	13	↘	-19	↗
		極小		極大		極小	

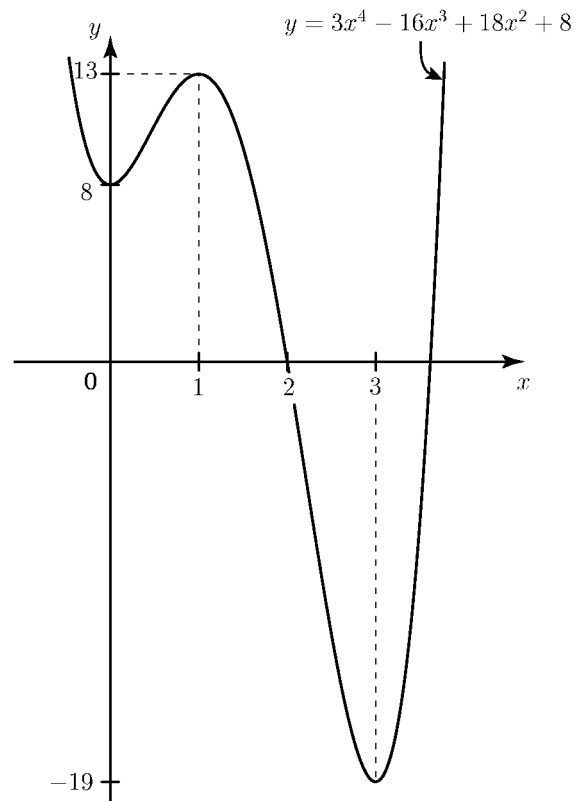
増減表より

$$x = 1 \text{ のとき極大値 } y = 13$$

$$x = 0 \text{ のとき極小値 } y = 8$$

$$x = 3 \text{ のとき極小値 } y = -19$$

であることがわかる。



問 以下の関数の増減表を作り、極値を調べよ。

(1) $y = -x^4 + 2x^2 + 5$

x	
y'	
y	

(2) $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2$

x	
y'	
y	

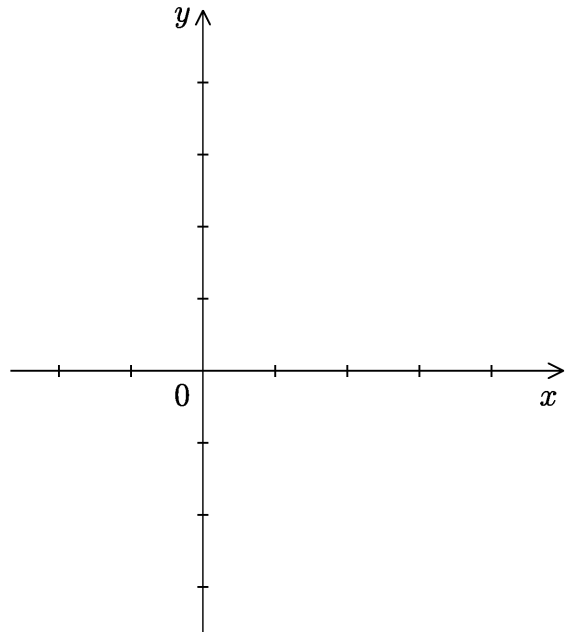
< 関数のグラフ >

問 次の関数を微分し、増減表を作り、極値を調べよ。また右図の上にその関数のグラフを書け。(グラフは極値の座標が分かるように目盛りを書く)

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

$$y' =$$

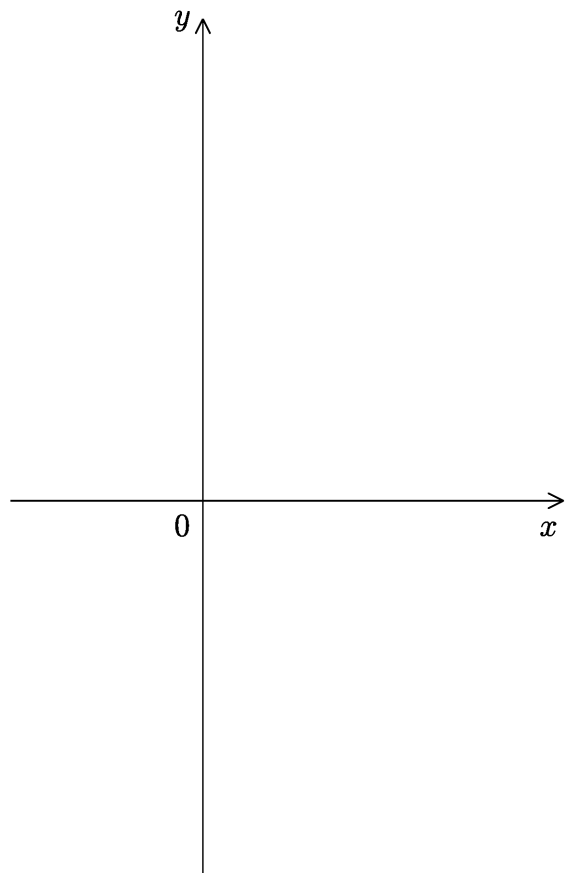
x	
y'	
y	



(2) $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 20$

$$y' =$$

x	
y'	
y	



< 最大・最小1 >

例題 次の関数の最大値と最小値を、指定された定義域

(x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -1 \leq x \leq 5)$$

(解) 導関数

$$y' = (2x^3 - 9x^2)' = 6x^2 - 18x$$

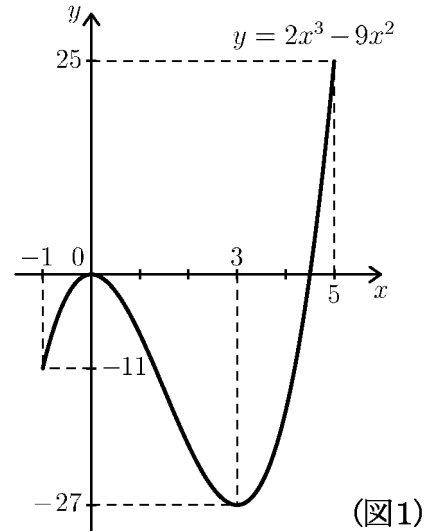
を求め、 $y' = 0$ とおくと

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ または } x = 3$$

であるから $-1 \leq x \leq 5$ の範囲で増減表

は次のようになる。

x	-1	...	0	...	3	...	5
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-11	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	25



この表よりグラフは図1のようになるから

(答) $x = 5$ のとき 最大値 $y = 25$ をとり、 $x = 3$ のとき 最小値 $y = -27$ をとる。

(注) 最大や最小は定義域によって違

ってくる。たとえば

$$y = 2x^3 - 9x^2 \quad (\text{定義域 } -2 \leq x \leq 4)$$

x	-2	...	0	...	3	...	4
y'	\times	+	0	-	0	+	\times
y	-52	\nearrow	0	\searrow	-27	\nearrow	-16

のとき 増減表は右表のようになり、

この場合の答えは $x = 0$ のとき 最大値 $y = 0$, $x = -2$ のとき 最小値 $y = -52$ である。

問 次の関数に対し、指定された定義域内で増減表を書き、最大値と最小値を求めよ。

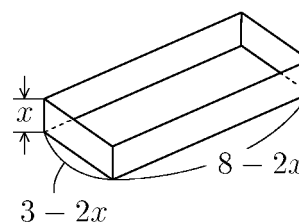
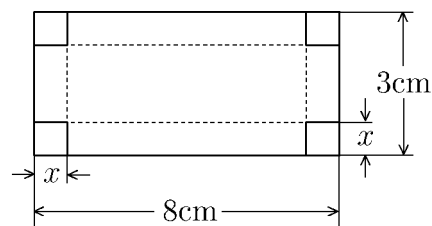
$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 \quad (\text{定義域 } 0 \leq x \leq 4)$$

x	0		4
y'	\times		\times
y			

(答) $x =$ _____ のとき最大値 $y =$ _____
 $x =$ _____ のとき最小値 $y =$ _____

< 最大・最小 2 >

例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から、一辺 x cm の正方形を切り取り、右上図の点線のところを折り曲げて、右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 y cm³ を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解) 容器のたては $3 - 2x$ (cm), よこは $8 - 2x$ (cm), 高さは x (cm) だから、容積 y (cm³) は

$$y = (3 - 2x)(8 - 2x)x = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

である。題意より $x > 0$ でしかも $2x < 3$ であるから、 x の範囲は $0 < x < \frac{3}{2}$ である。

この範囲内で増減表を作り、 y の最大値を求める。 y を微分すれば

$$y' = 12x^2 - 44x + 24 = 4(3x - 2)(x - 3)$$

でかつ、

$$x = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24 \times \frac{2}{3} = \frac{200}{27}$$

より、増減表は右ようになる。よって

x	0	...	$\frac{2}{3}$...	$\frac{3}{2}$
y'	\times	+	0	-	\times
y	0	\nearrow	$\frac{200}{27}$	\searrow	0

(答) $x = \frac{2}{3}$ (cm) のとき、最大容積 $y = \frac{200}{27}$ (cm³) をとる。

問 一辺 4cm の正方形のブリキの板から、例題と同様にして、ふたのない容器を作るとき、容器の容積 y (cm³) を最大にするには、切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？

x の範囲を求め、その範囲内で増減表を作り、 y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	
y'	\times		0		\times
y					

< 時間の関数 >

時間 (*time*) を表す文字として t がよく使われるので、時間の関数を表すのに t を変数として使う。例えば $f(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $v(t)$ などである。

例 1 球を静かに手離すとき、落ち始めてから t 秒間に落下した距離を $f(t)$ m とすると

$$f(t) = 4.9t^2$$

の関係がある。従って 3 秒後に落下した距離は

$$f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1 \quad (\text{m})$$

である。

問 1 例 1 の $f(t)$ に対して次の値を求めよ。(単位不要)

$$(1) f(2) = \quad (2) f(4) = \quad (3) f(3.5) =$$

問 2 $x(t) = 19.6t$, $y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ のとき次の値を求めよ。

$$x(0) = \quad y(0) =$$

$$x(1) = \quad y(1) =$$

$$x(2) = \quad y(2) =$$

例 2 x を変数とする関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (x についての導関数)

である。同様にして変数 t についての導関数 $f'(t)$ は

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} \quad (\text{変数 } t \text{ についての導関数})$$

で定義される。同様に t の関数 $y(t)$ の導関数は

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

で定められる。

問 3 変数 t の関数 $x(t)$, $v(t)$ の導関数の定義を例 2 のような極限の式で表せ。

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad}, \quad v'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad}$$

例 3 $f(t) = 4.9t^2$ のとき、 $t = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次の極限式になる。

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9 \times (2+h)^2 - 4.9 \times 2^2}{h}$$

問 4 $f(t) = 4.9t^2$ に対し次の微分係数を例 3 の右辺のような極限の式で表せ。

$$(1) f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{\quad} \quad (2) f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h}$$

例 4 $f(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ の導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = (-4.9t^2 + 19.6t)' = -4.9 \times 2t + 19.6 \times 1 = -9.8t + 19.6$$

問 5 $x(t) = 29.4t$, $y(t) = -4.9t^2 + 29.4t$, $v(t) = 29.4$ の導関数を求めよ。

$$x'(t) = \quad y'(t) = \quad v'(t) =$$

< 速度 1 >

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{\text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}}$$

例 1 車が 144 km を 2 時間で走ったときの平均速度は

$$\text{平均速度} = \frac{144 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 72 \text{ (km/h)} \quad (= \text{時速 } 72 \text{ km})$$

問 1 72 (km/h) を分速 (km/min) および秒速 (m/s) になおせ。

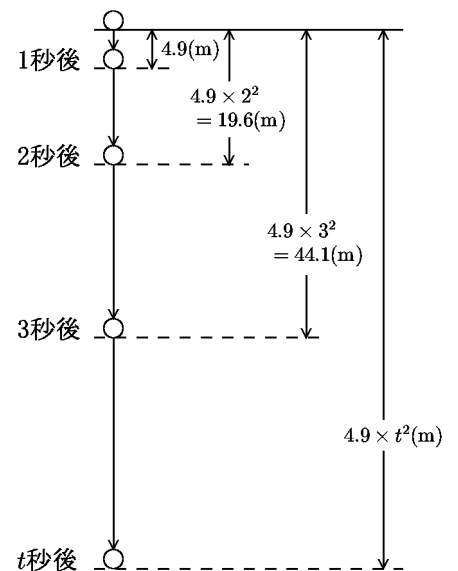
$$72 \text{ (km/h)} = \frac{72 \text{ km}}{60 \text{ min}} = \boxed{} \text{ (km/min)} = \boxed{} \text{ (m/s)}$$

例 2 (自由落下) 球を静かに手離すとき落ち始めてから t 秒間の落下距離は

$$t \text{ 秒後の落下距離} = 4.9 \times t^2 \text{ (m)}$$

となる。2 秒後から 4 秒後の 2 秒間の平均速度は

$$\begin{aligned} 2 \text{ 秒後から } 4 \text{ 秒後の平均速度} &= \frac{\text{落下距離}}{\text{時間}} \\ &= \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{4 - 2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$



問 2 例 2 の場合に以下の平均速度を求めよ。

(1) 1 秒後から 3 秒後までの平均速度

(2) 3 秒後から 4 秒後までの平均速度

(3) 3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度

(4) 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度

< 速度 2 >

車が 144 (km) を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 (km/h) であるが、常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし、72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると、スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。

このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「瞬間の速度」といい、「平均速度」と区別する。

このページでは「瞬間の速度」を求めることを目標にする。

問 1 前ページ例 2(自由落下) の場合に 3 秒後の瞬間の速度を求めたい。前ページ問 2(4) より 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は

$$\frac{4.9 \times 3.1^2 - 4.9 \times 3^2}{3.1 - 3} = \frac{2.989}{0.1} = 29.89 \text{ (m/s)}$$

である。

(1) 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度を求めよ。

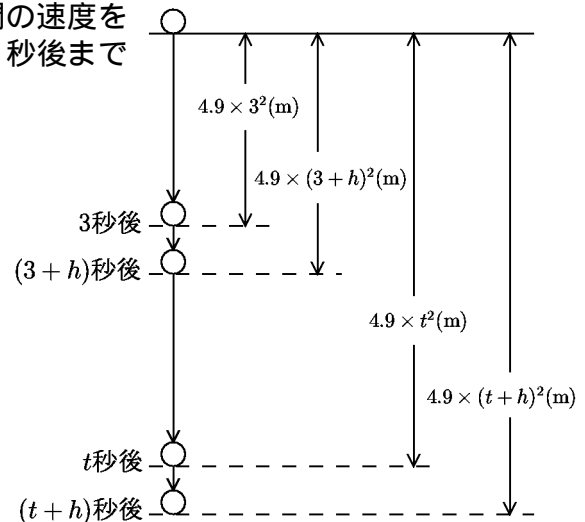
(2) 3 秒後から $3+h$ 秒後までの平均速度を求めよ。

(3) 以下の極限值を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{3 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}) =$$

(4) 以下の場合の極限值を求めよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{t 秒後から } (t+h) \text{ 秒後までの平均速度}) =$$



問 2 $f(t) = 4.9 \times t^2$ とおく。問 1 の (3) および (4) で計算した極限の式を f と (または t) と h を用いた極限の式にしたい。以下の () の中に適当な数、文字または式を入れよ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{3 秒後から } 3+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\text{t 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\quad) - f(\quad)}{h}$$

問 3 問 1(3), (4) の結果から以下の瞬間の速度を求めよ。

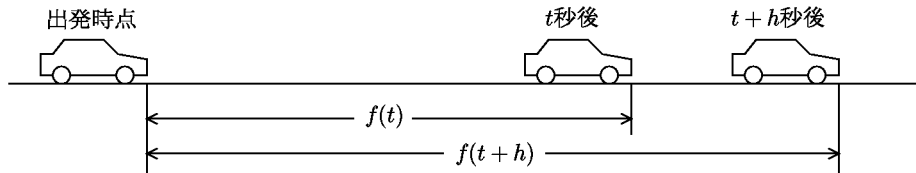
(1) 3 秒後の瞬間の速度 = () (m/s) , (2) t 秒後の瞬間の速度 = () (m/s)

問 4 問 2 の結果から以下の瞬間の速度を関数 $f(t) = 4.9t^2$ の微分係数として $f'(\quad)$ の形で表せ。

(1) 3 秒後の瞬間の速度 = () , (2) t 秒後の瞬間の速度 = ()

< 速度 3 >

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
 出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。 $t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ である。

「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから、時間間隔 h を 0 (ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

$$t \text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h \rightarrow 0} (t \text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

となる。この「瞬間の」というのを略して、単に「 t 秒後の速度」という。

例 1 前ページの間では $f(t) = 4.9t^2$ だから

$$t \text{ 秒後の速度} = f'(t) = 4.9 \times 2t = 9.8t \text{ (m/s)}$$

$$\text{であり } 3 \text{ 秒後の速度} = f'(3) = 9.8 \times 3 = 29.4 \text{ (m/s)}$$

となる。

問 1 例 1 の場合に以下の速度を求めよ。

(1) 2 秒後の速度

(2) 4 秒後の速度

例 2 地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。

t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えると)

$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \text{ (m)}$$

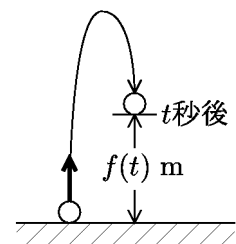
となる。 t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \text{ (m/s)}$$

となる。ボールが最高点に達するとき速度は 0 (ゼロ) になるから

$$v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \iff t = 2$$

より 2 秒後に最高点に達する。このときの高さは $f(2) = -4.9 \times 2^2 + 19.6 \times 2 = 19.6$ (m) である。



問 2 地上 39.2 (m) の高さから真上にボールを投げ上げたとき t 秒後の高さ $f(t)$ は

$$f(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 39.2 \text{ (m)}$$

となった。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。

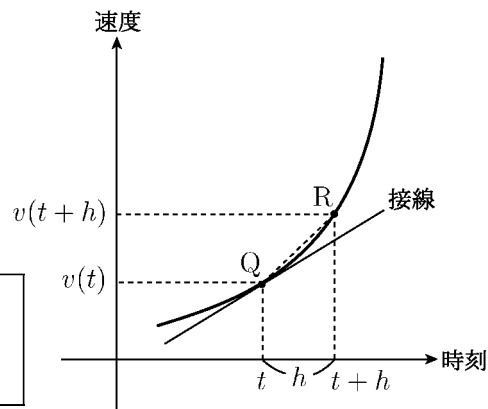
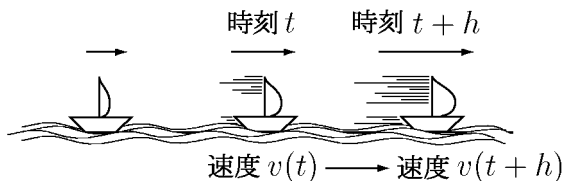
(2) 初速 ($t = 0$ のときの速度) を求めよ。

(4) 最高点の高さを求めよ。

< 加速度 >

速度の変化の割合 (= 変化率) を加速度という。

例1 湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。



時刻 t における速度 $v(t)$ のグラフが右図の場合

$$\text{平均の加速度} \left(\begin{array}{l} t \text{ から } t+h \text{ まで} \\ \text{の速度の上昇率} \end{array} \right) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \text{線分 QR の傾き}$$

$$\text{瞬間の加速度} \left(\begin{array}{l} \text{時刻 } t \text{ での} \\ \text{速度の上昇率} \end{array} \right) = v'(t) = \text{点 Q における接線の傾き}$$

一般に時刻 t での速度が $v(t)$ のとき、

$$\text{時刻 } t \text{ での瞬間の加速度} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = v'(t)$$

と定め、これを単に「時刻 t での加速度」と略す。

(注) 上の例1は速度が上昇していく場合であり、加速度はプラスになる。逆に速度が減少していく場合は加速度はマイナスになる。

例2 前ページ例2の場合

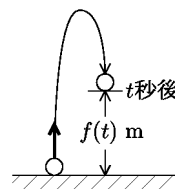
$$t \text{ 秒後の高さ} = f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad (\text{m})$$

$$t \text{ 秒後の速度} = v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad (\text{m/s})$$

であった。 t 秒後の加速度は

$$t \text{ 秒後の加速度} = v'(t) = (-9.8t + 19.6)' = -9.8 \quad (\text{m/s}^2)$$

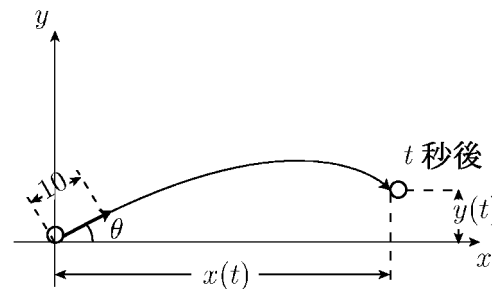
であり、下向きに $9.8(\text{m/s}^2)$ という重力加速度が作用していることがわかる。



問 水平から θ の角度で (初速 10m/s で) ボールを投げた。空気抵抗を考えなければ t 秒後の水平距離 $x(t)$ と高さ $y(t)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 10(\cos \theta)t & (\text{m}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 10(\sin \theta)t & (\text{m}) \end{cases}$$

となる。



(1) 水平方向の速度 $v_x(t)$ と垂直方向の速度 $v_y(t)$ を求めよ。

(2) 水平方向の加速度 $v_x'(t)$ と垂直方向の加速度 $v_y'(t)$ を求めよ。