2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学
基礎数学ワークブック
（2002年度版）

番外編

「力学入門 2」

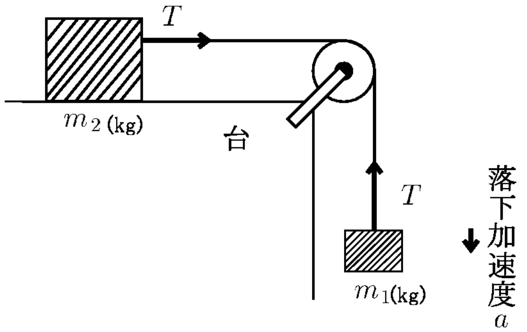
内容

◎　加速度

◎　点の運動

◎　力と運動

◎　力のつりあい



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

＜加速度 1＞

速度は「移動した距離＝位置の変化量」を「時間」で割ったものである。
すなわち

$$\text{速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} = \frac{\text{位置の変化量}}{\text{時間}}$$

である。これに対し「加速度」は「速度の変化量」を時間で割ったものである。

$$\boxed{\textbf{加速度} = \frac{\text{時間の変化量}}{\text{時間}} = \frac{\text{最後の速度}-\text{最初の速度}}{\text{時間}}}$$

例 1

(1) $1\mathrm{m/s^2}$ ＝ 1 秒間に速度が 1m/s だけ増加する加速度

(2) $1\mathrm{m/min^2}$ ＝ 1 分間に速度が 1m/min だけ増加する加速度

(3) $1\mathrm{km/h^2}$ ＝ 1 時間に速度が 1km/h だけ増加する加速度

(4) $-1\mathrm{m/s^2}$ ＝ 1 秒間に速度が 1m/s だけ減速する加速度

(注) (4) の場合に**減速度** $1\mathrm{m/s^2}$ ともいうことがある。

例 2 2 時間かけて速度が 10km/h から 46km/h に変った。
このときの加速度は

$$\frac{46\mathrm{km/h} - 10\mathrm{km/h}}{2\mathrm{h}} = \frac{36\mathrm{km/h}}{2\mathrm{h}} = 18\mathrm{km/h^2}$$

である。

(注) これを $\mathrm{m/min^2}$ の単位になおすには以下のように計算する。

$$18\mathrm{km/h^2} = \frac{18\mathrm{km}}{(1\mathrm{h})^2} = \frac{18000\mathrm{m}}{(60\mathrm{min})^2} = \frac{18000\mathrm{m}}{3600\mathrm{min}^2} = 5\mathrm{m/min^2}$$

問 1 $5\mathrm{m/min^2}$ を $\mathrm{m/s^2}$ の単位にせよ。(分数で答えてよい)

問 2 次の $\boxed{}$ に適当な数値を入れよ。

(1) $259.2\mathrm{km/h^2} = \boxed{}\ \mathrm{m/min^2} = \boxed{}\ \mathrm{m/s^2}$

(2) $1\mathrm{m/s^2} = \boxed{}\ \mathrm{m/min^2} = \boxed{}\ \mathrm{km/h^2}$

＜加速度 2 ＞

例 1 車がスタートしてから 5 秒後に時速 45km の速さになった。
このときの加速度 a は

$$a = \frac{45\text{km/h} - 0\text{km/h}}{5\,\text{s}} = \frac{\frac{45\text{km}}{1\text{h}}}{5\,\text{s}} = \frac{45\text{km}}{5\,\text{s} \times 1\text{h}}$$

$$= \frac{45000\,\text{m}}{5\,\text{s} \times 3600\,\text{s}} = \frac{5\text{m}}{2\,\text{s}^2} = 2.5\,\text{m/s}^2$$

問 1 車がスタートしてから 3 秒後に時速 54km の速さになった。
このときの加速度を m/s^2 の単位で求めよ。

例 2 秒速 10m で走っている車を加速度 0.5m/s^2 で加速し続ける。

1 秒後は 0.5m/s 速度が上がるので， 1 秒後の速度は 10.5m/s
2 秒後はさらに 0.5m/s 速度が上がるので，2 秒後の速度は 11m/s
3 秒後はさらに 0.5m/s 速度が上がるので，3 秒後の速度は 11.5m/s

問 2 例 2 で t 秒後の速度を求めよ。

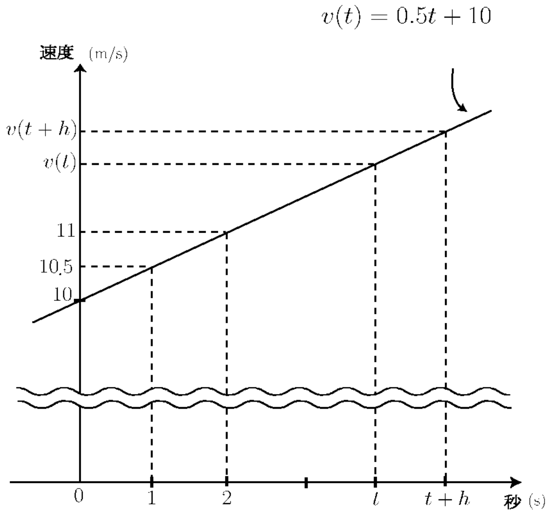
問 3 例 2 で初期速度 10m/s と 10 秒後の速度を時速になおせ。

10m/s = $\boxed{}$ km/h ， 10 秒後の速度 = $\boxed{}$ km/h

問 4 時速 20km/h で走っている自転車を加速度 10cm/s^2 で速度を上げていった。
30 秒後および 1 分後の速度を時速 (km/h) で求めよ。

問 5 時速 60km/h で走っている車を 10 秒後に時速 150km/h に上げた。
このときの加速度を m/s^2，m/min^2，km/h^2 の単位で求めよ。

< 加速度３ >



例１　前ページ例２の場合, t 秒後の速度を $v(t)$ とすると (問２より)

$$v(t) = 0.5t + 10 \quad (\mathrm{m/s})$$

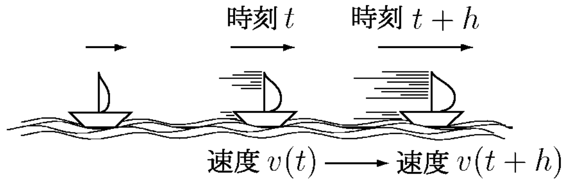
である。このときの加速度は

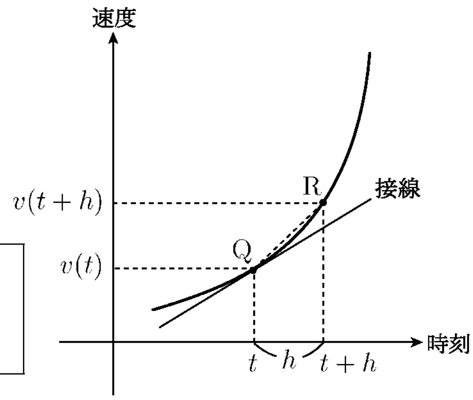
$$\text{加速度} = 0.5 \ (\mathrm{m/s^2})$$

である。この場合は常に一定加速度で加速している。このとき時刻 t と速度 $v(t)$ との関係を右上図のようにグラフにすると、直線になり、加速度 $= 0.5 \ (\mathrm{m/s^2})$ はこのグラフの**傾き**を意味する。

次に一定加速度でない場合 (加速度が時刻によって変わる場合) を考える。

例２　湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。





時刻 t における速度 $v(t)$ のグラフが右図の場合

平均の加速度 (t から $t+h$ までの速度の上昇率) $= \dfrac{v(t+h)-v(t)}{h} =$ 線分 QR の傾き

瞬間の加速度 (時刻 t での速度の上昇率) $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)$ ＝点 Q における接線の傾き

一般に時刻 t での速度が $v(t)$ のとき、

$$\boxed{\text{時刻 } t \text{ での瞬間の加速度} = \lim_{h\to 0} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)}$$

と定め、これを単に「**時刻 t での加速度**」と略す。

(注) 上の例１は速度が上昇していく場合であり、加速度はプラスになる。逆に速度が減少していく場合は加速度はマイナスになる。

問　時刻 t における速度 $v(t)$ が以下の場合に、加速度 $v'(t)$ を求めよ。

(1)　$v(t) = 0.5t + 10$

$v'(t) =$

(2)　$v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 0.5t + 10$

$v'(t) =$

< 位置・速度・加速度 >

速度 (*velocity*) を通常 v で表し，加速度 (*accelaration*) を通常 a で表す。
時刻 t における位置を $x(t)$，速度を $v(t)$，加速度を $a(t)$ とすると

$$v(t) = x'(t) \quad \cdots \quad \text{速度} = \text{位置}\, x(t) \text{ の導関数}$$
$$a(t) = v'(t) \quad \cdots \quad \text{加速度} = \text{速度}\, v(t) \text{ の導関数}$$

である。

例 1 t 秒後の位置が $x(t) = 5t^2 - 3t + 4\,(\mathrm{m})$ であるとき、

t 秒後の速度 $v(t)$ は

$$v(t) = x'(t) = (5t^2 - 3t + 4)' = 10t - 3\,(\mathrm{m/s})$$

であり、t 秒後の加速度 $a(t)$ は

$$a(t) = v'(t) = (10t - 3)' = 10\,(\mathrm{m/s^2})$$

問 1 t 秒後の位置 $x(t)$ が以下の場合に速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

(1) $x(t) = 3t^2 - 4t + 5$

$v(t) =$

$a(t) =$

(2) $x(t) = 2t^3 + 4t^2 - 5t + 6$

$v(t) =$

$a(t) =$

例 2 t 秒後の位置 $x(t)\,(\mathrm{m})$ が

$$x(t) = \alpha t + \beta$$

で表されるとき α , β の単位は次のようにしてわかる。まず

$$\alpha t \ , \quad \beta$$

の単位は m である。 時刻 t の単位は秒 (s) なので、α の単位は

$$\alpha = \frac{\alpha t}{t} = \frac{\alpha t\,(\mathrm{m})}{t\,(\mathrm{s})} = \alpha\,(\mathrm{m/s})$$

より α の単位は m/s である。

問 2 t 秒後の位置 $x(t)$ が

$$x(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \qquad (\mathrm{m})$$

で表されるとき、α, β, γ の単位を求めよ。

< 微分記号 >

関数 $y=f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す（全て同じ意味である）。 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数（ x についての微分）であることを明記するためにある。
変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y=f(t)$ の導関数を

$$y'=f'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y=x^3-2x^2$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-4x$

$y=t^3-2t^2$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-4t$

$S=r^3-2r^2$ のとき $\dfrac{dS}{dr}=3r^2-4r$

微分の公式 $(x^n)'=nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y=x^2-x+3$ $\qquad \dfrac{dy}{dx}=$

(2) $y=4-9.8t$ $\qquad \dfrac{dy}{dt}=$

(3) $\ell=3t^2-2t$ $\qquad \dfrac{d\ell}{dt}=$

(4) $S=\pi r^2$ （π は円周率） $\qquad \dfrac{dS}{dr}=$

(5) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad \dfrac{dV}{dr}=$

＜ 2 階導関数 ＞

変数 x の関数 $f(x)$ について、導関数 $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ の導関数を $f(x)$ の 2 階導関数といい,

$$f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)$$

等で表す。これらの記号はすべて同じ意味である。

例 1 (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x + 6 \\ f'(x) &= (x^3 - 4x^2 + 5x + 6)' = 3x^2 - 8x + 5 \ (\text{導関数}) \\ f''(x) &= (3x^2 - 8x + 5)' = 6x - 8 \ (2\ \text{階導関数}) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^7 - 5x^4 + 20x^3 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^7 - 5x^4 + 20x^3) = 7x^6 - 20x^3 + 60x^2 \ (\text{導関数}) \\ f''(x) &= \frac{d}{dx}(7x^6 - 20x^3 + 60x^2) = 42x^5 - 60x^2 + 120x \ (2\ \text{階導関数}) \end{aligned}$$

問 1 次の関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ および 2 階導関数 $f''(x) = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 7$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

(2) $f(x) = 7x^6 + 8x^5 - 16x^2 + 30x$

$\dfrac{df}{dx} =$

$\dfrac{d^2f}{dx^2} =$

例 2 時間変数 t の関数の 2 階導関数も同様な記法を用いる。

(1) $y(t) = t^3 - 4t^2 + 5t + 6$

$y'(t) = 3t^2 - 8t + 5$

$y''(t) = 6t - 8$

(2) $x(t) = t^7 - 5t^4 + 20t^3$

$\dfrac{dx}{dt} = 7t^6 - 20t^3 + 60t^2$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 42t^5 - 60t^2 + 120t$

問 2 次の関数の導関数および 2 階導関数を求めよ。

(1) $y(t) = 4t^5 - 5t^3 + 6t$

$y'(t) =$

$y''(t) =$

(2) $y(t) = 3t^7 - 20t^4 + 28t^2$

$\dfrac{dy}{dt} =$

$\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

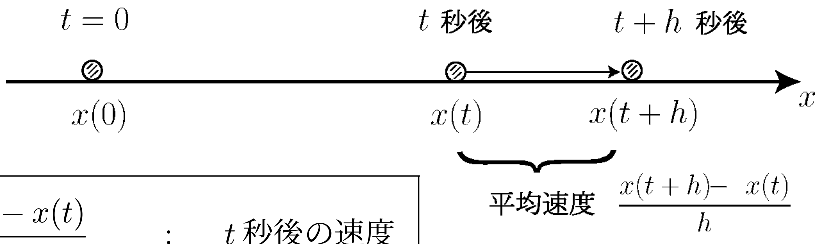
(3) $x(t) = 4t^5 - 5t^2 + 8t$

$\dfrac{dx}{dt} =$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} =$

< 直線上の運動 >

x 軸上を玉が動くとする。
t 秒後の位置を $x(t)$ とすると、t 秒後の速度 $v(t)$ は



$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \quad : \quad t\text{ 秒後の速度}$$

である。t 秒後の加速度を $a(t)$ とすると

$$a(t)=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} \quad : \quad t\text{ 秒後の加速度}$$

である。

例１　t 秒後の位置が $x(t)=t^4-3t^2+5t$ であるとき,

$v(t)=\frac{dx}{dt}=(t^4-3t^2+5t)'=4t^3-6t+5$　　: t 秒後の速度

$a(t)=\frac{dv}{dt}=(4t^3-6t+5)'=12t^2-6$　　: t 秒後の加速度

問１　$x(t)=2t^3-4t^2+5$ の場合に t 秒後の速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$ を求め、1 秒後の速度 $v(1)$, 加速度 $a(1)$ を求めよ。

$v(t)=$　　　　　　　　　　, 　$v(1)=$

$a(t)=$　　　　　　　　　　, 　$a(1)=$

例２　地上 10m の地点から初速 3 m/s で物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y(t)$ m とすると

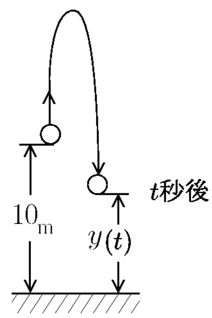
$y(t)=10+3t-4.9t^2$

となる。t 秒後の速度 $v(t)$, 加速度 $a(t)$ は

$v(t)=\frac{dy}{dt}=(10+3t-4.9t^2)'=3-9.8t$　　(m/s)

$a(t)=\frac{dv}{dt}=(3-9.8t)'=-9.8$　　$(\mathrm{m/s^2})$

である。



問２　地上 20m の地点から初速 5m/s で物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

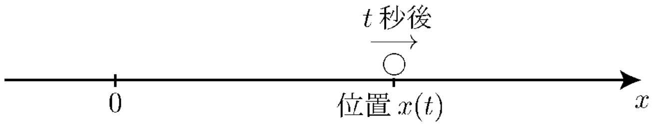
$$y(t)=20+5t-4.9t^2$$

となる。t 秒後の速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

$v(t)=$　　　　　　　　　　, 　$a(t)=$

< 等加速度運動 1 >

直線上を動く物体の t 秒後の位置を
$x(t)$ とすると



$$t \text{ 秒後の速度} \quad : \ v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$$

$$t \text{ 秒後の加速度} : \ a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) \qquad \left(= \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) \right)$$

である。もし加速度が時刻 t に無関係に一定の値であるとき，この運動を
等加速度運動という。このとき一定な加速度を a とすると

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \big(= v'(t) \big) = a \quad (a \text{ は } t \text{ に無関係な定数})$$

となる。

例　加速度が常に $5\,\mathrm{m/s^2}$ であるとき，速度 $v(t)$ を求めたい。

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = v'(t) = 5$$

である。微分して定数 5 になる関数が速度 $v(t)$ である。しかし
このような関数は ただ 1 つに定まらない。たとえば

$$\begin{aligned} (5t)' &= 5 \\ (5t+1)' &= 5 \\ (5t+2)' &= 5 \\ (5t+3)' &= 5 \end{aligned}$$

より $5t$，$5t+1$，$5t+2$，$5t+3$ はいずれも微分して 5 になる関数である。
このような関数の一般形は

$$5t + C \quad (C \text{ は定数})$$

と書くことができる。従って速度 $v(t)$ は

$$v(t) = 5t + C \quad (C \text{ は定数})$$

となる。この C の値は別に何らかの条件 (初速度等) がなければ定まらない。

問　加速度が常に $7\,\mathrm{m/s^2}$ である直線上の等加速運動の t 秒後の速度 $v(t)$ を
定数 C を用いて表せ。

＜等加速度運動 2 ＞

例題1　加速度が常に $5\,\mathrm{m/s^2}$ である直線上の等加速運動で，以下の場合に t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(1) 初速 $10\,\mathrm{m/s}$ のとき　　(2) 3 秒後の速度が $21\,\mathrm{m/s}$ であるとき

(解) (1) 加速度 $= a(t) = v'(t) = 5$ より，$v(t) = 5t + C$ （C は定数)
ここで初速度 $10\,\mathrm{m/s}$ とは $t = 0$ のとき $v = 10\,\mathrm{m/s}$ という意味であるから，$v(0) = 10$ より

$$t = 0 \text{ のとき} \quad v(0) = 5 \times 0 + C = C = 10$$

となる。従って

$$\underline{(\text{答})\ v(t) = 5t + 10}$$

(2) $v(t) = 5t + C$ で $t = 3$ のとき $v = 21$ から $v(3) = 21$ より

$$t = 3 \text{ のとき} \quad v(3) = 5 \times 3 + C = 21 \Rightarrow C = 6$$

$$\underline{(\text{答})\ v(t) = 5t + 6}$$

問 1　加速度が常に $7\,\mathrm{m/s^2}$ である直線上の等加速度運動で，以下の場合に t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(1) 初速 $6\,\mathrm{m/s}$ のとき　　(2) 2 秒後の速度が $25\,\mathrm{m/s}$ であるとき

$v(t) =$　　　　　　$v(t) =$

例題2　1 秒後の速度が $5\,\mathrm{m/s}$，3 秒後の速度が $13\,\mathrm{m/s}$ である直線上の等加速運動の加速度 a と t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(解) 加速度 $a(t) = v'(t) = a$ より　$v(t) = at + C$ (a と C は定数)
となる。条件より $v(1) = 5$，$v(3) = 13$ だから

$$\begin{cases} v(1) = a \times 1 + C = a + C = 5 \\ v(3) = a \times 3 + C = 3a + C = 13 \end{cases}$$

となる。この連立方程式を解くと $a = 4$，$C = 1$ であるから，

$$\underline{(\text{答})\ \text{加速度}\ a = 4\,(\mathrm{m/s^2}),\ t\ \text{秒後の速度}\ v(t) = 4t + 1\,(\mathrm{m/s})}$$

問 2　2 秒後の速度が $8\,\mathrm{m/s}$，5 秒後の速度が $17\,\mathrm{m/s}$ である直線上の等加速運動の加速度 a と t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

< 等加速度運動 3 >

例題 加速度が常に $6\,\mathrm{m/s^2}$ である直線上の等加速度運動で 1 秒後の速度が 5m/s, 1 秒後の位置が 7 m であるとき, t 秒後の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。

(解) 加速度 $= \dfrac{dv}{dt} = v'(t) = 6$ より $v(t) = 6t + C$ (C は定数)

ここで 1 秒後の速度が 5m/s より $v(1) = 5$ から

$$v(1) = 6 \times 1 + C = 5 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

よって t 秒後の速度 $v(t)$ は

$$\underline{\underline{v(t) = 6t - 1 \quad (t\text{ 秒後の速度})}}$$

t 秒後の位置 $x(t)$ を微分すると $v(t)$ になるから

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 6t - 1 \quad (= v(t))$$

となる。ここで微分の公式より

$$(t^2)' = 2t,\ (3t^2)' = 6t,\ (-t)' = -1,\ (\text{定数})' = 0$$

であるから

$$(3t^2 - t + \text{定数})' = 6t - 1$$

となる。従って

$$\underline{x(t) = 3t^2 - t + C \quad (C\text{ は定数})}$$

と考えられる。ここで条件より, 1 秒後の位置が 7 であるから $x(1) = 7$ より

$$x(1) = 3 \times 1^2 - 1 + C = 7 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

よって t 秒後の位置は

$$\underline{\underline{x(t) = 3t^2 - t + 5 \quad (t\text{ 秒後の位置})}}$$

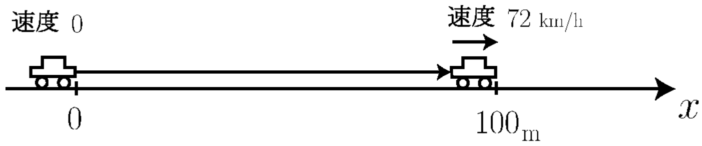
問 加速度が常に $8\mathrm{m/s^2}$ である直線上の等加速度運動で, 以下の場合に, t 秒後の速度 $v(t)$ と位置 $x(t)$ を求めよ。(ただし「初期」とは $t = 0$ を示す)

(1) 初期速度 5 (m/s)
初期位置 6 (m)

(2) 2 秒後の速度 23 (m/s)
2 秒後の位置 31 (m)

＜等加速度運動４＞

問１ 静止している車がまっすぐな道路を一定加速度で加速しながら走る。出発時点では速度０であったが，100m 走った時点で時速 72km になった。かかった時間（秒）と加速度を求めたい。以下の問に答えよ。



(1) 時速 72km を秒速 (m/s) になおせ。 72km/h ＝ $\boxed{}$ (m/s)

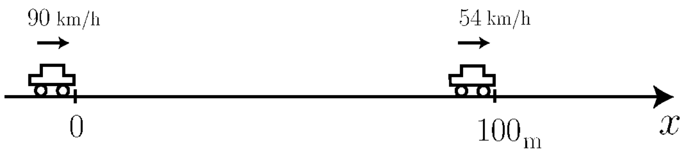
(2) 一定加速度を a (m/s^2) とする。$v(0)=0$ として t 秒後の速度 $v(t)$ を a と t で表せ。 $v(t)=$

(3) $x(0)=0$ として t 秒後の位置 $x(t)$ を a と t で表せ。

$x(t)=$

(4) t 秒後に 100m 走り $\big(x(t)=100\big)$，速度が $\boxed{}$ (m/s) になった $\big(v(t)=\boxed{}\big)$ として連立方程式を作り，t と a を求めよ。

問２ まっすぐな道路を時速 90km で走っていた車がブレーキをふんで減速し、100m 走った時点で時速 54km になった。このとき一定加速度で減速したとする。かかった時間 (秒) と加速度を求めたい。以下の問に答えよ。



(1) 90km/h , 54km/h を秒速 (m/s) になおせ。

90km/h ＝ $\boxed{}$ (m/s) , 54km/h ＝ $\boxed{}$ (m/s)

(2) ブレーキをふんだ時点を時刻０ ($t=0$) とする。一定加速度を a (m/s^2) として t 秒後の速度 $v(t)$ を t と a で表せ。

$v(t)=$

(3) $x(0)=0$ として t 秒後の位置を a と t で表せ。

$x(t)=$

(4) t 秒後に 100m 走り，速度が 54km/h ＝ $\boxed{}$ (m/s) になったとして連立方程式をつくり、t と a を求めよ。

< 練習 1 >

問 1 次の文の $\boxed{}$ の中に単位を含めて数量を記入せよ。

「加速度 2 m/s^2 で速度を上げると 1 秒間に $\boxed{}$，2 秒間に $\boxed{}$，3 秒間に $\boxed{}$ だけ速度が増える。」

問 2 車を 50 km/h で走らせている。車の速度を上げるために加速度 0.5 m/s^2 になるようにアクセルを踏み込んだ。

(1) 1 秒後，2 秒後，3 秒後の速度を時速で求めよ。

(2) 30 秒後の速度を時速で求めよ。

(3) t 秒後の速度を時速で求めよ。

(4) 時速が 158km/h になるのは何秒後か?

問 3 初速度 v_0 (km/h) で走らせていた車を加速度 a (km/h^2) で加速した。t (h) 後の速度 v (km/h) を求めよ。

問 4 初速度 v_0 (km/h) で走らせていた車を加速度 a (km/h^2) で加速した。t (s) 後の速度 v (km/h) を求めよ。

問 5 初速度 v_0 (km/h) で走らせていた車を加速度 a (m/s^2) で加速した。t (s) 後の速度 v (km/h) を求めよ。

問 6 初速度 v_0 (m/s) で走らせていた車を加速度 a (m/s^2) で加速した。t (s) 後の速度 v (m/s) を求めよ。また t (s) 間に進んだ距離 x (m) を求めよ。

＜ 練習 2 ＞

問 1 初速度 v_0 (m/s) で走らせていた車を一定の加速度で加速し，t (s) 後に速度 v_1 (m/s) になった。加速度を求めよ。また t (s) 間に進んだ距離 x (m) を求めよ。

問 2 初速度 v_0 (m/s) で走らせていた車を加速度 a (m/s^2) で加速した。速度 v_1 (m/s) になる時間 t (s) を求めよ。またこの時間に進んだ距離 x (m) を求めよ。

問 3 t (s) に進んだ距離 x (m) を次式

$$x = 2t^2 + 3t$$

で表せる。t (s) 後の速度・加速度を求めよ。

問 4 t (s) に進んだ距離 x (m) を次式

$$x = t^3 + 2t^2 + 3t$$

で表せる。t (s) 後の速度・加速度を求めよ。また,「加速度は一定」かまたは「時間とともに増える」か，どちらであるか答えよ。

問 5 t (s) に進んだ距離 x (m) を次式

$$x = at^3 + bt^2 + ct$$

で表せる。a，b，c の単位を求めよ。

＜ 直線の傾きと角度 ＞

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1,0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	——

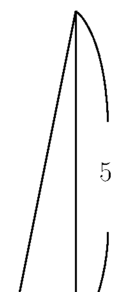
例　右図の直線①の傾きは５である。x 軸との角度を θ_1 とすると

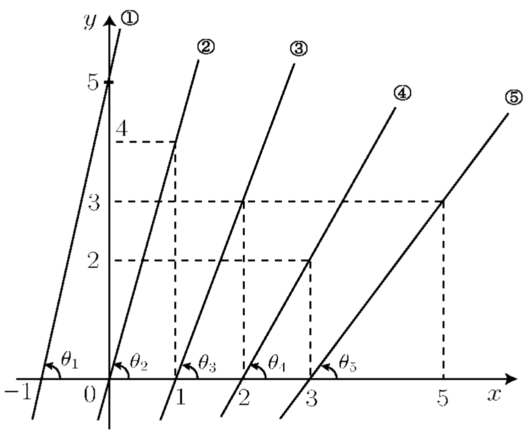
$$\tan\theta_1 = 5$$

であるから三角関数表より

$$\theta_1 \fallingdotseq 79^\circ$$

である。



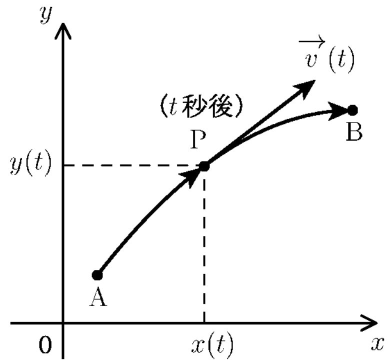


問　右図の直線②〜⑤の傾きと角度 θ_2〜θ_5 の近似値を求めよ。

② 傾き＝　　③ 傾き＝　　④ 傾き＝　　⑤ 傾き＝

$\theta_2 \fallingdotseq$　　$\theta_3 \fallingdotseq$　　$\theta_4 \fallingdotseq$　　$\theta_5 \fallingdotseq$

＜平面上の運動 1 ＞



座標平面上の点 P が点 A から点 B まで動くとする。t 秒後の点 P の位置 (座標) を

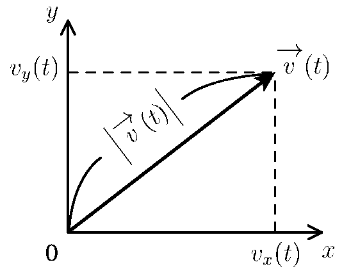
$$\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$$

とする。このとき t 秒後の速度を求めたい。
x 軸方向の速度 $v_x(t)$ は

$$v_x(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt} \qquad (x \text{ 軸方向の速度})$$

であり、y 軸方向の速度は

$$v_y(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt} \qquad (y \text{ 軸方向の速度})$$



である。このとき、$\big(v_x(t),\ v_y(t)\big)$ を成分とするベクトル

$$\boxed{\vec{v}(t) = \big(v_x(t), v_y(t)\big) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)} \qquad (t \text{ 秒後の速度})$$

を「t 秒後の速度ベクトル」、または単に「t 秒後の速度」という。このときの速度の大きさは

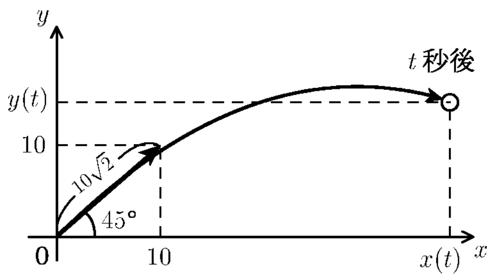
$$\boxed{\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{\big(v_x(t)\big)^2 + \big(v_y(t)\big)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \qquad (\text{速さ})$$

である。これを単に「速さ」という。

問 地上から 45 °の角度で速さ $10\sqrt{2}$ (m/s) で打ち出した物体の t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 10t \\ y(t) = 10t - 4.9t^2 \end{cases}$$

である。



(1) t 秒後の速度 $\vec{v}(t)$ と速さ $\left|\vec{v}(t)\right|$ を求めよ。

$\vec{v}(t) =$

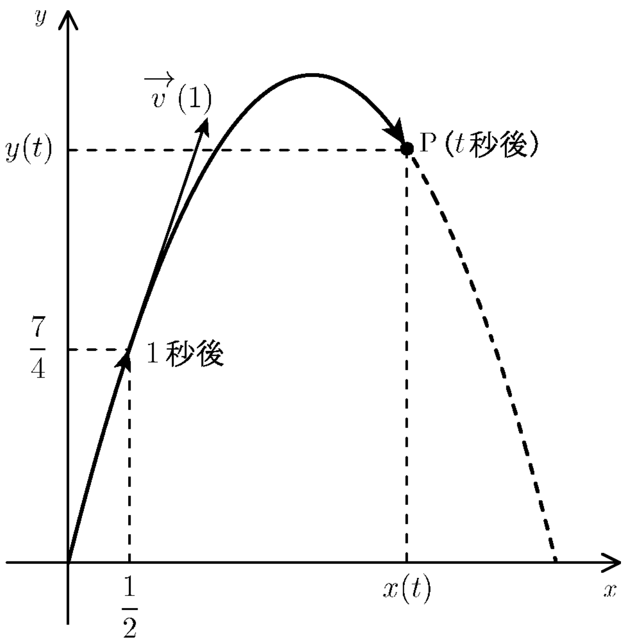
$\left|\vec{v}(t)\right| =$

(2) 1 秒後および 2 秒後の速度と速さを求めよ。

$\vec{v}(1) =$ 　　$\vec{v}(2) =$

$\left|\vec{v}(1)\right| =$ 　　$\left|\vec{v}(2)\right| =$

< 平面上の運動 2 >



例 座標平面上を動く点 P の t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ が

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{4}t^2 \end{cases}$$

である場合を考える。
1 秒後の位置は

$$\big(x(t), y(t)\big) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)$$

である。t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t)$ は

$$\overrightarrow{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{1}{2},\ 2 - \frac{1}{2}t\right)$$

より 1 秒後の速度は

$$\overrightarrow{v}(1) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

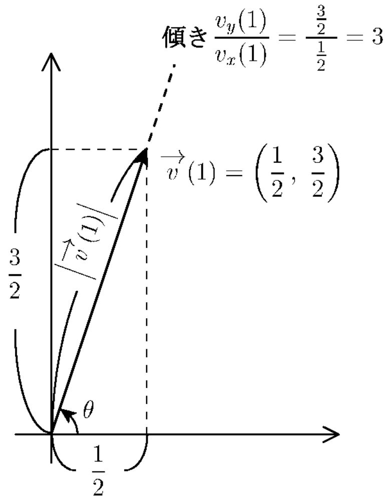
であり、速さ $\left|\overrightarrow{v}(1)\right|$ は

$$\left|\overrightarrow{v}(1)\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

である。x 軸からの角度を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{v_y(1)}{v_x(1)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

であるから三角関数表より $\theta \fallingdotseq 72\ °$である。



問 上の例の場合に以下の表を完成させよ。

時刻 t	0	1	2	3	4	6	8	t
位置 (x, y)		$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$						
速度 $\overrightarrow{v}(t)$		$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$						
速さ $\left\|\overrightarrow{v}(t)\right\|$		$\frac{\sqrt{10}}{2}$						
傾き $\frac{v_y(t)}{v_x(t)}$		3						
角度 θ		72 °						$\tan^{-1}\left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)}\right)$

＜平面上の運動3＞

例 前ページの例を考える。t 秒後の位置 $P\big(x(t), y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{4}t^2 \end{cases}$$

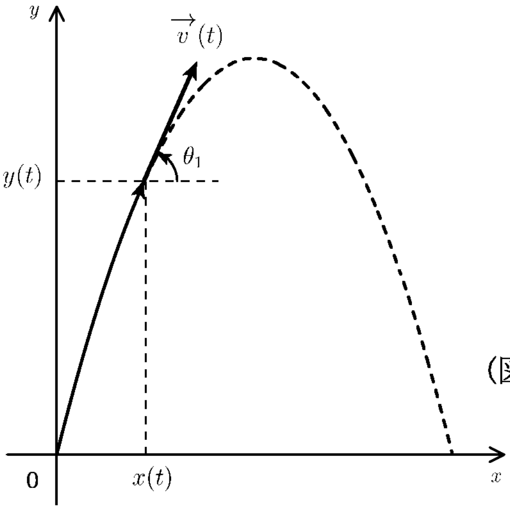
であった。従って t 秒後の速度 $\vec{v}(t) = \big(v_x(t),\ v_y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \left(\dfrac{1}{2}t\right)' = \dfrac{1}{2} \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = \left(2t - \dfrac{1}{4}t^2\right)' = 2 - \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

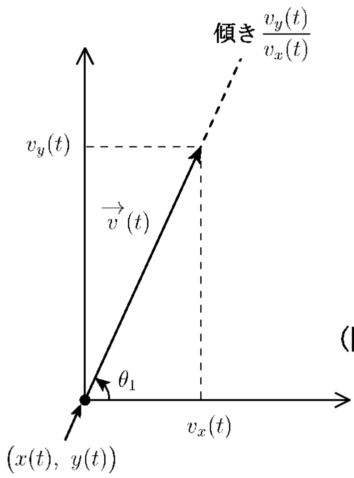
である。従って $\vec{v}(t)$ の傾きは (x 軸からの角度を θ_1 とすると)

$$傾き = \tan\theta_1 = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{2 - \frac{1}{2}t}{\frac{1}{2}} = 4 - t$$

となる。



(図1)



(図2)

一方、点 P の動いた軌道を表す曲線の式は

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}t \\ y = 2t - \dfrac{1}{4}t^2 \end{cases}$$

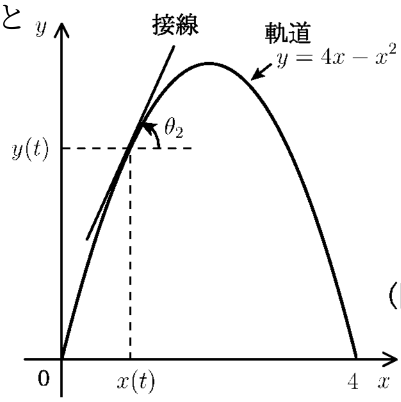
から t を消す ($t = 2x$ とおいて下の式に代入する) と

$$\boxed{y = 4x - x^2} \quad (軌道)$$

となる。これが軌道を表す曲線の式である。

この関数を $f(x)$ とおく。

$$\boxed{f(x) = 4x - x^2} \quad (軌道関数)$$



(図3)

問 上の例の場合に次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および以下の微分係数を求めよ。

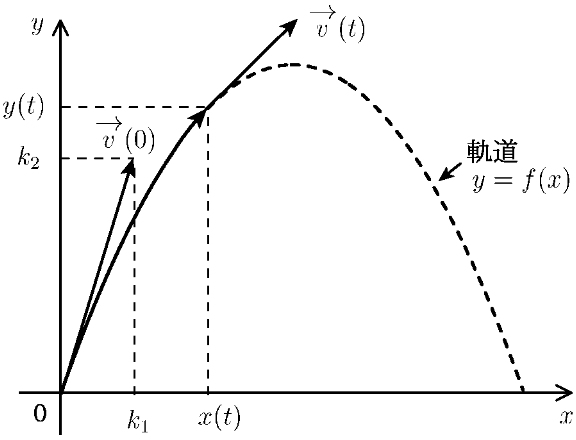
$f'(x) =$ 　　　, $f'(0) =$ 　　　, $f'(1) =$ 　　　, $f'(2) =$ 　　　, $f'(3) =$ 　　　, $f'(4) =$

(2) 前ページの結果および (1) の結果を用いて右の表を完成せよ。

t	0	2	4	6	8	t
x	0	1	2	3	4	$\frac{1}{2}t$
$\tan\theta_1 = \dfrac{v_y(t)}{v_x(t)}$		2				
$f'(x)$		2				

(3) 図1の角 θ_1 と図3の角 θ_2 が一致することを示せ。

＜平面上の運動 4＞



問 地上から初速 $\overrightarrow{v}(0) = (k_1, k_2)$ で打ち出した物体の t 秒後の水平距離を $x(t)$, 高さを $y(t)$ とすると、(空気抵抗を考えなければ)

$$\begin{cases} x(t) = k_1 t & \text{(水平距離)} \\ y(t) = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 & \text{(高さ)} \end{cases}$$

となる。ここで g は重力加速度 $g = 9.8\ (\mathrm{m/s^2})$ である。

(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$, 垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = \end{cases}$$

(2) t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t) = \big(v_x(t),\ v_y(t)\big)$ の傾き $\dfrac{v_y(t)}{v_x(t)}$ を求めよ。

$$\frac{v_y(t)}{v_x(t)} =$$

(3) $\begin{cases} x = k_1 t \\ y = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 \end{cases}$ から t を消去して、軌道曲線の式を求めよ。

(ただし $k_1 > 0$ とする)

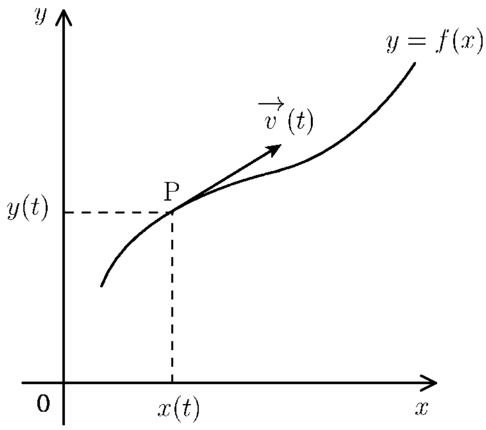
(4) (3) で求めた軌道関数を $f(x)$ とおく。導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$$f'(x) =$$

(5) $\dfrac{v_y(t)}{v_x(t)} = f'\big(x(t)\big)$ であることを示せ。

(注) (5) の式は $\overrightarrow{v}(t)$ の方向が軌道 $y = f(x)$ 上の点 $\big(x(t),\ y(t)\big)$ における接線と同じ方向であることを意味する。

＜ 平面上の運動 5 ＞



座標平面上の動点 P の t 秒後の位置 $\big(x(t),\ y(t)\big)$ に対し、x 軸方向の速度・加速度は

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad : \quad 速度$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) \quad : \quad 加速度$$

であり、y 軸方向の速度・加速度は

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = y'(t) \quad : \quad 速度$$

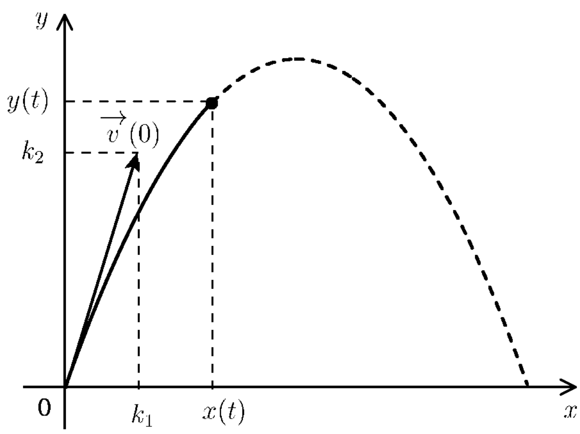
$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y''(t) \quad : \quad 加速度$$

である。これらを成分とするベクトルを

$$\overrightarrow{v}(t) = \big(v_x(t),\ v_y(t)\big) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) \quad : \quad 速度$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \big(a_x(t),\ a_y(t)\big) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) \quad : \quad 加速度$$

と表し、速度 $\overrightarrow{v}(t)$, 加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ と言う。



問　地上から初速 $\overrightarrow{v}(0) = (k_1,\ k_2)$ で打ち出した物体の t 秒後の水平距離を $x(t)$, 高さを $y(t)$ とすると、(空気抵抗を考えないとすれば)

$$\begin{cases} x(t) = k_1 t & (水平距離) \\ y(t) = k_2 t - \dfrac{g}{2}t^2 & (高さ) \end{cases}$$

となる。(ただし $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ である。)

(1)　t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t)$ を求め、右図に矢線で作図せよ。

$\overrightarrow{v}(t) =$

(2)　t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ を求め、右図に矢線で作図せよ。

$\overrightarrow{a}(t) =$

＜ 空間の速度・加速度 ＞

座標空間を動く点 P の時刻 t における位置を

$\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big)$　：　位置

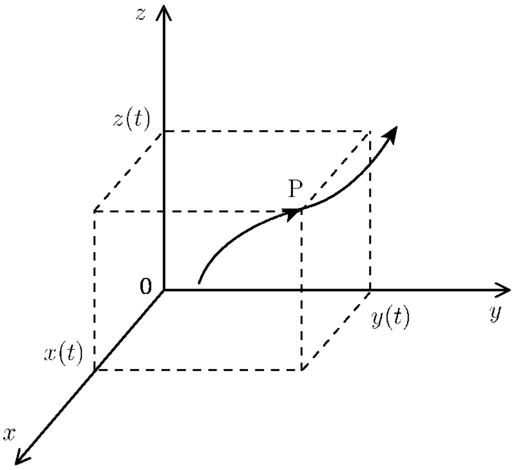
とすると、速度 $\overrightarrow{v}(t)$ は

$$\overrightarrow{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) \quad : \quad \text{速度}$$

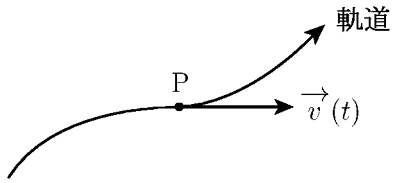
であり、加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ は

$$\overrightarrow{a}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right) \quad : \quad \text{加速度}$$

である。



(注) 速度 $\overrightarrow{v}(t)$ の方向は点 P のとおる軌道の接線方向と等しい。加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ の方向は場合によって異なる。



例　時刻 t における位置が

$\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = (t^3,\ 5t-1,\ -t^2+4t+10)$

のとき速度 $\overrightarrow{v}(t)$ と加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ は

$$\overrightarrow{v}(t) = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right) = (3t^2\,,\ 5\,,\ -2t+4)$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}\right) = (6t\,,\ 0\,,\ -2)$$

問　時刻 t における位置が以下の場合に速度 $\overrightarrow{v}(t)$ と加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ を求めよ。

(1) $\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = (4t+1\,,\ 2t-3\,,\ 5t+7)$

$\overrightarrow{v}(t) =$

$\overrightarrow{a}(t) =$

(2) $\big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = (3t\,,\ 4t\,,\ -5t^2+6t+10)$

$\overrightarrow{v}(t) =$

$\overrightarrow{a}(t) =$

< 不定積分 1 >

前ページでは位置から速度・加速度を求めた。これは微分である。
物理の問題は逆に加速度から速度や位置を求める問題が多い。これは
「微分の逆」=「不定積分」である。そこで，微分と不定積分の練習をする。
ここで変数はすべて時間変数 t を用いる。

関数 $F(t)$ の導関数が $f(t)$ であることを $\dfrac{dF}{dt} = f(t)$ とか $F'(t) = f(t)$ と表す。
これは微分である。逆に，微分すると $f(t)$ になる関数を原始関数という。
$F(x) = f(t)$ より

$$(F(t)+1)' = f(t),\ (F(t)+2)' = f(t),\ (F(t)+3)' = f(t)$$

となるので

$$F(t)+1,\ F(t)+2,\ F(t)+3,\ F(t)+4,\ \cdots$$

などは全て $f(t)$ の原始関数である。これらの原始関数は全て

$$F(t) + C \quad (C \text{ は任意の定数})$$

の形をしている。この原始関数の一般形を $f(t)$ の不定積分といい

$$\text{不定積分} \quad \boxed{\int f(t)dt = F(t) + C} \quad (C \text{ は任意の定数})$$

という記号で表す。これをまとめると

< 微分 > < 積分 >

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = F'(t) = f(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\int f(t)dt = F(t) + C}$$

となる。

例 < 微分 > < 積分 >

$$(t^n)' = nt^{n-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \int nt^{n-1}dt = t^n + C$$

$$(t^4 + 5t^3)' = 4t^3 + 15t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \int (4t^3 + 15t)dt = t^4 + 5t^3 + C$$

問 以下の微分を求め，不定積分の式に書きなおせ。

< 微分 > < 積分 >

$$\left(\frac{1}{4}t^4\right)' = \quad \Longleftrightarrow \quad \int t^3 dt =$$

$$\left(\frac{1}{5}t^5\right)' = \quad \Longleftrightarrow \quad \int t^4 dt =$$

$$\left(\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right)' = \quad \Longleftrightarrow \quad \int t^n dt =$$

< 不定積分 2 >

問 1　以下の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 0\,dt =$

(2) $\displaystyle\int 1\,dt =$

(3) $\displaystyle\int t\,dt =$

(4) $\displaystyle\int t^2\,dt =$

(5) $\displaystyle\int t^3\,dt =$

(6) $\displaystyle\int t^4\,dt =$

(7) $\displaystyle\int (4t+6)\,dt =$

(8) $\displaystyle\int (5t^2-7t+3)\,dt =$

例題　次の条件をみたす関数 $x(t)$ を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 3t+4 \ , \qquad x(2) = 5$$

(解)　$\displaystyle x(t) = \int x'(t)\,dt = \int (3t+4)\,dt = \frac{3}{2}t^2 + 4t + C$

ここで、条件より $x(2)=5$ だから

$$x(2) = \frac{3}{2}\times 2^2 + 4\times 2 + C = 14 + C = 5$$

より $C = 5 - 14 = -9$　　よって　(答) $\displaystyle x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 4t - 9$

(注) 正確には微分したものを積分すると定数だけ異なる。すなわち

$$\int x'(t)\,dt = x(t) + C$$

であるが，上記の問題では、$\displaystyle\int x'(t)\,dt$ に積分定数 C が含まれているので

$$x(t) = \int x'(t)\,dt$$

としてよい。

問 2　次の条件をみたす関数 $x(t)$ を求めよ。

(1) $\displaystyle\frac{dx}{dt} = 4t+5 \ , \qquad x(0) = 7$

(2) $\displaystyle\frac{dx}{dt} = 5t-3 \ , \qquad x(1) = 6$

＜ 求積法 1 ＞

問 1　定数 a，b，c に対して次の条件をみたす関数 $x(t)$ を求めよ。

$$\frac{dx}{dt} = at + b \ , \qquad x(0) = c$$

(解)

例題　次の条件を満たす関数 $x(t)$ を求めよ。

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 5 \ , \qquad x(2) = 6 \ , \qquad x'(2) = 7$$

(解) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x''(t) = \big(x'(t)\big)'$ より

$$x'(t) = \int x''(t)dt = \int 5dt = 5t + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

$$x(t) = \int x'(t)dt = \int (5t + C_1)dt = \frac{5}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

ここで，条件 $x(2) = 6$，$x'(2) = 7$ より

$$\begin{cases} x(2) = \dfrac{5}{2} \times 2^2 + C_1 \times 2 + C_2 = 6 & \cdots ① \\ x'(2) = 5 \times 2 + C_1 = 7 & \cdots ② \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 = -4 & \cdots ①' \\ C_1 = -3 & \cdots ②' \end{cases}$$

この連立方程式から　$C_1 = -3$，$C_2 = 2$ が求まる。

(答)　$x(t) = \dfrac{5}{2}t^2 - 3t + 2$

(注) 上記のような微分の項がある方程式を**微分方程式**という。
この例題のように不定積分を求めることによって微分方程式をみたす
関数を求めることを**求積法**という。

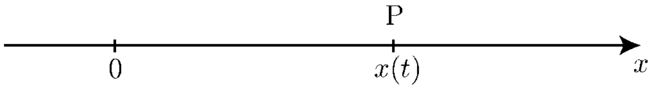
問 2　次の条件をみたす関数 $x(t)$ を求めよ。

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 3 \ , \qquad x(0) = 4 \ , \qquad x'(0) = 5$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4 \ , \qquad x(1) = 6 \ , \qquad x'(1) = 7$

＜求積法 2＞

数直線上を動く点 P の
t 秒後の位置を $x(t)$ とすると



$$t\text{ 秒後の速度}\quad v(t)=\frac{dx}{dt}=x'(t)$$

$$t\text{ 秒後の加速度}\ a(t)=\frac{dv}{dt}=v'(t)=x''(t)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

である。物理の問題では，加速度がわかっていて，速度と位置を求める問題が多い。

例題 加速度 $a(t)=5\,(\mathrm{m/s^2})$ で直線上を動く等加速度運動で，t 秒後の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ を求めたい。2 秒後の位置が $x(2)=5$，2 秒後の速度が $v(2)=3$ であるとき，$v(t)$ と $x(t)$ を求めよ。

(解) $v'(t)=a(t)=5$ より $v(t)=\int a(t)dt=\int 5dt=5t+C_1$

$x'(t)=v(t)=5t+C_1$ より $x(t)=\int v(t)dt=\int(5t+C_1)dt=\frac{5}{2}t^2+C_1t+C_2$

条件より

$$\begin{cases} x(2)=\frac{5}{2}\times 2^2+C_1\times 2+C_2=5 & \cdots ① \\ v(2)=5\times 2+C_1=3 & \cdots ② \end{cases}$$

から

$$\begin{cases} 2C_1+C_2=-5 \\ C_1=-7 \end{cases}$$

となるので $C_1=-7$，$C_2=9$ が求まる。

(答) t 秒後の速度 $v(t)=5t-7$，　t 秒後の位置 $x(t)=\frac{5}{2}t^2-7t+9$

問 数直線上を動く点が以下の場合に，t 秒後の位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ。(ただし「初期」とは $t=0$ のことである)

(1) 加速度 $=-9.8$
初期位置 10
初期速度 8

(2) 加速度 $=8$
1 秒後の位置 7
1 秒後の速度 6

< 求積法 3 >

問 直線上を等加速度で運動している点の t 秒後の位置を $x(t)$，速度を $v(t)$，加速度を a とする。以下の場合に $x(t)$，$v(t)$，a を求めよ。

(1) 初期位置，1 秒後の位置，2 秒後の位置がそれぞれ

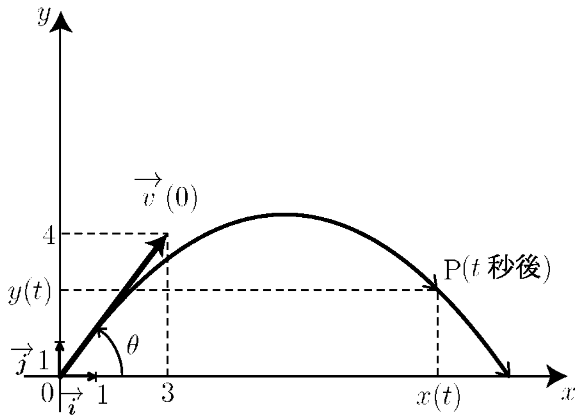
$$x(0) = 0, \qquad x(1) = 3, \qquad x(2) = 10$$

である場合に $x(t)$，$v(t)$，a を求めよ。

(2) 初期位置 0，初期速度 0 であるとき T 秒後の位置が 50 で，T 秒後の速度が 20 である場合に $x(t)$，$v(t)$，a，T を求めよ。

(3) 初期位置 0，初期速度 30，T 秒後の位置が 100 で，T 秒後の速度が 10 である場合に $x(t)$，$v(t)$，a，T を求めよ。

＜ 求積法 4 ＞



問 座標平面上の点 P の t 秒後の位置を $(x(t), y(t))$ とおく。

初期位置 $(x(0), y(0)) = (0, 0)$,

初期速度 $\overrightarrow{v}(0) = 3\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

t 秒後の加速度 $-10\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

とする。以下の問に答えよ。

(1) 初期速度の大きさ $|\overrightarrow{v}(0)|$ を求めよ。

(2) 初期速度 $\overrightarrow{v}(0)$ の x 軸からの角度 θ を三角関数表から求めよ。

(3) t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}(t) = x''(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y''(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = -10\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ から $x''(t)$ と $y''(t)$ に関する方程式を導け。

$x''(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$, $\qquad$ $y''(t) =$

(4) 初期条件 $\overrightarrow{v}(0) = 3\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ と (3) 式より t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t) = x'(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y'(t)\,\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ を求めよ。

$x'(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$, $\qquad$ $y'(t) =$

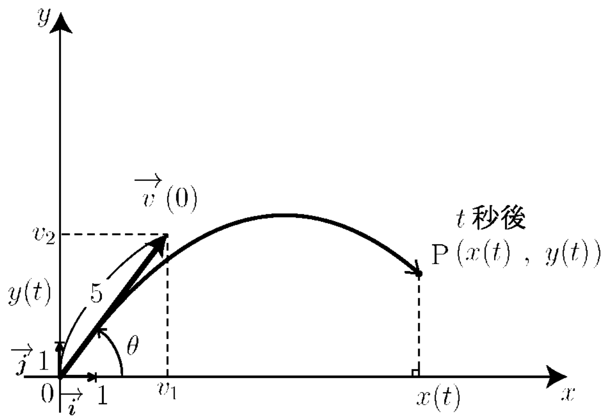
(5) t 秒後の位置 $(x(t), y(t))$ を求めよ。

$x(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$, $\qquad$ $y(t) =$

(6) 点 P の軌道を求めよ。((5) で求めた式から t を消去して、y を x で表せ)

(7) t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t)$ と加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ を右上図内に (点 P を始点とするベクトルとして) 作図せよ。

＜ 求積法 5 ＞



問 座標平面上の点 P が右図のように動くとする。t 秒後の位置を $(x(t)\ ,\ y(t))$ とし、t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}(t)$ を

$$\overrightarrow{a}(t) = x''(t)\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y''(t)\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = -9.8\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

とする。また初期位置は原点 $(0, 0)$ とする。初期速度 $\overrightarrow{v}(0)$ は大きさ 5

$$\left|\overrightarrow{v}(0)\right| = 5$$

で右図のように x 軸からの角度を θ とする。 $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) $\overrightarrow{v}(0) = v_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + v_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ とおく。成分 v_1, v_2 を θ を用いて表せ。

$v_1 =$, $v_2 =$

(2) t 秒後の加速度 $\overrightarrow{a}(t) = x''(t)\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y''(t)\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = -9.8\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ から $x''(t)$ と $y''(t)$ に関する方程式を導け。

$x''(t) =$, $y''(t) =$

(3) 初期条件 $\overrightarrow{v}(0) = v_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + v_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ と (2) 式より t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t) = x'(t)\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + y'(t)\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ を θ を用いて表せ。

$x'(t) =$, $y'(t) =$

(4) t 秒後の位置 $(x(t), y(t))$ を θ を用いて表せ。

$x(t) =$, $y(t) =$

(5) 点 P の軌道（放物線）の頂点に達するのは何秒後か?
θ を用いて表せ。

＜力と運動 1＞

止っている物体に力が加わらなければ止ったままである。等速度で直進している物体に力が加わらなければ速度は変わらない。全ての物体は、外から力が加えられない限り、静止状態または直線的な等速運動を続ける。これを「慣性の法則」という。

逆に物体に外から力が加わると、物体の速度は変化する。すなわち加速度が生じる。この加速度の大きさは力に比例し、物体の質量に反比例する。力を F, 加速度を a, 質量を m で表すと

$$\boxed{F = ma} \qquad \text{(力 = 質量 × 加速度)}$$

の関係がなりたつ。質量 m の単位を kg, 加速度 a の単位を $\mathrm{m/s^2}$ とすると、力 F の単位は $\mathrm{kgm/s^2}$ である。この単位 $\mathrm{kgm/s^2}$ を略して N（ニュートン）という記号を使うこともある。

$$\boxed{1\mathrm{kgm/s^2} = 1N\ \text{（ニュートン）}} \ \text{（力の単位）}$$

例 1　質量 2kg の物体にある力 F が加わって、速度が変化し、加速度 $5\mathrm{m/s^2}$ が生じた。この力 F は

$$F = 2_{(\mathrm{kg})} \times 5_{(\mathrm{m/s^2})} = 10\mathrm{kgm/s^2} \quad (= 10N)$$

問 1　質量 100kg の物体にある力 F が加わって速度が変化し、加速度 $7\mathrm{m/s^2}$ が生じた。この力 F を求めよ。

問 2　質量 10g の物体にある力 F が加わって速度が変化し、加速度 $100\mathrm{m/s^2}$ が生じた。この力 F を求めよ。

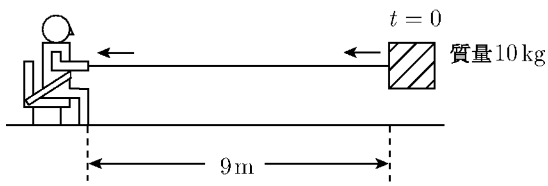
例 2　質量 4kg の物体に $20\mathrm{kgm/s^2}$ の力が加わって速度が変化した。生じた加速度 a は

$$a = \frac{F}{m} = \frac{20}{4} = 5(\mathrm{m/s^2})$$

問 3　質量 10kg の物体に $200\mathrm{kgm/s^2}$ の力が加わって速度が変化した。
生じた加速度 a を求めよ。

< 力と運動 2 >

例題 宇宙飛行士が宇宙船内の席に固定されたまま 10kg の物体をひもで引っぱりよせようとしている。物体は宇宙飛行士の席から 9m 離れて静止している。宇宙船の内部は無重力とする。ひもを常に 5(N) の力で引っぱり続けるとき、何秒後に物体は飛行士の席に着くか？



(解) 物体に常に $F=5(N)$ の力がかかっている。

$$F=ma=10a=5$$

であるから、物体にかかる加速度は $a=\frac{1}{2}(\mathrm{m/s^2})$ である。
物体の t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

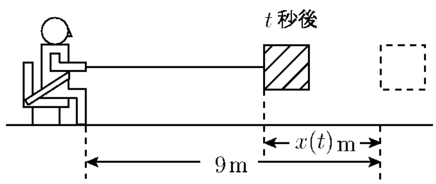
$$v(t)=\int a\,dt=\int \frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}t+C$$

であるが初期速度は 0 であるから $v(0)=0$ より $C=0$ となり、

$$v(t)=\frac{1}{2}t \qquad (\mathrm{m/s})$$

となる。t 秒後に物体が $x(t)$ (m) 近づいたとすると

$$x(t)=\int v(t)dt=\int \frac{1}{2}t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C$$



であるが $x(0)=0$ より $C=0$ となり

$$x(t)=\frac{1}{4}t^2$$

となる。そこで t 秒後に飛行士の席に着くとすると

$$x(t)=\frac{1}{4}t^2=9$$

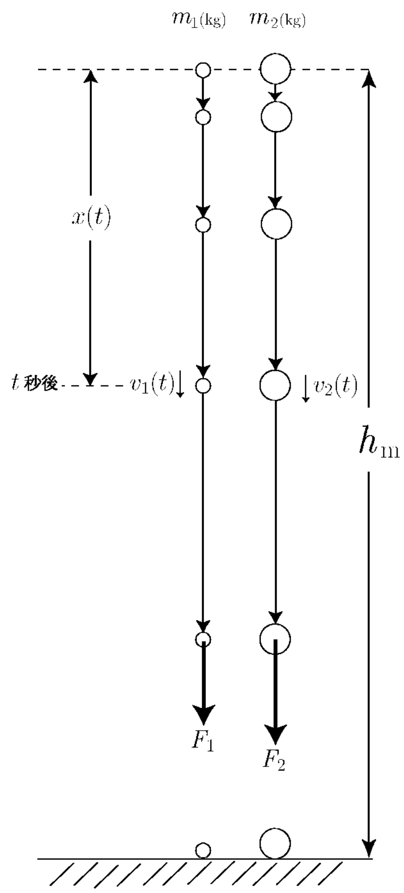
より

$$t^2=36 \quad \Rightarrow \quad t=6 \qquad \underline{\text{(答) 6 秒後}}$$

問 宇宙飛行士が宇宙船内の席に固定されたまま質量 40kg の物体をひもで引っぱりよせようとしている。物体は宇宙飛行士の席から 9m 離れて静止している。宇宙船の内部は無重力とする。ひもを常に 5(N) の力で引っぱり続けるとき、何秒後に物体は飛行士の席に着くか？

＜重力１＞

同じ高さから重いものと軽いものを同時に落とすと (空気抵抗がなければ) 同じ落下速度で落ちていく。ストロボ写真の落下状態から等加速度運動であることがわかる。ガリレオはピサの斜塔の上から木の玉と鉛の玉を同時に手放してもらい、それらがほぼ同時に地面に落下したことを確認している。この実験をもとに重いものと軽い物の落下加速度が同じであることを数式で証明したい。



問 地上 h (m) の高さから軽い玉 (質量 m_1 (kg)) と重い玉 (質量 m_2 (kg)) を同時に手離した。軽い玉には重力 F_1 がかかり、重い玉には重力 F_2 がかかるとする。軽い玉の落下加速度を a_1、重い玉の落下加速度を a_2 とすると。

$$F_1 = m_1 a_1 \qquad , \qquad F_2 = m_2 a_2$$

である。

(1) t 秒後の落下速度を $v_1(t), v_2(t)$ とする。初期速度を 0 として、$v_1(t), v_2(t)$ を a_1 , a_2 と t で表せ。(等加速度運動とする)

$v_1(t) =$, $v_2(t) =$

(2) t 秒後にそれぞれ $x_1(t)(\mathrm{m}), x_2(t)(\mathrm{m})$ 落下したとする。$x_1(0) = x_2(0) = 0$ として $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とを a_1 , a_2 と t で表せ。

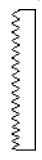
$x_1(t) =$, $x_2(t) =$

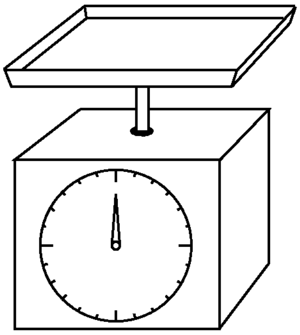
(3) T 秒後に地面に同時に落ちたとする。$x_1(T) = x_2(T) = h$ である。この式から $a_1 = a_2$ であることを示せ。

(4) $a_1 = a_2 = a$ とおくとき、次の値を a で表せ。

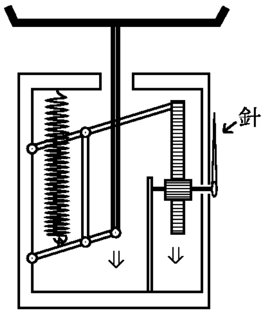
$\dfrac{F_1}{m_1} =$, $\dfrac{F_2}{m_2} =$

＜重力 2＞

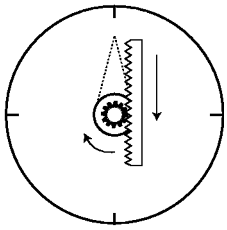
軽い物を計る簡単な「ばね秤（はかり）」(図 1) の内部は図 2 のようになっている。秤の上に物をのせると支柱が下がり同時に  が下がり (図 3) 歯車をまわし、針が回転する。



ばね秤（図1）



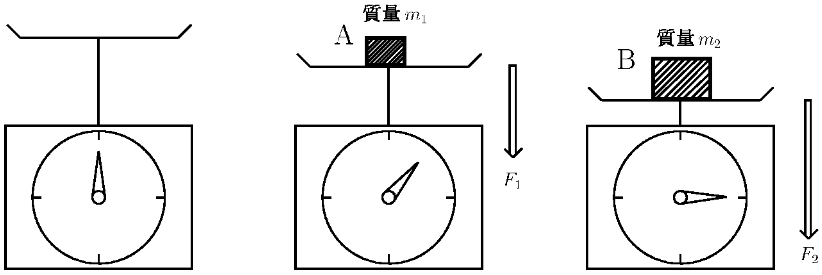
内部（図2）



(図3)

「ばね秤」を上から手で押すと針は大きく回転する。これは「ばね」の「伸び」が力に比例するからである。これを「フックの法則」という。この性質を利用して「ばね秤」が作られている。

「ばね秤」の上に質量 m_1(kg) の物体 A をのせると、重力 F_1 が「ばね秤」のばねを伸ばし、針を回転させる。A のかわりに A より重い物体 B(質量 m_2(kg)) をのせると重力 F_2 がばねを伸ばし針はより大きく回転する。

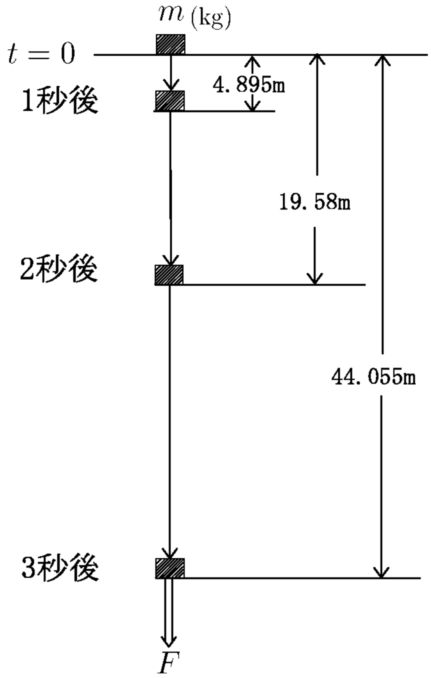


問 (1) 物体 A を「秤」の上にのせて、手を離した瞬間に A は「秤」の受け皿を下に押しその後受け皿は下に向かって動く。この瞬間の A の加速度を a_1 とするとき、F_1 を m_1 と a_1 で表せ。

(2) 物体 B を「秤」の上にのせて、手を離した瞬間に B は「秤」の受け皿を下に押す。この瞬間の B の加速度 a_2 とするとき、F_2 を m_2 と a_2 で表せ。

(3) $\dfrac{F_1}{m_1}$ と $\dfrac{F_2}{m_2}$ の大小関係を (不等号 $<$, $>$, または等号=で) 示せ。

＜ 重力 3 ＞



ある場所で、質量 m(kg) の物体を静かに落下させたら右図のようになった。時間と落下距離は

1 秒後に 4.895(m)

2 秒後に 19.58(m)

3 秒後に 44.055(m)

となった。

問 1　落下加速度を a(a は定数) とするとき、

(1) t 秒後の落下速度 $v(t)$ を a を用いて表せ。

$v(t) =$

(2) t 秒後に $x(t)$(m) 落下したとする。$x(t)$ を a を用いて表せ。

$x(t) =$

(3) 上の実験結果から落下加速度 a を求めよ。

$a=$

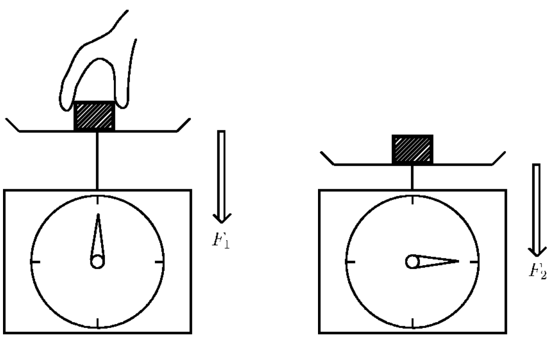
(4) 1 秒後の落下速度を求めよ。

(5) 4 秒後の落下距離を求めよ。

(6) この実験の場合に質量 m(kg) にかかる重力 F を求めよ。

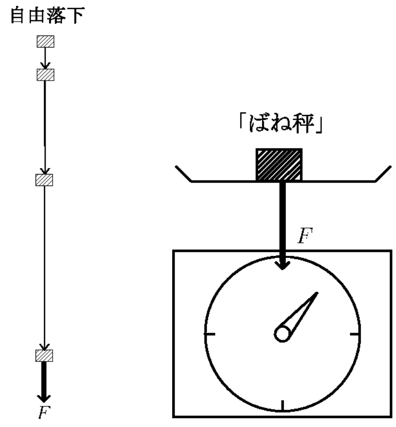
$F =$

問 2　上と同じ場所で同じ物体 (質量 m(kg)) を「ばね秤」上にのせようとしている (図 1) とき、この物体にかかる重力を F_1 とする。「ばね秤」の上にのせてしばらくして「ばね秤」の針の「ゆれ」がおさまった (図 2) とき、この物体にかかる重力を F_2 とする。F_1 と F_2 を求めよ。



(図1)　(図2)

＜重力4＞



地球上での落下加速度は場所によって少しずつ異なるが、平均すると約 9.8(m/s^2) である。これを地球の**重力定数**といい

$$\boxed{g = 9.8(\mathrm{m/s^2})}$$

で表す。重力は物体が自由落下するときも、「ばね秤」の上にのっているときも同じ力で物体を (地球の中心に向けて) 引っ張る。質量 m(kg) の物体にかかる重力 F は

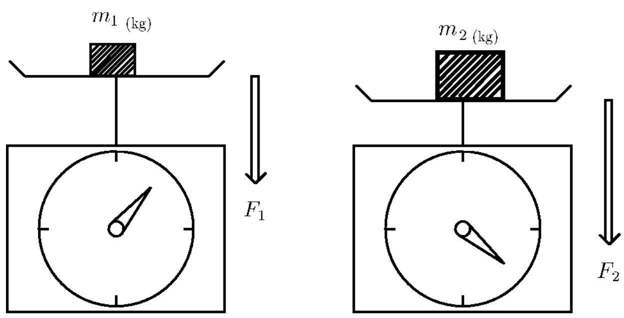
＜**地球の重力**＞ $\boxed{F = mg}$ $(\mathrm{kg\ m/s^2} = N)$

である。

問1 質量 m_1(kg) の物体にかかる重力を F_1 とし、質量 m_2(kg) の物体にかかる重力を F_2 とする。

$$\frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2}$$

であることを示せ。



質量 m(kg) の物体にかかる地球の重力 $F = mg(N)$ を地球上での「**重量**」という。

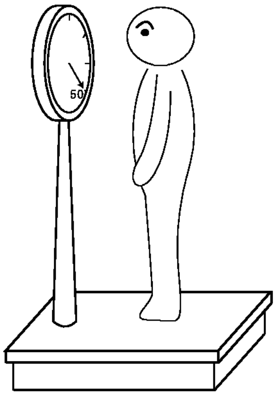
$$\boxed{\text{地球上での重量} = mg(=\text{質量} \times g)}$$

問2 以下の物体の地球上での重量を求めよ。

(1) 質量 10kg の物体

(2) 質量 60kg の物体

＜重力 5＞

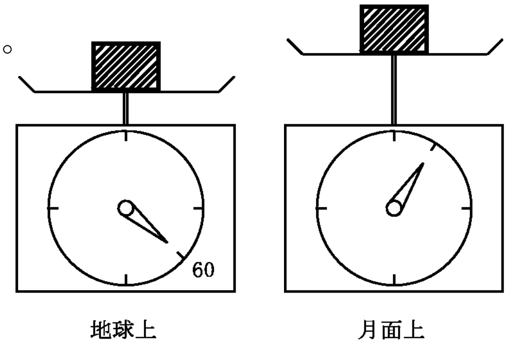


例 1 50kg の体重の人が体重計にのると針は 50(kg) を示す。この人の質量は 50(kg) であり、地球上での重量は

$$F = 50 \times 9.8 = 490(N)$$

である。

問 1 ある物体を地球上の「ばね秤」ではかったら、針が 60kg を示していた。



(1) この物体の質量を求めよ。

(2) この物体の重量を求めよ。

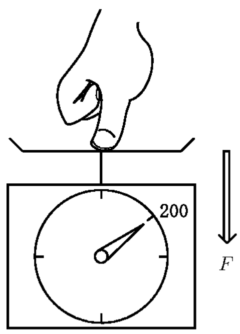
(3) この物体と「ばね秤」を月面上に持っていった。月の重力は地球の重力の約 $\frac{1}{6}$ である。この物体を「ばね秤」にのせたとき、針は何 kg をさすか？

(4) この物体の月面上での重量を求めよ。

例 2 ある人が「ばね秤」の受け皿を上から下に向かって指で押したら「ばね秤」の針は 200g 示していた。このとき指で押す力は 200g=0.2(kg) の物体が「ばね秤」を重力によって押す力に等しいのでこの力 F は

$$F = 0.2 \times 9.8 = 1.96(N)$$

である。



問 2 例 2 と同様に「ばね秤」と指で押した。この時押す力が $F = 1(N)$ であったとすると、「ばね秤」は何 g を示すか？

＜力のつりあい 1＞

例 天井からつるした「ばね秤」を手で引っぱると「ばね秤」の目もりが m(kg) を示した (図 1)。手が引っぱった力 F_1 は質量 m(kg) の物体を「ばね秤」につるした時の物体にかかる重力 F_1(図 2) に等しい。この力 F_1 は重力定数 $g = 9.8(\mathrm{m/s^2})$ を用いて

$$F_1 = mg$$

と表される。

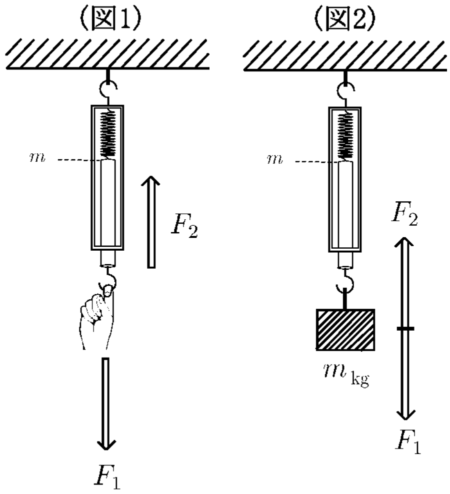
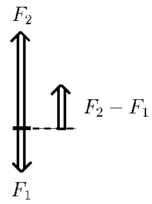
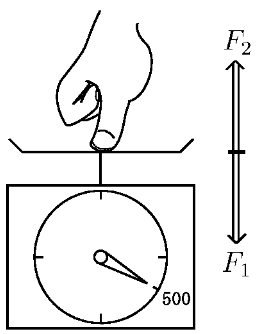


図 1 の場合、ばね秤を引っ張っている指は「ばね」によって上に引っぱられる力を感じる。この力を F_2 とする。この力 F_2 は図 2 で物体を上に引っ張る力と同じである。図 2 の物体が静止している状態のとき、この物体にかかる力は F_1 と F_2 だけであり、**F_1 と F_2 の力の大きさは同じで、向きは反対**である。これを「作用・反作用の法則」という。このとき 2 つの力 F_1 と F_2 は「つりあう」という。

(もし F_1 と F_2 の力の大きさが異なっていたら物体は静止していない。
例に F_2 の方が F_1 より大きければ物体は $F_2 - F_1$ だけ上向きに力がかかり、上向きに加速度がかかり、上に向かって動き出す。
逆に F_1 の方が F_2 より大きければ、物体は下に向かって動き出す。)



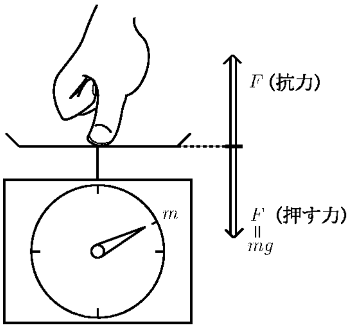
問 右図のような「ばね秤」の上から受け皿を下に向かって指で押したらばね秤の針が 500g を示した。この指がばね秤を押す力 F_1 を求めよ。



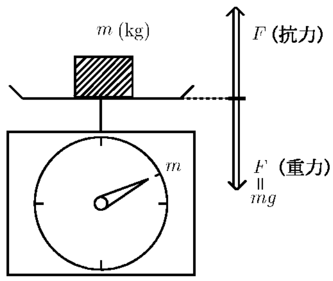
この問で指が F_1 の力でばね秤を押しているとき、指は「ばね秤」によって上に押しもどそうとする力 F_2 を感じる。この力 F_2 は F_1 と同じ大きさで向きが反対である。F_2 を「指」が「ばね秤」から受ける「抗力」という。

＜力のつりあい 2 ＞

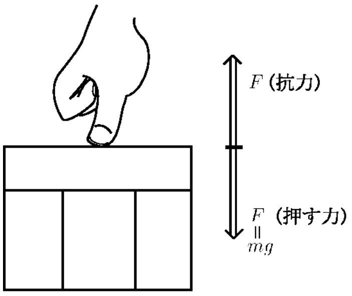
例 1 図 1 のようにばね秤の上から指で押したら秤の針が m kg を示した。これは図 2 のように秤の上に m kg の物体をのせた時と同じである。従って図 1 の指で押す力 F は図 2 の物体がかかる重力 mg に等しい。図 1 の場合、指は「ばね秤」のばねによって上に押しもどそうとする力を感じる。この力をばね秤の「抗力」という。この抗力はばねを押す力 $F = mg$ と等しい。



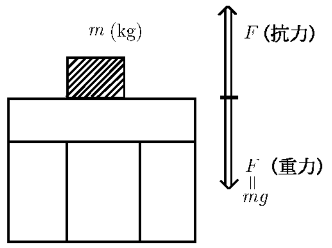
(図1)



(図2)



(図3)

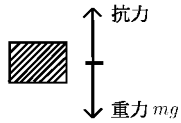


(図4)

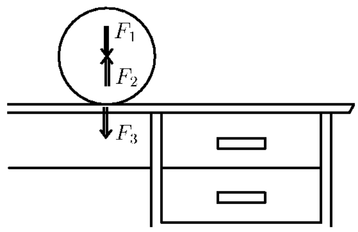
例 2 図 3 は木の台の上から力 $F = mg$ で下に向かって指で押しているところである。このとき指は図 1 の場合と同様な「抗力」を受ける。図 4 は図 3 と同じ木の台の上に質量 m kg の物体をのせたところである。物体は重力 mg によってこの台を上から下に向けて押す。これに対して「木の台は物体を同じ力で押し返す」と考える。

(注 1) 図 4 の場合に抗力が重力と同じ大きさで (向きが反対) であることをイメージするのは難しい。図 2 の場合は重力と抗力が同じ大きさにならないと力の大きい方向に動き出すはずであるから、抗力は重力と等しくなる。図 4 のような場合は「非常にかたいばね秤」と考えてほしい。

(注 2) 図 4 の物体に働く力は重力 mg と木の台からの抗力であるこの重力と抗力がつりあっている。

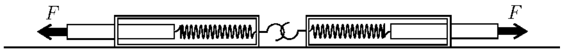


例 3 右図のように水平な机の上に置かれた球が静止している場合、球に働く力は重力 F_1 と机から上向きに働く力 F_2 で、F_1 と F_2 はつりあっている。球が机に及ぼす力 F_3 は机が球に及ぼす力 F_2 の反作用であり、F_2 と大きさは同じく向きは反対である。F_1 の反作用は地球の中心に働いている。

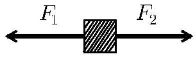


＜力のつりあい 3＞

例 1 水平に置いた

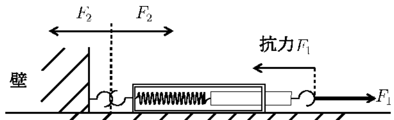


2 個のばね秤を左右に同じ力 F で引っぱり合った。ばね秤が静止した時、2 つのばね秤の目もりは同じであった。このことは次のことを意味する。ある物体に 2 つの力 F_1 と F_2 が



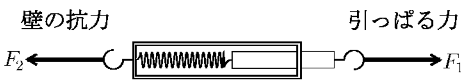
働いて、つりあっている場合、F_1 と F_2 の大きさは等しく、向きは同一直線で互いに逆向きである。

例 2 右図のようにばね秤を水平においで左端を壁に固定する。

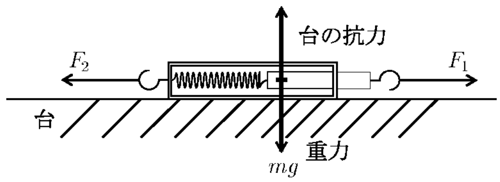


このばね秤の右端を力 F_1 で引っぱり続けて、ばね秤の目もりが一定の位置に静止したとする。このときばねの抗力によって同じ力 F_1 で引っぱり返そうとする。このばね秤が壁を引っぱる力を F_2 とすると、壁は同じ力 F_2 で引っぱり返そうとする。このとき F_1 と F_2 の力の大きさは等しい。

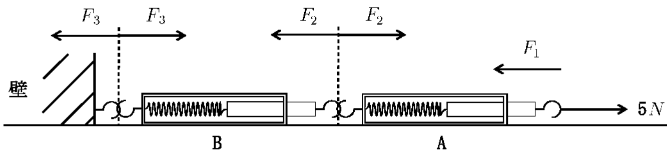
（ばね秤に働く力は引く力 F_1 と壁の抗力 F_2 であり、F_1 と F_2 がつりあっているから、F_1 と F_2 の大きさは等しい）



(注) ばね秤自体の重さ m(kg) を考えるとばね秤にかかる重力と台の抗力が存在するが、この 2 つの力はつりあっているので無視してよい。

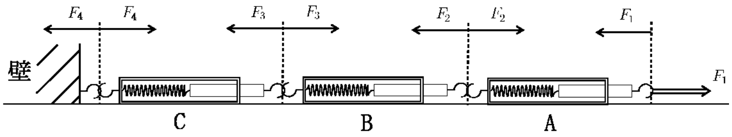


問 右図のように 2 つのばね秤をを水平につないでばね秤 A を右に $5N$ の力で引く。この力の抗力を F_1、A が B を引く力を F_2、B が壁を引く力を F_3 とする。F_1, F_2, F_3 を求めよ。



< 力のつりあい 4 >

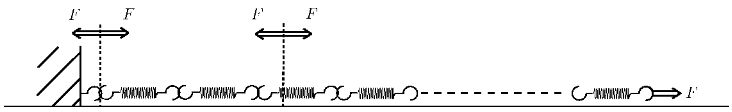
例 1 右図のように 3 つのばね秤 A,B,C を水平につないで右端を壁に固定し、A を右に力 F_1 で引く。A が B を引く力を F_2、B が C を引く力を F_3、C が壁を引く力を F_4 とすると



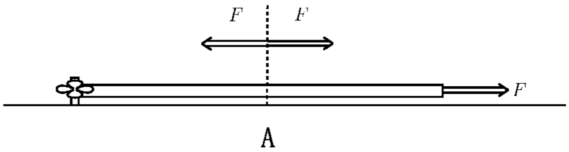
$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

である。このような場合は「ばね秤」の数がどんなに多くても同じである。

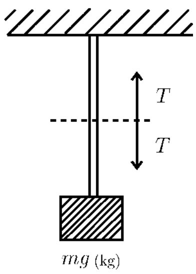
例 2 ばねを何本か水平につないで左端を壁に固定し、右端を力 F で引く。引いた瞬間はばねが伸び縮みをして左右に動くが、しばらくすると静止する。静止したとき、ばねをつないでいる結合部分に働く力は右に引っ張る力とその抗力 (左に引く力) がつりあっていて、大きさは F と等しい。



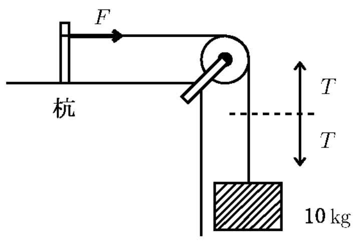
例 3 綱の左端を固定し右端を力 F で引く。このとき綱の任意の点 A には右に引く力と左に引く力がかかるが、この左右の力はつりあっていて、大きさは F に等しい。このとき「この綱の**張力**は F である」という。



例 4 天井から綱がつり下げられて、下に m(kg) の重りがついている。重りには重力 mg がかかっているので、(綱自体の重さを無視すると) 綱の張力は mg である。

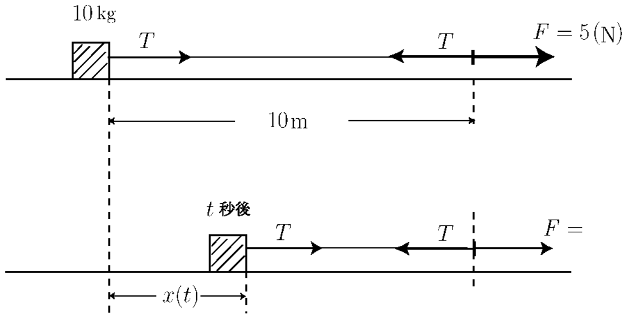


問 右図のように「ひも」が張られ、下端に 10kg の重りがついていて、滑車を通して上の杭につないである。ひも自体の重さと滑車の摩擦を無視する。ひもの張力 T と杭を引く力 F を求めよ。



＜ 力のつりあい５ ＞

例１ 摩擦のない水平な氷の上に質量 10kg の物体がひもにつながっている。10m 離れたところから常に一定の力 $F = 5$ (N) で引っぱる。張力 T は $F = 5$ (N) と等しい。



従って物体を引く力は 5 (N) である、一方物体の加速度を a とすれば

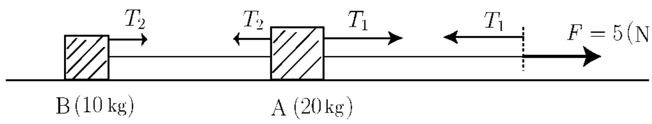
$F = ma$ より $\boxed{5 = 10\,a}$

よって $a = \dfrac{1}{2}$ (m/s^2)

であり t 秒後の速度 $v(t)$ と進んだ距離 $x(t)$ は

$$v(t) = \int_0^t a dt = \frac{1}{2}t \quad , \quad x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{1}{4}t^2$$

例２ 摩擦のない水平な氷の上に質量 20kg の物体 A と質量 10kg の物体 B をひもで結んで 5 (N) の力で引っぱった。



このとき物体 A と B は同時に動くので A と B の速度および加速度は同じであるが張力は異なる。加速度を a とすると

物体 A に働く力は $T_1 - T_2 = 20a$ $\cdots$ ①

物体 B に働く力は $T_2 = 10a$ $\cdots\cdots$ ②

であり図から T_1 は F と等しいので

$T_1 = 5$ $\cdots\cdots$ ③

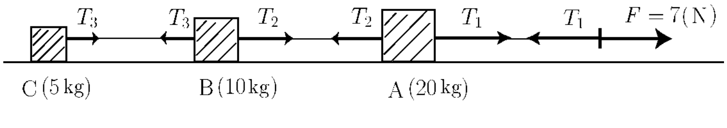
である。 ①, ②, ③より

$$5 = T_1 = 20a + T_2 = 30a \Rightarrow a = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

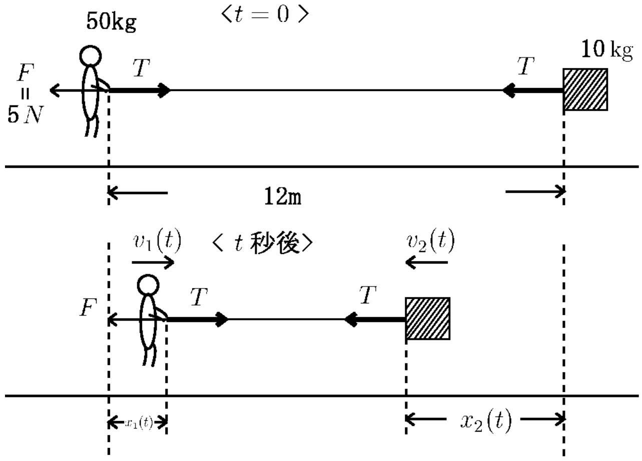
$$T_2 = 10a = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

より <u>加速度 $a = \dfrac{1}{6}$ (m/s^2) , $T_1 = 5$ (N) , $T_2 = \dfrac{5}{3}$</u> (N) である。

問 摩擦のない水平な氷の上に右図のような 3 つの物体をひもで結んで 7(N) の力で引っぱった。加速度 a と張力 T_1 , T_2 , T_3 を求めよ。



＜力のつりあい 6＞



問 無重力状態の宇宙船の中で、飛行士が質量 10 kg の物体をとろうとした。物体にひもがついていて、それを引っぱると物体は近よるが、飛行士の方も引きよせられていく。最初物体と飛行士の距離は 12 m であった。ひもを常に $F = 5\ (N)$ の力で引き続けるとする。

(1) 張力 T を求めよ。

(2) 飛行士の質量が 50kg とする。飛行士の加速度 a_1 を求めよ。

(3) 物体の加速度 a_2 を求めよ。

(4) t 秒後の飛行士の速度 $v_1(t)$ を求めよ。

(5) t 秒後の物体の速度 $v_2(t)$ を求めよ。

(6) t 秒後に飛行士は元の位置から $x_1(t)$ (m) 進んだとする。 $x_1(t)$ を求めよ。

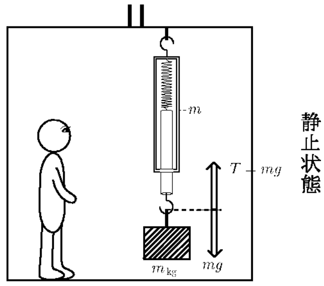
(7) t 秒後に物体は元の位置から $x_2(t)$ (m) 進んだとする。 $x_2(t)$ を求めよ。

(8) 何秒後に飛行士は物体を手にとるか？ 近似値ではなく正確な値を求めよ。

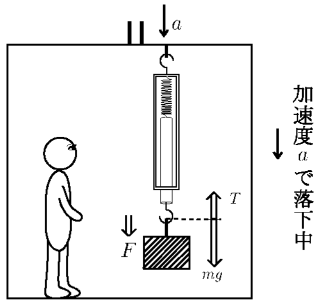
(9) 飛行士が物体を手にしたとき、元の位置から何 m 離れているか？

＜力のつりあい 7＞

例 エレベーターの天井からばね秤がつるされている。このばね秤の下に質量 m (kg) の物体がつるしてある。エレベーターが静止しているとき、ばね秤の目もりは m を示す。このとき物体にかかる力は重力 mg とばね秤の張力 $T(= mg)$ がつりあっている。



(図1)



エレベーターが加速度 a で落下しているとき、この物体にかかる下向きの力を F とすると、F は重力 mg と上に引く張力 T との差であるから

$$F = mg - T \qquad \cdots \quad (1)$$

である。一方この物体自体も下向きに加速度 a で落下しているから

$$F = ma \qquad \cdots \quad (2)$$

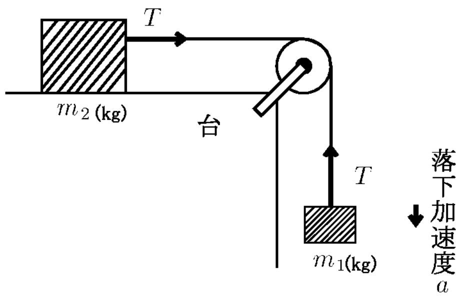
である。(1) と (2) より

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow \quad T = mg - ma = \left(1 - \frac{a}{g}\right) mg$$

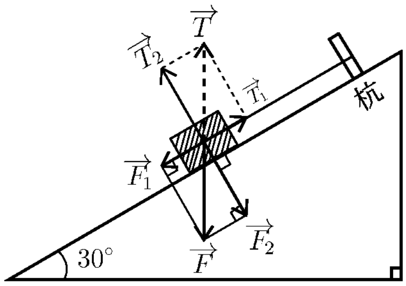
となる。つまりばね秤の張力 T は静止状態 $(T = mg)$ にくらべて $1 - \dfrac{a}{g}$ 倍になる。従ってこのときのばね秤の目もりも $1 - \dfrac{a}{g}$ 倍になる。

問 1 上の例で $m = 10$ (kg) のとき一定加速度で落下中のばね秤の目もりが 9 (kg) を示した。落下加速度を求めよ。

問 2 質量 m_1(kg) と m_2(kg) の物体が右図のようにひもでつないでいる。台や滑車の摩擦およびひもの重さは無視する。落下加速度 a とひもの張力 T を求めよ。

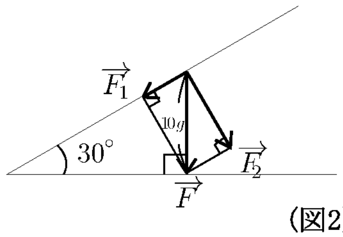


< 力のつりあい 8 >

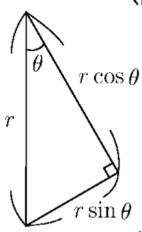


(図1)

g



(図2)



(図3)

例 1 質量 10(kg) の物体が 30 度の斜面上にあり、ひもで杭に固定されている (図 1)。物体の中心 (重心) には重力 $\overrightarrow{F}$ が働いている。

$\overrightarrow{F}$ は斜面を垂直に押す力 $\overrightarrow{F_2}$ と斜面に沿ってすべり落ちようとする力 $\overrightarrow{F_1}$ に分けられる。

$\overrightarrow{F_2}$ に対し斜面が物体を押し返す力 (抗力) を $\overrightarrow{T_2}$ とすると、$\overrightarrow{F_2}$ と $\overrightarrow{T_2}$ はつりあっている。ひもの張力を $\overrightarrow{T_1}$ とすると、$\overrightarrow{T_1}$ と $\overrightarrow{F_1}$ はつりあっている。$\overrightarrow{T_1}$ と $\overrightarrow{T_2}$ の力の合成を $\overrightarrow{T}$

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$$

とすると $\overrightarrow{T}$ は $\overrightarrow{F}$ とつりあっている。

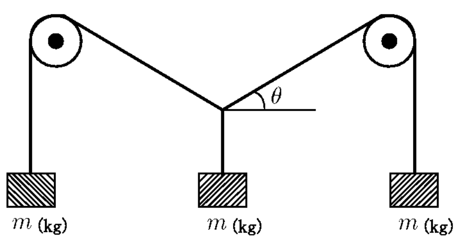
ひもの張力 $\overrightarrow{T_1}$ の大きさ (= $\overrightarrow{F_1}$ の大きさ) を求めたい。$\overrightarrow{F}$ の大きさは重力 $10g$ ($g = 9.8$) である。$\overrightarrow{F}$ と $\overrightarrow{F_1}$ との関係 (図 2) と図 3 より

$$\text{ひもの張力} = \overrightarrow{F_1}\text{の大きさ} = 10g\sin 30° = 5g\ (N)$$

である。

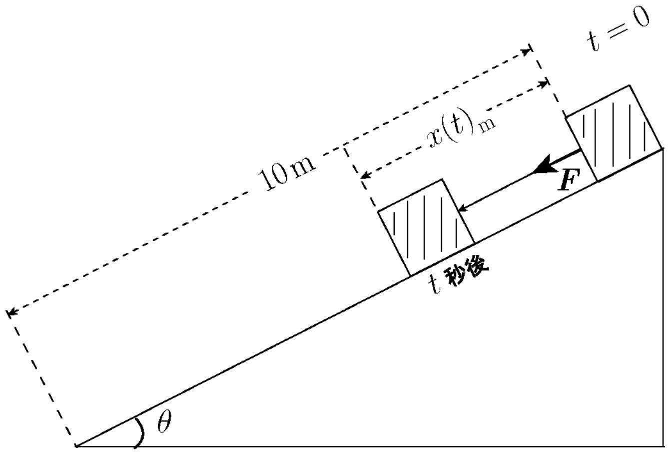
問 1 上の例で斜面の角度が θ、物体の質量が m (kg) のとき、ひもの張力を求めよ。

問 2 同じ質量の 3 個の物体が図 4 のような状態でつりあっている。ひもの重さや滑車の摩擦を無視する。図 4 の水平からの角度 θ を求めよ。



(図4)

＜力のつりあい９＞



問 質量 m(kg) の物質を傾斜角度 θ であるなめらかな斜面の頂点において静かに手を離す。

(1) 斜面に沿ってすべり落ちようとする力 $\boldsymbol{F}$ を m と θ で表せ。

(2) 斜面に沿ってすべり落ちようとする加速度 a を θ で表せ。

(3) t 秒後に斜面に沿ってすべる速度 $v(t)$ を求めよ。

(4) t 秒後に斜面を $x(t)_{(\mathrm{m})}$ すべったとする。$x(t)$ を求めよ。

(5) 斜面の長さが 10m とする。何秒後に斜面の下端に到着するか？
近似値ではなく正確な値を θ を用いて表せ。

(6) 物体が斜面の下端に到着したときの速度を求めよ。

＜まとめの問題 1＞

問 1　次の値を ( ) 内の単位に変えよ。

(1)　速度　20　[m/s]　⇒　　　　　(km/h)

(2)　力　　0.5　[N]　　⇒　　　　　(gm/s^2)

問 2　平面のベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が基本ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ によって

$$\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\ ,\quad \overrightarrow{b} = -3\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$$

と表されている。

(1) $\overrightarrow{a}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{a}\right|$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ を $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$ と $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を求めよ。

(4) $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角度 θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ を求めよ。

(5) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$（ゼロベクトル）を満たす $\vec{c}$ を求めよ。

問 3　数直線上を動く点 P の t 秒後の位置 $x(t)$ が

$$x(t) = 5t^2 - 4t + 3$$

であるとき

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) t 秒後の加速度 $a(t)$ を求めよ。

問 4　ある車がまっすぐな道を走り出す。最初は静止していた車が一定加速度で加速し、5 秒後に速度 30[m/s] になった。

(1) このときの加速度を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq 5$ とする。t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(3) 5 秒間に走った距離を求めよ。

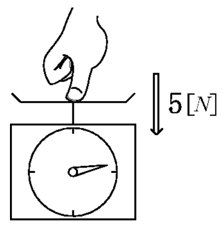
＜まとめの問題 2＞

問 1　時速 72km で走っていた車がブレーキをふんで減速し、60m 走った時点で時速 36km になった。このとき一定加速度で減速したとする。

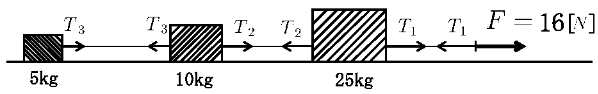
(1)　加速度を求めよ。

(2)　減速にかかった時間を求めよ。

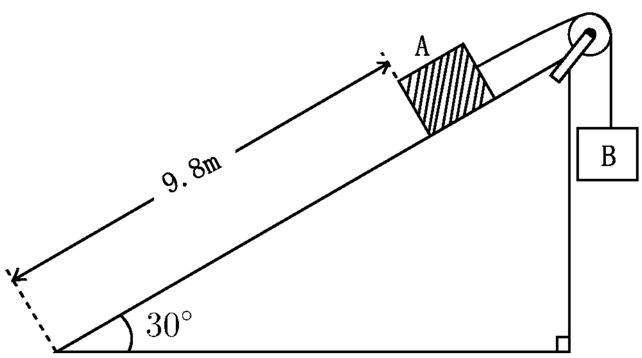
問 2　ばね秤を 5 $[N]$ の力で上から押した。ばね秤の針は何 g(グラム) を示すか？重力加速度を $g = 9.8$ として近似値を求めよ。



問 3　摩擦のない水平な氷の上に右図のような 3 つの物体をひもで結んで 16 $[N]$ の力で引っぱった。加速度 a と張力 T_1 , T_2 , T_3 を求めよ。



問 4　質量 20kg の物体 A を傾斜角 30° であるなめらかな斜面において、右図のようにひもで結び、滑車をとおして物体 B とつないでいる。斜面や滑車の摩擦およびひもの重さは無視する。



(1)　右図の状態で物体 A と物体 B がつりあっているとする。このとき B の質量を求めよ。

(2)　A と B を結ぶひもを切断した。A が斜面に沿ってすべり落ちようとする加速度 a を求めよ。

(3)　斜面の長さを 9.8 m とする。A が斜面の下端に到着した時の速度を求めよ。ただし重力加速度を $g = 9.8$ とする。