2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2002年度版）

番外編

「力学入門 1」

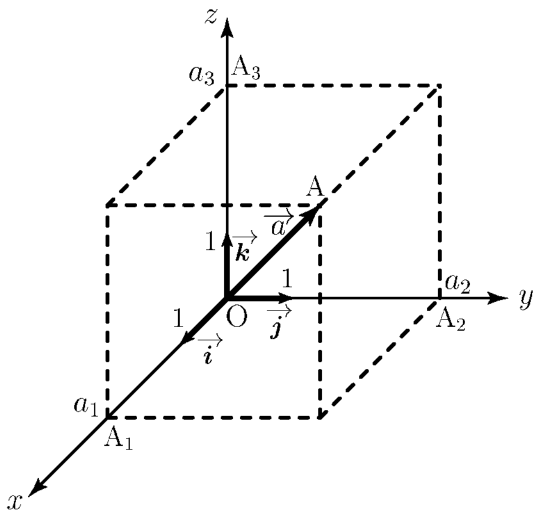
内容

◎　平面のベクトル

◎　空間のベクトル

◎　単位の計算

◎　速度



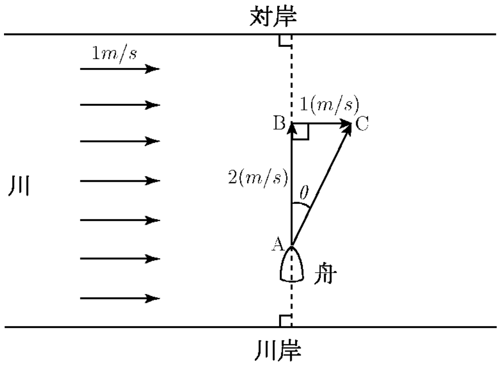
電子・光システム工学科
井上　昌昭　著

- 目次 -

＜速度の合成＞

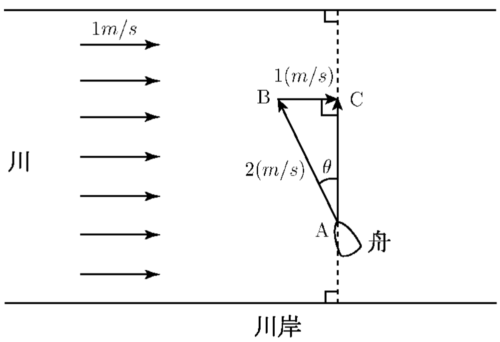
例１　静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まですすむはずであるが、かわのながれのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを 2(=舟の速さ)、BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より　AC= $\sqrt{5}$ となるから、

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$

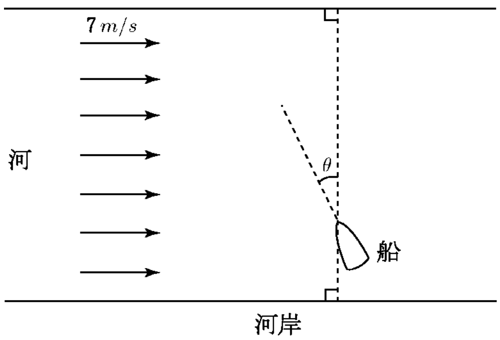


例２　例１と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。例１と同様に、舟の速度を矢線 AB(長さ 2)、川の速度を矢線 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$

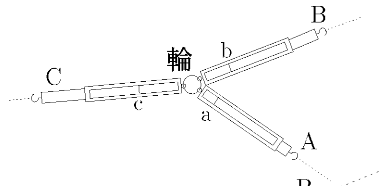


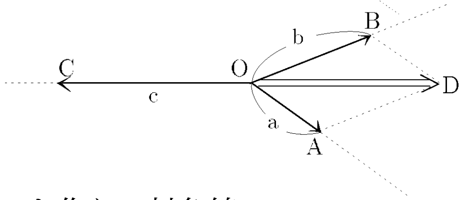
問　静水中を 10m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 7m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



＜力の合成＞

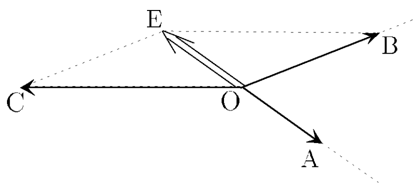
例　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ矢線をひき, その矢線の先を A, B, C とする。



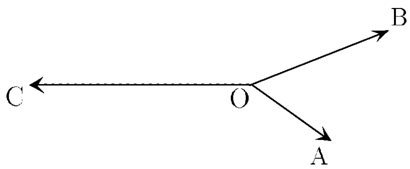


次に OA,OB を２辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 矢線 OD と矢線 OC は方向が同じ（矢印の向きは逆）で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を矢線（$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$）で表すと, $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ との合力が $\overrightarrow{OD}$ であり, $\overrightarrow{OC}$ とつりあっていることがわかる。

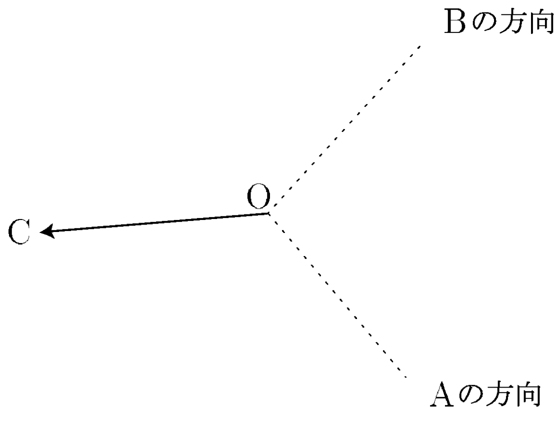
同様にして OB, OC を２辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 矢線 OE と OA は方向が同じ（向きが逆）で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の合力が $\overrightarrow{OE}$ であり, $\overrightarrow{OA}$ とつりあっている。



問1　右図に $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OC}$ との合力 $\overrightarrow{OF}$ を作図せよ。



問2　ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の矢線の長さがわからない。$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ がつりあうように, 右図に矢線 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を作図せよ。



＜平面上のベクトル１＞

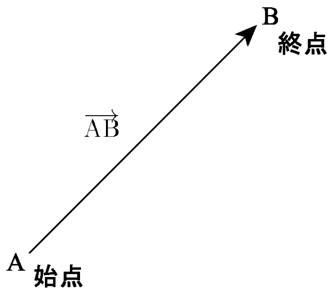
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を矢印（矢線）で示し、その大きさは矢線の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変らないときは、一本の矢線で流れの速度を表すことができる。このように、矢線で、向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの矢線 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい、B を**終点**という。ベクトルは $\overrightarrow{a}$ のような記号で表したり、太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする。



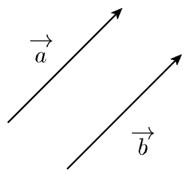
ベクトル $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ について、向きが同じで、大きさが等しいとき、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ は**等しい**といい、

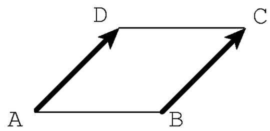
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



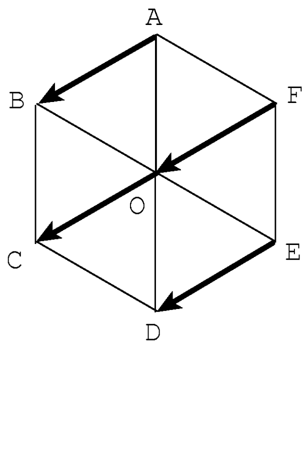


例　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

である。

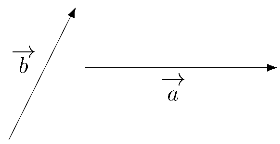
問　右の正六角形で、$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。



＜平面上のベクトル２＞

１ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、２ページでやった２つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

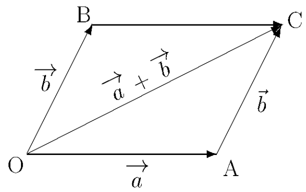
２つのベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$ が与えられているとする。

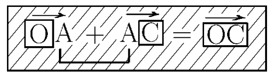


$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A、B とし、OA、OB を２辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{OC}$ が決まる。これを $\vec{a}$ と $\vec{b}$ との**和**といい、

$$\vec{a}+\vec{b}$$

と書く。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が２つの力であれば $\vec{a}+\vec{b}$ はその合力を表す。又、$\vec{a}$、$\vec{b}$ が２つの速度であれば、$\vec{a}+\vec{b}$ はその合成速度を表す。





ここで、$\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$ であるから、

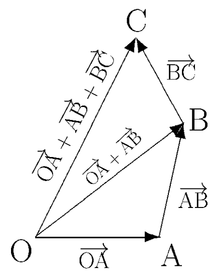
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと、A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最初の到着点 C に行くベクトルになる。

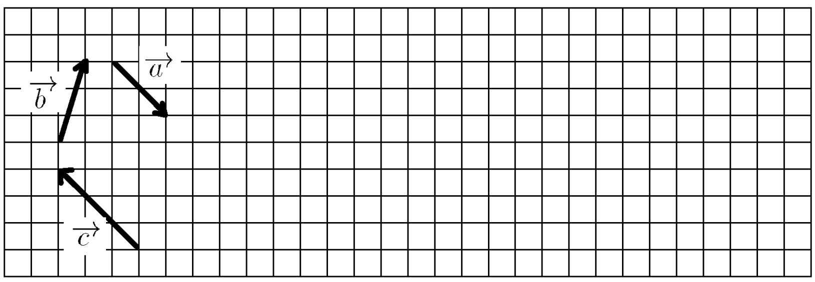
同様にして、4 点 O、A、B、C に対し

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$$

が成り立つ。



問　ベクトル $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、が下図の場合に、$\vec{a}+\vec{b}$、$\vec{b}+\vec{c}$、$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ を作図せよ。

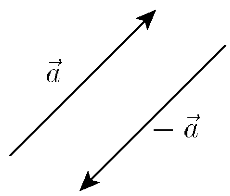


＜平面上のベクトル３＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。
これを**零ベクトル**といい、$\overrightarrow{0}$ で表す。つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル $\overrightarrow{a}$ に対して、大きさが同じで、
向きが反対であるベクトルを、$\overrightarrow{a}$ の
逆ベクトルといい、$-\overrightarrow{a}$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき、$-\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。



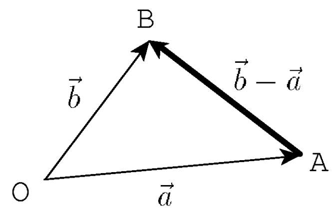
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

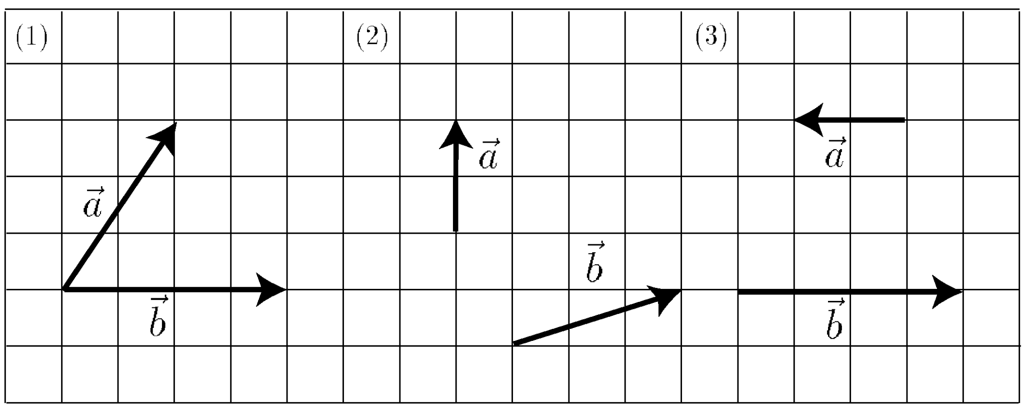
だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{a}$ の**差**といい、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$$

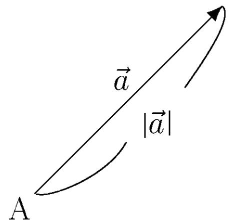


と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には
「終点 (B)− 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問　$\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}$ が次のように与えられている場合に $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$ を図示せよ。



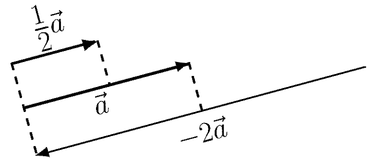
＜平面上のベクトル 4 ＞



ベクトル $\overrightarrow{a}$ の大きさを $|\overrightarrow{a}|$ で表す。
$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは、$|\overrightarrow{a}|$ は線分 AB の長さである。

大きさが 1 であるベクトルを **単位ベクトル** という。

$\overrightarrow{0}$ でないベクトル $\overrightarrow{a}$ と整数 k に対して



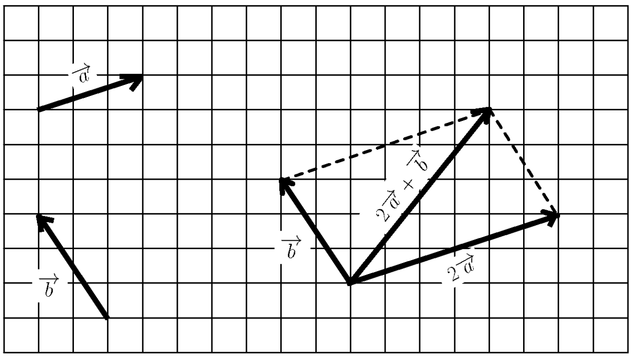
(1) $k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル
(2) $-k\overrightarrow{a}$ は、$\overrightarrow{a}$ と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

と定める。このようなベクトルを $\overrightarrow{a}$ の**実数倍** (又は**スカラー積**) という。

例　ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が右図の様に与えられているとき

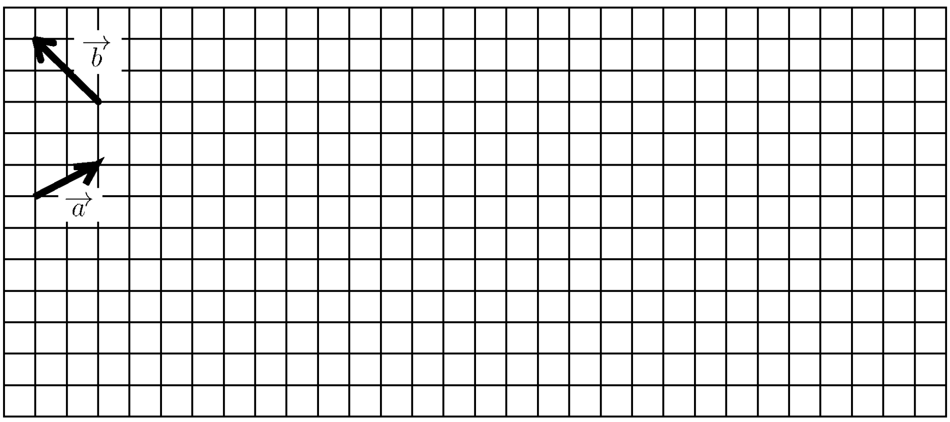
$$2\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$$

を図示すると、右の様になる。



問　ベクトル $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

(1) $-3\overrightarrow{a}$、 (2) $\dfrac{5}{2}\overrightarrow{b}$、 (3) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$、 (4) $2\overrightarrow{a} - \dfrac{3}{2}\overrightarrow{b}$



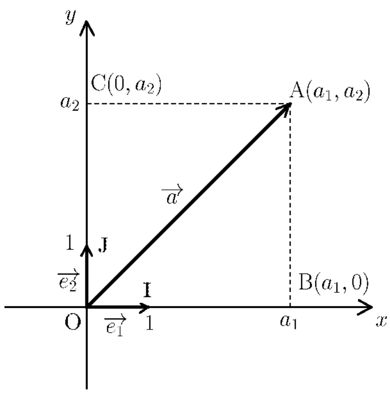
＜平面ベクトルの成分 1＞

O を原点とする座標平面上の 2 点 I (1, 0), J (0, 1) に対して,

$$\vec{\boldsymbol{i}} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}\ ,\quad \vec{\boldsymbol{j}} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

を **基本ベクトル** という。

平面上の任意の点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$ に対し，2 点 $\mathrm{B}(a_1, 0)$，$\mathrm{C}(0, a_2)$ をとると



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1 \vec{\boldsymbol{i}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_2 \vec{\boldsymbol{j}}$ だから，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\vec{a} = a_1 \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 \vec{\boldsymbol{j}}$$

と表す事が出来る。この a_1，a_2 を $\vec{a}$ の **成分** といい，a_1 を x 成分，a_2 を y 成分という。このとき $\vec{a}$ を成分を使って

$$\vec{a} = (\,a_1\,,\ a_2\,)$$

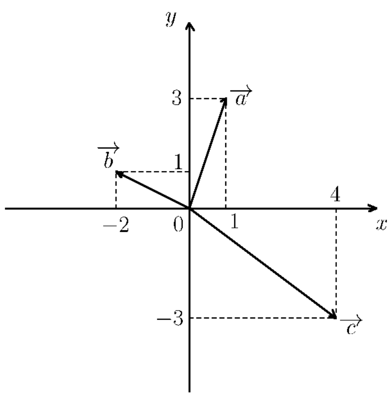
と表す。

例 1　$\vec{\boldsymbol{i}} = (\,1,\ 0\,)$，$\vec{\boldsymbol{j}} = (\,0,\ 1\,)$，$\vec{0} = (\,0,\ 0\,)$ …… 零ベクトル

例 2　2 点 A(2 , 3)，B(4 , −1) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分で表すと

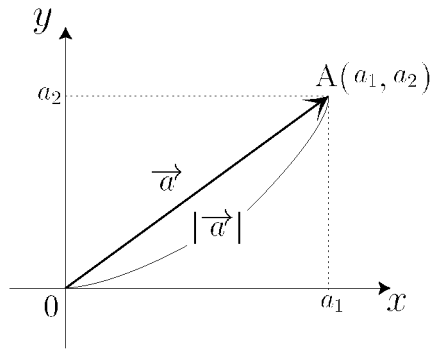
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\,2,\ 3\,)\ ,\qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\,4,\ -1\,)$$

問　右図のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を成分で表せ。



＜平面ベクトルの成分 2＞

右図のように $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$ の大きさ $|\overrightarrow{a}|$ は,
線分 OA の長さと一致するから



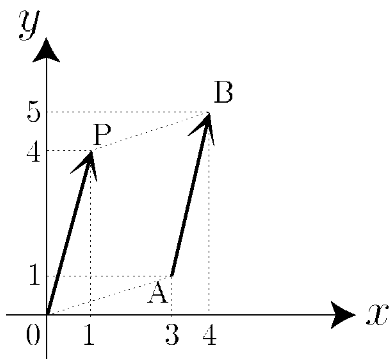
$$\boxed{\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2) \text{ のとき} \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$

例題 2 点 A(3, 1), B(4, 5) が与えられたとき,
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように

x 軸方向に -3
y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に
なるから



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (4-3\,,\ 5-1) = (1\,,\ 4)$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

(別解)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad \cdots(\text{終点} - \text{始点}) \\ &= (4,\ 5) - (3,\ 1) = (1,\ 4)\end{aligned}$$

問 次の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し, その大きさを求めよ。

(1) A(5, 2), B(7, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2) A(4, −1), B(3, 1)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

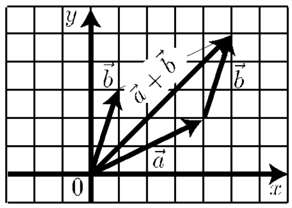
＜平面ベクトルの成分 3＞

例題 $\overrightarrow{a} = (4,\ 2)$, $\overrightarrow{b} = (1,\ 3)$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$,　(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$,　(3) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a}$,　(4) $2\overrightarrow{b}$

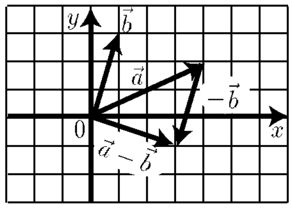
（解）(1) 右図より

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (4,\ 2) + (1,\ 3) = (5,\ 5)$$



(2) 右図より

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{b})$$
$$= (4,\ 2) + (-1,\ -3) = (3,\ -1)$$

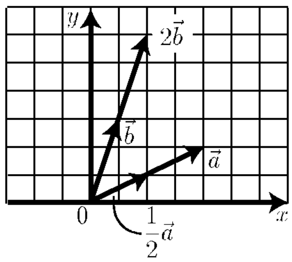


(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{a} = \frac{1}{2}(4,\ 2) = (2,\ 1)$$

(4) 右図より

$$2\overrightarrow{b} = 2(1,\ 3) = (2,\ 6)$$



問 1 $\overrightarrow{a} = (a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。
（k は定数）

(1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1,\ a_2) + (b_1,\ b_2) =$

(2) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1,\ a_2) - (b_1,\ b_2) =$

(3) $k\overrightarrow{a} = k(a_1,\ a_2) =$

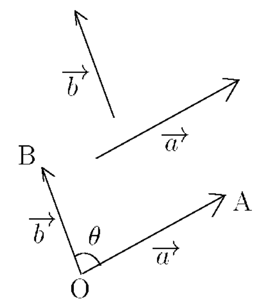
問 2 $\overrightarrow{a} = (2,\ 6)$, $\overrightarrow{b} = (-1,\ -3)$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{a} =$　　(2) $-\overrightarrow{b} =$

(3) $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} =$　　(4) $\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} =$

＜平面ベクトルの内積 1＞

$\overrightarrow{0}$ でない 2 つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ に対し，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，終点をそれぞれ A,B とするとき，∠ AOB の大きさ θ は，$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ によってきまる。この角 θ をベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角という。



ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角が θ のとき

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

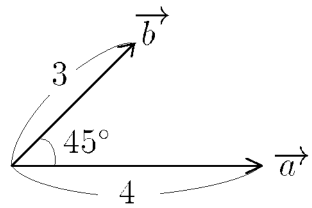
を，ベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ の**内積**といい，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta}$$ (内積の定義)

例 (1) $|\overrightarrow{a}|=4, |\overrightarrow{b}|=3$ で

$\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角が 45° のとき

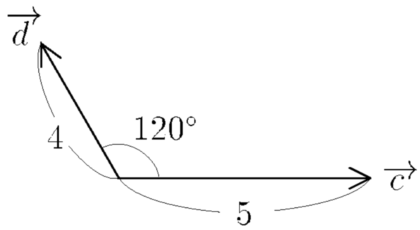
$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=4\times3\times\cos45^\circ$$
$$=4\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$



(2) $|\overrightarrow{c}|=5, |\overrightarrow{d}|=4$ で

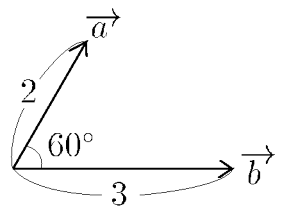
$\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ のつくる角が 120° のとき

$$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=5\times4\times\cos120^\circ$$
$$=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$$

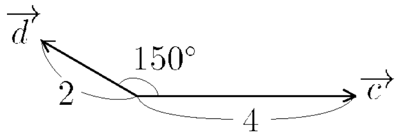


問 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$ が右図の場合に内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}$ を求めよ。

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$



$\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}=$



< 平面ベクトルの内積 2 >

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ で、$\vec{a}=\vec{b}$ のときは、$\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ だから

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \text{ つまり、} |\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

又、$\vec{a}\cdot\vec{b}$ のなす角が 90° のとき、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は **垂直** であるといい、
$\vec{a}\perp\vec{b}$ と書く。$\cos 90^\circ=0$ であるから、次が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}\neq\vec{0}、\vec{b}\neq\vec{0} \text{ のとき} \\ \qquad\qquad \vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{array}}$$

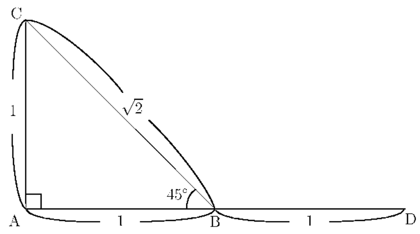
(ベクトルの垂直と内積)

例　右図の直角二等辺三角形において

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times 1\times\cos 90^\circ=0$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-1$



問　右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。

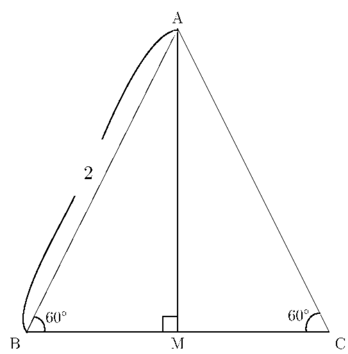
(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$

(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=$

(3) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}=$

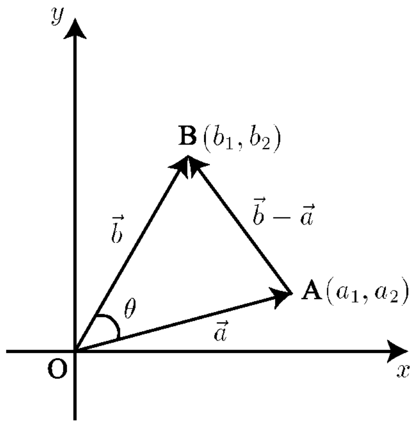
(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$

(5) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=$



＜平面ベクトルの内積の成分表示 1＞

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2)$ と原点 O に対し、2 点間の距離の公式より



$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

問 1　線分 OA と OB の長さの 2 乗を a_1, a_2, b_1, b_2 を用いて表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　　　, $\mathrm{OB}^2 =$

問 2　$(*)$ 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問 3　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a_1\,,\ a_2)\,,\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (b_1\,,\ b_2)$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問 1 の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$$

＜平面ベクトルの内積の成分表示 2 ＞

前ページの結果より

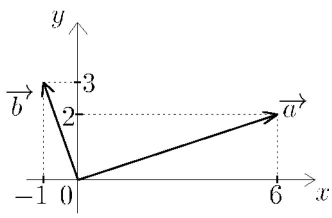
$$\boxed{\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2), \overrightarrow{b} = (b_1\,,\ b_2) \text{ のとき } \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

である。

例 1　$\overrightarrow{a} = (6\,,\ 2), \overrightarrow{b} = (-1\,,\ 3)$ のとき 内積 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 6\times(-1) + 2\times 3 = 0$$

であるから, $\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{b}$ は垂直 ($\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$) である。



問 1　$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が垂直である場合は　$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$　と書け。

(1)　$\overrightarrow{a} = (2\,,\ 3),\quad \overrightarrow{b} = (4\,,\ 5),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

(2)　$\overrightarrow{a} = (4\,,\ 6),\quad \overrightarrow{b} = (-3\,,\ 2),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

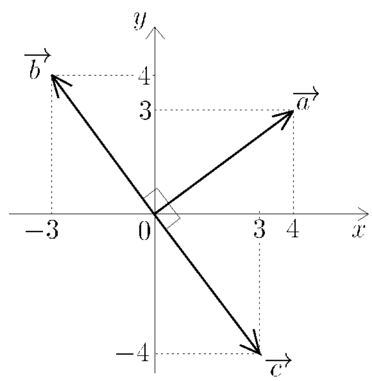
(3)　$\overrightarrow{a} = (1\,,\ 0),\quad \overrightarrow{b} = (0\,,\ 1),\quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} =$

例 2　$\overrightarrow{a} = (4\,,\ 3), \overrightarrow{b} = (-3\,,\ 4), \overrightarrow{c} = (3\,,\ -4)$
のとき

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 4\times(-3) + 3\times 4 = 0$$

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} = 4\times 3 + 3\times(-4) = 0$$

より　$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$　である。



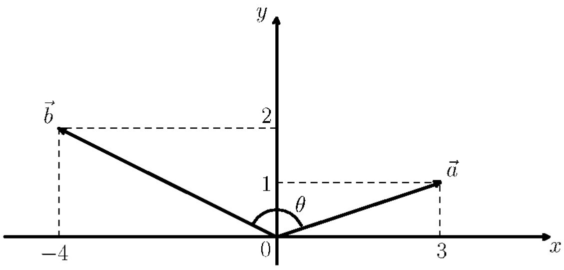
問 2　$\overrightarrow{a} = (-1\,,\ 1)$ と垂直なベクトルの例を２つあげよ。

＜平面ベクトルのなす角＞

例 $\overrightarrow{a} = (3\,,\ 1)$ と $\overrightarrow{b} = (-4\,,\ 2)$ のなす角 θ を求めたい。

内積の定義から

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$



より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \dfrac{3}{4}\pi\ \ (= 135^\circ)$ である。

問 1 $\overrightarrow{a} = (a_1\,,\ a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1\,,\ b_2)$ のなす角 θ を求めたい。
上の例にならって、$\cos\theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$\cos\theta =$

問 2 以下の場合に，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ を求めよ。

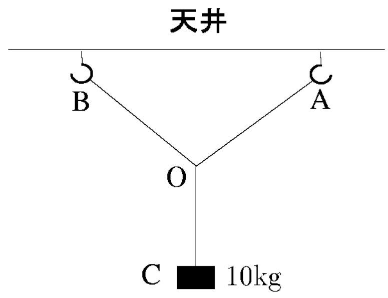
(1) $|\overrightarrow{a}| = 1$, $|\overrightarrow{b}| = 2$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{a} = (-2\,,\ 1)$, $\overrightarrow{b} = (3\,,\ 1)$

(3) $\overrightarrow{a} = \left(\sqrt{3}\,,\ 3\right)$, $\overrightarrow{b} = \left(\sqrt{3}\,,\ 1\right)$

＜ベクトルの均衡＞

例 天井の 2ヶ所 A,B からひもをつけて、点 O で結び、O から別のひもをのばして、おもり C をつける。C が 10kg のとき、支点 A,B にどのくらいの力がかかるだろうか？



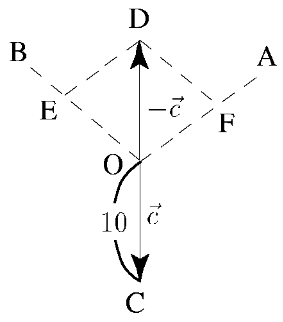
このような問題では、平面に図を書き、おもりの力をベクトル $\vec{c}$(長さを 10 にする) で表す。OA と OB の方向を点線で書き、$\vec{c}$ の逆ベクトル $-\vec{c}$ を O を始点に書く。$-\vec{c}$ の終点を D とする。D に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}//\overrightarrow{\mathrm{ED}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}//\overrightarrow{\mathrm{FD}}$$

となるように点 E,F をとると、OF の長さが支点 A にかかる力 (kg) で、OE の長さが支点 B にかかる力 (kg) になっている。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{c}$$

となる。



問 右図のように 3 点 A$(2,2)$, B$(-1,2)$, C$(0,-1.5)$ がある (1 目もり 0.25)。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき

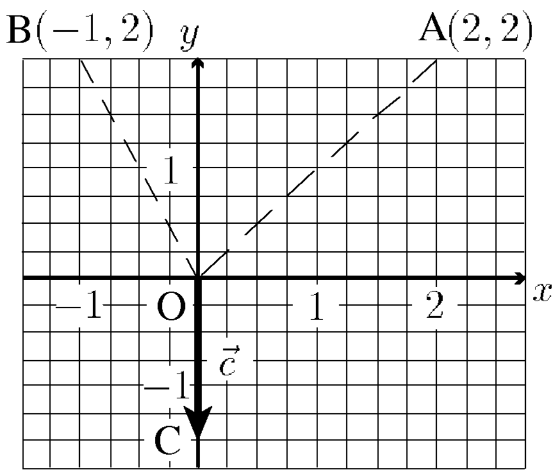
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=-\vec{c}$ となるような点 D の座標を求めよ。

(2) OA 上に点 F をとり、OB 上に点 E をとり

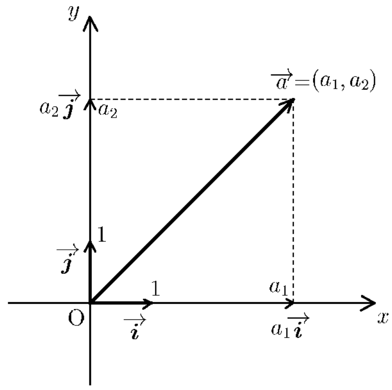
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となるように、右図に E と F を作図せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k_1\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるような定数 k_1 と k_2 を求めよ。



＜平面の基本ベクトル 1 ＞



$\vec{a} = (a_1\,,\ a_2)$ を基本ベクトル $\vec{\boldsymbol{i}} = (1\,,\ 0)$, $\vec{\boldsymbol{j}} = (0\,,\ 1)$ によって

$$\vec{a} = a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}}$$

と表される (右図参照)。これをベクトルの成分で表すと

$$(a_1\,,\ a_2) = a_1(1\,,\ 0) + a_2(0\,,\ 1)$$

となる。一般に

$$(a_1\,,\ a_2) + (b_1\,,\ b_2) = (a_1 + b_1\,,\ a_2 + b_2) \qquad \text{(和)}$$
$$(a_1\,,\ a_2) - (b_1\,,\ b_2) = (a_1 - b_1\,,\ a_2 - b_2) \qquad \text{(差)}$$
$$k(a_1\,,\ a_2) = (ka_1\,,\ ka_2) \qquad \text{(定数倍)}$$

が成り立つ (9 ページ参照)。これを基本ベクトルを用いると,

$$(a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}}) + (b_1\vec{\boldsymbol{i}} + b_2\vec{\boldsymbol{j}}) = (a_1 + b_1)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_2 + b_2)\vec{\boldsymbol{j}} \qquad \text{(和)}$$
$$(a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}}) - (b_1\vec{\boldsymbol{i}} + b_2\vec{\boldsymbol{j}}) = (a_1 - b_1)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_2 - b_2)\vec{\boldsymbol{j}} \qquad \text{(差)}$$
$$k(a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}}) = ka_1\vec{\boldsymbol{i}} + ka_2\vec{\boldsymbol{j}} \qquad \text{(定数倍)}$$

と表される。

例　$\vec{a} = (3,\ 4) = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}}$,　$\vec{b} = (-5\,,\ 1) = 5\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}}$ に対して,

$$\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}}) + (5\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}}) = 8\vec{\boldsymbol{i}} + 3\vec{\boldsymbol{j}}$$

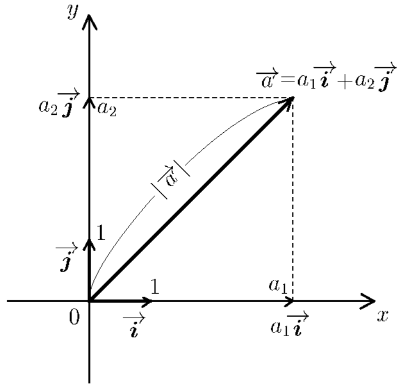
$$2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}}) - 3(5\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}})$$
$$= (6\vec{\boldsymbol{i}} + 8\vec{\boldsymbol{j}}) - (15\vec{\boldsymbol{i}} - 3\vec{\boldsymbol{j}}) = -9\vec{\boldsymbol{i}} + 11\vec{\boldsymbol{j}}$$

問　$\vec{a} = 3\vec{\boldsymbol{i}} + 2\vec{\boldsymbol{j}}$,　$\vec{b} = -2\vec{\boldsymbol{i}} + 5\vec{\boldsymbol{j}}$ に対して，次のベクトルを $\vec{\boldsymbol{i}}$ と $\vec{\boldsymbol{j}}$ を用いて表せ。

(1) $\vec{a} + \vec{b}$　　(2) $\vec{a} - \vec{b}$

(3) $3\vec{a} + 2\vec{b}$　　(4) $-5\vec{a} + 6\vec{b}$

＜平面の基本ベクトル 2＞



$\overrightarrow{a}=(a_1,\,a_2)=a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ の大きさは

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

である。

例 1 $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$$\left|2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

問 1 次のベクトルの大きさを求めよ。

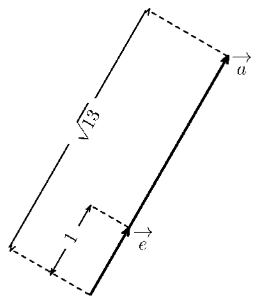
(1) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=$　　(2) $\left|3\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+4\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=$　　(3) $\left|2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}-4\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=$

例 2 大きさが 1 のベクトルを**単位ベクトル**という。

$\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$ とすると，

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=\left|2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|=\sqrt{13}\ \text{より}\quad \overrightarrow{a}=\sqrt{13}\,\overrightarrow{e}$$

よって　$\overrightarrow{e}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}\overrightarrow{a}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\dfrac{3}{\sqrt{13}}\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$



問 2 $\overrightarrow{a}=4\overrightarrow{\boldsymbol{i}}-3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ に対し，$\overrightarrow{a}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\overrightarrow{e}$，$\overrightarrow{a}$ と同じ向きで大きさが 3 のベクトルを $\overrightarrow{b}$ とする。$\overrightarrow{e}$ と $\overrightarrow{b}$ を求めよ。

例 3 $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ と $\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+b_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$ のなす角を θ とすると

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\overrightarrow{b}\right|\times\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2 \qquad \text{(内積)}$$

より　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\times\left|\overrightarrow{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\times\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$

問 3 $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ が以下の場合に，内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ と $\cos\theta$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$，$\overrightarrow{b}=-2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$

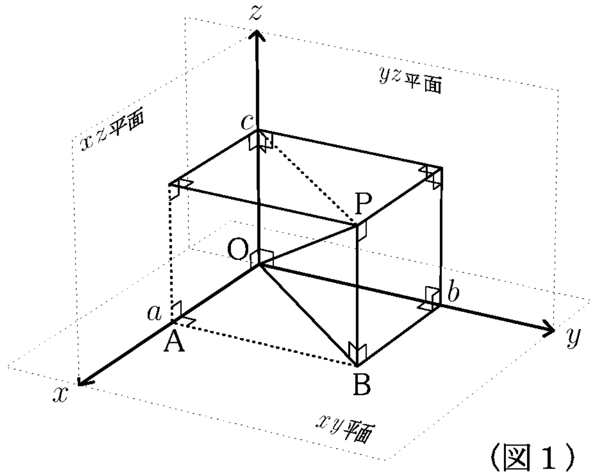
$\cos\theta=$

(2) $\overrightarrow{a}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$，$\overrightarrow{b}=-\sqrt{3}\,\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=$

$\cos\theta=$

＜空間座標＞



（図１）

例　座標空間上に原点 O$(0, 0, 0)$ と３点 A,B,P が図１のような位置にあるとき、A,B,P の座標は

A$(a, 0, 0)$

B$(a, b, 0)$

P(a, b, c)

と表される。 a, b, c が正のとき、各線分の長さ (各点の距離) は

$$\mathrm{OA} = a \quad , \quad \mathrm{AB} = b \quad , \quad \mathrm{BP} = c \quad , \quad \mathrm{OB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathrm{OP} = \sqrt{\mathrm{OB}^2 + \mathrm{BP}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

となる。

問１　この例で、点 C$(a, 0, c)$ ，D$(0, b, c)$ の位置を図１内に表示し、以下の線分の長さを求めよ。

AC ＝　　　　　，CD ＝　　　　　，AD ＝

問２　図２の４点 P(x_1, y_1, z_1)，A(x_2, y_1, z_1)，B(x_2, y_2, z_1)，Q(x_2, y_2, z_2) に対し、以下の線分の長さを求めよ。(ただし $x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，$z_1 < z_2$ とする)

PA ＝　　　　　，AB ＝　　　　　，BQ ＝

PB ＝

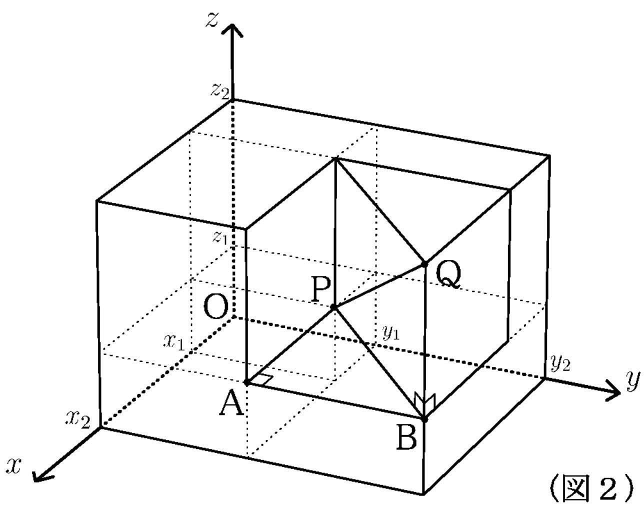
PQ ＝

問３　点 C(x_2, y_1, z_2)，D(x_1, y_2, z_1) の位置を図２内に表示し、以下の線分の長さを求めよ。

AC ＝

AD ＝

CD ＝



（図２）

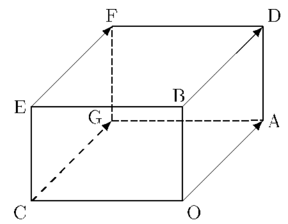
＜空間のベクトル１＞

速度や力などのように、方向と大きさをもつベクトルは、平面上だけでなく空間においても同様に扱える。

例１ 右図の直方体の頂点を始点、終点とするベクトルのうちで、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しいものは

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}},\ \overrightarrow{\mathrm{EF}},\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

である。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ である。



問１ 例１で、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に等しいものと $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に等しいものを全て書け。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$

空間のベクトルについても、和・差、実数倍は平面のベクトルと同様である。

例２ 例１の直方体で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

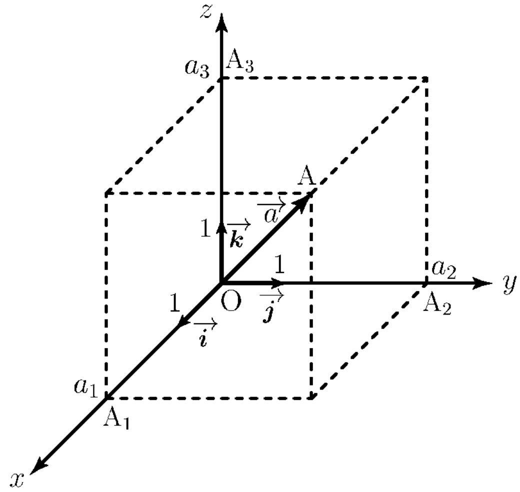
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

問２ 例１の直方体で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$ (2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=$ (3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{DG}}=$ (5) $\overrightarrow{\mathrm{FB}}=$ (6) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=$

＜空間のベクトル 2 ＞



O を原点とする座標軸上の 3 点
I $(1, 0, 0)$, J $(0, 1, 0)$, K $(0, 0, 1)$
に対して

$$\vec{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

$$\vec{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

$$\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

を**基本ベクトル**という。
空間における任意のベクトル $\vec{a}$ の始点を原点にもっていき、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$
となる点 A の座標が A (a_1, a_2, a_3) のとき、$\mathrm{A}_1\,(a_1, 0, 0)$, $\mathrm{A}_2\,(0, a_2\,0)$,
$\mathrm{A}_3\,(0, 0, a_3)$ に対し

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

と表される。この a_1 , a_2 , a_3 を $\vec{a}$ の**成分**といい、$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と表す。
特に

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \quad , \quad \vec{j} = (0, 1, 0) \quad , \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

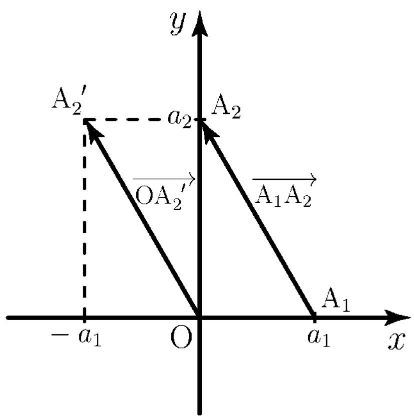
である。

問 1　上の場合に $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ を成分で表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = (\quad , \quad , \quad)$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = (\quad , \quad , \quad)$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = (\quad , \quad , \quad)$

例　$\mathrm{A}_1\,(a_1, 0, 0)$ と $\mathrm{A}_2\,(0, a_2, 0)$ に対し $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ の成分を求めたい。右図のように $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ を平行移動して原点 O を始点となるようにする。右図から $\mathrm{A_2}'$ の座標は $\mathrm{A_2}'\,(-a_1, a_2, 0)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}'} = (-a_1, a_2, 0)$$



(別解)　次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

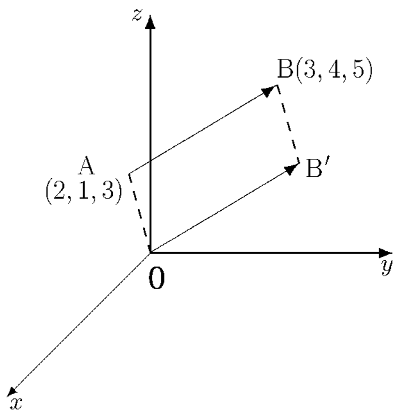
より $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = (0, a_2, 0) - (a_1, 0, 0) = (-a_1, a_2, 0)$

問 2　$\mathrm{A}_1\,(a_1, 0, 0)$, $\mathrm{A}_2\,(0, a_2, 0)$, $\mathrm{A}_3\,(0, 0, a_3)$ に対して
次のベクトルの成分を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}} =$　　　　　　　　　　　　$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}} =$

＜空間のベクトル 3 ＞

例 空間座標上の 2 点 A(2,1,3)、B(3,4,5) に対し、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めたい。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動し、始点を原点 O にもっていくとすると、点 A が原点 O に移動するから



x 軸方向に -2

y 軸方向に -1

z 軸方向に -3

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B′ に (同じ様に) 平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となったとすると、B′ の座標は

$$\mathrm{B'}(3-2\,,\ 4-1\,,\ 5-3) = (1,3,2)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = (\ 1\ ,\ 3\ ,\ 2\ )$$

（別解）次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$= (\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ) - (\ 2\ ,\ 1\ ,\ 3\ ) = (\ 3-2\ ,\ 4-1\ ,\ 5-3\ ) = (\ 1\ ,\ 3\ ,\ 2\ )$$

問 空間の 2 点 A、B の座標が以下の場合に、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

(1) A(5, 2, 3) , B(4, 1, 2)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(2) A(a_1, a_2, a_3) , B(b_1, b_2, b_3)

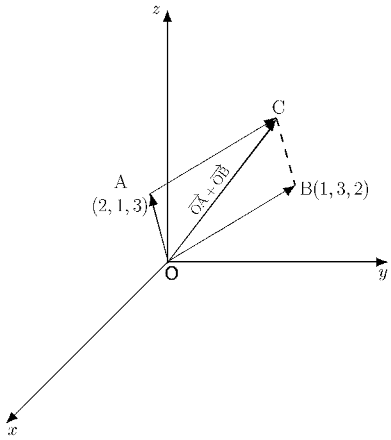
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

＜空間のベクトル４＞

例　空間の２点 A(2,1,3)、B(1,3,2) と原点 O に対し、ベクトル

$$\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}$$

の成分を求めたい。ベクトル $\overrightarrow{\rm OB}$ を平行移動し、始点が A になるようすると、O が A に移動するから、



x 軸方向に $+2$

y 軸方向に $+1$

z 軸方向に $+3$

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同じ様に平行移動して、$\overrightarrow{\rm OB}=\overrightarrow{\rm AC}$ となったとすると、C の座標は

$$\mathrm{C}(1+2,3+1,2+3)=(3,4,5)$$

となる。よって $\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}$ の成分は

$$\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}=\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm AC}=\overrightarrow{\rm OC}=(\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ )$$

（別解）次の様に計算してもよい。

$$\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}=(\ 2\ ,\ 1\ ,\ 3\ )+(\ 1\ ,\ 3\ ,\ 2\ )=(\ 2+1\ ,\ 1+3\ ,\ 3+2\ )=(\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ )$$

問　２点 A、B の座標が次の様な場合に、以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) A(5,2,3) , B(4,1,2)

$\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}=$

$\overrightarrow{\rm OB}-\overrightarrow{\rm OA}=$

$2\overrightarrow{\rm OB}=$

(2) A(a_1,a_2,a_3) , B(b_1,b_2,b_3)

$\overrightarrow{\rm OA}+\overrightarrow{\rm OB}=$

$\overrightarrow{\rm OB}-\overrightarrow{\rm OA}=$

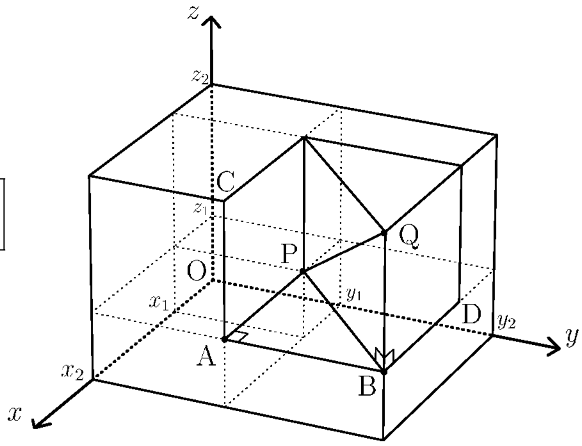
$3\overrightarrow{\rm OA}=$

＜空間座標と距離＞

例 18 ページの結果より
2 点 P$(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$，Q$(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の間の
距離 PQ(＝線分 PQ の長さ) は

$$\boxed{\mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

である。



(注) この公式は

$$x_1 < x_2,\ \ y_1 < y_2,\ \ z_1 < z_2$$

の場合以外にも適用できる。

右図の点 C$(x_2\,,\,y_1\,,\,z_2)$，D$(x_1\,,\,y_2\,,\,z_1)$ の間の距離 CD は

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}\end{aligned}$$

であり，$\sqrt{\ }$ の中の $(\bigcirc - \triangle)^2$ の中の $\bigcirc$ と $\triangle$ は入れ替えても 2 乗するので結果は変わらないからである。

問 1 点 E$(x_1\,,\,y_1\,,\,z_2)$，F$(x_1\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の位置を右上図内に表示し，
点 A$(x_2\,,\,y_1\,,\,z_1)$ と点 B$(x_2\,,\,y_2\,,\,z_1)$ に対し，次の距離を求めよ。

BE ＝

AF ＝

問 2 原点 O$(0\,,\,0\,,\,0)$ と点 A$(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$，B$(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$ に対し，

(1) 以下の距離を求めよ。

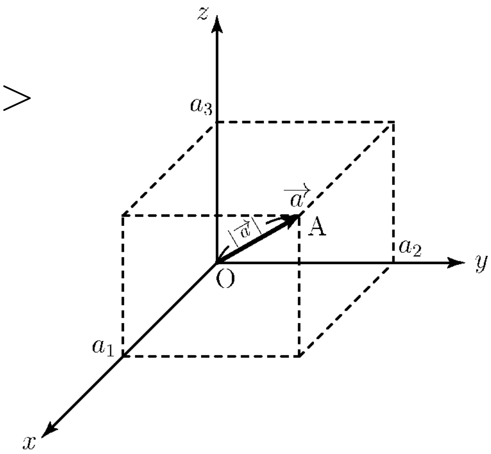
OA ＝　　　　　　　　　　　　　　，OB ＝

AB ＝

(2) 以下の式を計算し，できるだけ簡単にせよ。

$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 =$

＜ 空間ベクトルの成分と大きさ ＞



空間における任意のベクトル $\vec{a}$ の始点を原点 O $(0,0,0)$ にもっていき、$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が A (a_1, a_2, a_3) であるとき、$\vec{a}$ の成分は

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

となる。このときベクトル $\vec{a}$ の大きさ $\left|\vec{a}\right|$ は
2 点 O、A 間の距離 OA (= 線分 OA の長さ) であるから前ページより

$$\boxed{\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \mathrm{OA} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}} \qquad \text{(ベクトルの大きさ)}$$

となる。

例 1　A $(1,2,3)$, B $(5,8,12)$ に対し、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5-1, 8-2, 12-3) = (4,6,9)$
だから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{4^2+6^2+9^2} = \sqrt{133}$$

(別解)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は 2 点 A , B 間の距離だから

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \mathrm{AB} = \sqrt{(5-1)^2+(8-2)^2+(12-3)^3} = \sqrt{133}$$

例 2　$\vec{a} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = (3,0,-4)$ のとき $3\vec{a} + 2\vec{b}$ の成分は

$$3\vec{a} + 2\vec{b} = 3(1,2,-1) + 2(3,0,-4) = (3,6,-3) + (6,0,-8) = (9,6,-11)$$

であり、その大きさは

$$\left|3\vec{a} + 2\vec{b}\right| = \sqrt{9^2+6^2+(-11)^2} = \sqrt{238}$$

問　原点 O$(0,0,0)$ と 2 点 A$(-1,2,4)$, B$(3,-2,5)$ に対し

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} =$ 　　　　　　, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} =$ 　　　　　　, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| =$ 　　　　　　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| =$ 　　　　　　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| =$

(2)　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき、次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b} =$ 　　　　　　(2) $\vec{a} - \vec{b} =$ 　　　　　　(3) $2\vec{a} + 3\vec{b} =$

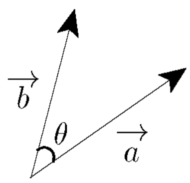
$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| =$ 　　　　　　$\left|\vec{a} - \vec{b}\right| =$ 　　　　　　$\left|2\vec{a} + 3\vec{b}\right| =$

< 空間ベクトルの内積１ >

平面上のベクトルと同じように、空間の $\overrightarrow{0}$ でない２つのベクトル $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ を定めることができる。$(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$
そして、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \cos\theta$$

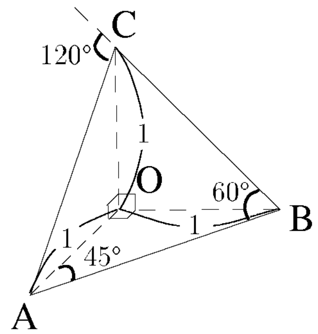
と定める。（どちらか一方が $\vec{0}$ のときは、内積は０とする。）



例　右図のような立体 OABC を考える。
ここで OA=OB=OC= 1,

OA⊥OB, OB⊥OC, OC⊥OA

とする。このとき

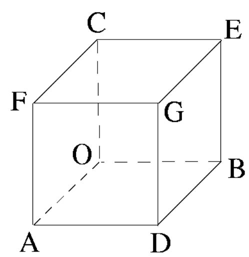


$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| \times \cos 120^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問　右の図は、１辺の長さが１の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} =$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FD}} =$　　　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} =$

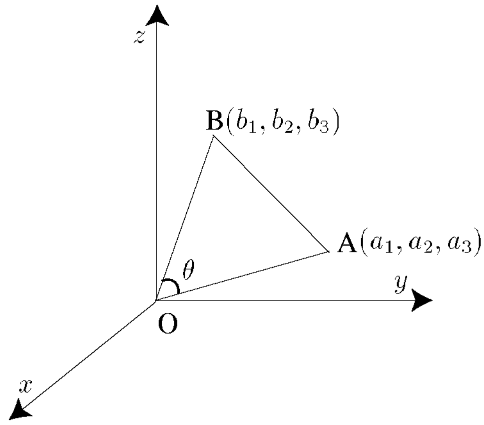
(5) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} =$　　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GF}} =$

＜空間ベクトルの内積２＞

空間の２点 A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3) と原点 O に対し、$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると、余弦定理より、

$$(*)\ \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}\cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\}$$

となる。



問１　OA,OB,AB の長さの２乗を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ で表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　$, \mathrm{OB}^2 =$

$\mathrm{AB}^2 =$

問２　$(*)$ 式の右辺を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

問３　$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ )$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ )$ とすると、内積は

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

問２の結果を使って、内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} =$

＜空間ベクトルのなす角＞

2つのベクトル $\overrightarrow{a} = (\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ )$ と $\overrightarrow{b} = (\ b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3\ )$ の内積は、前ページの結果より

$$\boxed{\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\ } \quad \text{（内積の成分表示）}$$

となる。

例 $\overrightarrow{a} = (\ 1\ ,\ -1\ ,\ 0\ )$ と $\overrightarrow{b} = (\ -2\ ,\ 0\ ,\ 2\ )$ のつくる角を θ とすれば、

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \times |\overrightarrow{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ だから、$\theta = 120^\circ$ となる。

問 以下の場合に、$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のつくる角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

(1) $\overrightarrow{a} = (\ 2\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$, $\overrightarrow{b} = (\ 3\ ,\ 0\ ,\ -1\ )$

(2) $\overrightarrow{a} = (\ 5\ ,\ 1\ ,\ 4\ )$, $\overrightarrow{b} = (\ 3\ ,\ 2\ ,\ 1\ )$

(3) $\overrightarrow{a} = (\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1\ )$, $\overrightarrow{b} = (\ -1\ ,\ 1\ ,\ -1\ )$

＜空間の基本ベクトル１＞

基本ベクトルを $\vec{\boldsymbol{i}} = (\,1,\ 0,\ 0\,)$, $\vec{\boldsymbol{j}} = (\,0,\ 1,\ 0\,)$, $\vec{\boldsymbol{k}} = (\,0,\ 0,\ 1\,)$ とすれば,
任意のベクトル $\vec{a} = (\,a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,)$ は

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\,a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,) = a_1(\,1,\ 0,\ 0\,) + a_2(\,0,\ 1,\ 0\,) + a_3(\,0,\ 0,\ 1\,)\\ &= a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}} + a_3\vec{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

と表される。

例 1　(1) $(5, -1, 0) = 5\vec{\boldsymbol{i}} - \vec{\boldsymbol{j}}$

(2) $(4, 2, -1) = 4\vec{\boldsymbol{i}} - 2\vec{\boldsymbol{j}} - 3\vec{\boldsymbol{k}}$

問 1　次のベクトルを例 1 のように基本ベクトル $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

$(\,1,\ 2,\ 0\,) =$　　　　　　　　$(\,2,\ 0,\ 4\,) =$

$(\,0,\ 4,\ 5\,) =$　　　　　　　　$(\,5,\ -1,\ 3\,) =$

ベクトル $\vec{a} = a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}} + a_3\vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{b} = b_1\vec{\boldsymbol{i}} + b_2\vec{\boldsymbol{j}} + b_3\vec{\boldsymbol{k}}$ と定数 C に対し

$$C\vec{a} = Ca_1\vec{\boldsymbol{i}} + Ca_2\vec{\boldsymbol{j}} + Ca_3\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(定数倍)}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_2 + b_2)\vec{\boldsymbol{j}} + (a_3 + b_3)\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(和)}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_2 - b_2)\vec{\boldsymbol{j}} + (a_3 - b_3)\vec{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(差)}$$

が成り立つ。

問 2　$\vec{a} = 3\vec{\boldsymbol{i}} - 2\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}}$, $\vec{b} = \vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}$ に対して，次のベクトルを $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

(1) $2\vec{a} =$　　　　　　　　(2) $3\vec{b} =$

(3) $\vec{a} + \vec{b} =$　　　　　　　　(4) $\vec{a} - \vec{b} =$

(5) $2\vec{a} + 3\vec{b} =$　　　　　　　　(6) $2\vec{a} - 3\vec{b} =$

＜空間の基本ベクトル 2＞

$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + a_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$,　$\overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + b_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + b_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ に対し,

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad \text{(内積)}$$

$$\left|\overrightarrow{a}\right| = \sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2} \qquad \text{(大きさ)}$$

である。

例 1 $(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}})\cdot(4\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 5\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 6\overrightarrow{\boldsymbol{k}}) = 1\times4 + 2\times(-5) + 3\times6 = 12$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{j}} = (1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}})\cdot(0\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}}) = 1\times0 + 0\times1 + 0\times0 = 0$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\right| = \left|1\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 0\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

問 1 次のベクトルの内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

(2) $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

(3) $\overrightarrow{\boldsymbol{i}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$

(4) $\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{j}}$

(5) $\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$

(6) $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right)$

(7) $\left(2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right)$

(8) $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 2\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right)\cdot\left(-3\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 4\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 5\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right)$

問 2 次のベクトルの大きさを求めよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|$

(2) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right|$

(3) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + \overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|$

(4) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - \overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right|$

(5) $\left|2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}\right|$

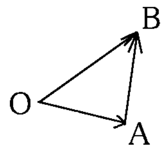
(6) $\left|3\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 4\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right|$

(7) $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{i}} + 3\overrightarrow{\boldsymbol{j}} + 5\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right|$

(8) $\left|2\overrightarrow{\boldsymbol{i}} - 4\overrightarrow{\boldsymbol{j}} - 6\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\right|$

＜空間の基本ベクトル３＞

例１ 原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ と２点 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(5,8,10)$ に対し $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めたい。



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(5\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+8\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+10\overrightarrow{\boldsymbol{k}})-(\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+3\overrightarrow{\boldsymbol{k}})\\&=4\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+6\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+7\overrightarrow{\boldsymbol{k}}\end{aligned}$$

問１ ２点 A,B の座標が以下の場合に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求めよ。

(1) $\mathrm{A}(3,1,2)$, $\mathrm{B}(7,10,6)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

(2) $\mathrm{A}(a_1,a_2,a_3)$, $\mathrm{B}(b_1,b_2,b_3)$　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=$

例２ $\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+a_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+a_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と $\overrightarrow{b}=b_1\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+b_2\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+b_3\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ とのなす角を θ とすると内積の定義より

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|\times\cos\theta$$

だから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}\times\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$$

例３ $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と x 軸とのなす角を θ とする。$\cos\theta,\sin\theta$ を求めたい。$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$ とすると、θ は $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\boldsymbol{i}}$ とのなす角だから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{i}}}{|\overrightarrow{a}|\times|\overrightarrow{\boldsymbol{i}}|}=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\times1}=\frac{2}{3}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

問２ $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{j}}+2\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と y 軸とのなす角を θ とする。$\cos\theta,\sin\theta$ を求めよ。

問３ $\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{\boldsymbol{i}}+\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ と $\overrightarrow{b}=3\overrightarrow{\boldsymbol{j}}-\overrightarrow{\boldsymbol{k}}$ とのなす角を θ とする。$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めよ。

＜ベクトルの表記＞

高等学校までの数学においてベクトルを表現する場合

$$\vec{a},\ \overrightarrow{AB},\ \vec{\mathsf{i}},\ \vec{\mathsf{j}},\ \vec{\mathsf{k}}$$

などのように上に矢印 → をつけていた。大学ではこの矢印をとり,
大文字 斜体の太文字

$$\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \cdots,\ \mathbf{F},\ \cdots \qquad \text{(普通のベクトル)}$$

等でベクトルを表す。ゼロベクトルは

$$\mathbf{O} \qquad \text{(ゼロベクトル)}$$

アルファベットの O(オー) の大文字斜体の太文字で表す。ただし基本ベクトルは

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{i} &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{j} &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{k} &= (0, 0, 1) \end{aligned}\right\} \text{(基本ベクトル)}$$

のように小文字斜体の太文字を用いる。

(注) 大学で学ぶ書籍には太文字でベクトルを表現している場合のほうが
圧倒的に多い。

例 $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$ に対し,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (2+6)\mathbf{i} + (3+10)\mathbf{j} + (4+13)\mathbf{k} = 8\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 17\mathbf{k} \qquad \text{(和)}$$

$$|\mathbf{A}| = |2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29} \qquad \cdots(\mathbf{A}\text{ の大きさ})$$

$$|\mathbf{B}| = |6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 13\mathbf{k}| = \sqrt{6^2 + 10^2 + 13^2} = \sqrt{305} \qquad \cdots(\mathbf{B}\text{ の大きさ})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 13\mathbf{k}) = 2 \times 6 + 3 \times 10 + 4 \times 13 = 94 \qquad \text{(内積)}$$

問 $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ のなす角を θ とする。次を求めよ。

$\mathbf{A} + \mathbf{B} =$

$\mathbf{A} - \mathbf{B} =$

$2\mathbf{A} =$, $|\mathbf{A}| =$

$|2\mathbf{A}| =$, $|\mathbf{B}| =$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =$, $\cos\theta =$

< ベクトルの練習1 >

問1　ベクトル $\boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ に対し

(1) 次のベクトルを求めよ

$2\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{B} =$ 　　　　　　　　　　, $-4\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} =$

(2) 次の値を求めよ

$|\boldsymbol{A}| =$ 　　　　　　　　　　, $|4\boldsymbol{A}| =$

(3) ベクトル $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ の大きさと、その方向の単位ベクトルを求めよ

問2　次のベクトルを求めよ ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表せ)

(1) 原点から点 (2, −3, −1) に到るベクトル

(2) 原点から点 (−3, 3, 4) に到るベクトル

(3) 点 (2, −3, −1) から 点 (−3, 3, 4) に到るベクトル

(4) 点 (−3, 3, 4) から 点 (2, −3, −1) に向く**大きさ1**のベクトル

(5) 点 (2, −3, −1) から 点 (−3, 3, 4) に向く**大きさ2**のベクトル

(6) 点 (x_1 , y_1 , z_1) から 点 (x_2 , y_2 , z_2) に到るベクトル

＜ベクトルの練習 2 ＞

問 1　ベクトル A = –3i + 2j – 4k に対し以下の問に答えよ。

(1) A の 2 倍の長さのベクトルを求めよ。またそのベクトルの長さが 2 倍であることを示せ。

(2) A の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の長さのベクトルを求めよ。またそのベクトルの長さが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍であることを示せ。

(3) A と同じ向きをもち，長さが 1 であるベクトルを求めよ。

(4) A と同じ向きをもち，長さが $\sqrt{3}$ のベクトルを求めよ。

問 2　ベクトル A と角度 θ が以下の場合に，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めよ。

(1) A = 3i + 5j が x 軸となす角と θ とする。

$\cos\theta$ = 　　　　　　　　　　,　$\sin\theta$ =

(2) A = 2i + 3j が x 軸となす角と θ とする。

$\cos\theta$ = 　　　　　　　　　　,　$\sin\theta$ =

(3) A = 2i + 3j が y 軸となす角と θ とする。

$\cos\theta$ = 　　　　　　　　　　,　$\sin\theta$ =

＜ベクトルの練習 3＞

問 ベクトル A = 2i + 3j + 4k に対し，θ が以下の場合に cosθ と sinθ を求めよ。

(1) A が x 軸となす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

(2) A が y 軸となす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

(3) A が z 軸となす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

(4) A とベクトル B = 2i + 3j のなす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

(5) A とベクトル B = 2i + 4k のなす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

(6) A とベクトル B = 3j + 4k のなす角を θ とする。

cosθ = , sinθ =

< 単位の計算１ >

< **長さ** > 長さの単位を示す。

3 1km ´ キロ メートル	1m ¡ メートル ¢	3 1dm ´ デシ メートル	3 1cm ´ センチ メートル	3 1mm ´ ミリ メートル	3 1µm ´ マイクロ メートル	3 1nm ´ ナノ メートル	3 1 Å ´ オング ストローム
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例１ 3.5km ＝ 3500m ，2.4m ＝ 240cm ，1m ＝ 10^{10} Å

問１ 次の ¤ にあてはまる数を入れよ。

(1) 123m ＝ $\boxed{}$ km　　(2) 7500mm ＝ $\boxed{}$ m　　(3) 1mm ＝ $\boxed{}$ Å

例２ 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか？」という問題では

740m ＝ 0.74km だから

12.5km ＋ 0.74km ＝ <u>13.24km</u>

(注) 12.5km ＋ 740m と書いてはならない。計算するときは必ず単位をそろえてする。

問２ (1) 1050cm と 2.4m を足すと何 m になるか？

(2) 2km から 140m を引くと何 m になるか？

< **時間** > 1h(時間) ＝ 60min(分) ，1min(分) ＝ 60s(秒) で計算する。

例３ 1h ＝ 60min ，$1\text{min} = \frac{1}{60}\text{h}$

$1\text{min} = 60\text{s}$ ，$1\text{s} = \frac{1}{60}\text{min}$

$4\text{h} = 4 \times 60\text{min} = 240\text{min}$

$150\text{min} = 150 \times \frac{1}{60}\text{h} = \frac{5}{2}\text{h} = 2.5\text{h}$

例４ 1.3 時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10} \times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より <u>(答) 78 分</u>

問３ 次の ¤ にあてはまる数を入れよ。

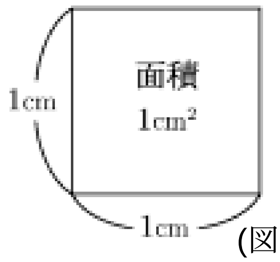
(1) 0.6min ＝ $\boxed{}$ s　　(2) 36s ＝ $\boxed{}$ h　　(3) 1h ＝ $\boxed{}$ s

(4) 156s ＝ $\boxed{}$ min　　(5) 2.3h ＝ $\boxed{}$ min　　(6) 15min ＝ $\boxed{}$ h

< 単位の計算2 >

< 面積 >

$1km^2$ (1平方キロメートル) ＝ 1辺が1kmの正方形の面積
$1m^2$ (1平方メートル) ＝ 1辺が1mの正方形の面積
$1cm^2$ (1平方センチメートル) ＝ 1辺が1cmの正方形の面積
$1mm^2$ (1平方ミリメートル) ＝ 1辺が1mmの正方形の面積

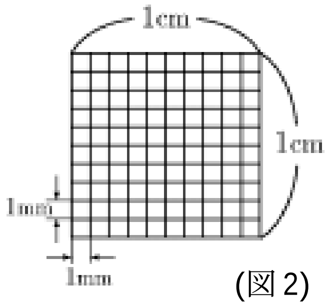


(図1)

(注) $1km^2 = 1km \times 1km$, $1m^2 = 1m \times 1m$, $1cm^2 = 1cm \times 1cm$,
$1mm^2 = 1mm \times 1mm$ と考える。

例１ 図1は$1cm^2$を表す正方形であり、縦と横を10等分したものが図2である。図2の小正方形の1個の面積は$1mm^2$であり、それが100個あるから $1cm^2 = 100mm^2$ となる。これを式で表すと

$$1cm^2 = 1cm \times 1cm = 10mm \times 10mm = 100mm^2$$



(図2)

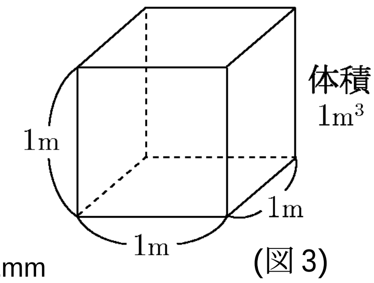
例２ $7.5m^2 = 7.5m \times 1m = 750cm \times 100cm = 75000cm^2$

問１ 次の ¤ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1m^2 = \boxed{\qquad}$ cm^2　　(2) $1km^2 = \boxed{\qquad}$ m^2

(3) $0.5cm^2 = \boxed{\qquad}$ mm^2　　(4) $600mm^2 = \boxed{\qquad}$ m^2

< 体積 >



(図3)

$1m^3$ (1立方メートル) ＝ 1辺が1mの立方体の体積 (図3)
$1cm^3$ (1立方センチメートル) ＝ 1辺が1cmの立方体の体積
$1mm^3$ (1立方ミリメートル) ＝ 1辺が1mmの立方体の体積

(注) $1m^3 = 1m \times 1m \times 1m$, $1cm^3 = 1cm \times 1cm \times 1cm$, $1mm^3 = 1mm \times 1mm \times 1mm$
と考える。

例３ $6.4cm^3 = 6.4cm \times 1cm \times 1cm = 64mm \times 10mm \times 10mm = 6400mm^3$

問２ 次の ¤ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1cm^3 = \boxed{\qquad}$ mm^3　　(2) $1m^3 = \boxed{\qquad}$ cm^3

(3) $1m^3 = \boxed{\qquad}$ mm^3　　(4) $0.001km^3 = \boxed{\qquad}$ m^3

＜単位の計算３＞

＜**速度**＞ 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

$$1\mathrm{km/h}（時速 1\mathrm{km}）=\frac{1\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}=1 時間に 1\mathrm{km} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/min}（分速 1\mathrm{m}）=\frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{min}}=1 分間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/s}（秒速 1\mathrm{m}）=\frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{s}}=1 秒間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{cm/s}（秒速 1\mathrm{cm}）=\frac{1\mathrm{cm}}{1\mathrm{s}}=1 秒間に 1\mathrm{cm} 移動する速度$$

などがよく使われる。

例１ 27km/h（時速 27km）を分速になおすと

$$27\mathrm{km/h}=\frac{27\mathrm{km}}{1\mathrm{h}}=\frac{27000\mathrm{m}}{60\mathrm{min}}=\frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}}=450\mathrm{m/min}（分速 450\mathrm{m}）$$

であり、秒速になおすと

$$450\mathrm{m/min}=\frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}}=\frac{450\mathrm{m}}{60\mathrm{s}}=\frac{7.5\mathrm{m}}{1\mathrm{s}}=7.5\mathrm{m/s}（秒速 7.5\mathrm{m}）$$

となる。ここで 7.5m=750cm より、7.5m/s=750cm/s（秒速 750cm）としてもよい。

問１ 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れよ。

$$18\mathrm{km/h}=\boxed{}\ \mathrm{m/min}=\boxed{}\ \mathrm{m/s}$$

問２ 5m を 6 秒で走る速度を時速になおせ。

例２ 「2km/min（分速 2km）のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では、

$$2\mathrm{km/min}=\frac{2\mathrm{km}}{1\mathrm{min}}=\frac{2000\mathrm{m}}{60\mathrm{s}}=\frac{100\mathrm{m}}{3\mathrm{s}}$$

より（答）100m を 3 秒で走る

問３ 54km を 1 時間 39 分で走る速度では、100m を何秒で走るか？

< 平均速度 >

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{\text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}}$$

例１ 車が 144 km を 2 時間で走ったときの平均速度は

$$\text{平均速度} = \frac{144\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 72\ (\text{km/h}) \quad \Big(= \text{時速}\ \ 72\ \text{km}\Big)$$

問１ 72 (km/h) を分速 (km/min) および秒速 (m/s) になおせ。

$$72\ (\text{km/h}) = \frac{72\ \text{km}}{60\ \text{min}} = \boxed{}\ (\text{km/min}) = \boxed{}\ (\text{m/s})$$

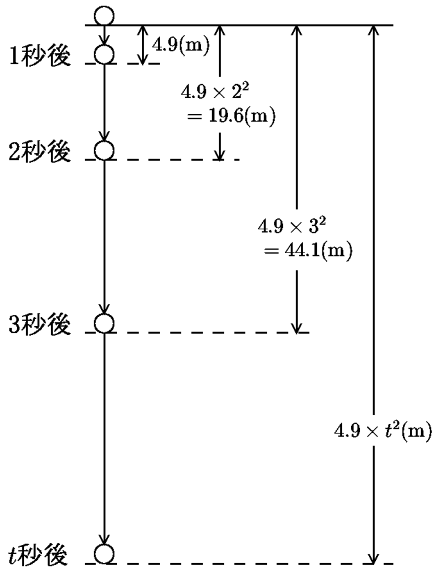
例２ (自由落下) 球を静かに手離すとき落ち始めてから t 秒間の落下距離は

t 秒後の落下距離 $= 4.9 \times t^2$ (m)

となる。2 秒後から 4 秒後の 2 秒間の平均速度は

$$2\text{秒後から}\ 4\ \text{秒後の平均速度} = \frac{\text{落下距離}}{\text{時間}}$$

$$= \frac{4.9 \times 4^2 - 4.9 \times 2^2}{4 - 2} = \frac{78.4 - 19.6}{2} = 29.4\ (\text{m/s})$$



問２ 例 2 の場合に以下の平均速度を求めよ。

(1) 1 秒後から 3 秒後までの平均速度

(2) 3 秒後から 4 秒後までの平均速度

(3) 3 秒後から 3.5 秒後までの平均速度

(4) 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度

＜ 時間の関数 ＞

時間 ($time$) を表す文字として t がよく使われるので、時間の関数を表すのに t を変数として使う。例えば $f(t)$, $y(t)$, $x(t)$, $v(t)$ などである。

例１ 球を静かに手離すとき、落ち始めてから t 秒間に落下した距離を $f(t)$ m とすると

$$f(t) = 4.9t^2$$

の関係がある。従って 3 秒後に落下した距離は

$$f(3) = 4.9 \times 3^2 = 44.1 \quad (\mathrm{m})$$

である。

問１ 例 1 の $f(t)$ に対して次の値を求めよ。(単位不要)

(1) $f(2) =$ (2) $f(4) =$ (3) $f(3.5) =$

問２ $x(t) = 19.6t, \quad y(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ のとき次の値を求めよ。

$x(0) =$ $y(0) =$

$x(1) =$ $y(1) =$

$x(2) =$ $y(2) =$

例２ x を変数とする関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (x についての導関数)

である。同様にして変数 t についての導関数 $f'(t)$ は

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}} \quad (\text{変数 } t \text{ についての導関数})$$

で定義される。同様に t の関数 $y(t)$ の導関数は

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

で定められる。

問３ 変数 t の関数 $x(t)$, $v(t)$ の導関数の定義を例 2 のような極限の式で表せ。

$x'(t) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿ , $v'(t) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿

例３ $f(t) = 4.9t^2$ のとき、$t = 2$ における微分係数 $f'(2)$ は次の極限式になる。

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9 \times (2+h)^2 - 4.9 \times 2^2}{h}$$

問４ $f(t) = 4.9t^2$ に対し次の微分係数を例 3 の右辺のような極限の式で表せ。

(1) $f'(3) = \lim_{h \to 0}$ ＿＿＿＿＿＿ (2) $f'(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\qquad}{h}$

例４ $f(t) = -4.9t^2 + 19.6t$ の導関数 $f'(t)$ は

$$f'(t) = (-4.9t^2 + 19.6t)' = -4.9 \times 2t + 19.6 \times 1 = -9.8t + 19.6$$

問５ $x(t) = 29.4t,\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t,\ v(t) = 29.4$ の導関数を求めよ。

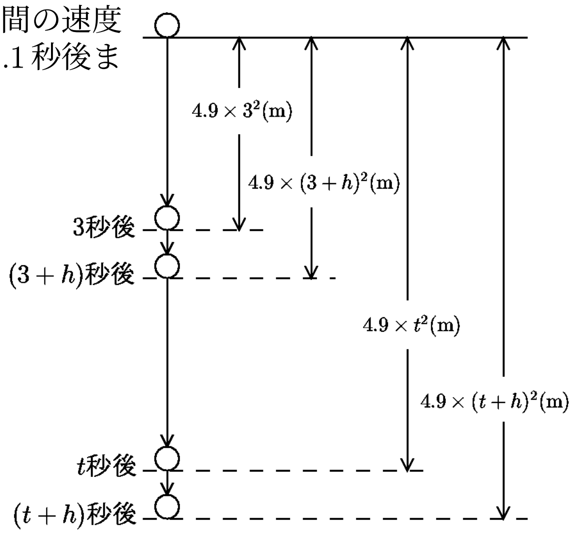
$x'(t) =$ $y'(t) =$ $v'(t) =$

＜ 瞬間の速度１ ＞

車が 144 (km) を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 (km/h) であるが、常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし、72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると、スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。

このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「**瞬間の速度**」といい、「平均速度」と区別する。

このページでは「瞬間の速度」を求めることを目標にする。



問１ 38 ページの例 2(自由落下) の場合に 3 秒後の瞬間の速度を求めたい。38 ページ問 2(4) より 3 秒後から 3.1 秒後までの平均速度は

$$\frac{4.9\times 3.1^2-4.9\times 3^2}{3.1-3}=\frac{2.989}{0.1}=29.89\ (\mathrm{m/s})$$

である。

(1) 3 秒後から 3.01 秒後までの平均速度を求めよ。

(2) 3 秒後から 3+h 秒後までの平均速度を求めよ。

(3) 以下の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to 0}\Big(3\text{ 秒後から }3+h\text{ 秒後までの平均速度}\Big)=$$

(4) 以下の場合の極限値を求めよ。

$$\lim_{h\to 0}\Big(t\text{ 秒後から }(t+h)\text{ 秒後までの平均速度}\Big)=$$

問２ $f(t)=4.9\times t^2$ とおく。問 1 の (3) および (4) で計算した極限の式を f と (または t) と h を用いた極限の式にしたい。以下の (　) の中に適当な数、文字または式を入れよ。

$$\lim_{h\to 0}(3\text{ 秒後から }3+h\text{ 秒後までの平均速度})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\quad\ )-f(\quad)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}(t\text{ 秒後から }t+h\text{ 秒後までの平均速度})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\quad\ )-f(\quad)}{h}$$

問３ 問 1(3), (4) の結果から以下の瞬間の速度を求めよ。

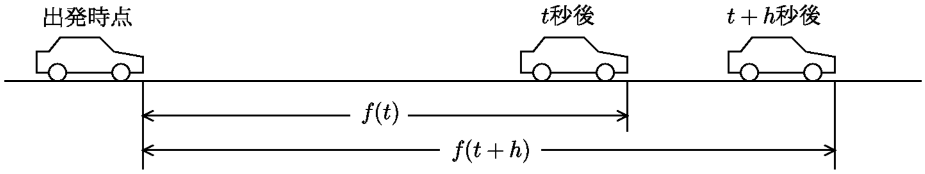
(1) 3 秒後の瞬間の速度＝　　　　(m/s) , (2) t 秒後の瞬間の速度＝　　　　(m/s)

問４ 問 2 の結果から以下の瞬間の速度を関数 $f(t)=4.9t^2$ の微分係数として $f'(\square)$ の形で表せ。

(1) 3 秒後の瞬間の速度＝　　　　　　, (2) t 秒後の瞬間の速度＝

＜瞬間の速度２＞

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。$t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ である。
「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから、時間間隔 h を 0(ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

$$t\text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h\to 0}(t\text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)$$

となる。この「瞬間の」というのを略して、単に「t 秒後の速度」という。

例１　前ページの問では $f(t) = 4.9t^2$ だから

$$t\text{ 秒後の速度} = f'(t) = 4.9 \times 2t = 9.8t \text{ (m/s)}$$

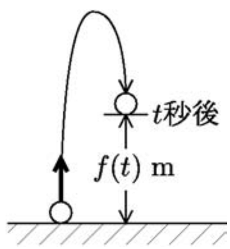
であり　$3\text{ 秒後の速度} = f'(3) = 4.9 \times 2 \times 3 = 29.4 \text{ (m/s)}$

となる。

問１　例１の場合に以下の速度を求めよ。

(1)　２秒後の速度　　　(2)　４秒後の速度

例２　地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。
t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えないと)



$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad \text{(m)}$$

となる。t 秒後の速度を $v(t)$ とすると

$$v(t) = f'(t) = -9.8t + 19.6 \quad \text{(m/s)}$$

となる。ボールが最高点に達するとき速度は 0(ゼロ) になるから

$$v(t) = -9.8t + 19.6 = 0 \iff t = 2$$

より 2 秒後に最高点に達する。このときの高さは $f(2) = -4.9 \times 2^2 + 19.6 \times 2 = 19.6$ (m) である。

問２　地上 39.2 (m) の高さから真上にボールを投げ上げたとき t 秒後の高さ $f(t)$ は

$$f(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 39.2 \text{ (m)}$$

となった。

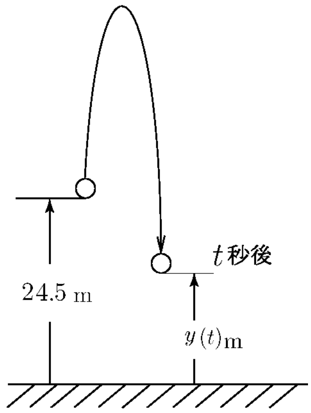
(1)　t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(3)　ボールが最高点に達するのは何秒後か。

(2)　初速 ($t=0$ のときの速度) を求めよ。

(4)　最高点の高さを求めよ。

＜速度の応用 1＞



問 地上 24.5m から物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 \ (\mathrm{m})$$

となったとせよ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$v(t) = y'(t) =$

(2) 初速度 何 m/s で物体を投げ上げたか？ $t = 0$ のときの v の値で答えよ。

$v(0) =$

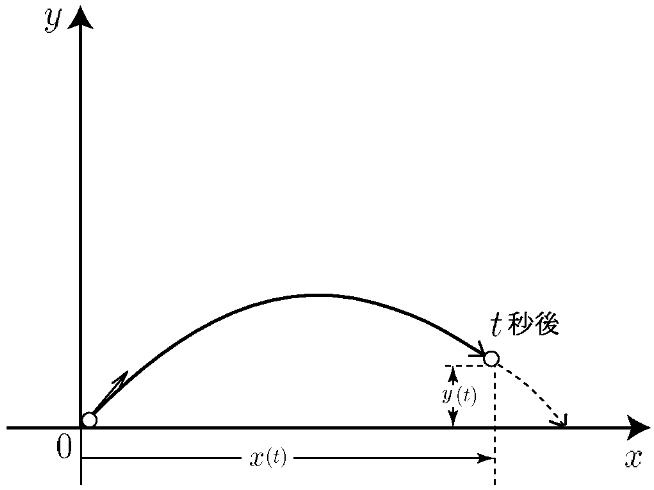
(3) 何秒後に最も高くなるか？ 速度が 0 ($v = 0$) のときの t の値で答えよ。

(4) 最高点は地上 何 m か？

(5) 何秒後に地上に落下するか？

＜速度の応用 2 ＞

問 ボールを投げたとき t 秒後のボールの位置を座標平面の点として表すことにする。
t 秒後の水平距離を $x(t)$
t 秒後の垂直距離を $y(t)$
とする。今



$$\begin{cases} x(t) = 14.7t \\ y(t) = -4.9t^2 + 19.6t \end{cases}$$

の場合に次の問に答えよ。

(1) t 秒後の水平方向の速度 $v_x(t)$ を $x(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$

(2) t 秒後の垂直方向の速度 $v_y(t)$ を $y(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_y(t) = y'(t) =$

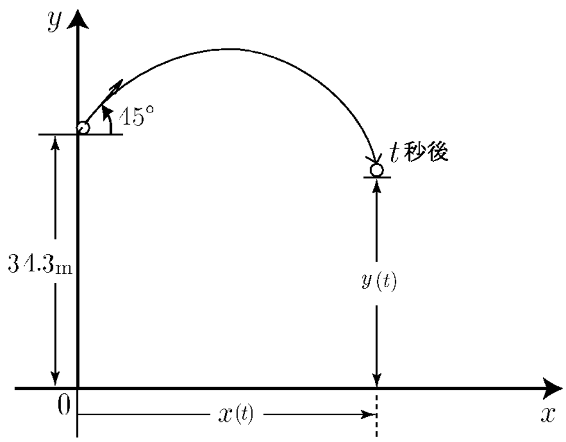
(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か？

(4) 最高点の高さを求めよ。

(5) 落下するのは何秒後か？

(6) 落下したとき、投げた地点からの水平距離を求めよ。

＜ 速度の応用 3 ＞



問 地上 34.3m の高さから物体を 45° の角度で投げ上げた。
t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 29.4t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 & (\text{垂直距離}) \end{cases}$$

であるとする。

(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$、垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$, $v_y(t) = y'(t) =$

(2) 最高点に達するのは何秒後か？

(3) 最高点の高さとそのときの水平距離を求めよ。

高さ $=$

水平距離 $=$

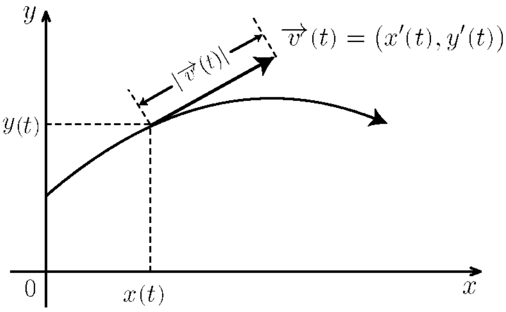
(4) 地上に落下するのは何秒後か？

(5) 落下したときの水平距離を求めよ。

< 速度と速さ >

43 ページや 44 ページの問題の場合、水平方向と垂直方向をそれぞれ考えていた。このような場合は水平方向を x 軸、垂直方向を y 軸として xy 平面上の運動と考えるとわかりやすい。

一般に xy 平面上の点の運動で、t 秒後の位置が $(x(t), y(t))$ であるとき、x 軸方向の速度 $x'(t)$ と y 軸方向の速度 $y'(t)$ を成分にもつベクトル



$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)} \qquad \text{(速度)}$$

を t 秒後の「**速度ベクトル**」または単に「**速度**」という。物理学では「速度」は「方向をもったベクトル」と考える。これに対し、速度の大きさ

$$\boxed{|\overrightarrow{v}(t)| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}} \qquad \text{(速さ＝速度の大きさ)}$$

を単に「**速さ**」といい、「速度」と区別する。

例 t 秒後の位置が $(x(t), y(t)) = (3t\ ,\ -2t^2 + 5t)$ であるとき

$$x(t) = 3t \qquad \Rightarrow \quad x'(t) = 3$$

$$y(t) = -2t^2 + 5t \qquad \Rightarrow \quad y'(t) = -4t + 5$$

より t 秒後の速度 $\overrightarrow{v}(t)$ は $\overrightarrow{v}(t) = (3\ ,\ -4t + 5)$ である。１秒後の速度と速さは

速度 $\overrightarrow{v}(1) = (3, 1)$, 速さ $|\overrightarrow{v}(1)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

である。

問１ 例の場合に２秒後の速度と速さを求めよ。

問２ t 秒後の位置が $\big(x(t), y(t)\big) = (4t\ ,\ -3t^2 + 9t)$ であるとき、１秒後の速度と速さを求めよ。