

2002年度 基礎数学ワークブック

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
巻	2002年度版
発行年	2002
URL	http://hdl.handle.net/10173/248

高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2002年度版)

Series **A**

No. 12

解答

< No.12の解答 >

P.1 問1 (1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問2 もし仮に B が正則行列と仮定すると逆行列 B^{-1} が存在し

$$A = IA = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA) = B^{-1}0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となって $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり , $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ であることに矛盾する。

従って最初の仮定が誤りである。すなわち B は正則行列でない。

P.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y & 5z+3w \\ 4x+2y & 4z+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5z + 3w = 0 \\ 4z + 2w = 1 \end{cases}$$

である。この連立方程式を解くと $x = -1$, $y = 2$, $z = \frac{3}{2}$, $w = -\frac{5}{2}$ より

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{となる。これは } AA^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ が成り立つように}$$

x, y, z, w を定めた。もう一方の積は

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & -3+3 \\ 10-10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ は A の逆行列である。

P.3 (1) $\begin{cases} ax + by = 1 \cdots (*_1) \\ cx + dy = 0 \cdots (*_2) \end{cases} \quad \begin{cases} az + bw = 0 \cdots (*_3) \\ cz + dw = 1 \cdots (*_4) \end{cases}$

$$(*_1) \times d - (*_2) \times b$$

$$adx + bdy = d$$

$$-) bcx + bdy = 0$$

$$(ad - bc)x = d$$

$$x = \frac{d}{ad - bc}$$

$$(*_1) \times c - (*_2) \times a$$

$$acx + bcy = c$$

$$-) acx + ady = 0$$

$$(bc - ad)y = c$$

$$x = \frac{c}{bc - ad} \\ = \frac{-c}{ad - bc}$$

$$(*_3) \times d - (*_4) \times b$$

$$adz + bdw = 0$$

$$-) bcz + bdw = b$$

$$(ad - bc)z = -b$$

$$z = \frac{-b}{ad - bc}$$

$$(*_1) \times c - (*_2) \times a$$

$$acz + bcw = 0$$

$$-) acz + adw = a$$

$$(bc - ad)w = -a$$

$$w = \frac{-a}{bc - ad} \\ = \frac{a}{ad - bc}$$

(2) $A^{-1}A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ac + ac & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

< No.12の解答 >

P.4 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0)$$

より A は正則行列であり

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0)$$

より A は正則行列であり

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

より A は正則行列でない。

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \quad (\neq 0)$$

より A は正則行列であり

$$A^{-1} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

P.5 $x_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$y_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$z_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

P.6 (1) $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$

$$= -\frac{1}{D} \left\{ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 & c_2 \\ c_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3$

$$= \frac{1}{D} \left\{ b_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3$

$$= \frac{1}{D} \left\{ a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) $c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3$

$$= \frac{1}{D} \left\{ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

< No.12の解答 >

P.7 [定理2] $XA = I$ ならば $X = A^{-1}$ である。

<証明> $X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

より $X = A^{-1}$ となる。(証明終)

P.8 (1)
$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 - 25 \\ -9 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(答) $x = 2, y = 1$

(2)
$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

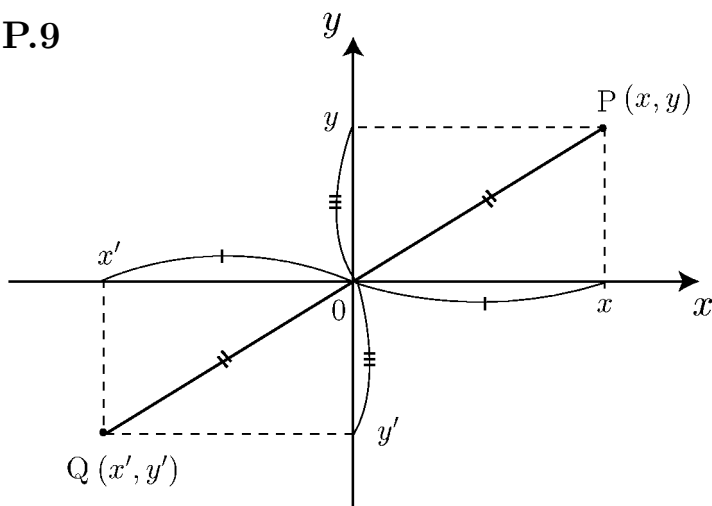
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(答) $x = 3, y = 2$

P.9



左図より

$$\begin{cases} x' = -x = -1 \times x + 0 \times y \\ y' = -y = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(答) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

P.10 (1)
$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

< No.12 の解答 >

P.11 問1

$$x' = r \cos(\alpha - \theta) = r \cos \alpha \cos \theta + r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\alpha - \theta) = r \sin \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta = y \cos \theta - x \sin \theta$$

問2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{答}) \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}}}$$

問3

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

問4

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

問5

$$(1) \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ -\sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

P.12 問1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 6y \\ 7x + 8y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + 2y' \\ 3x' + 4y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'' = x' + 2y' = (5x + 6y) + 2(7x + 8y) = 19x + 22y \\ y'' = 3x' + 4y' = 3(5x + 6y) + 4(7x + 8y) = 43x + 50y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}}}$$

問2

(1) AB

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

(2) AB

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

< No.12 の解答 >

P.13 問1

$$\begin{cases} x'' = \alpha x' + \beta y' = \alpha(ax + by) + \beta(cx + dy) = (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y \\ y'' = \gamma x' + \delta y' = \gamma(ax + by) + \delta(cx + dy) = (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{(答)} \quad \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}}$$

問2

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

P.14 問1 $BA = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha & -\cos \beta \sin \alpha - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha & -\sin \beta \sin \alpha + \cos \beta \cos \alpha \end{pmatrix}$$

問2 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

P.15 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ よし $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

従って

$$A^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} dx' - by' \\ -cx' + ay' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d(ax + by) - b(cx + dy) \\ -c(ax + by) + a(cx + dy) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} (ad - bc)x \\ (ad - bc)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(証明終)

< No.12の解答 >

P.16 問1 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{cases}$ が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつ。

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$

(答) $\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$

問2 (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - (4 + 3)\lambda + 4 \times 3 - 2 \times 1 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$

(答) $\lambda = 2$ または $\lambda = 5$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ (答) $\lambda = 1$, $\lambda = 4$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ (答) $\lambda = 2$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ (答) $\lambda = 1 \pm i$

P.17 (1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$ (答) $\lambda = 2$, $\lambda = 6$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 5 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda)(6 - \lambda) = 0$

(答) $\lambda = 1$, $\lambda = 4$, $\lambda = 6$

< No.12の解答 >

P.17 (3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 7 \\ 1 & 1-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + (3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)\{(5-\lambda)(1-\lambda)+1\} = (3-\lambda)\{\lambda^2 - 6\lambda + 6\} = 0 \\ 3-\lambda = 0 \text{ または } \lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0 &\Rightarrow \underline{\text{(答) } \lambda = 3, \lambda = 3 \pm \sqrt{3}} \end{aligned}$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 4 \\ 7 & -\lambda & 5 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 4 \times (-\lambda) \\ &= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda) + 8\lambda = \lambda\{(1-\lambda)(1+\lambda)+8\} = \lambda\{1-\lambda^2+8\} \\ &= \lambda(9-\lambda^2) = \lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0 \Rightarrow \underline{\text{(答) } \lambda = 0, \lambda = 3, \lambda = -3} \end{aligned}$$

P.18 (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2, \lambda = 5}$

$\lambda = 2$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x + y = 0$ より 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 等

$\lambda = 5$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x - 2y = 0$ より 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(答) 固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (または $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2, \lambda = 6}$

$\lambda = 2$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 3y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 等

$\lambda = 6$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(答) 固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (または $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$)

固有値 $\lambda = 6$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

< No.12の解答 >

P.18 (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 1, 4}$

$$\lambda = 1 \Rightarrow (A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{等}$$

$$\lambda = 4 \Rightarrow (A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{等}$$

(答) 固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (または $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

P.19

問1 左辺 = $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 & \lambda_2 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \text{右辺 (証明終)}$

問2 左辺 = $A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$

$$\text{右辺} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

P.20 問1

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= A \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \text{右辺} \\ &\hspace{15em} (\text{証明終}) \end{aligned}$$

問2

$$(1) AP = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) P^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (3) P^{-1}AP &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

< No.12の解答 >

P.21 (1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ P.18問(1)より 固有値 $\lambda = 2$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 5$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(注1) 次の解も正解である。

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ P.18問(2)より 固有値 $\lambda = 2$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 6$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(注2) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 3$

$$\lambda = 2 \text{ のとき } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 \text{ のとき } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(注3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

< No.12 の解答 >

P.22 一次変換 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ は

(答) $\begin{cases} \text{ベクトル } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 方向 } (x \text{ 軸方向}) \text{ に } 2 \text{ 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 方向 } (y \text{ 軸方向}) \text{ に } 4 \text{ 倍ひきのばす変換である。} \end{cases}$

P.23

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -1 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

\downarrow
 $\lambda = 2, 4$

$$\lambda = 2 \text{ のとき } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \text{ とおく}$$

$$\lambda = 4 \text{ のとき } (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \text{固有ベクトル } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \text{ とおく}$$

固有値 λ と固有値ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の関係 ($A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$) より

$$A\mathbf{a} = 2\mathbf{a}, \quad A\mathbf{b} = 4\mathbf{b}$$

(答) $\begin{cases} \text{ベクトル } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 方向に } 2 \text{ 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 方向に } 4 \text{ 倍ひきのばす変換である。} \end{cases}$

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{ は P.21 問 (3) より 固有値は } \underline{\lambda = 2, 3}$$

$$\lambda = 2 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \text{ とおく}$$

$$\lambda = 3 \text{ に対する固有ベクトルは } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \text{ とおく}$$

固有値 λ と固有値ベクトルの関係より

$$A\mathbf{a} = 2\mathbf{a}, \quad A\mathbf{b} = 3\mathbf{b}$$

(答) $\begin{cases} \text{ベクトル } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 方向に } 2 \text{ 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ 方向に } 3 \text{ 倍ひきのばす変換である。} \end{cases}$

(注) (2) の場合 $P = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと P.21 問 (3) より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

従って $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$ となる。この対角化の図形的意味は P.44 < 付録 4 > を参照。

< No.12の解答 >

P.24 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 13 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 17 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 17 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7+13 \\ 3+9+15 \\ 5+11+17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 27 \\ 33 \end{pmatrix}$ より一次変換 A によって

原点 $(0, 0, 0)$ は原点 $(0, 0, 0)$ に , 点 $(1, 0, 0)$ は点 $(1, 3, 5)$ に ,
点 $(0, 1, 0)$ は点 $(7, 9, 11)$ に , 点 $(0, 0, 1)$ は点 $(13, 15, 17)$ に ,
点 $(1, 1, 1)$ は点 $(21, 27, 33)$ に移る。

P.25 (1) $x' = x \cos \theta - y \sin \theta$
 $y' = x \sin \theta + y \cos \theta$

(2) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

P.26 問1 $a' = a \cos \theta - b \sin \theta$
 $b' = a \sin \theta + b \cos \theta$

問2 $y' = y \cos \theta - z \sin \theta$
 $z' = y \sin \theta + z \cos \theta$

問3 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

P.27 問1 $z' = z \cos \theta - x \sin \theta$
 $x' = z \sin \theta + x \cos \theta$

問2 $x' = x \cos \theta + z \sin \theta$
 $y' = y$
 $z' = -x \sin \theta + z \cos \theta$

問3 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

< No.12 の解答 >

P.28 問1 $x'' = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = (x \cos \theta + z \sin \theta) \cos \varphi - y \sin \varphi$
 $= (\cos \theta \cos \varphi)x - (\sin \varphi)y + (\sin \theta \cos \varphi)z$
 $y'' = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = (x \cos \theta + z \sin \theta) \sin \varphi + y \cos \varphi$
 $= (\cos \theta \sin \varphi)x + (\cos \varphi)y + (\sin \theta \sin \varphi)z$
 $z'' = z' = (-\sin \theta)x + (\cos \theta)z$

より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問2

$$BA = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

P.29 問1 (1) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, (2) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{p}^t = (p_1 \ p_2 \ p_3)$, (4) $\mathbf{r}^t = (3 \ 4)$

問2 (1) $A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{x}^t A^t = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$
 $= (a_1x + b_1y + c_1z \quad a_2x + b_2y + c_2z \quad a_3x + b_3y + c_3z)$

問3 $|\mathbf{Ax}|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix} \right|^2$
 $= (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2$
 $= (a_1x + b_1y + c_1z \quad a_2x + b_2y + c_2z \quad a_3x + b_3y + c_3z) \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$
 $= \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x}$

< No.12 の解答 >

P.30 問1 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

(1) $|\mathbf{p}_1|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, $|\mathbf{p}_2|^2 = (-\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$

$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \cos \theta (-\sin \theta) + \sin \theta \cos \theta = 0$

(2) $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ は直交行列であるから

$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

問2 $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ とおくと

$|\mathbf{p}_1|^2 = (\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2 = 1$, $|\mathbf{p}_2|^2 = (\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$,

$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = (\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) + (-\frac{4}{5})(\frac{3}{5}) = 0$

より $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ は直交行列であり

$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

(別解)

$P^t P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + \frac{16}{25} & \frac{12}{25} - \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} - \frac{12}{25} & \frac{16}{25} + \frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

より $P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

よって P は直交行列である。

P.31 $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

(1)

$|\mathbf{p}_1|^2 = (\frac{2}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{5}})^2 = 1$, $|\mathbf{p}_2|^2 = \frac{1+9+4}{14} = 1$, $|\mathbf{p}_3|^2 = \frac{9+25+36}{70} = 1$

$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$, $\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 = 0$

(2) $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3)$

$P^t P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

< No.12の解答 >

$$\mathbf{P.31} \quad (3) \quad P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P.32} \quad (1) \quad P^t P &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 \\ x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 & x_3 x_2 + y_3 y_2 + z_3 z_2 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_1|^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & |\mathbf{p}_2|^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & |\mathbf{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(注) (1) を転置行列の記号 \mathbf{p}^t を用いると, 次のように書ける。

$$\begin{aligned} P^t P &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^t \\ \mathbf{p}_2^t \\ \mathbf{p}_3^t \end{pmatrix} (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^t \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1^t \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1^t \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2^t \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2^t \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_2^t \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3^t \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3^t \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3^t \mathbf{p}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\mathbf{p}_1|^2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & |\mathbf{p}_2|^2 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2 & |\mathbf{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \quad P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad PP^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 \\ y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 & y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 \\ z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 & z_1 y_1 + z_2 y_2 + z_3 y_3 & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 1, & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 &= 0, & y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 &= 0, & x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 &= 0 \end{aligned}$$

< No.12の解答 >

P.32 (5) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおくと $P^t = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ となる。

(4)の結果より

$$|\mathbf{x}|^2 = 1 \quad , \quad |\mathbf{y}|^2 = 1 \quad , \quad |\mathbf{z}|^2 = 1$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad , \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = 0 \quad , \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = 0$$

となるので $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ は正規直交系である。

よって $P^t = (\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z})$ は直交行列である。

(別解) $Q = P^t$ とおくと $Q^t = (P^t)^t = P$ であるから

$$Q^t Q = P P^t = P P^{-1} = I$$

よって $Q^t = Q^{-1}$ より Q は直交行列である。(証明終)

P.33 $B = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$ より

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad |\mathbf{b}_1|^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \quad , \quad |\mathbf{b}_2|^2 = (-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi = 1 \quad , \quad |\mathbf{b}_3|^2 = 1$$

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0 \quad , \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_3 = 0 \quad , \quad \mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1 = 0$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad |\mathbf{c}_1|^2 = \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$|\mathbf{c}_2|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

$$|\mathbf{c}_3|^2 = \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{c}_2 = -\cos \varphi \cos \theta \sin \varphi + \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi = 0$$

$$\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{c}_3 = -\sin \varphi \cos \varphi \sin \theta + \cos \varphi \sin \varphi \sin \theta = 0$$

$$\mathbf{c}_3 \cdot \mathbf{c}_1 = \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \varphi \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta = \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta = 0$$

(2) (1)の結果より $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ と $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ は共に正規直交系である。

よって $B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$ と $C = (\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3)$ の逆行列は転置行列である。

すなわち

$$B^{-1} = B^t = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^{-1} = C^t = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \sin \varphi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

< No.12の解答 >

P.34 任意のベクトル x に対し , $x' = Ax$ とおくと

$$(BA)x = B(Ax) = Bx' \quad \dots\dots (1)$$

となる。 A, B は直交行列であるから性質 [] より

$$|Ax| = |x| \quad , \quad |Bx'| = |x'| \quad \dots\dots (2)$$

である。 (1) , (2) より

$$|(BA)x| = |Bx'| = |x'| = |Ax| = |x|$$

となる。従って $|(BA)x| = |x|$ より BA はベクトルの大きさを変えない。性質 [] を満たすので BA は直交行列である

(証明終)

P.35 問1 A が直交行列より $A^{-1} = A^t$ である。一方行列式の行と列

を入れかえても行列式の値は変わらないので $\det(A^t) = \det(A)$ である。

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= (\det A) \times (\det A) = (\det A^t) \times (\det A) \\ &= \det(A^t A) = \det(I) = 1 \end{aligned}$$

よって $\det A = \pm 1$ である。

問2 (1) $\{a, b, c\}$ は右手系だからスカラー三重積 $(a \times b) \cdot c$ は正(プラス)。

よって $\det A = (a \times b) \cdot c > 0$ である。 $\det A = \pm 1$ より $\det A = 1$ 。

(2) 6ページの式で $D = \det A = 1$ を代入し, 行列式を計算すると次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} x_1 &= b_2c_3 - b_3c_2 \quad , \quad x_2 = b_3c_1 - b_1c_3 \quad , \quad x_3 = b_1c_2 - b_2c_1 \\ y_1 &= a_3c_2 - a_2c_3 \quad , \quad y_2 = a_1c_3 - a_3c_1 \quad , \quad y_3 = a_2c_1 - a_1c_2 \\ z_1 &= a_2c_3 - a_3c_2 \quad , \quad z_2 = a_3b_1 - a_1b_3 \quad , \quad z_3 = a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

(3) $A^{-1} = A^t$ すなわち $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ と(2)の結果より

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c$$

$$b \times c = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a$$

$$c \times a = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 \\ c_3a_1 - c_1a_3 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b$$

< No.12 の解答 >

P.36 問1
$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

問2
$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \mathbf{y}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

P.37 問1
$$\begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

問2
$$\mathbf{x}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta$$

$$\mathbf{y}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{b} = x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi - z \sin \theta$$

$$\mathbf{z}' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{c} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

P.38 問1 (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, (2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$, (3) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

問2

(1) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}|^2 = 1$, (2) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{j}|^2 = 1$, (3) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{k}|^2 = 1$

(4) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, (5) $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$, (6) $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

問3

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_1$, (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_2$, (3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_3$

問4

(1) $(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + 6\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} - 4\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} - 8\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 3$

(2) $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 2 \times 4 + (-3) \times 2 + 4 \times (-5) = -18$

(3) $(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

問5

(1) $|\mathbf{i} - 2\mathbf{j}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

(2) $|3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

(3) $|a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

< No.12の解答 >

P.39 (1) $i \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (2) $j \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ (零ベクトル)

(3) $j \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i$ (4) $k \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j$

(5) $(2i + j - k) \times (i - 3j + 4k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} k = i - 9j - 7k$

(6) $(3i + 2j + k) \times (2i + j + 4k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$
 $= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k = 7i - 10j - k$

P.40 $a = \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k$, $b = \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k$, $c = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$

(1)

$$a \cdot b = \frac{6}{16} + \frac{2}{16} - \frac{2}{4} = 0 \quad , \quad b \cdot c = -\frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} = 0 \quad , \quad c \cdot a = -\frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{6}}{8} = 0$$

(2)

$$|a| = \sqrt{\frac{6}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{4}} = 1 \quad , \quad |b| = \sqrt{\frac{6}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{4}} = 1 \quad , \quad |c| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

(3) $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} k$
 $= (-\frac{2}{8} - \frac{2}{8})i - (-\frac{\sqrt{12}}{8} - \frac{\sqrt{12}}{8})j = -\frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j = c$

$$b \times c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} k$$

 $= (\frac{\sqrt{6}}{4})i - (-\frac{\sqrt{2}}{4})j + (\frac{3\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8})k = \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k = a$

$$c \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{vmatrix} k$$

 $= (\frac{\sqrt{6}}{4} - 0)i - (-\frac{\sqrt{2}}{4} - 0)j + (-\frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{3\sqrt{2}}{8})k = \frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}j - \frac{\sqrt{2}}{2}k = b$

< No.12の解答 >

P.40

< (3)の別解 > (1), (2) と (3)の が求めれば(3)の と は次の理由
で計算しなくても結果が得られる。

(理由) (1),(2) より $\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}$ は正規直交系であることがわかる。

(3)の より $\det(A) = 1 > 0$ だから $\{ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \}$ は 右手系 である。

35 ページ問 2 (3)の結果より $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ である。

< (4)の別解 > (3)の結果と(2)の結果より

$$\det(A) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{c}|^2 = 1$$

< (6)の別解 > $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は直交行列であるから, 一次変換 A は内積を変えない。よって

$$\begin{aligned} (p_1' \mathbf{a} + p_2' \mathbf{b} + p_3' \mathbf{c}) \cdot (q_1' \mathbf{a} + q_2' \mathbf{b} + q_3' \mathbf{c}) &= A \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \end{pmatrix} = p_1' q_1' + p_2' q_2' + p_3' q_3' \end{aligned}$$

< (7)の別解 > $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ の定義式 $(*)_1$ と $p_1', p_2', p_3', q_1', q_2', q_3'$ の
定義式 $(*)_2$ より

$$\begin{aligned} (p_1' \mathbf{a} + p_2' \mathbf{b} + p_3' \mathbf{c}) \cdot (q_1' \mathbf{a} + q_2' \mathbf{b} + q_3' \mathbf{c}) &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (p_1 \mathbf{i} + p_2 \mathbf{j} + p_3 \mathbf{k}) \cdot (q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) \\ &= p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \end{aligned}$$