2002年度 基礎数学ワークブック

高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A

$No.$12

解答

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.1　問1　(1) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,　$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

問2　もし仮に B が正則行列と仮定すると逆行列 B^{-1} が存在し

$$A = IA = (B^{-1}B)A = B^{-1}(BA) = B^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となって $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり , $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ であることに矛盾する。

従って最初の仮定が誤りである。すなわち B は正則行列でない。

P.2　$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対し $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくと $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+3y & 5z+3w \\ 4x+2y & 4z+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 4x+2y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5z+3w=0 \\ 4z+2w=1 \end{cases}$$

である。この連立方程式を解くと $x=-1$, $y=2$, $z=\frac{3}{2}$, $w=-\frac{5}{2}$ より

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ となる。これは $AA^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が成り立つように

x, y, z, w を定めた。もう一方の積は

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & -3+3 \\ 10-10 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$ は A の逆行列である。

P.3　(1)　① $\begin{cases} ax+by=1\cdots(*_1) \\ cx+dy=0\cdots(*_2) \end{cases}$　　② $\begin{cases} az+bw=0\cdots(*_3) \\ cz+dw=1\cdots(*_4) \end{cases}$

$(*_1)\times d - (*_2)\times b$

$$\begin{array}{rl} & adx+bdy=d \\ -) & bcx+bdy=0 \\ \hline & (ad-bc)x=d \end{array}$$

$\downarrow$

$$x = \frac{d}{ad-bc}$$

$(*_1)\times c - (*_2)\times a$

$$\begin{array}{rl} & acx+bcy=c \\ -) & acx+ady=0 \\ \hline & (bc-ad)y=c \end{array}$$

$\downarrow$

$$x = \frac{c}{bc-ad} = \frac{-c}{ad-bc}$$

$(*_3)\times d - (*_4)\times b$

$$\begin{array}{rl} & adz+bdw=0 \\ -) & bcz+bdw=b \\ \hline & (ad-bc)z=-b \end{array}$$

$\downarrow$

$$z = \frac{-b}{ad-bc}$$

$(*_1)\times c - (*_2)\times a$

$$\begin{array}{rl} & acz+bcw=0 \\ -) & acz+adw=a \\ \hline & (bc-ad)w=-a \end{array}$$

$\downarrow$

$$w = \frac{-a}{bc-ad} = \frac{a}{ad-bc}$$

(2)　$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.4 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0)$

より A は正則行列であり

$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

より A は正則行列でない。

(3) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \quad (\neq 0)$

より A は正則行列であり

$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 24 \quad (\neq 0)$

より A は正則行列であり

$A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

P.5

$$x_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad x_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad y_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$z_2 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \qquad z_3 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

P.6 (1) $c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$

$$= -\frac{1}{D}\left\{c_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 & c_2 \\ c_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3$

$$= \frac{1}{D}\left\{a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3$

$$= \frac{1}{D}\left\{b_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) $c_1z_1 + c_2z_2 + c_3z_3$

$$= \frac{1}{D}\left\{c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.7　[定理 2] $XA = I$ ならば $X = A^{-1}$ である。

＜証明＞ $X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$

より $X = A^{-1}$ となる。 (証明終)

P.8　(1) $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 - 25 \\ -9 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(答)　$x = 2$, $y = 1$

(2) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

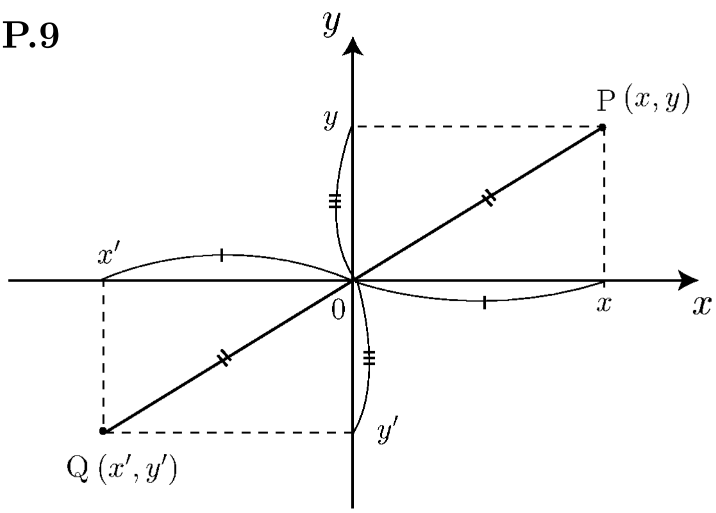
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 21 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(答)　$x = 3$, $y = 2$

P.9



左図より

$$\begin{cases} x' = -x = -1 \times x + 0 \times y \\ y' = -y = 0 \times x + (-1) \times y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(答)　$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

P.10

(1) $$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$< No.12$ の解答 $>$

P.11　問1

$$x' = r\cos(\alpha-\theta) = r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\alpha-\theta) = r\sin\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta - x\sin\theta$$

問2

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & + & y\sin\theta \\ -x\sin\theta & + & y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{(答)}\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問3

$$A^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問4

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問5

$$(1)\begin{pmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(3)\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ -\sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

P.12　問1

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+6y \\ 7x+8y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'+2y' \\ 3x'+4y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x'' = x' + 2y' = (5x+6y) + 2(7x+8y) = 19x + 22y \\ y'' = 3x' + 4y' = 3(5x+6y) + 4(7x+8y) = 43x + 50y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{(答)}\ \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

問2

(1)　AB

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

(2)　AB

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

$<$ $No.12$ の解答 $>$

P.13　問1

$$\begin{cases} x'' = \alpha x' + \beta y' = \alpha(ax+by) + \beta(cx+dy) = (\alpha a + \beta c)x + (\alpha b + \beta d)y \\ y'' = \gamma x' + \delta y' = \gamma(ax+by) + \delta(cx+dy) = (\gamma a + \delta c)x + (\gamma b + \delta d)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(答) $\underline{\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}}$

問2

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

P.14　問1　$BA = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta\sin\alpha + \cos\beta\cos\alpha \end{pmatrix}$$

問2　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

P.15　$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$　より　$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$

従って

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx' - by' \\ -cx' + ay' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d(ax+by) - b(cx+dy) \\ -c(ax+by) + a(cx+dy) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} (ad-bc)x \\ (ad-bc)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(証明終)

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.16　問1　$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax+by=\lambda x \\ cx+dy=\lambda y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$ が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつ。

$$\Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$$

(答)　$\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0$

問2　(1)　$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　,　$\lambda^2-(4+3)\lambda+4\times 3-2\times 1=0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-7\lambda+10=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

(答)　$\lambda=2$ または $\lambda=5$

(2)　$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$　,　$\lambda^2-5\lambda+4=0$　　(答)　$\lambda=1$　,　$\lambda=4$

(3)　$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　,　$\lambda^2-4\lambda+4=0$　　(答)　$\lambda=2$

(4)　$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　,　$\lambda^2-2\lambda+2=0$　　(答)　$\lambda=1\pm i$

P.17　(1)　A$=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$　,　$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \lambda^2-8\lambda+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-6)=0$　　(答)　$\lambda=2$　,　$\lambda=6$

(2)　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)=0$$

(答)　$\lambda=1$　,　$\lambda=4$　,　$\lambda=6$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.17 (3) $A=\begin{pmatrix}5&-1&7\\1&1&9\\0&0&3\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}5-\lambda&-1&7\\1&1-\lambda&9\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)+(3-\lambda)$$

$$= (3-\lambda)\{\,(5-\lambda)(1-\lambda)+1\,\} = (3-\lambda)\{\,\lambda^2-6\lambda+6\,\} = 0$$

$3-\lambda = 0$ または $\lambda^2-6\lambda+6 = 0$ $\Rightarrow$ (答) $\lambda=3$, $\lambda=3\pm\sqrt{3}$

(4) $A=\begin{pmatrix}1&0&4\\7&0&5\\2&0&-1\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda&0&4\\7&-\lambda&5\\2&0&-1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(-1-\lambda)-2\times4\times(-\lambda)$$

$$= \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)+8\lambda = \lambda\{\,(1-\lambda)(1+\lambda)+8\,\} = \lambda\{\,1-\lambda^2+8\,\}$$

$$= \lambda(9-\lambda^2) = \lambda(3-\lambda)(3+\lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{(答)}\ \lambda=0\ ,\ \lambda=3\ ,\ \lambda=-3$$

P.18 (1) $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\lambda=2$, $\lambda=5$

① $\lambda=2$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2y\\x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x+y=0$ より 固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 等

② $\lambda=5$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+2y\\x-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x-2y=0$ より 固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(答) 固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\left(\text{または}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$

固有値 $\lambda=5$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(2) $A=\begin{pmatrix}3&3\\1&5\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&3\\1&5-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ $\lambda=2$, $\lambda=6$

① $\lambda=2$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+3y=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ 等

② $\lambda=6$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x-y=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

(答) 固有値 $\lambda=2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ $\left(\text{または}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)$

固有値 $\lambda=6$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.18 (3) $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$ $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \underline{\lambda=1\ ,\ 4}$

① $\lambda=1\Rightarrow(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 等

② $\lambda=4\Rightarrow(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x-2y=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 等

(答) <u>固有値 $\lambda=1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\left(\text{または}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$</u>

<u>固有値 $\lambda=4$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$</u>

P.19

問1 左辺 $=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_1}&\boldsymbol{x_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\lambda_1x_1&\lambda_2x_2\\\lambda_1y_1&\lambda_2y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{x_1}&\lambda_2\boldsymbol{x_2}\end{pmatrix}=$ 右辺 (証明終)

問2 左辺 $=A\begin{pmatrix}\boldsymbol{x_1}&\boldsymbol{x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax_1+by_1&ax_2+by_2\\cx_1+dy_1&cx_2+dy_2\end{pmatrix}$

右辺 $=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{x_1}&A\boldsymbol{x_2}\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}ax_1+by_1&ax_2+by_2\\cx_1+dy_1&cx_2+dy_2\end{pmatrix}$

P.20 問1

左辺 $=A(\boldsymbol{x}_1\ \ \boldsymbol{x}_2)=(A\boldsymbol{x}_1\quad A\boldsymbol{x}_2)$

$=(\lambda_1\boldsymbol{x}_1\quad\lambda_2\boldsymbol{x}_2)=(\boldsymbol{x}_1\quad\boldsymbol{x}_2)\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=$ 右辺

(証明終)

問2

(1) $AP=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-2&5\end{pmatrix}$

$P\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-2&5\end{pmatrix}$

(2) $P^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

(3) $P^{-1}AP=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&5\\-2&5\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}6&0\\0&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$

$<$ $No.12$ の解答 $>$

P.21 (1) $A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ P.18 問 (1) より 固有値 $\lambda=2$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda=5$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\,P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&10\\-2&5\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&0\\0&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

(注 1) 次の解も正解である。

$$P=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A\,P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&2\\5&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15&0\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&2\end{pmatrix}$$

---

(2) $A=\begin{pmatrix}3&3\\1&5\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ P.18 問 (2) より 固有値 $\lambda=2$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

固有値 $\lambda=6$ のとき 固有ベクトル $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$$

(注 2) $P=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-3\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}6&0\\0&2\end{pmatrix}$

---

(3) $A=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{pmatrix}$, $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}\frac{5}{2}-\lambda&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+6=0$

$\Rightarrow$ $\underline{\lambda=2\,,\ 3}$

① $\lambda=2$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

② $\lambda=3$ のとき $(A-\lambda I)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\ P^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$$

(注 3) $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\quad,\quad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$$

$<$ $No.12$ の解答 $>$

P.22　一次変換 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ は

(答) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ベクトル} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{方向 (}x\text{ 軸方向) に 2 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{方向 (}y\text{ 軸方向) に 4 倍ひきのばす変換である。} \end{array} \right.$

P.23

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$　,　$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\lambda = 2\ ,\ 4}$$

① $\lambda = 2$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$ とおく

② $\lambda = 4$ のとき $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$ とおく

固有値 λ と固有値ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の関係 $(A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x})$ より

$$A\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a} \quad , \quad A\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{b}$$

(答) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ベクトル } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{方向に 2 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{方向に 4 倍ひきのばす変換である。} \end{array} \right.$

(1)　$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$　は P.21 問 (3) より　固有値は $\underline{\lambda = 2\ ,\ 3}$

① $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$ とおく

② $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$ とおく

固有値 λ と固有値ベクトルの関係より

$$A\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a} \quad , \quad A\boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{b}$$

(答) $\left\{ \begin{array}{l} \text{ベクトル } \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{方向に 2 倍ひきのばし,} \\ \text{ベクトル } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{方向に 3 倍ひきのばす変換である。} \end{array} \right.$

(注) (2) の場合 $P = (\boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと P.21 問 (3) より $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

従って $A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}$ となる。　この対角化の図形的意味は P.44 ＜付録 4 ＞を参照。

$<$ $No.12$の解答 $>$

P.24 $A=\begin{pmatrix}1&7&13\\3&9&15\\5&11&17\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\9\\11\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\15\\17\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+7+13\\3+9+15\\5+11+17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\27\\33\end{pmatrix}$ より 一次変換 A によって

原点 (0 , 0 , 0) は原点 (0 , 0 , 0) に , 点 (1 , 0 ,0) は点 (1 , 3 , 5) に ,

点 (0 , 1 , 0) は点 (7 , 9 , 11) に , 点 (0 , 0 , 1) は原点 (13 , 15 , 17) に ,

点 (1 , 1 , 1) は点 (21 , 27 , 33) に移る。

P.25 (1) $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$

$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$

(2) $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

P.26 **問 1** $a'=a\cos\theta-b\sin\theta$

$b'=a\sin\theta+b\cos\theta$

問 2 $y'=y\cos\theta-z\sin\theta$

$z'=y\sin\theta+z\cos\theta$

問 3 $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

P.27 **問 1** $z'=z\cos\theta-x\sin\theta$

$x'=z\sin\theta+x\cos\theta$

問 2 $x'=x\cos\theta+z\sin\theta$

$y'=y$

$z'=-x\sin\theta+z\cos\theta$

問 3 $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.28　問1

$$x'' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi = (x\cos\theta + z\sin\theta)\cos\varphi - y\sin\varphi$$
$$= (\cos\theta\cos\varphi)x - (\sin\varphi)y + (\sin\theta\cos\varphi)z$$

$$y'' = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi$$
$$= (\cos\theta\sin\varphi)x + (\cos\varphi)y + (\sin\theta\sin\varphi)z$$

$$z'' = z' = (-\sin\theta)x + (\cos\theta)z$$

より

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

問2

$$BA = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

P.29　問1　(1)　$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　,　(2)　$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(3)　$\boldsymbol{p}^t = (\ p_1 \quad p_2 \quad p_3\ )$　,　(4)　$\boldsymbol{r}^t = (\ 3 \quad 4\ )$

問2　(1)　$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$

(2)　$\boldsymbol{x}^t A^t = (\ x \quad y \quad z\ ) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$

$$= (a_1x + b_1y + c_1z \qquad a_2x + b_2y + c_2z \qquad a_3x + b_3y + c_3z)$$

問3　$|A\boldsymbol{x}|^2 = \left| \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix} \right|^2$

$$= (a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2$$

$$= (a_1x+b_1y+c_1z \qquad a_2x+b_2y+c_2z \qquad a_3x+b_3y+c_3z) \begin{pmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{x}^{\,t} A^{\,t} A\, \boldsymbol{x}$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.30　問1　$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

(1) ① $|\boldsymbol{p}_1|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ，② $|\boldsymbol{p}_2|^2 = (-\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$

③ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta\cos\theta = 0$

(2) $P = (\boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は直交行列であるから

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

問2　$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ とおくと

$|\boldsymbol{p}_1|^2 = (\frac{3}{5})^2 + (-\frac{4}{5})^2 = 1$ ，$|\boldsymbol{p}_2|^2 = (\frac{4}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2 = 1$ ，

$\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = (\frac{3}{5})(\frac{4}{5}) + (-\frac{4}{5})(\frac{3}{5}) = 0$

より $P = (\ \boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ )$ は直交行列であり

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

(別解)

$$P^tP = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25}+\frac{16}{25} & \frac{12}{25}-\frac{12}{25} \\ \frac{12}{25}-\frac{12}{25} & \frac{16}{25}+\frac{9}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より $P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

よって P は直交行列である。

P.31　$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

(1)

① $|\boldsymbol{p}_1|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$ ，② $|\boldsymbol{p}_2|^2 = \frac{1+9+4}{14} = 1$ ，③ $|\boldsymbol{p}_3|^2 = \frac{9+25+36}{70} = 1$

④ $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0$ ，⑤ $\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 = 0$ ，⑥ $\boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0$

(2)　$P = (\ \boldsymbol{p}_1\ \ \boldsymbol{p}_2\ \ \boldsymbol{p}_3\ )$

$$P^tP = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$< No.12$ の解答 $>$

P.31 (3) $P^{-1} = P^{\,t} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

P.32 (1) $P^{\,t}P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \\ x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 & {x_2}^2 + {y_2}^2 + {z_2}^2 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 \\ x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 & x_3x_2 + y_3y_2 + z_3z_2 & {x_3}^2 + {y_3}^2 + {z_3}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}_1|^2 & \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1 & |\boldsymbol{p}_2|^2 & \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2 & |\boldsymbol{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(注) (1) を転置行列の記号 $\boldsymbol{p}^{\,t}$ を用いると , 次のように書ける。

$$P^{\,t}P = \begin{pmatrix} {\boldsymbol{p}_1}^t \\ {\boldsymbol{p}_2}^t \\ {\boldsymbol{p}_3}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\boldsymbol{p}_1}^t\boldsymbol{p}_1 & {\boldsymbol{p}_1}^t\boldsymbol{p}_2 & {\boldsymbol{p}_1}^t\boldsymbol{p}_3 \\ {\boldsymbol{p}_2}^t\boldsymbol{p}_1 & {\boldsymbol{p}_2}^t\boldsymbol{p}_2 & {\boldsymbol{p}_2}^t\boldsymbol{p}_3 \\ {\boldsymbol{p}_3}^t\boldsymbol{p}_1 & {\boldsymbol{p}_3}^t\boldsymbol{p}_2 & {\boldsymbol{p}_3}^t\boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |\boldsymbol{p}_1|^2 & \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_1 & |\boldsymbol{p}_2|^2 & \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 \\ \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_3 \cdot \boldsymbol{p}_2 & |\boldsymbol{p}_3|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

(2)

$$P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

(3)

$$PP^t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 & x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 & x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 & {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 & y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 \\ z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 & z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3 & {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 \end{pmatrix}$$

(4)

① ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$, ② ${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 = 1$, ③ ${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 1$

④ $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$, ⑤ $y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 = 0$, ⑥ $x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 0$

$<$ $No.12$ の解答 $>$

P.32 (5) $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{\,t}=(\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{z}\ )$ となる。

(4) の結果より

$$|\boldsymbol{x}|^2=1 \quad , \quad |\boldsymbol{y}|^2=1 \quad , \quad |\boldsymbol{z}|^2=1$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0 \quad , \quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}=0 \quad , \quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z}=0$$

となるので $\{\ \boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{y}\ ,\ \boldsymbol{z}\ \}$ は正規直交系である。

よって $P^{\,t}=(\ \boldsymbol{x}\ \ \boldsymbol{y}\ \ \boldsymbol{z}\ )$ は直交行列である。

(別解) $Q=P^{\,t}$ とおくと $Q^{\,t}=(P^{\,t})^{\,t}=P$ であるから

$$Q^tQ=PP^{\,t}=PP^{\,-1}=I$$

よって $Q^{\,t}=Q^{\,-1}$ より Q は直交行列である。 (証明終)

P.33 $B=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(\ \boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3\ )$ より

$$\boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) ① $|\boldsymbol{b}_1|^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$, ② $|\boldsymbol{b}_2|^2=(-\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi=1$, ③ $|\boldsymbol{b}_3|^2=1$

④ $\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2=-\cos\varphi\sin\varphi+\sin\varphi\cos\varphi=0$, ⑤ $\boldsymbol{b}_2\cdot\boldsymbol{b}_3=0$, ⑥ $\boldsymbol{b}_3\cdot\boldsymbol{b}_1=0$

$$\boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{c}_2=\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{c}_1=\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

(1) ⑦ $|\boldsymbol{c}_1|^2=\cos^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

⑧ $|\boldsymbol{c}_2|^2=\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$

⑨ $|\boldsymbol{c}_3|^2=\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

⑩ $\boldsymbol{c}_1\cdot\boldsymbol{c}_2=-\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi+\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi=0$

⑪ $\boldsymbol{c}_2\cdot\boldsymbol{c}_3=-\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta+\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta=0$

⑫ $\boldsymbol{c}_3\cdot\boldsymbol{c}_1=\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta+\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=0$

(2) (1) の結果より $\{\ \boldsymbol{b}_1\ ,\ \boldsymbol{b}_2\ ,\ \boldsymbol{b}_3\ \}$ と $\{\ \boldsymbol{c}_1\ ,\ \boldsymbol{c}_2\ ,\ \boldsymbol{c}_3\ \}$ は共に正規直交系である。

よって $B=(\ \boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3\ )$ と $C=(\ \boldsymbol{c}_1\ \ \boldsymbol{c}_2\ \ \boldsymbol{c}_3\ )$ の逆行列は転置行列である。

すなわち

$$B^{\,-1}=B^{\,t}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad C^{\,-1}=C^{\,t}=\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

< $No.12$ の解答 >

P.34 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し , $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ とおくと

$$(BA)\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}' \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

となる。 A , B は直交行列であるから性質 [III] より

$$|A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}| \quad , \quad |B\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}'| \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

である。 (1) , (2) より

$$|(BA)\boldsymbol{x}| = |B\boldsymbol{x}'| = |\boldsymbol{x}'| = |A\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$$

となる。従って $|(BA)\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{x}|$ より BA はベクトルの大きさを変えない。性質 [III] を満たすので BA は直交行列である

(証明終)

P.35 **問1** A が直交行列より $A^{-1} = A^{t}$ である。一方行列式の行と列を入れかえても行列式の値は変わらないので $\det(A^t) = \det(A)$ である。

$$\begin{aligned}(\mathrm{det}A)^2 &= (\mathrm{det}A) \times (\mathrm{det}A) = (\mathrm{det}A^t) \times (\mathrm{det}A)\\ &= \det(A^tA) = \det(I) = 1\end{aligned}$$

よって $\mathrm{det}A = \pm 1$ である。

問2 (1) $\{\ \boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{c}\ \}$ は右手系だからスカラー三重積 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ は正 (プラス)。よって $\mathrm{det}A = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} > 0$ である。$\mathrm{det}A = \pm 1$ より $\mathrm{det}A = 1$。

(2) 6 ページの式で $D = \mathrm{det}A = 1$ を代入し, 行列式を計算すると次の結果が得られる。

$$x_1 = b_2c_3 - b_3c_2 \quad , \quad x_2 = b_3c_1 - b_1c_3 \quad , \quad x_3 = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$y_1 = a_3c_2 - a_2c_3 \quad , \quad y_2 = a_1c_3 - a_3c_1 \quad , \quad y_3 = a_2c_1 - a_1c_2$$

$$z_1 = a_2c_3 - a_3c_2 \quad , \quad z_2 = a_3b_1 - a_1b_3 \quad , \quad z_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

(3) $A^{-1} = A^t$ すなわち $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ と (2) の結果より

① $$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}$$

② $$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

③ $$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 \\ c_3a_1 - c_1a_3 \\ c_1a_2 - c_2a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.36　問1　$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 \\ b_1p_1 + b_2p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix}$

問2　$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = x\cos\theta + y\sin\theta \\ \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{-}\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

P.37　問1　$\begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \\ p_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 \\ b_1p_1 + b_2p_2 + b_3p_3 \\ c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c} \end{pmatrix}$

問2　$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a} = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta$

$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b} = x\cos\theta\cos\varphi + y\cos\theta\sin\varphi - z\sin\theta$

$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$

P.38　問1　(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$,　(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{k}$,　(3) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

問2

(1) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{i}|^2 = 1$,　(2) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{j}|^2 = 1$,　(3) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^2 = 1$

(4) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$,　(5) $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 0$,　(6) $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = 0$

問3

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i} = a_1$,　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j} = a_2$,　(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = a_3$

問4

(1) $(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j})\cdot(3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k}) = 3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} - 8\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = 3$

(2) $(2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\cdot(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) = 2\times4 + (-3)\times2 + 4\times(-5) = -18$

(3) $(a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

問5

(1) $|\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

(2) $|3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

(3) $|a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

$<$ $No.12$ の解答 $>$

P.39 (1) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&0\\1&0&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$ (2) $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&0\\0&1&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0}$ (零ベクトル)

(3) $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}$ (4) $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}$

(5) $(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-3&4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1\\-3&4\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-1\\1&4\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&1\\1&-3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}-9\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$$

(6) $(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&2&1\\2&1&4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}2&1\\1&4\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}3&1\\2&4\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}3&2\\2&1\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=7\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

P.40 $\boldsymbol{a}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$

(1)

① $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{6}{16}+\frac{2}{16}-\frac{2}{4}=0$, ② $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}=0$, ③ $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}=0$

(2)

① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\frac{6}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{4}}=1$, ② $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\frac{6}{16}+\frac{2}{16}+\frac{2}{4}}=1$, ③ $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

(3) ① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$$=(-\frac{2}{8}-\frac{2}{8})\boldsymbol{i}-(-\frac{\sqrt{12}}{8}-\frac{\sqrt{12}}{8})\boldsymbol{j}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}=\boldsymbol{c}$$

② $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&0\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$$=(\frac{\sqrt{6}}{4})\boldsymbol{i}-(-\frac{\sqrt{2}}{4})\boldsymbol{j}+(\frac{3\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8})\boldsymbol{k}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$$

③ $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&0\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$

$$=(\frac{\sqrt{6}}{4}-0)\boldsymbol{i}-(-\frac{\sqrt{2}}{4}-0)\boldsymbol{j}+(-\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8})\boldsymbol{k}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{b}$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.40 $\boldsymbol{a}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$

(4)

$$\det(A)=\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix} \underset{(\text{1列 − 2列})}{=} \begin{vmatrix}0 & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{vmatrix} \underset{(\text{1列展開})}{=} \sqrt{2}\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix} = \sqrt{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{8}=1$$

(5)

$$\boxed{\boldsymbol{p}=p_1\boldsymbol{i}+p_2\boldsymbol{j}+p_3\boldsymbol{k}\quad ,\quad \boldsymbol{q}=q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k}} \qquad \cdots\cdots(*)_1$$

$$\boxed{\boldsymbol{p}=p_1'\boldsymbol{a}+p_2'\boldsymbol{b}+p_3'\boldsymbol{c}\quad ,\quad \boldsymbol{q}=q_1'\boldsymbol{a}+q_2'\boldsymbol{b}+q_3'\boldsymbol{c}} \qquad \cdots\cdots(*)_2$$

$$(\text{答})\begin{cases} p_1'=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\sqrt{6}}{4}p_1+\frac{\sqrt{2}}{4}p_2+\frac{\sqrt{2}}{2}p_3 \quad , \quad p_2'=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{6}}{4}p_1+\frac{\sqrt{2}}{4}p_2-\frac{\sqrt{2}}{2}p_3 \\ p_3'=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}p_1+\frac{\sqrt{3}}{2}p_2 \quad , \quad q_1'=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\sqrt{6}}{4}q_1+\frac{\sqrt{2}}{4}q_2+\frac{\sqrt{2}}{2}q_3 \\ q_2'=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{\sqrt{6}}{4}q_1+\frac{\sqrt{2}}{4}q_2-\frac{\sqrt{2}}{2}q_3 \quad , \quad q_3'=\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}q_1+\frac{\sqrt{3}}{2}q_2 \end{cases}$$

(6) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=1$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=1$ より

$$(p_1{}'\boldsymbol{a}+p_2{}'\boldsymbol{b}+p_3{}'\boldsymbol{c})\cdot(q_1{}'\boldsymbol{a}+q_2{}'\boldsymbol{b}+q_3{}'\boldsymbol{c})$$

$$=p_1{}'q_1{}'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})+p_1{}'q_2{}'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+p_1{}'q_3{}'(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+p_2{}'q_1{}'(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+p_2{}'q_2{}'(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})$$

$$+p_2{}'q_3{}'(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+p_3{}'q_1{}'(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})+p_3{}'q_2{}'(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})+p_3{}'q_3{}'(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$=p_1{}'q_1{}'+p_2{}'q_2{}'+p_3{}'q_3{}'$$

(7) (5) , (6) の結果より

$$(p_1{}'\boldsymbol{a}+p_2{}'\boldsymbol{b}+p_3{}'\boldsymbol{c})\cdot(q_1{}'\boldsymbol{a}+q_2{}'\boldsymbol{b}+q_3{}'\boldsymbol{c})=p_1{}'q_1{}'+p_2{}'q_2{}'+p_3{}'q_3{}'$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}p_1+\frac{\sqrt{2}}{4}p_2+\frac{\sqrt{2}}{2}p_3\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{4}q_1+\frac{\sqrt{2}}{4}q_2+\frac{\sqrt{2}}{2}q_3\right)+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}p_1+\frac{\sqrt{2}}{4}p_2-\frac{\sqrt{2}}{2}p_3\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{4}q_1+\frac{\sqrt{2}}{4}q_2-\frac{\sqrt{2}}{2}q_3\right)$$

$$+\left(-\frac{1}{2}p_1+\frac{\sqrt{3}}{2}p_2\right)\left(-\frac{1}{2}q_1+\frac{\sqrt{3}}{2}q_2\right)$$

$$=\ \frac{6}{16}p_1q_1+\frac{2\sqrt{3}}{16}p_1q_2+\frac{2\sqrt{3}}{8}p_1q_3+\frac{2\sqrt{3}}{16}p_2q_1+\frac{2}{16}p_2q_2+\frac{2}{8}p_2q_3+\frac{2\sqrt{3}}{8}p_3q_1+\frac{2}{8}p_3q_2+\frac{2}{4}p_3q_3$$

$$+\ \frac{6}{16}p_1q_1+\frac{2\sqrt{3}}{16}p_1q_2-\frac{2\sqrt{3}}{8}p_1q_3+\frac{2\sqrt{3}}{16}p_2q_1+\frac{2}{16}p_2q_2-\frac{2}{8}p_2q_3-\frac{2\sqrt{3}}{8}p_3q_1-\frac{2}{8}p_3q_2+\frac{2}{4}p_3q_3$$

$$+\ \frac{1}{4}p_1q_1-\frac{\sqrt{3}}{4}p_1q_2 \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}p_2q_1+\frac{3}{4}p_2q_2$$

$$=\frac{6+6+4}{16}\ p_1q_1+\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{16}p_1q_2+\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}}{16}p_2q_1+\frac{2+2+12}{16}\ p_2q_2+\frac{2+2}{4}\ p_3q_3$$

$$=p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3$$

＜ $No.12$ の解答 ＞

P.40

＜(3)の別解＞　(1) , (2) と (3) の①が求まれば (3) の②と③は次の理由で計算しなくても結果が得られる。

(理由)　(1),(2) より $\{\ \boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{c}\ \}$ は正規直交系であることがわかる。

(3) の①より $\det(A) = 1 > 0$ だから $\{\ \boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{c}\ \}$ は $\underline{\text{右手系}}$ である。

35 ページ問 2 (3) の結果より $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$,　$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ である。

＜(4)の別解＞　(3) ①の結果と (2) ③の結果より

$$\det(A) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{c}|^2 = 1$$

＜(6)の別解＞　$A = (\ \boldsymbol{a}\ ,\ \boldsymbol{b}\ ,\ \boldsymbol{c}\ )$ は直交行列であるから , 一次変換 A は内積を変えない。よって

$$\begin{aligned}(p_1{}'\boldsymbol{a} + p_2{}'\boldsymbol{b} + p_3{}'\boldsymbol{c}) \cdot (q_1{}'\boldsymbol{a} + q_2{}'\boldsymbol{b} + q_3{}'\boldsymbol{c}) &= A\begin{pmatrix} p_1{}' \\ p_2{}' \\ p_3{}' \end{pmatrix} \cdot A\begin{pmatrix} q_1{}' \\ q_2{}' \\ q_3{}' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_1{}' \\ p_2{}' \\ p_3{}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1{}' \\ q_2{}' \\ q_3{}' \end{pmatrix} = p_1{}'q_1{}' + p_2{}'q_2{}' + p_3{}'q_3{}'\end{aligned}$$

＜(7)の別解＞　$p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ q_1\ ,\ q_2\ ,\ q_3$ の定義式 $(*)_1$ と $p_1{}'\ ,\ p_2{}'\ ,\ p_3{}'\ ,\ q_1{}'\ ,\ q_2{}'\ ,\ q_3{}'$ の定義式 $(*)_2$ より

$$\begin{aligned}(p_1{}'\boldsymbol{a} + p_2{}'\boldsymbol{b} + p_3{}'\boldsymbol{c}) \cdot (q_1{}'\boldsymbol{a} + q_2{}'\boldsymbol{b} + q_3{}'\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} &= (p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}) \cdot (q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ &= p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3\end{aligned}$$