

2002年度 基礎数学ワークブック

| | |
|-----|---|
| 著者 | 井上 昌昭 |
| 雑誌名 | 高知工科大学 基礎数学ワークブック |
| 巻 | 2002年度版 |
| 発行年 | 2002 |
| URL | http://hdl.handle.net/10173/248 |

高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2002年度版)

Series **A**

No. 11

解答

< 1 ページ.2 次行列式の性質 >

問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-y & -1 \\ 4x+2y & 2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10x$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 4 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3x-y \\ 4 & 4x+2y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10y$$

< 2 ページ.3 次行列式の性質 1 >

問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 63$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 - 46 = -53$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 4 = -12$$

< 3 ページ.3 次行列式の性質 2 >

問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(6 + 1) = -14$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 2) + 3(1 + 3) = 11$$

< 4 ページ.3 次行列式の性質 3 >

問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(5+4) = -9$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 1 = -11$$

< 5 ページ.3 次行列式の性質 4 >

問の解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & (1+1) & 3 \\ 2 & (2+1) & 4 \\ 5 & (5+1) & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & (1+2) \\ 2 & 1 & (2+2) \\ 5 & 1 & (5+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 \times 2 & 1 \times 2 & 3 \times 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (3+1) & 1 & 0 \\ (0+1) & 1 & 1 \\ (-3+1) & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\
 &= 3(3 - 1 - 1) = 3
 \end{aligned}$$

< 6 ページ.3 次行列式の性質 5 >

問の解答

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 17 & 27 \\ 15 & 35 & 55 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$$

$$(3) \begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 23 & 10 & 32 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 23 & 32 \\ 23 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$(4) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 25 \\ 7 & 3 & 30 \\ 10 & 3 & 28 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 8 & 25 \\ 3 & 7 & 30 \\ 3 & 10 & 28 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 25 \\ 1 & 7 & 30 \\ 1 & 10 & 28 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3(-3 - 10) = 39$$

< 7 ページ.2 元連立一次方程式 1 >

問の解答

$$(1) \quad \begin{cases} 5x + 2y = k_1 \cdots \\ 4x + 3y = k_2 \cdots \end{cases}$$

(解)

$$\begin{array}{r} \times 3- \quad \times 2 \\ 15x + 6y = 3k_1 \\ -) \quad 8x + 6y = 2k_2 \\ \hline 7x \quad = 3k_1 - 2k_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3k_1 - 2k_2}{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 4- \quad \times 5 \\ 20x + 8y = 4k_1 \\ -) \quad 20x + 15y = 5k_2 \\ \hline -7y = 4k_1 - 5k_2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-4k_1 + 5k_2}{7} \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{cases} ax + by = k_1 \cdots \\ cx + dy = k_2 \cdots \end{cases}$$

(解)

$$\begin{array}{r} \times d- \quad \times b \\ adx + bdy = k_1d \\ -) \quad bcx + bdy = k_2b \\ \hline (ad - bc)x = k_1d - k_2b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{k_1d - k_2b}{ad - bc} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times c- \quad \times a \\ acx + bcy = k_1c \\ -) \quad acx + ady = k_2a \\ \hline (bc - ad)y = k_1c - k_2a \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k_1c - k_2a}{bc - ad} \end{array}$$

< 8 ページ.2元連立一次方程式 2 >

問1の解答

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases} \\
 & \begin{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} (a_1x + b_1y) & b_1 \\ (a_2x + b_2y) & b_2 \end{matrix} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \begin{matrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 & (a_1x + b_1y) \\ a_2 & (a_2x + b_2y) \end{matrix} \end{matrix} \\
 & \begin{matrix} \begin{matrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \begin{matrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (\text{クラメルの公式})
 \end{aligned}$$

問2の解答

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \\
 & \text{(解)} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{7} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 3x + 4y = k_1 \\ 2x + 3y = k_2 \end{cases} \\
 & \text{(解)} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 4 \\ k_2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3k_1 - 4k_2}{7} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3k_2 - 2k_1}{7}
 \end{aligned}$$

< 9 ページ.3 元連立一次方程式 1 >

問の解答

$$(1) \begin{cases} 8x + 5y + 2z = 7 \cdots\cdots \\ 5x + 4y + 3z = 7 \cdots\cdots \\ 9x + 6y + 5z = 13 \cdots\cdots \end{cases}$$

$$< \times 3 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 24x + 15y + 6z = 21 \cdots \times 3 \\ -) 10x + 8y + 6z = 14 \cdots \times 2 \\ \hline 14x + 7y = 7 \Rightarrow 2x + y = 1 \cdots \end{array}$$

$$< \times 13 - >$$

$$\begin{array}{r} 26x + 13y = 13 \\ -) 22x + 13y = 9 \\ \hline 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5 \cdots\cdots \\ 4x + 3y + 5z = 11 \cdots\cdots \\ 2x - y + 3z = 9 \cdots\cdots \end{cases}$$

$$< \times 5 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 15x + 10y + 10z = 25 \cdots \times 5 \\ -) 8x + 6y + 10z = 22 \cdots \times 2 \\ \hline 7x + 4y = 3 \cdots \end{array}$$

$$< \times 2 - >$$

$$\begin{array}{r} 14x + 8y = 6 \\ -) 5x + 8y = -3 \\ \hline 9x = 9 \Rightarrow x = 1 \end{array}$$

$$< \times 5 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 40x + 25y + 10z = 35 \cdots \times 5 \\ -) 18x + 12y + 10z = 26 \cdots \times 2 \\ \hline 22x + 13y = 9 \cdots \end{array}$$

$$\text{よ} \text{ } \text{ } y = 1 - 2x = -1$$

$$\begin{array}{l} \text{よ} \text{ } \text{ } 2z = 7 - 8x - 5y \\ = 7 - 8 + 5 = 4 \\ \Rightarrow z = 2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{(\text{答}) } x = 1, y = -1, z = 2}$$

$$< \times 3 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 9x + 6y + 6z = 15 \cdots \times 3 \\ -) 4x - 2y + 6z = 18 \cdots \times 2 \\ \hline 5x + 8y = -3 \cdots \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{よ} \text{ } \text{ } 4y = 3 - 7x = 3 - 7 = -4 \\ \Rightarrow y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{よ} \text{ } \text{ } 2z = 5 - 3x - 2y = 5 - 3 + 2 = 4 \\ \Rightarrow z = 2 \end{array}$$

$$\underline{\underline{(\text{答}) } x = 1, y = -1, z = 2}$$

< 10 ページ.3 元連立方程式 2 >

問の解答

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = k_1 \cdots\cdots \\ 4x + 3y + 5z = k_2 \cdots\cdots \\ 2x - y + 3z = k_3 \cdots\cdots \end{cases}$$

$$< \quad \times 5 - \quad \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 15x + 10y + 10z = 5k_1 \\ -) \quad 8x + 6y + 10z = 2k_2 \\ \hline 7x + 4y \quad \quad = 5k_1 - 2k_2 \cdots \end{array}$$

$$< \quad \times 3 - \quad \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 9x + 6y + 6z = 3k_1 \\ -) \quad 4x - 2y + 6z = 2k_3 \\ \hline 5x + 8y \quad \quad = 3k_1 - 2k_3 \cdots \end{array}$$

$$< \quad \times 2 - \quad >$$

$$\begin{array}{r} 14x + 8y = 10k_1 - 4k_2 \\ -) \quad 5x + 8y = 3k_1 - 2k_3 \\ \hline 9x \quad \quad = 7k_1 - 4k_2 + 2k_3 \end{array}$$

$$x = \frac{7k_1 - 4k_2 + 2k_3}{9}$$

$$< \quad \times 7 - \quad \times 5 >$$

$$\begin{array}{r} 35x + 56y = 21k_1 - 14k_3 \\ -) \quad 35x + 20y = 25k_1 - 10k_2 \\ \hline 36y \quad \quad = -4k_1 + 10k_2 - 14k_3 \end{array}$$

$$y = \frac{-4k_1 + 10k_2 - 14k_3}{36}$$

$$= \frac{-2k_1 + 5k_2 - 7k_3}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{り} \quad z &= \frac{1}{2} \{k_1 - 3x - 2y\} = \frac{1}{2} \left\{ k_1 - \frac{21k_1 - 12k_2 + 6k_3}{9} - \frac{2k_1 + 5k_2 - 7k_3}{9} \right\} \\ &= \frac{-10k_1 + 7k_2 + k_3}{18} \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad x = \frac{7k_1 - 4k_2 + 2k_3}{9}, \quad y = \frac{-2k_1 + 5k_2 - 7k_3}{18}, \quad z = \frac{-10k_1 + 7k_2 + k_3}{18}$$

< 11 ページ.3 元連立一次方程式 3 >

一般の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \cdots \cdots \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \cdots \cdots \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \cdots \cdots \end{cases}$$

の解を求めたい。\$c_1, c_2, c_3\$ のうちどれかを 0 でないとする。ここでは \$c_1 \neq 0\$ として、まず \$z\$ を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times c_2 - \times c_1 > \\ a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = k_1c_2 \cdots \times c_2 \\ -) \ a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z = k_2c_1 \cdots \times c_1 \\ \hline (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = k_1c_2 - k_2c_1 \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{r} < \times c_3 - \times c_1 > \\ a_1c_3x + b_1c_3y + c_1c_3z = k_1c_3 \cdots \times c_3 \\ -) \ a_3c_1x + b_3c_1y + c_1c_3z = k_3c_1 \cdots \times c_1 \\ \hline (\boxed{a_1c_3 - a_3c_1})x + (\boxed{b_1c_3 - b_3c_1})y = \boxed{k_1c_3 - k_3c_1} \cdots \end{array}$$

次に \$y\$ を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times (b_1c_3 - b_3c_1) - \times (b_1c_2 - b_2c_1) > \\ (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)y = (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) \cdots \\ -) \ (\boxed{a_1c_3 - a_3c_1})(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1})x + (\boxed{b_1c_3 - b_3c_1})(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1})y = (\boxed{k_1c_3 - k_3c_1})(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}) \cdots \\ \hline \{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) \} x = (\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) \cdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{式の左辺} &= \left\{ (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\boxed{a_1c_3 - a_3c_1})(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}) \right\} x \\ &= \left\{ a_1b_1c_2c_3 - a_1b_3c_1c_2 - a_2b_1c_1c_3 + a_2b_3c_1^2 - (\boxed{a_1b_1c_2c_3 - a_3b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_3 + a_3b_2c_1^2}) \right\} x \\ &= c_1 \left\{ \boxed{-a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1} \right\} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式の右辺} &= (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\boxed{k_1c_3 - k_3c_1})(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}) \\ &= k_1b_1c_2c_3 - k_1b_3c_1c_2 - k_2b_1c_1c_3 + k_2b_3c_1^2 - (\boxed{k_1b_1c_2c_3 - k_3b_1c_1c_2 - k_1b_2c_1c_3 + k_3b_2c_1^2}) \\ &= c_1 \left\{ \boxed{-k_1b_3c_2 - k_2b_1c_3 + k_2b_3c_1 + k_3b_1c_2 + k_1b_2c_3 - k_3b_2c_1} \right\} \end{aligned}$$

問 上の 内に適当な文字式を入れよ。

< 12 ページ.3 元連立一次方程式 4 >

前ページの連立方程式

$$(*) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & \cdots \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & \cdots \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & \cdots \end{cases}$$

の解を求めたい。\$c_1 \neq 0\$ として \$z\$ と \$y\$ を消去した式は

$$c_1 \left\{ \quad \quad \quad \right\} x = c_1 \left\{ \quad \quad \quad \right\} \cdots$$

の形になった。ここで、

$$\begin{aligned} \text{式の右辺} &= c_1 \{-k_1b_3c_2 - k_2b_1c_3 + k_2b_3c_1 + k_3b_1c_2 + k_1b_2c_3 - k_3b_2c_1\} \\ &= c_1 \{k_1(b_2c_3 - b_3c_2) - k_2(b_1c_3 - b_3c_1) + k_3(b_1c_2 - b_2c_1)\} \\ &= c_1 \left\{ k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} = c_1 \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} \text{式の左辺} &= c_1 \left\{ \boxed{-a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1} \right\} x \\ &= c_1 \left\{ a_1 \left(\boxed{b_2c_3} - \boxed{b_3c_2} \right) - a_2 \left(\boxed{b_1c_3} - \boxed{b_3c_1} \right) + a_3 \left(\boxed{b_1c_2} - \boxed{b_2c_1} \right) \right\} x \\ &= c_1 \left\{ a_1 \begin{vmatrix} \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \end{vmatrix} \right\} x \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ a_3 & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} x \end{aligned}$$

となる。よって 式は

$$c_1 \begin{vmatrix} \boxed{a_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix} x = c_1 \begin{vmatrix} \boxed{k_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{k_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{k_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}$$

と表される。従って (*) の係数行列式が 0 でなければ \$x\$ の値が求まる。

問 上の 内に適当な文字式を入れよ。

< 13 ページ.3 元連立一次方程式 5 >

問1の解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad z = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

問2の解答

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 3 \\ x - 2y - 4z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -5 \text{ より}$$

$$x = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{26}{5}$$

$$y = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{61}{5}$$

$$z = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{32}{5}$$

$$\text{(答)} \underline{x = -\frac{26}{5}, y = \frac{61}{5}, z = -\frac{32}{5}}$$

$$(2) \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 3z = -1 \\ 5y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 23 \text{ より}$$

$$x = \frac{1}{23} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{25}{23}$$

$$y = \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{21}{23}$$

$$z = \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{23}$$

$$\text{(答)} \underline{x = -\frac{25}{23}, y = \frac{21}{23}, z = -\frac{9}{23}}$$

< 14 ページ.3 元連立一次方程式 6 >

問の解答

$$(1) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

< 15 ページ. ベクトルの平行条件 >

問1の解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ならば } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ (a と b は平行) であること}$$

を示す。

$$a_1 \neq 0 \text{ のとき } \frac{b_1}{a_1} = k \text{ とおくと } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \text{ より } b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2 = k a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0 \text{ より } b_3 = \frac{b_1}{a_1} a_3 = k a_3$$

$$\text{よって } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k a_1 \\ k a_2 \\ k a_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = k \mathbf{a} \text{ より } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$$

問2の解答

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ (外積 = ゼロベクトル)}$$

$$\text{(または } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0 \text{)}$$

< 16 ページ. スカラー三重積 1 >

問の解答

$$(1) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -12$$

$$(2) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

< 17 ページ. スカラー三重積 2 >

問1の解答

次のスカラー三重積を $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を用いて表せ。

$$(1) (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$(2) (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

問2の解答

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し次のスカラー三重積の値を求めよ。

$$(1) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (a_1 + b_1) \\ a_2 & b_2 & (a_2 + b_2) \\ a_3 & b_3 & (a_3 + b_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

< 18 ページ.2つの空間ベクトルの張る面積 1 >

問の解答

点 C が a と b の張る平面上の点であることを示すには

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

であることを示せば良い。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \overrightarrow{OC} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \\ xc_3 + yb_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (xa_1 + yb_1) \\ a_2 & b_2 & (xa_2 + yb_2) \\ a_3 & b_3 & (xa_3 + yb_3) \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

より点 C は a と b の張る平面上の点である。

< 19 ページ.2つの空間ベクトルの張る平面 2 >

問1の解答

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & n_1 \\ c_2 & b_2 & n_2 \\ c_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & c_2 & n_2 \\ a_3 & c_3 & n_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

問2の解答

$$z = 0 \text{ より } x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ よって } x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$$

< 20 ページ. 右手系と左手系 >

問の解答

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 < 0 \text{ より } \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \text{ は左手系}$$

$$(2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 52 > 0 \text{ より } \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \text{ は右手系}$$

< 21 ページ. 空間ベクトルと行列式 >

問の解答

(1) 図 3 の場合

a, b, c は同一平面上にある。

(2) 図 4 の場合

a, b, c は同一平面上にある。

< 22 ページ. 同次方程式 1 >

問の解答

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases} \text{ の解は } \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

$$(2) \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 12x - 18y = 0 \end{cases} \text{ の解は } \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

< 23 ページ. 同次方程式 2 >

問の解答

$$\text{(解 1)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{の解は} \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \text{ は任意の実数})$$

$$\text{(解 2)} \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 4y + 6z = 0 \\ 3x + 6y + 9z = 0 \end{cases} \quad \text{の解は} \begin{cases} x = -2t - 3s \\ y = t \\ z = s \end{cases} \quad (t \text{ と } s \text{ は任意の実数})$$

< 24 ページ. 同次方程式 3 >

問の解答

(前ページ解 1 の場合)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \text{ より}$$

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ よって (2) の 場合である。

(このとき \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行でない。 $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ となる)

(前ページ解 2 の場合)

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ より } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$$

よって (2) の 場合である。このとき $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は全て平行になる。

< 25 ページ. 内積の計算 1 >

問 1 の解答

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_1 + b_1) c_1 + (a_2 + b_2) c_2 + (a_3 + b_3) c_3 \\ &= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad (\text{証明終})\end{aligned}$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (ka_1) b_1 + (ka_2) b_2 + (ka_3) b_3 \\ &= k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{証明終})\end{aligned}$$

問 3 の解答

$$\begin{aligned}|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2\end{aligned}$$

< 26 ページ. 内積の計算 2 >

問 1 の解答

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2$$

問 2 の解答

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ より}$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

問 3 の解答

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{r} - k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})$$

$$= \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \times |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = 0$$

よって \mathbf{b} と \mathbf{a} は直交する。

< 27 ページ. 平面の直交系 >

問 1 の解答

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ など}$$

問 2 の解答

問 1 の \mathbf{b}, \mathbf{c} に対し $|\mathbf{b}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{c}| = \sqrt{5}$ より

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

< 28 ページ. 空間の直交系 1 >

問の解答

$$k = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} - 2\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

< 29 ページ. 空間の直交系 2 >

問の解答

$$(1) |\mathbf{b}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \quad |\mathbf{c}| = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}$$

$$(2) \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{14}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{c}}{\sqrt{70}} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$$

$$(3) |\mathbf{e}_2| = \sqrt{\frac{1^2 + 3^2 + (-2)^2}{14}} = 1 \quad |\mathbf{e}_3| = \sqrt{\frac{(-3)^2 + 5^2 + 6^2}{70}} = 1$$

$$(4) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 0 \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0$$

< 29 ページ. 空間の直交系 2 >

解答の続き

$$(5) \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{14\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{14}{14\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 \\ \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right| \\ \left| \begin{array}{cc} -\frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} & 0 \end{array} \right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{5\sqrt{14}} \\ \frac{15}{5\sqrt{14}} \\ -\frac{10}{5\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$$

$$(6) \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{14}} \times \frac{1}{\sqrt{70}} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{70} \left\{ 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{70} \{ 2 \times 28 + 14 \} = \frac{70}{70} = 1$$

(6 の別解)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = |\mathbf{e}_3|^2 = 1$$

< 30 ページ. 行列 >

問 1 の解答

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ は 3 行 4 列の行列, または (3, 4) 型の行列。

第 1 行は $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

(1, 3) 成分は 3, (3, 2) 成分は 10

問 2 の解答

4 次の行ベクトルの例 $(1 \ 2 \ 3 \ 4)$

3 次の列ベクトルの例 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 次の正方行列の例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ など

< 31 ページ. 行列の計算 1 >

問の解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) -3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -15 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

< 32 ページ. 行列の計算 2 >

問の解答

$$(1) 3X - 2A + B = O \quad X = \frac{1}{3}(2A - B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) 3(2X - 3A) = -5(B - X) \quad X = 9A - 5B = \begin{pmatrix} 2 & -21 \\ -17 & -4 \end{pmatrix}$$

< 33 ページ. 行列の積 1 >

問の解答

$$(1) (6 \ 5) \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = -1$$

$$(2) (3 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 65$$

$$(3) (2 \ -5 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$$

< 34 ページ. 行列の積 2 >

問の解答

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

< 35 ページ. 行列の積 3 >

問の解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 12 & 2 & 5 \\ -8 & 2 & 35 \end{pmatrix}$$

< 36 ページ. 行列の積 4 >

問の解答

$$(1) AB = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(2) AB = \begin{pmatrix} 28 & 35 & 18 \\ 16 & 7 & 22 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 25 & 16 \\ 10 & 1 & 0 \\ 38 & 8 & 20 \end{pmatrix}$$

< 37 ページ. 行列の積 5 >

問の解答

$$(1) C(A+B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2) AB - BC = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) CC + BC = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

< (3) の別解 >

$$(C+B)C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 17 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

< 38 ページ. 行列の積 6 >

問の解答

$$(1) A^2 - B^2 = AA - BB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^2 - BA + AB - B^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

< (2) の別解 >

$$A^2 - BA + AB - B^2 = (A - B)A + (A - B)B = (A - B)(A + B)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

< 39 ページ. 単位行列 >

問 1 の解答

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix}$$

問 2 の解答

$$(1) AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad IA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(2) AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad IA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

< 40 ページ. 零因子 >

問1の解答

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問2の解答

$$(1) AB = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(2) AC = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(3) A(B - C) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

< (3) の別解 >

$$A(B - C) = AB - AC = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問3

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & -bc + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$