2005年度版 基礎数学ワークブック 番外編「確率分布」

高知工科大学
Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

(2005年度版)

番外編

「確率分布」

解答

< 8ページ.連続型確率分布 >

問の解答

$$E[X] = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{x^3}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{x_1}^{x_2} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \frac{1}{x_2 - x_1} dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^3 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \end{aligned}$$

＜ 17ページ. 条件付確率 1 ＞

問 1 の解答

A と B が独立であるから $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ より

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

問 2 の解答

A 君がはずれを引いたとき，残りくじは 99 本で，当たりくじは 10 本残っているから

$$P\left(B \mid \overline{A}\right) = \frac{10}{99}$$

問 3 の解答

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}\,) \\
&= P(B|A) \times P(A) + P(B|\overline{A}\,) \times P(\overline{A}\,) \\
&= \frac{9}{99} \times \frac{10}{100} + \frac{10}{99} \times \frac{90}{100} \\
&= \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

＜ 24 ページ. 復元抽出による標本調査 1 ＞

問の解答

$$y_k = x_k - \overline{x} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)\ , \qquad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} -n\overline{x} = 0$$

より

(答) $y_n = -(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$

＜ 30 ページ. 母平均の区間推定 2 ＞

問の解答

$\alpha = 2.58$ のとき

$$P\left(|\overline{x} - \mu| \leqq \frac{\sigma}{\sqrt{50}} \times 2.58\right) = \int_{-2.58}^{2.58} \frac{1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \times 0.49506 = 0.99012$$

だから， $\overline{x} = 169.5$ ， $\sigma = 5.6$ を代入すると

$$|169.5 - \mu| \leqq \frac{5.6}{\sqrt{50}} \times 2.58 \fallingdotseq 2.043$$

となる。従って $(99.012\% \fallingdotseq)99\%$ の信頼区間は

<u>(答) $167.457 \leqq \mu \leqq 171.543$</u>

< 32 ページ. 母平均の区間推定 4 >

問の解答

確率 $1-\alpha=0.995$ での信頼区間を求める。$\alpha=0.005$ のとき t 分布表より $t_{n-1}(\alpha)=t_9(0.005)=3.690$ である。信頼区間は

$$169-3.69\times\sqrt{\frac{6.25}{10}}\leqq\mu\leqq169+3.69\times\sqrt{\frac{6.25}{10}}$$

より

(答) $166.083\leqq\mu\leqq171.917$

＜ 35 ページ. 母比率の区間推定 2 ＞

問の解答

$$\overline{X} = \frac{1500}{3000} = 0.5\ , \qquad N = 100000\ , \qquad n = 3000\ , \qquad \alpha = 1.96$$

に対し

$$a = \frac{N-n}{(N-1)n} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.260632$$

$$b = \frac{N-n}{(N-1)n} \times \frac{2\overline{X}}{\alpha^2} = 0.260632$$

$$c = \frac{\overline{X}^2}{\alpha^2} = 0.0650771$$

$$D = b^2 - 4ac = 0.0000842717$$

より

$$\frac{b-\sqrt{D}}{2a} = 0.482389\ , \qquad \frac{b+\sqrt{D}}{2a} = 0.517611$$

だから

95% の信頼区間は $0.482389 \leqq \mu \leqq 0.517611$

信頼区間の幅は $0.517611 - 0.482389 = 0.035222$

< 36ページ.必要な標本の大きさ >

問の解答

例題と同様にして，　$N = 200000$　　$\alpha = 2.96$ のとき

$$\alpha\sqrt{\frac{N-n}{N-1} \times \frac{\frac{1}{4}}{n}} \leqq 0.02$$

をみたすように n の範囲を求めると

$$n \geqq \frac{N}{4 \times \left(\frac{-0.02}{1.96}\right)^2 (N-1) + 1} = \frac{200000}{4 \times \left(\frac{2}{196}\right)^2 \times 199999 + 1} = 2372.53$$

であるから

(答) 2373 人以上抽出すればよい

(注)　信頼度 95% ，信頼区間の幅を 0.04 以下にするという条件でこの問題を考えると，N が大きくなっても抽出すべき人数 n はあまり変わらない。例えば

$N = 2000000$　のとき　$n \geqq 2399$

$N = 20000000$　のとき　$n \geqq 2401$

とすればよい。

< 37ページ. ポアソン過程 >

問の解答

$$
\begin{aligned}
E[\xi] &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x}dx\right\}
\end{aligned}
$$

ここで $\lambda > 0$ より

$$
\lim_{b\to\infty}\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} -be^{-\lambda b} = \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^{\lambda b}} = 0
$$

よって

$$
\begin{aligned}
E[\xi] &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{\lambda x}dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right\} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

(証明終)

(注)　$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{\lambda b}} = 0$ はロピタルの定理により

$$
\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{\lambda b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial b}(b)}{\frac{\partial}{\partial b}(e^{\lambda b}} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} = 0
$$

となって示される。

< 41 ページ. 乱歩の極限 >

問の解答

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} < b\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{a}{\sqrt{t}} < \frac{S_{nt}}{\sqrt{nt}} < \frac{b}{\sqrt{t}}\right)$$

($nt = m$ とおく)

$$= \lim_{m\to\infty} P\left(\frac{a}{\sqrt{t}} < \frac{S_m}{\sqrt{m}} < \frac{b}{\sqrt{t}}\right)$$

(中心極限定理より)

$$= \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\left(x = \frac{y}{\sqrt{t}}\text{とおく}\right)$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy$$

(証明終)

＜ 42 ページ. ランダムウォークによるブラウン運動の構成 ＞

問の解答

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \qquad \cdots \quad ①$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \qquad \cdots \quad ②$$

① = ②より $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (証明終)

＜ 43 ページ. 確率密度の収束 1 ＞

問の解答

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\left\{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right\}}{\frac{\partial}{\partial h}(h^2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\left\{f'(x+h)-f'(x-h)\right\}}{\frac{\partial}{\partial h}(2h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}=f''(x)$$ (証明終)

< 45ページ. ランダムウォークの族 >

問の解答

< (∗1) の証明 >

$$P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh\Big)$$

$$=P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh,\ S_h^\tau(n)=jh\Big)+P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh,\ S_h^\tau(n)=(j+1)h\Big)$$

$$+P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh,\ S_h^\tau(n)=(j-1)h\Big)$$

$$=P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh \mid S_h^\tau(n)=jh\Big)P\Big(S_h^\tau(n)=jh\Big)$$

$$+P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh \mid S_h^\tau(n)=(j+1)h\Big)P\Big(S_h^\tau(n)=(j+1)h\Big)$$

$$+P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh \mid S_h^\tau(n)=(j-1)h\Big)P\Big(S_h^\tau(n)=(j-1)h\Big)$$

$$=\left(1-\frac{\tau}{h^2}\right)P\Big(S_h^\tau(n)=jh\Big)+\frac{\tau}{2h^2}P\Big(S_h^\tau(n)=(j+1)h\Big)+\frac{\tau}{2h^2}P\Big(S_h^\tau(n)=(j-1)h\Big)$$

(証明終)

< (∗2) の証明 >

$$u_j^{n+1}=P\Big(S_h^\tau(n+1)=jh\Big)h^{-1}$$

$$=\left(1-\frac{\tau}{h^2}\right)P\Big(S_h^\tau(n)=jh\Big)h^{-1}+\frac{\tau}{2h^2}P\Big(S_h^\tau(n)=(j+1)h\Big)h^{-1}$$

$$+\frac{\tau}{2h^2}P\Big(S_h^\tau(n)=(j-1)h\Big)h^{-1}$$

$$=\left(1-\frac{\tau}{h^2}\right)u_j^n+\frac{\tau}{2h^2}u_{j+1}^n+\frac{\tau}{2h^2}u_{j-1}^n$$

より

$$u_j^{n+1}-u_j^n=\frac{\tau}{h^2}\left\{-u_j^n+\frac{1}{2}u_{j+1}^n+\frac{1}{2}u_{j-1}^n\right\}$$

従って

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}=\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{2h^2}$$

(証明終)

< 46 ページ. ジャンプ型マルコフ過程 >

問の解答

< (*3) の証明 >　$\{S_h(n)\}$ と $\{N_h(t)\}$ は独立だから

$$P\Big(S_h(N_h(t)) = jh\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(S_h(n) = jh,\ N_h(t) = n\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(S_h(n) = jh\Big) \times P\Big(N_h(t) = n\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(S_h(n) = jh\Big) e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}$$ (証明終)

< (*4) の証明 >

$$P\Big(S_h(n+1) = jh\Big)$$

$$= P\Big(S_h(n+1) = jh,\ S_h(n) = (j+1)h\Big) + P\Big(S_h(n+1) = jh,\ S_h(n) = (j-1)h\Big)$$

$$= P\Big(S_h(n+1) = jh \mid S_h(n) = (j+1)h\Big) P\Big(S_h(n) = (j+1)h\Big)$$

$$+ P\Big(S_h(n+1) = jh \mid S_h(n) = (j-1)h\Big) P\Big(S_h(n) = (j-1)h\Big)$$

$$= \frac{1}{2} P\Big(S_h(n) = (j+1)h\Big) + \frac{1}{2} P\Big(S_h(n) = (j-1)h\Big)$$ (証明終)

< 47 ページ. ブラウン運動への収束 >

問の解答

(∗5) を証明する

$$\frac{d}{dt}u_h(t,jh)=\frac{d}{dt}P\Big(S_h(N_h(t))=jh\Big)h^{-1}$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{P\Big(S_h(0)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}+\sum_{n=1}^{\infty}P\Big(S_h(n)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}\right\}h^{-1}$$

$$=\Bigg[-\frac{1}{h^2}P\Big(S_h(0)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}P\Big(S_h(n)=jh\Big)\left\{-\frac{1}{h^2}e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}+e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{1}{h^2}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^{n-1}}{(n-1)!}\right\}\Bigg]h^{-1}$$

$$=\frac{1}{h^2}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}P\Big(S_h(n)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}P\Big(S_h(n)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^{n-1}}{(n-1)!}\right\}h^{-1}$$

$$=\frac{1}{h^2}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}P\Big(S_h(n)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}P\Big(S_h(n+1)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^{n}}{n!}\right\}h^{-1}$$

$$=\frac{1}{h^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[-P\Big(S_h(n)=jh\Big)e^{-\frac{t}{h^2}}\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}$$

$$+\left\{\frac{1}{2}P\Big(S_h(n)=(j+1)h\Big)+\frac{1}{2}P\Big(S_h(n)=(j-1)h\Big)\right\}e^{-\frac{t}{h^2}}\times\frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!}\Bigg]h^{-1}$$

$$=\frac{1}{h^2}\Bigg[-P\Big(S_h(N_h(t))=jh\Big)+\frac{1}{2}P\Big(S_h(N_h(t))=(j+1)h\Big)$$

$$+\frac{1}{2}P\Big(S_h(N_h(t))=(j-1)h\Big)\Bigg]h^{-1}$$

$$=\frac{1}{h^2}\Big[-u_h(t,jh)+\frac{1}{2}u_h(t,(j+1)h)+\frac{1}{2}u_h(t,(j-1)h)\Big]$$

$$=\frac{u_h(t,(j+1)h)-2u_h(t,jh)+u_h(t,(j-1)h)}{2h^2}$$

(証明終)

< 付録 3. 独立確率変数の和の分布 3 の解答 $No.1$ >

< 定理 4 の証明 >

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_1}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2v_1}} \quad , \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_2}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2v_2}}$$

$$(p_1 * p_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x-y)p_2(y)dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{v_1 v_2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2v_1} - \frac{(y-m_2)^2}{2v_2}} dy$$

ここで $M = x - m_1$ とおいて指数部分を計算すると

$$-\frac{(x-y-m_1)^2}{2v_1} - \frac{(y-m_2)^2}{2v_2} = -\frac{1}{2v_1v_2}\left\{v_2(M-y)^2 + v_1(y-m_2)^2\right\}$$

$$= -\frac{1}{2v_1v_2}\left\{(v_1+v_2)y^2 - 2(v_1m_2 + v_2M)y + v_1m_2^2 + v_2M^2\right\}$$

$$= -\frac{(v_1+v_2)}{2v_1v_2}\left[\left(y - \frac{v_1m_2+v_2M}{v_1+v_2}\right)^2 - \left(\frac{v_1m_2+v_2M}{v_1+v_2}\right)^2 + \frac{v_1m_2^2+v_2M^2}{v_1+v_2}\right]$$

$$= -\frac{(v_1+v_2)}{2v_1v_2}\left[\left(y - \frac{v_1m_2+v_2M}{v_1+v_2}\right)^2 + \frac{v_1v_2(M-m_2)^2}{(v_1+v_2)^2}\right]$$

$$= -\frac{(y-V)^2}{2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}} - \frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)} \qquad \left(\text{ただし} V = \frac{v_1m_2+v_2M}{v_1+v_2}\right)$$

よって

$$(p_1 * p_2)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}}} e^{-\frac{(y-V)^2}{2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}}} dy\right)}_{\parallel \atop 1} \times e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)}}$$

となる。これは平均 $m_1 + m_2$，分散 $v_1 + v_2$ の正規分布密度である。

(証明終)

< 付録 3.独立確率変数の和の分布 3 の解答 $No.2$ >

< 定理 6 の証明 >

$$p_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x \leqq 0 \end{cases}$$

に対し，$x > 0$ のとき

$$(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy = \int_0^x p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1}\beta^{\alpha_2}} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} e^{-\frac{x-y}{\beta}} \cdot y^{\alpha_2-1} e^{-\frac{y}{\beta}} dy$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} dy$$

ここで $y = xu$ とおくと

$$(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha_1-1}(xu)^{\alpha_2-1} x du$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} \times u^{\alpha_2-1} du}_{\substack{\| \\ B(\alpha_1\ ,\ \alpha_2)}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\frac{x}{\beta}} = p_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$$

また $x < 0$ のとき $(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) = 0$ 　　　よって $(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) = p_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$

(証明終)

< 付録 8.チェビシェフの不等式 >

問の解答

$$P\Big(X = x_n\Big) = p_n \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \qquad , \qquad p_n \geqq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n < \infty$$ のとき

$\epsilon > 0$ に対して

$$P\Big(|X| \geqq \epsilon\Big) = \sum_{|x_n| \geqq \epsilon} P\Big(X = x_n\Big)$$

$$\leqq \sum_{|x_n| \geqq \epsilon} \frac{(x_n)^2}{\epsilon^2} p_n = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{|x_n| \geqq \epsilon} (x_n)^2 p_n$$

$$\leqq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 p_n = \frac{1}{\epsilon^2} E[X^2]$$ (証明終)