

2001年度版 基礎数学ワークブック 番外編 No.1 「 確率」

著者	井上 昌昭
雑誌名	高知工科大学 基礎数学ワークブック
発行年	2001
URL	http://hdl.handle.net/10173/668

高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2001年度版)

番外編 1

「確率」

解答

< 2 ページ. 順列 >

問1 (1) ${}_{10}P_3 = 720$

(2) ${}_6P_4 = 360$

(3) $5! = 120$

(4) $6! = 720$

問2 (1) ${}_4P_3 = 24$

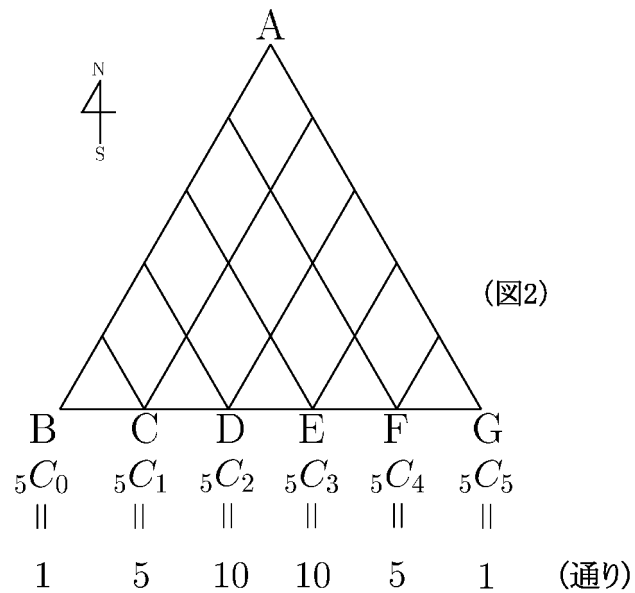
(2) $4^3 = 64$

< 3 ページ. 組合せ >

問1 (1) ${}_{10}P_4 = 5040$

(2) ${}_{10}C_4 = 210$

問2



< 4 ページ. 二項定理 >

問1 ${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

問2 $(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

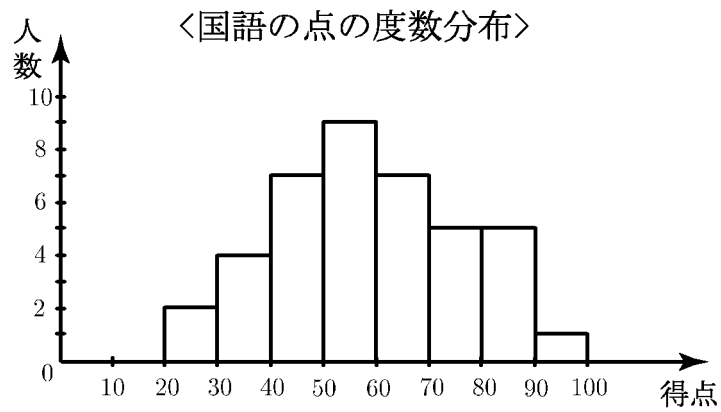
問3 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = (1+1)^n = 2^n$

< 5 ページ. 資料の整理 1 >

問1 (1) $m = 6$, $v = 4$, $\sigma = 2$

(2) $m = 0$, $v = 1$, $\sigma = 1$

問2



$$m = 57.475 , v = 288.949 , \sigma = 16.9985$$

< 6 ページ. 資料の整理 2 >

問
$$v = \frac{1}{N} \{ (x_1 - m)^2 f_1 + (x_2 - m)^2 f_2 + \cdots + (x_n - m)^2 f_n \}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 f_k$$

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2 f_k}$$

< 7 ページ. 資料の標準化 >

問 (1) $\frac{6 + 7 + 7 + 6}{40} = 0.65 = 65 \%$

(2) $\frac{40 - 2}{40} = 0.95 = 95 \%$

< 8 ページ. 偏差値 >

問1 A 君 55.75

B 君 55.05

C 君 55.35

問2 (1) 77.5

(2) 57.5

(3) 47.5

(4) 27.5

< 9 ページ. 試行と事象 >

問 $n(U) = 6^3 = 216$

$$n(A) = 6$$

< 10 ページ. 有限事象の確率の定義 >

問1 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

問2 $\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$

< 11 ページ. 基本的な確率の計算 >

問1 (1) $\frac{4^3}{10^3} = \frac{8}{125}$

(2) $\frac{{}_4P_3}{{}_{10}P_3} = \frac{1}{30}$

(3) $\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$

< 12 ページ. 共件事象の確率 >

問1
$$P(A' \cap B \cap C) = \frac{4 \times 2 \times 2}{216} = \frac{2}{27}$$

< 13 ページ. 独立試行 1 >

問1 $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

問2 $P(A \cap B) = \frac{3 \times 2}{6^2} = \frac{1}{6}$

$$P(A) \times P(B) = \frac{3 \times 6}{6^2} \times \frac{6 \times 2}{6^2} = \frac{1}{6}$$

< 14 ページ. 独立試行 2 >

問 $P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{6^4} = \frac{1}{54}$

< 15 ページ. 反復試行 >

問 (1) ${}_5C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \times 5^2}{6^5} = \frac{125}{3888}$

(2) ${}_5C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$

< 16 ページ. 確率変数 >

問

表の回数 X	0	1	2	3	4	5	計
確 率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{25}{32}$$

< 17 ページ . 期待値 >

問

X	0	100	200	300	400	500	計
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

$$\begin{aligned} E[X] &= 0 \times \frac{1}{32} + 100 \times \frac{5}{32} + 200 \times \frac{10}{32} \\ &\quad + 300 \times \frac{10}{32} + 400 \times \frac{5}{32} + 500 \times \frac{1}{32} = 250 \end{aligned}$$

< 18 ページ. 確率変数の平均と分散 1 >

問

X	0	1	2	3	4	計
確率 p	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$m = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = 2$$

$$v = (0 - 2)^2 \frac{1}{16} + (1 - 2)^2 \frac{4}{16} + (2 - 2)^2 \frac{6}{16} + (3 - 2)^2 \frac{4}{16} + (4 - 2)^2 \frac{1}{16} = 1$$

< 19 ページ. 確率変数の平均と分散 2 >

問 $E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = am + b$

$$\begin{aligned} V[Y] &= E[(Y - E[Y])^2] = E[(aX + b - (am + b))^2] \\ &= E[a^2(X - m)^2] = a^2E[(X - m)^2] = a^2v \end{aligned}$$

< 20 ページ. 独立確率変数 1 >

問 1

X	0	0	1	1	2	2	計
Y	0	1	0	1	0	1	
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

問 2

$X + Y$	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

< 21 ページ. 独立確率変数 2 >

問 $E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \frac{n}{6}$

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{5}{36}n$$

< 22 ページ. 二項分布 >

問 (1) $\frac{1}{128}$

(2) $\frac{35}{128}$

(3) $\frac{7}{2}$

(4) $\frac{7}{4}$

< 23 ページ. 確率変数の標準化 >

問 (1) $m = 80 \times \frac{1}{6} = \frac{40}{3}$

$$\sigma = \sqrt{80 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{10}{3}$$

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - \frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10}X - 4$$

(2) $m = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

$$\sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$$

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 50}{5} = \frac{1}{5}X - 10$$

< 24 ページ. 質量と重心 1 >

問 $g = \frac{1}{M} \{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\}$

< 25 ページ. 質量と重心 2 >

問 $g = \frac{1}{M} \int_a^b x f(x) dx$

< 26 ページ. 質量と重心 3 >

$$\text{問 } M = \int_0^2 f(x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$g = \frac{1}{M} \int_0^2 x f(x)dx = \frac{3}{4} \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 1$$

< 27 ページ . 確率密度関数 1 >

問 (1) $\int_a^b k dx = k[x]_a^b = k(b - a) = 1$

より $k = \frac{1}{b - a}$

$$m = \int_a^b \frac{x}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b + a}{2}$$

(2) $\int_0^2 kx(2 - x) dx = k \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}k = 1$

より $k = \frac{3}{4}$

$$m = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2 - x) dx = \frac{3}{4} \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 1$$

< 28 ページ . 確率密度関数 2 >

$$\begin{aligned} \text{問 (1) } v &= \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx \\ &= \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{b+a}{2}x^2 + \frac{(b+a)^2}{4}x \right]_a^b \\ &= \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) } v &= \int_0^2 (x-1)^2 \frac{3}{4}x(2-x) dx \\ &= \frac{3}{4} \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= 3 \left(-\frac{2^3}{5} + 2^2 - \frac{10}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

< 29 ページ.Bertrand の問題 >

問 (1) 直径 AB 上の点 (P)

(2) 円周上の点 (P)

< 30 ページ. 連続分布 1 >

問 $\frac{x_2 - x_1}{2}$

< 31 ページ. 連続分布 2 >

問1 (1) 1

(2) $\frac{x_1 + 1}{2}$

(3) $\frac{1 - x_1}{2}$

(4) 0

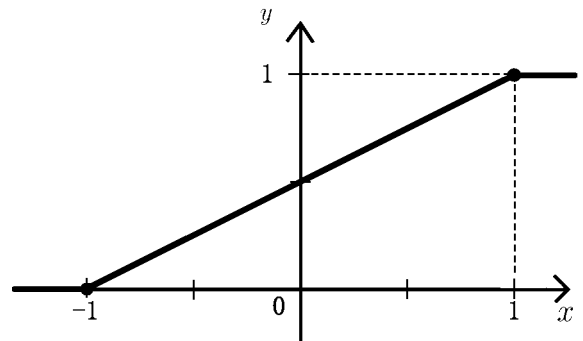
(5) 0

(6) $\frac{x_2 - x_1}{2}$

問2

 $-1 < x < 1$ のとき

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



< 32 ページ. 連続分布 3 >

問 $m = 1$, $v = \frac{1}{5}$

$$P(1 < x < 2) = \int_1^2 \frac{3}{4}x(2-x)dx = \frac{3}{4} \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

< 33 ページ. 連続分布 4 >

問 $m_Y = \frac{1}{\sqrt{v}}E[X] - \frac{m}{\sqrt{v}} = \frac{m - m}{\sqrt{v}} = 0$

$$v_Y = E[(Y - m_Y)^2] = E\left[\left(\frac{X - m}{\sqrt{v}}\right)^2\right] = \frac{1}{v}E[(X - m)^2] = \frac{v}{v} = 1$$

< 34 ページ. 連続分布 5 >

$$\begin{aligned} \text{問 } P(a < X^* < b) &= P(\sigma a + m < X < \sigma b + m) = \int_{\sigma a + m}^{\sigma b + m} p(x) dx \\ &= \int_a^b \sigma p(\sigma y + m) dy \end{aligned}$$

密度関数 $\sigma p(\sigma x + m)$

< 35 ページ. 連続分布 6 >

問 $m = 1$, $v = \frac{1}{5}$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\sigma p(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}x + 1 \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x \right) = \frac{3\sqrt{5}}{20} \left(1 - \frac{x^2}{5} \right)$$

$$X = 0 \text{ のとき } X^* = \frac{0 - 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\sqrt{5}$$

$$X = 2 \text{ のとき } X^* = \frac{2 - 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$$

$$p_*(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{5}}{20} \left(1 - \frac{x^2}{5} \right) : -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ 0 & : \text{その他} \end{cases}$$

< 36 ページ. 正規分布 1 >

問 (1) 0.9500

(2) 0.15735

(3) 0.8185

< 37 ページ. 正規分布 2 >

問1 (1) $P(0 \leq X^* \leq 1.5) = 0.4332$

(2) $P(1 \leq X^* \leq 3) = 0.15735$

(3) $P(-2 \leq X^* \leq 2) = 0.9544$

問2 (1) $P(-1.96 \leq X^* \leq 1.96) = 0.95$

(2) $P(-2.58 \leq X^* \leq 2.58) = 0.99012$

< 38 ページ. 二項分布の正規近似 >

$$\text{問 } (a - 0.5)^* = \frac{10 - \frac{1}{2} - \frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = -1.15$$

$$(b + 0.5)^* = \frac{20 + \frac{1}{2} - \frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = 2.15$$

$$P(10 \leq X \leq 20) \doteq \int_{-1.15}^{2.15} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.4842 + 0.3749 = 0.8591$$

< 39 ページ. 中心極限定理 >

$$\begin{aligned}
\text{問} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - m \right| \leq M \sqrt{\frac{v}{n}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - nm}{n} \right| \leq M \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{nv}} \right| \leq M \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P (-M \leq (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^* \leq M) \\
&= \int_{-M}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx
\end{aligned}$$

< 40 ページ. 大数の法則 >

問 (1) $E[Y_k] = 0 \times P(Y_k = 0) + 1 \times P(Y_k = 1)$

$$= \int_a^b p(x)dx = (b - a)h$$

(2) n 回のうち a から b の範囲に止まる回数

(3) $E[Y_k] = (b - a)h$

(4) h