1999年度版 基礎数学ワークブック 番外編 No.2 「ベクトル解析入門」

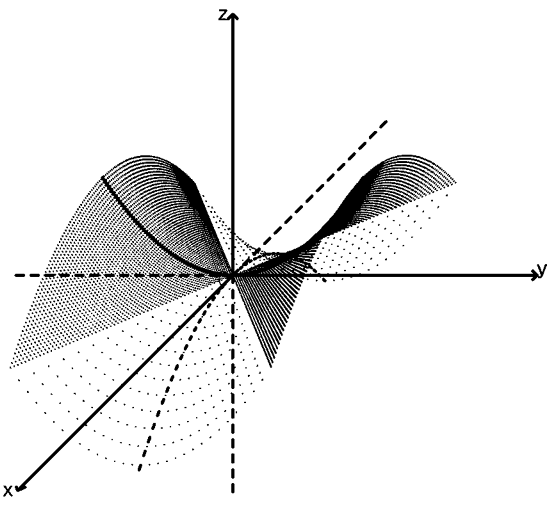
高知工科大学

基礎数学ワークブック

(1999年度版)

番外編 2

「ベクトル解析入門」

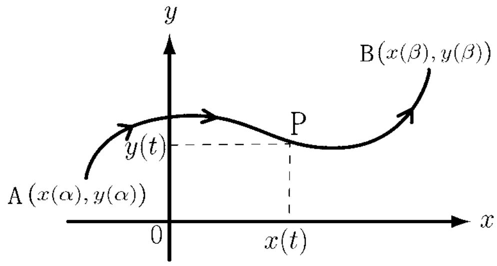


電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

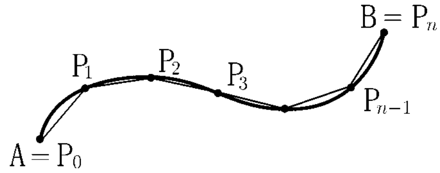
< 平面上の道のり 1 >

平面上を動く点 P の時刻 t における座標が $\mathrm{P}\big(x(t), y(t)\big)$ であるときこの点が時刻 α(位置 A) から時刻 β (位置 B) までに動いた道のり ℓ を求めたい。時間区間 $\alpha \leqq t \leqq \beta$ を n 等分した分点を



$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

とおき，時刻 t_k の位置を $\mathrm{P}_k\big(x(t_k), y(t_k)\big)$ とし，A=P_0,P_1,$\cdots$,P_n =B の各点を折れ線で結んで ℓ を近似とする。折れ線の長さを ℓ_n とすれば



$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \quad , \quad \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

である。ここで

$$\Delta t = t_k - t_{k-1} = \frac{\beta - \alpha}{n}$$

とおく。$x(t)$，$y(t)$ が連続な導関数 $x'(t)$，$y'(t)$ をもつ場合は

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) \fallingdotseq x'(t_{k-1})\Delta t \quad , \quad y(t_k) - y(t_{k-1}) \fallingdotseq y'(t_{k-1})\Delta t$$

と考えられるから

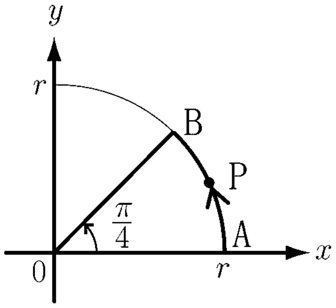
$$\ell_n \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x'(t_{k-1})\big)^2 + \big(y'(t_{k-1})\big)^2}\ \Delta t \qquad (n \text{ は十分大})$$

とみなせる。そこで $n \to \infty$ のとき $\ell_n \to \ell$ と考えられるので，定積分による区分求積法の定義から

$$\boxed{\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\ dt}$$

が求まる。これが点 $\big(x(t)\,,\ y(t)\big)$ の $\alpha \leqq t \leqq \beta$ までの道のりの長さ ℓ の公式である。

< 平面上の道のり 2 >



例　半径 r，中心角 $\dfrac{\pi}{4}$ の弧 AB の長さ ℓ を求めたい。この弧 AB の上を点 P が動くと考える。P は点 A から出発し，時刻 $\dfrac{\pi}{4}$ 後に点 B に着くとする。点 P の座標を $\mathrm{P}\big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$ とすると

$$x(t) = r\cos(t) \quad , \quad y(t) = r\sin(t) \quad , \quad 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$$

と表される。ℓ は $t=0$ から $t=\dfrac{\pi}{4}$ まで進んだ点 $\mathrm{P}\big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$ の道のりであるから，

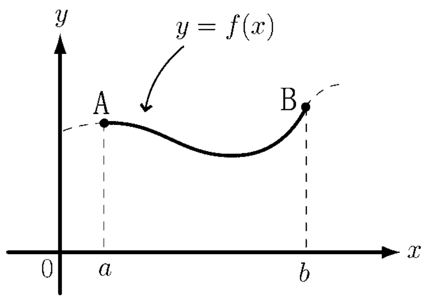
$$\frac{dx}{dt} = -r\sin(t) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = r\cos(t)$$

より

$$\ell = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\big(-r\sin(t)\big)^2 + \big(r\cos(t)\big)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} r\,dt = \frac{\pi}{4}r$$

問 1　半径 r，中心角 θ(ラジアン) の弧の長さ ℓ を求めよ。



問 2　曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分の長さ ℓ を求めたい。点 $\mathrm{P}\big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$ がこの曲線上を点 A から点 B まで動くとすると

$$x(t) = t \quad , \quad y(t) = f(t) \quad , \quad a \leqq t \leqq b$$

と表される。ℓ を $f'(t)$ を使った積分の形で表せ。

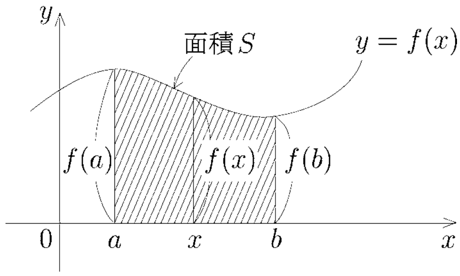
＜線と面＞

線を集めると面になる。線の長さを積分すれば面積が求まる。
積分とは「微少な部分をたし合わせる」ことを意味する。古い言い方では「塵も積もれば山となる」などと言う。

例 1 正の関数 $f(x)$ に対し，図 1 の斜線部分の面積 S は

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

となる。



（図1）

例 2 中心角 $\frac{\pi}{4}$，半径 R の扇形 OAB の面積を S,
中心角 $\frac{\pi}{4}$，半径 r の扇形 OCD の弧 CD の長さを $\ell(r)$ とすると

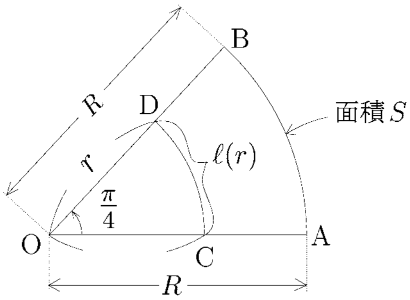
$$S = \frac{\pi R^2}{8}, \ell(r) = \frac{\pi}{4}r$$

となる。ここで

$$\int_0^R \frac{\pi}{4} r dr = \left[\frac{\pi}{8}r^2\right]_0^R = \frac{\pi R^2}{8} = S$$

より $\boxed{S = \int_0^R \ell(r)dr}$

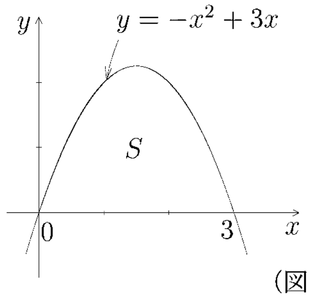
が成り立つ。



（図2）

問 1 図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。

$S =$



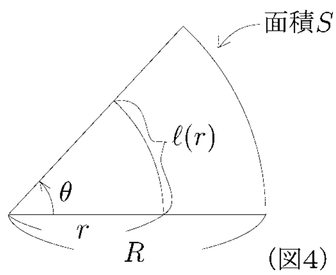
（図3）

問 2 半径 R の円の面積 S と半径 r の円周の長さ $\ell(r)$ を求めよ。

$S =$ ， $\ell(r) =$

問 3 中心角 θ(ラジアン)，半径 R の扇形の面積 S と，中心角 θ(ラジアン)，半径 r の扇形の弧の長さ $\ell(r)$ を求めよ。

$S =$ ， $\ell(r) =$



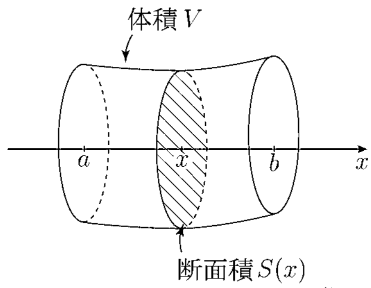
（図4）

＜面と立体＞

ある立体が図１のように基準線 (x 軸) に垂直な断面の集まりとみなされるとき断面積 $S(x)$ が分かっていれば，図１の立体の体積 V は

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



(図1)

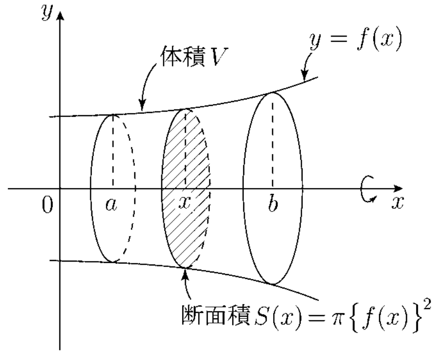
図２のように，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=a$ と $x=b$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできた立体の体積 V は，断面が半径 $f(x)$ の円であるから

$$S(x)=\pi\{f(x)\}^2$$

より

$$\boxed{V=\int_a^b S(x)dx=\int_a^b \pi\{f(x)\}dx}$$

となる。



(図2)

例　図３の斜線部分を x 軸のまわりに回転してできた回転体の体積 V は

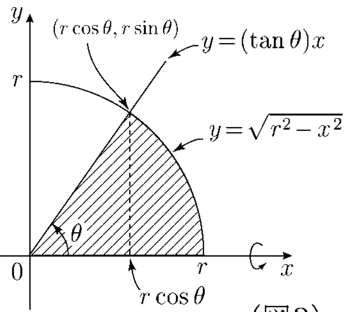
$$V=\int_0^{r\cos\theta}\pi\{(\tan\theta)x\}^2dx+\int_{r\cos\theta}^{r}\pi\left\{\sqrt{r^2-x^2}\right\}^2dx$$

$$=\pi\tan^2\theta\int_0^{r\cos\theta}x^2dx+\pi\int_{r\cos\theta}^{r}(r^2-x^2)dx$$

$$=\pi\tan^2\theta\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{r\cos\theta}+\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r\cos\theta}^{r}$$

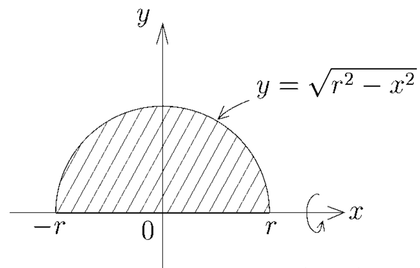
$$=\frac{\pi r^3}{3}\{(1+\tan^2\theta)\cos^3\theta+2-3\cos\theta\}=\frac{\pi r^3}{3}(2-2\cos\theta)$$

(注) ここで三角関数の性質 $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ を用いた。



(図3)

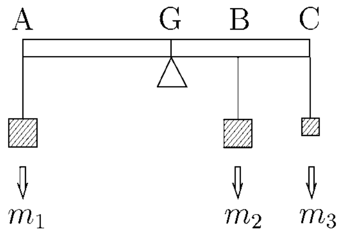
問　半径 r の球の体積 V を図４の斜線部分の回転体の体積として求めよ。



(図4)

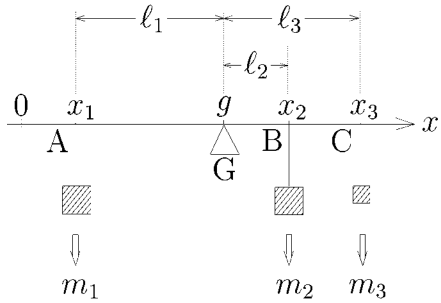
< 質量と重心 1 >

例 細長い棒 AC に図 1 のようにおもり m_1, m_2, m_3 がかかっているとする。棒自身のおもさを無視して重心 G の位置を求めたい。



(図1)

この問題を図 2 のように数直線上におもり m_1, m_2, m_3 がかかっていると考え，各点の座標を x_1, x_2, x_3 として重心の座標 g を求めたい。



(図2)

重心の意味から

(1) $\ell_1 = g - x_1$,
$\ell_2 = x_2 - g$, $\ell_3 = x_3 - g$

とおくと

(2) $m_1 \times \ell_1 = m_2 \times \ell_2 + m_3 \times \ell_3$

が成り立つ。(2) 式に (1) を代入すると

より
$$m_1 g - m_1 x_1 = (m_2 x_2 - m_2 g) + (m_3 x_3 - m_3 g)$$
$$(m_1 + m_2 + m_3) g = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$$

ここで全質量を $M = m_1 + m_2 + m_3$ とおくと

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3\}}$$

が成り立つ。

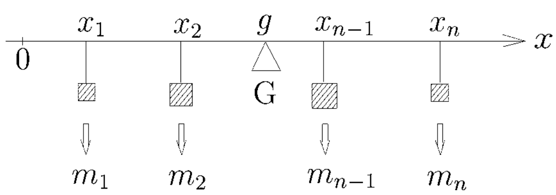
問 数直線上に n 個のおもり

m_1, m_2, $\cdots$, m_{n-1}, m_n

が図 3 のようにかかっているとき重心 G の位置を全質量

$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} + m_n$

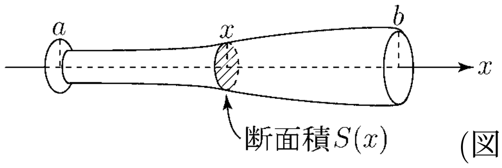
と m_1, $\cdots$, m_n, x_1, $\cdots$, x_n を使って表せ。



(図3)

< 質量と重心 2 >

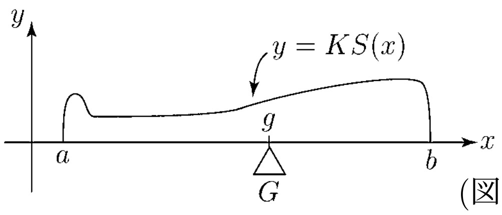
例　野球のバットのような立体 (図 1) を考える。中心軸 (x 軸) に垂直な断面の断面積 $S(x)$ が分かっている場合，この立体の体積 V は



(図 1)

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

であった。もしこのバットの材質が均一であれば，その質量 M は体積の定数倍 (K 倍) になると考えられるので



(図 2)

$$M = KV = \int_a^b KS(x)dx$$

と表される。この場合被積分関数 $KS(x)$ をこの立体の**質量分布の密度関数**という。

この立体の重心 G の位置 g(図 2) を求めたい。

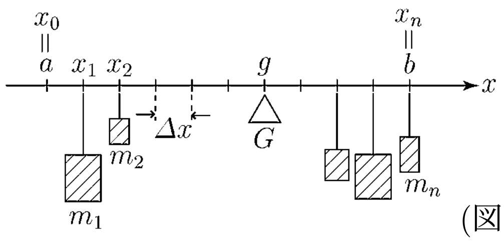
区間 $[a, b]$ を n 等分して，その分点を

$$a = x_0,\ x_1, \cdots, x_n = b$$

とおき，それぞれ

$$m_1,\ m_2,\ \cdots, m_n$$

のおもりがかかっているとする (図 3)。



(図 3)

このとき $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ とすると

$$m_k = \int_{x_k-1}^{x_k} KS(x)dx \fallingdotseq KS(x_k)\Delta x \qquad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。前ページの結果より

$$g = \frac{1}{M}\{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\} \fallingdotseq \frac{1}{M}\{x_1KS(x_1) + \cdots + x_nKS(x_n)\}\Delta x$$

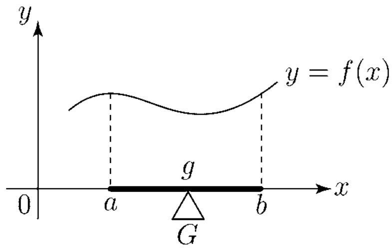
である。$n \to \infty$ とすれば定積分の区間求積法による定義から

$$\boxed{g = \frac{1}{M}\int_a^b xKS(x)dx \ = \ \frac{1}{\int_a^b KS(x)dx}\int_a^b xKS(x)dx}$$

となる。

< 質量と重心 3 >

数直線の区間 $[a,b]$ に質量があるとき，その質量分布の密度関数が $f(x)$ であれば，全質量 M と重心の座標 g は



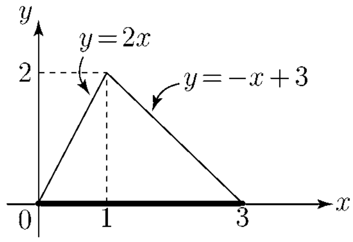
$$\boxed{M=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad g=\frac{1}{M}\int_a^b xf(x)dx}$$

で表される。$f(x)$ を単に**密度関数**とか**重み関数**などという。

例　数直線上の区間 $[0,3]$ に質量があり，その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\begin{cases} 2x & : \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ -x+3 & : \quad 1 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$

である場合，全質量 M と重心の座標 g は



$$M=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 2x\,dx+\int_1^3(-x+3)dx=\Big[x^2\Big]_0^1+\Big[-\frac{x^2}{2}+3x\Big]_1^3=3$$

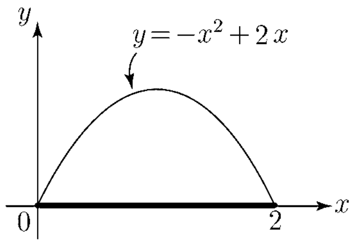
$$g=\frac{1}{M}\int_0^3 xf(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1 x\times 2x\,dx+\frac{1}{3}\int_1^3 x\times(-x+3)dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\frac{2}{3}x^3\Big]_0^1+\frac{1}{3}\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\Big]_1^3 \;=\; \frac{4}{3}$$

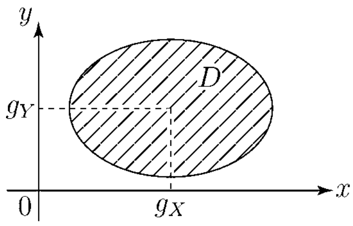
問　数直線上の区間 $[0,2]$ に質量があり，その密度関数 $f(x)$ が

$$f(x)=-x^2+2x \qquad (0 \leqq x \leqq 2)$$

である場合，全質量 M と重心の座標 g を求めよ。



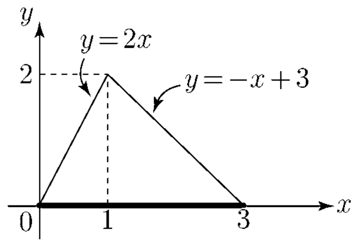
＜質量と重心 4＞



平面上の領域 D に質量がある場合，その質量分布の密度関数が $f(x,y)$ であれば，全質量 M と重心の座標 (g_X, g_Y) は

$$\boxed{M=\iint_D f(x,y)dxdy\ ,\ g_X=\frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)dxdy\ ,\ g_Y=\frac{1}{M}\iint_D yf(x,y)dxdy}$$

で表される。



例　平面上の領域 D が右図の斜線部分の三角形とする。この三角形の重心の位置 (g_X, g_Y) を求めたい。D にかかる質量は均一に 1 とする。(すなわち $f(x,y)=1$ である。)
このとき全質量 M は

$$M=\iint_D 1dxdy = D\text{ の面積} = \frac{1}{2}\times 3\times 2 = 3$$

である。ここで D を D_1 と D_2 に分けると，

$$D_1=\left\{(x,y)\ :\ 0\leqq x\leqq 1\ ,\ 0\leqq y\leqq 2x\right\}$$

$$D_2=\left\{(x,y)\ :\ 1\leqq x\leqq 3\ ,\ 0\leqq y\leqq -x+3\right\}$$

より

$$g_X=\frac{1}{M}\iint_D xf(x,y)\,dxdy=\frac{1}{3}\iint_{D_1} x\,dxdy+\frac{1}{3}\iint_{D_2} x\,dxdy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left\{\int_0^{2x} x\,dy\right\}dx+\frac{1}{3}\int_1^3\left\{\int_0^{-x+3} x\,dy\right\}dx$$

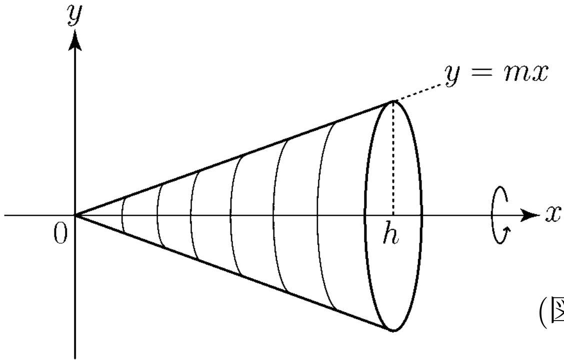
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left\{\Big[xy\Big]_{y=0}^{y=2x}\right\}dx+\frac{1}{3}\int_1^3\left\{\Big[xy\Big]_{y=0}^{y=-x+3}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 2x^2\,dx+\frac{1}{3}\int_1^3(-x^2+3x)\,dx=\frac{4}{3}$$

問　例の場合に g_Y を求めよ。

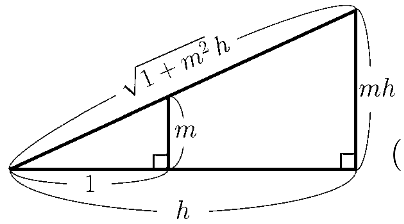
＜回転体の表面積 1＞

例　直線 $y = mx$ の $0 \leqq x \leqq h$ の範囲の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできた円錐の側面の表面積 S を求めたい。
この円錐の側面を図 3 のような扇形の紙をまるめて作ったと考えると，S はこの扇形の面積になる。図 2 よりこの扇形は半径 $\sqrt{1+m^2}\,h$ であり，弧の長さは $2\pi mh$ である。よって中心角 θ は



(図 1)

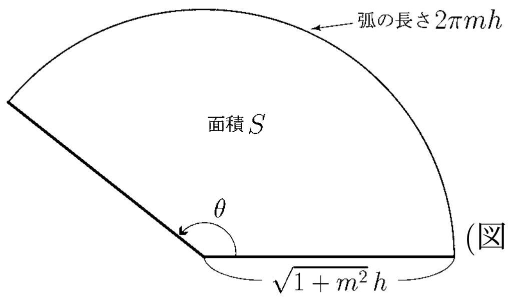
$$\theta = \frac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}} = \frac{2\pi mh}{\sqrt{1+m^2}\,h} = \frac{2\pi m}{\sqrt{1+m^2}}$$



(図 2)

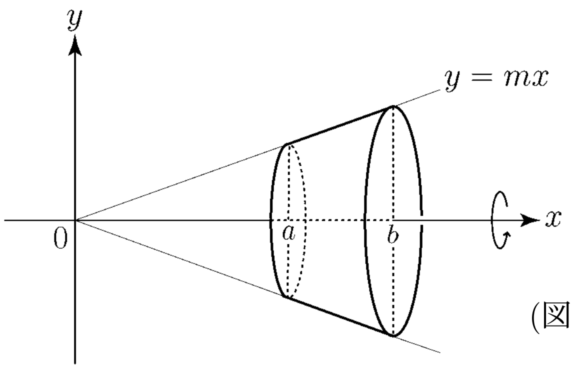
である。従って面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (\text{中心角}) \times (\text{半径})^2 \\ &= \frac{1}{2}\,\theta \cdot \left(\sqrt{1+m^2}\,h\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi m}{\sqrt{1+m^2}} \times (1+m^2)\,h^2 \\ &= \pi m\sqrt{1+m^2}\,h^2 \end{aligned}$$



(図 3)

問　直線 $y = mx$ の $a \leqq x \leqq b$ の範囲の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体 (図 4) の側面の表面積 S を求めよ。



(図 4)

< 回転体の表面積 2 >

前ページ図 4 の回転体の側面の表面積 S は

$$S = \pi m\sqrt{1+m^2}\,b^2 - \pi m\sqrt{1+m^2}\,a^2 = \int_a^b 2\pi m x\sqrt{1+m^2}dx$$

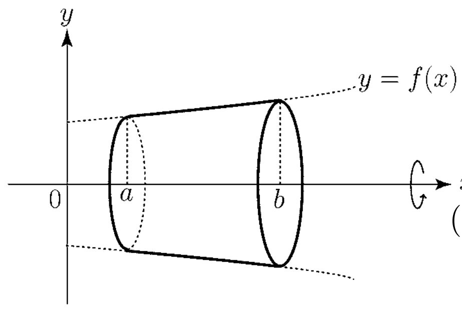
と表される。ここで

$$y = mx \quad \text{のとき} \quad y' = m$$

より

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

と表現できる。一般に曲線 $y = f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体 (図 1) の側面の表面積 S は

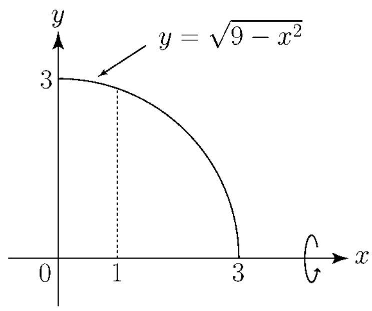


(図 1)

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$$

となる。

例 曲線 $y = \sqrt{9-x^2}$ の $1 \leqq x \leqq 3$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた曲面の表面積 S を求める。



(図 2)

$$y = \sqrt{9-x^2} = \left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ,$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(9-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

より

$$1 + \left(y'\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{9-x^2} = \frac{9}{9-x^2}$$

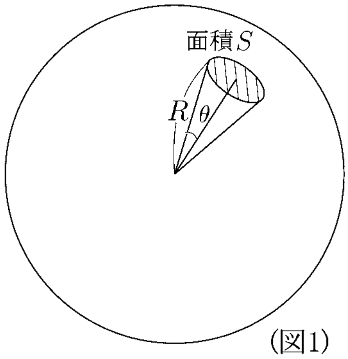
だから

$$S = \int_1^3 2\pi y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx = \int_1^3 2\pi\sqrt{9-x^2}\sqrt{\frac{9}{9-x^2}}dx = \int_1^3 2\pi\sqrt{9}dx$$

問 上の例の S を求めよ。

< 回転体の表面積 3 >

例　図 1 のような半径 R の球面の一部分（図 1 の斜線部分）の面積 S を求めたい。S は図 2 の弧 AB を x 軸のまわりに回転してできる回転面の表面積であるから，前ページの公式が使える。



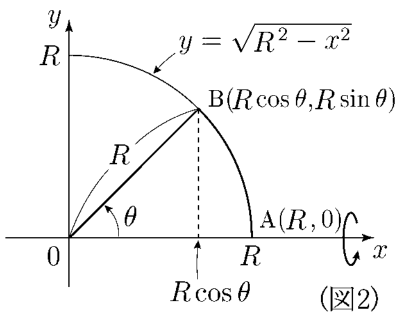
(図1)

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

だから

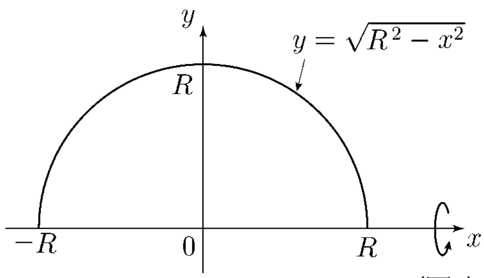


(図2)

$$S = \int_{R\cos\theta}^{R} 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{R\cos\theta}^{R} 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}}\, dx$$

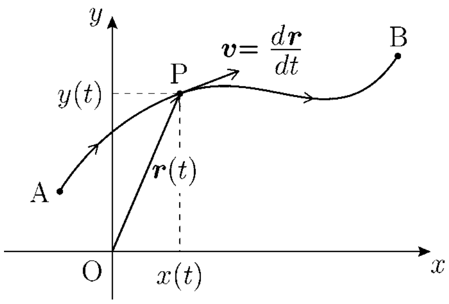
$$= \int_{R\cos\theta}^{R} 2\pi R\, dx = 2\pi R^2(1 - \cos\theta)$$

問　半径 R の球面の面積 S を求めたい。球面を図 3 の半円を x 軸のまわりに回転してできる回転面と考え，S を求めよ。



(図3)

＜平面上の運動 1 ＞



平面上を動く点 P の時刻 t における座標が $\big(x(t), y(t)\big)$ であるとき，点 P の位置ベクトルを

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)}$$

で表す。このようにベクトルを今後アルファベットの太文字で表すことにする。またベクトルの成分を行ベクトル表示で表す。$\boldsymbol{r}(t)$ はベクトル値関数である。この $\boldsymbol{r}(t)$ の導関数を

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right)}$$

で表すことにすると，時刻 t における点 P の速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\right)$$

であり，その絶対値は

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となる。今点 P が時刻 $t = a$ (位置 A) から時刻 $t = b$ (位置 B) まで動いたときの道のり (= 曲線 AB の長さ) を s とすると 1 ページの結果より

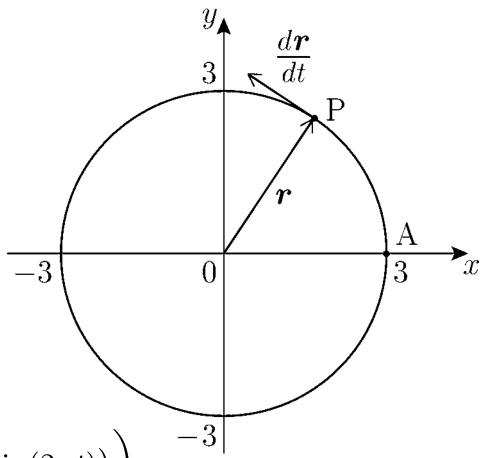
$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt} \quad \text{（曲線の長さ）}$$

となる。同様にして加速度ベクトル $\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

と定める。

< 平面上の運動 2 >



例 原点を中心として半径 3 の円周上を点 P が動く。点 A(3,0) から出発し，1 秒間に 1 回転するとき，t 秒後の P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \big(3\cos(2\pi t)\ ,\ 3\sin(2\pi t)\big)$$

であり，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\big(3\cos(2\pi t)\big)\ ,\ \frac{d}{dt}\big(3\sin(2\pi t)\big)\right)$$

$$= \big(-6\pi\sin(2\pi t)\ ,\ 6\pi\cos(2\pi t)\big)$$

である。$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ の方向は半径 3 の円周の点 P における接線方向であり，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ の大きさは

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\big(-6\pi\sin(2\pi t)\big)^2 + \big(6\pi\cos(2\pi t)\big)^2}$$

$$= \sqrt{(6\pi)^2\big\{\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)\big\}} = 6\pi$$

問 1 例の場合の加速度ベクトル $\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ とその大きさ $\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$ を求めよ。

問 2 例の場合，点 P が A から出発して $\dfrac{1}{4}$ 秒後までに動いた道のり s を以下の積分を計算することによって求めよ。

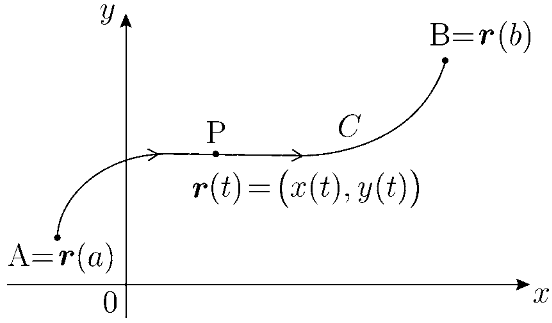
$$s = \int_0^{\frac{1}{4}} \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt =$$

< 平面上の線積分 1 >

平面上の動点 P の時刻 t における位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$$

とする。$t = a$ (位置 A) から出発し，曲線 C に沿って $t = b$ (位置 B) まで動いたとする。このとき，2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，



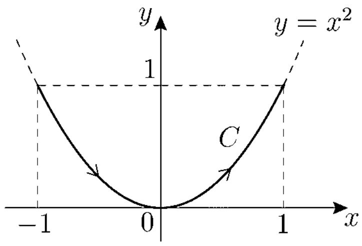
$$\boxed{\int_C f(x, y)dt = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big)dt} \quad \text{（線積分）}$$

を曲線 C に沿った**線積分**という。

例 1　曲線 C が右図の放物線 $y = x^2$ の $x = -1$ から 1 へ行く部分とすると

$C : x(t) = t\ ,\ y(t) = t^2\ ,\ -1 \leqq t \leqq 1$

と考えられる。このとき



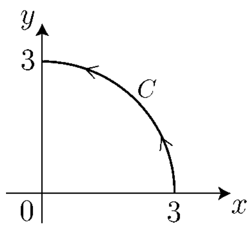
$$\int_C (x + y)dt = \int_{-1}^1 \big(x(t) + y(t)\big)dt = \int_{-1}^1 (t + t^2)dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

問 1　例 1 と同じ C に対し，$\displaystyle\int_C xydt$ を求めよ。

例 2　曲線 C が右図の場合に

$C : x(t) = 3\cos t\ ,\ y(t) = 3\sin t\ ,\ 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$

と考えられる。このとき



$$\int_C (x^2 + y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big((3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\big)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9dt = \frac{9}{2}\pi$$

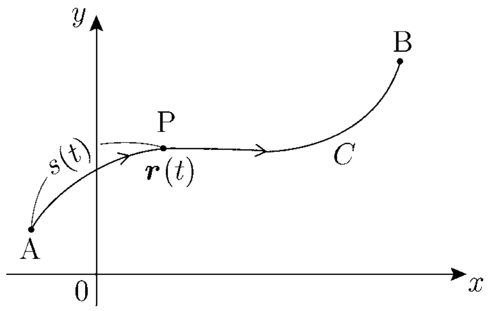
問 2　例 2 の場合に $\displaystyle\int_C (x + y)dt$ を求めよ。

< 平面上の線積分 2 >

平面上の動点 P の位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

とする。$t = a$ (位置 A) から出発し曲線 C に沿って $t = b$ (位置 B) まで動いたとする。すなわち曲線 C は



$$(*) \quad C = \big\{\big(x(t), y(t)\big) \ : \ a \leqq t \leqq b\big\}$$

となる。今，時刻 $t = a$ から時刻 t までの曲線の長さ $s = s(t)$ は

$$s = s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| dt$$

であった。すなわち

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

となる。このとき 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \frac{ds}{dt} dt$$

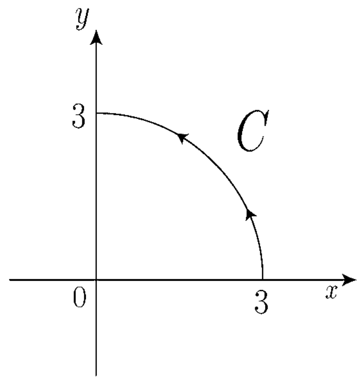
と考え，次式

$$\boxed{\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f\big(x(t), y(t)\big) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt} \qquad (C \text{ に沿った線積分})$$

を **曲線 C に沿った (曲線の長さに関する) 線積分** という。

普通，単に線積分といえば，この定義が使われる。それは曲線 C のパラメータ表示 $(*)$ によって変わらないからである。この線積分を単に **曲線 C に沿った線積分**とか **曲線の長さに関する線積分**とか **弧長に関する線積分**などという。

＜平面上の線積分 3 ＞



例　右図の曲線 C は

$C: \; x = 3\cos t,\; y = 3\sin t,\;\; 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$

と表されるが，別に

$C': \; x = 3\cos(2t),\; y = 3\sin(2t),\;\; 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$

とも表される。ここで 14 ページの線積分では

$$\int_C (x^2+y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\right\}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9dt = \frac{9}{2}\pi$$

$$\int_{C'} (x^2+y^2)dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\bigl(3\cos(2t)\bigr)^2 + \bigl(3\sin(2t)\bigr)^2\right\}dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9dt = \frac{9}{4}\pi$$

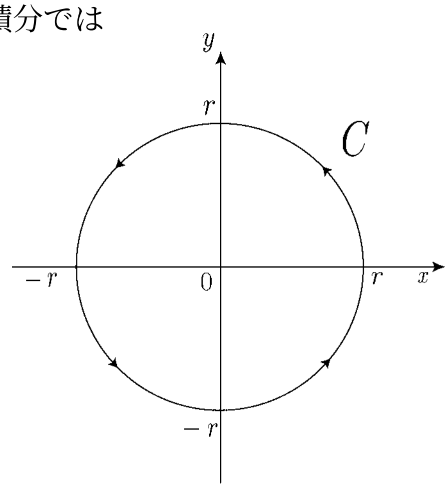
となり結果が異なる。一方 15 ページの曲線の長さに関する線積分では

$$\int_C (x^2+y^2)ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2\right\}\sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\times 3dt = \frac{27}{2}\pi$$

$$\int_{C'} (x^2+y^2)ds = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{(3\cos(2t))^2 + (3\sin(2t))^2\right\}\sqrt{(-6\sin(2t))^2 + (6\cos(2t))^2}dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 9\times 6dt = \frac{27}{2}\pi$$

となり一致する。すなわち曲線の長さに関する線積分では
曲線 C の表し方によって線積分の値が変わらない。



問　右図のように曲線 C は原点を中心とした半径 r の円周を反時計まわりに進むとする。このとき次の線積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)ds$　　　　(2) $\displaystyle\int_C (x+y)ds$

< 平面上の線積分 4 >

平面上の曲線 C が

$$C \ : \ x = x(t) \ \ , \ \ y = y(t) \ \ , \qquad a \leqq t \leqq b$$

で表されているとき，２変数関数 $f(x,y)$ に対し，

$$\boxed{\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\frac{dx}{dt}dt}$$

を**x成分に関する線積分**という。また

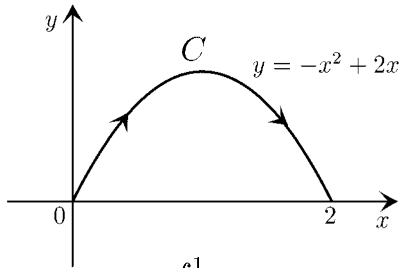
$$\boxed{\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\frac{dy}{dt}dt}$$

を**y成分に関する線積分**という。

例 曲線 C が

$C: \ x(t) = 2t \ \ , \ \ y(t) = -4t^2 + 4t \ \ , \ \ 0 \leqq t \leqq 1$

であるとき，C は右図のような曲線になる。



このとき

$$\int_C (x+y)dx = \int_0^1 \big(x(t)+y(t)\big)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^1 (2t - 4t^2 + 4t) \times 2dt = \int_0^1 (-8t^2 + 12t)dt = \frac{10}{3}$$

$$\int_C (x+y)dy = \int_0^1 \big(x(t)+y(t)\big)\frac{dy}{dt}dt = \int_0^1 (2t - 4t^2 + 4t) \times (-8t+4)dt$$

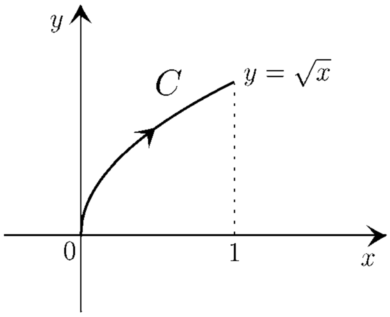
$$= \int_0^1 (64t^3 - 64t^2 + 24t)dt = \frac{20}{3}$$

問 曲線 C が

$C: \ x(t) = t \ \ , \ \ y(t) = \sqrt{t} \ \ , \ \ 0 \leqq t \leqq 1$

のとき次の線積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C (x+y)dx$ (2) $\displaystyle\int_C (x+y)dy$



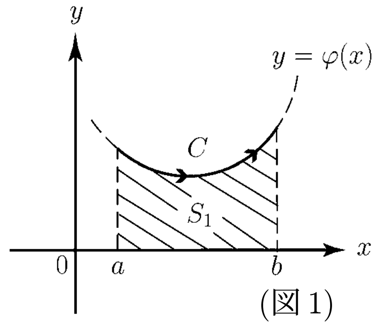
< 平面上の線積分 5 >

例　曲線 C が図 1 のように

$C: x(t) = t \ , \ y(t) = \varphi(t) \ , \ a \leqq t \leqq b$

と表される場合には，次の線積分

$$\boxed{\int_C ydx = \int_a^b \varphi(t)dt = S_1}$$

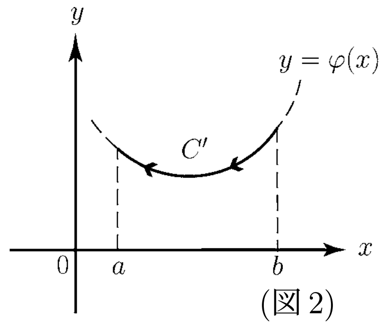


(図 1)

は図 1 の斜線部分の面積 S_1 を意味する。このような場合は線積分を単に x に関する積分

$$\int_C ydx = \int_a^b \varphi(x)dx$$

で表す。図 1 と同じ曲線で $x = b$ から出発したとして $x = a$ に向かう曲線を C'(図 2) とすると



(図 2)

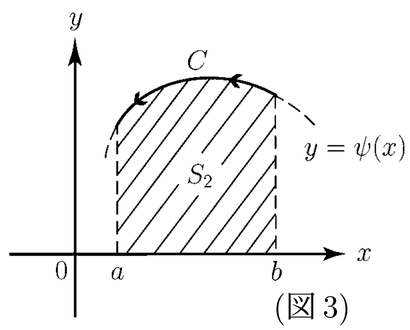
$$\int_{C'} ydx = \int_b^a \varphi(x)dx = -\int_a^b \varphi(x)dx = -\int_C ydx$$

となる。C と同じ曲線を逆に進む積分路 C' は

$$C' = -C$$

と書かれる。

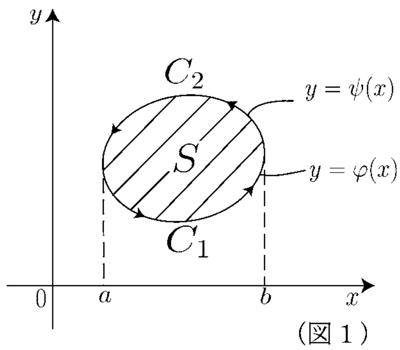
問　積分路 C は曲線 $y = \psi(x)$ 上を $x = b$ から $x = a$ に向かって進むとする。図 3 の斜線部分の面積 S_2 を線積分で表せ。



(図 3)

< 平面上の線積分 6 >

例1　図 1 のように線分路 C_1 は曲線 $y=\varphi(x)$ を a から b に向い，C_2 は曲線 $y=\psi(x)$ を b から a に向うとする。図 1 のように C_1 の始点が C_2 の終点になり，C_2 の始点が C_1 の終点になっているとき C_1 と C_2 をあわせた積分路 C は **単一閉曲線** と呼ばれる。 図 1 は 前ページの図 1 と図 3 をあわせた図と考えると，図 1 の斜線部分の面積 S は



（図 1）

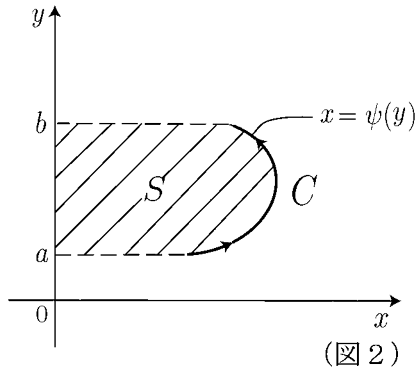
$$S=S_2-S_1=\int_a^b\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx=-\int_b^a\psi(x)dx-\int_a^b\varphi(x)dx$$

$$=-\int_{C_2}ydx-\int_{C_1}ydx=-\int_C ydx$$

例2　図 2 のように積分路 C は曲線 $x=\psi(y)$ 上を $y=a$ から $y=b$ まで進むとする。このとき y 成分に関する線積分

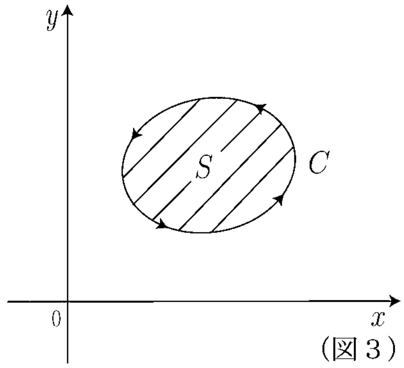
$$\boxed{\int_C xdy=\int_a^b\psi(y)dy=S}$$

は図 2 の斜線部分の面積 S を意味する。



（図 2）

問　図 3 のように線積分 C は単一閉曲線で，反時計まわりに進むとする。そのとき C で囲まれた領域（斜線部分）の面積 S を y 成分に関する線積分で表せ。

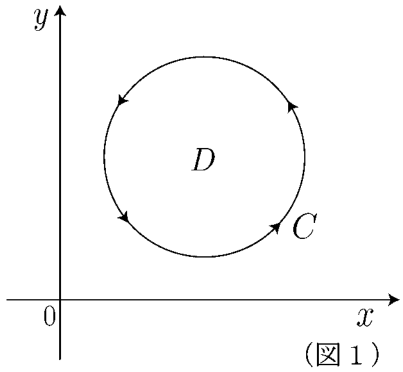


（図 3）

< グリーンの定理 1 >

図 1 のように反時計まわりに進む単一閉曲線 C に囲まれた領域を D とする。D の面積を S とすると前のページの結果より

$$S = -\int_C y dx = \int_C x dy$$



（図 1）

が成り立つ。S を領域 D における 2 重積分で表すと

$$S = \iint_D 1 dxdy$$

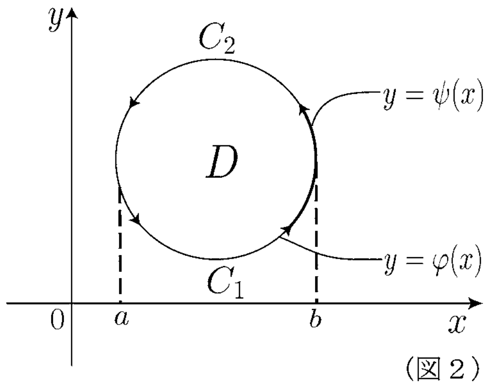
より

$$\boxed{\iint_D 1 dxdy = -\int_C y dx} \quad , \quad \boxed{\iint_D 1 dxdy = \int_C x dy}$$

となる。この式を一般化したい。
図 2 のように単一閉曲線 C を C_1 と C_2 にわける。D は

$$D = \Big\{ (x, y) : a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(y) \Big\}$$

と表される。そこで一般の 2 変数関数 $f(x, y)$ の y に関する偏導関数 $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ の D における 2 重積分を C に関する線積分で表したい。



（図 2）

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y} dy \right\} dx = \int_a^b \left\{ \Big[f(x, y) \Big]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} \right\} dx$$

$$= \int_a^b \Big\{ f\big(x, \psi(x)\big) - f\big(x, \varphi(x)\big) \Big\} dx = \int_a^b f\big(x, \psi(x)\big) dx - \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big) dx$$

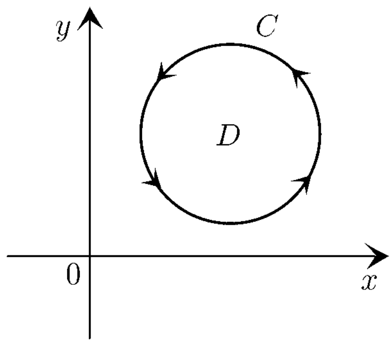
問　上の式を線積分

$$\int_C f(x, y) dx \left(= \int_{C_1} f(x, y) dx + \int_{C_2} f(x, y) dx = \int_a^b f\big(x, \varphi(x)\big) dx + \int_b^a f\big(x, \psi(x)\big) dx \right)$$

を用いて表せ。

＜グリーンの定理 2＞

右図のように反時計まわりに進む単一閉曲線 C
一閉曲線 C に囲まれた領域を D とする。この
とき 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，前ページの
結果より



$$\boxed{\iint_D \frac{\partial f}{\partial y} dxdy = -\int_C f(x, y)dx} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

が成立する。同様の計算により 2 変数関数 $g(x, y)$ に対して

$$\boxed{\iint_D \frac{\partial g}{\partial x} dxdy = \int_C g(x, y)dy} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

が成立する。ここで省略記号

$$\int_C f(x, y)dx + \int_C g(x, y)dy = \int_C (fdx + gdy)$$

を使うと (2) 式－ (1) 式より

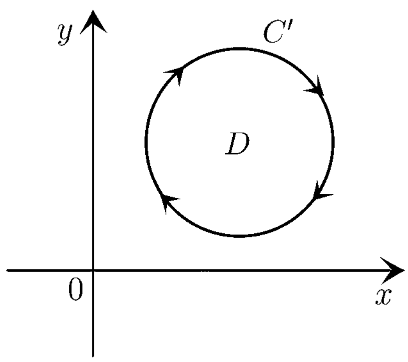
$$\boxed{\iint_D \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy = \int_C (fdx + gdy)} \quad \text{（グリーンの定理）}$$

が成立する。これを**グリーンの定理**という。

(注)　領域 D を囲む境界 C' が右図のように時計
まわりならば $C' = -C$ より

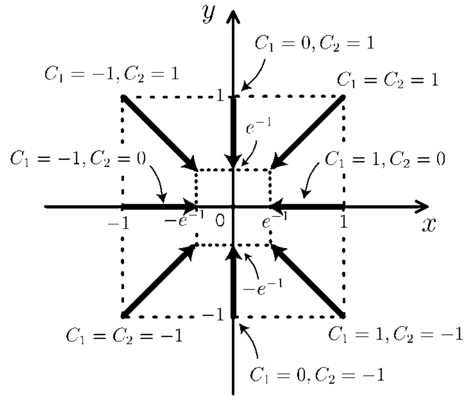
$$\iint_D \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dxdy = -\int_{C'} (fdx + gdy)$$

となる。



＜平面上の流れ 1＞

例 平面上を動く点の時刻 t における位置 $(x, y) = (x(t)\ ,\ y(t))$ が微分方程式

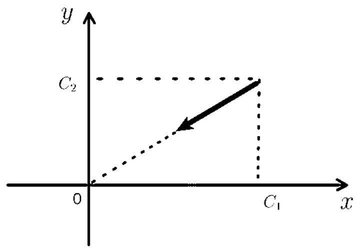


(1) $\dfrac{dx}{dt} = -x\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = -y$

で与えられる場合に，点の運動を知りたい。(1) の一般解は

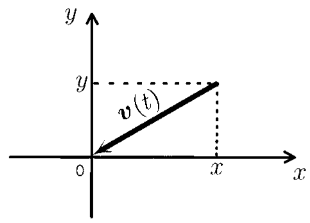
(2) $x(t) = C_1 e^{-t}\ ,\ y(t) = C_2 e^{-t}$

であり，C_1, C_2 は任意定数である。
(2) で表される点 $(x(t)\ ,\ y(t))$ の動きを C_1, C_2 が $1, 0, -1$ の場合に右図に書いた。太い線（矢印）は $t = 0$ から $t = 1$ までの点の軌道である。矢印は全て原点に向かっている。
一般の C_1, C_2 の場合は
$t = 0$ のとき



$$(x(0)\ ,\ y(0)) = (C_1, C_2)$$

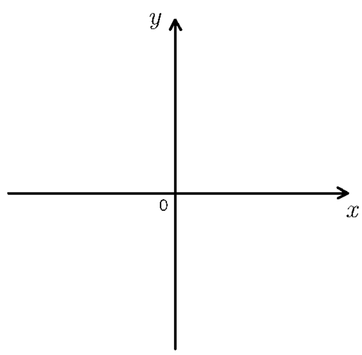
の位置から原点に向かって直線状に動く。
すなわち，平面上の任意の点 (C_1, C_2) から原点に向って直線的に動く**流れ**を表している。
時刻 t における速度は，位置 (x, y) に対して



(3) $\boldsymbol{v}(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\ ,\ \dfrac{dy}{dt}\right) = (-x, -y)$

で与えられる。

問 微分方程式



$(*)$ $\dfrac{dx}{dt} = x\ ,\ \dfrac{dy}{dt} = y$

で与えられる点 $(x, y) = (x(t)\ ,\ y(t))$ の動きを知りたい。
$(*)$ の一般解を求め，任意定数 C_1, C_2 が $\pm 1, 0$ の各場合に，$0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で点の軌道を図示せよ。

< 平面上の流れ 2 >

例 微分方程式

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x$, $\dfrac{dy}{dt} = -y$

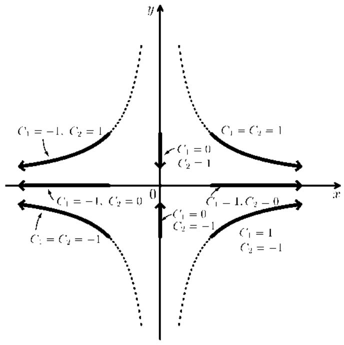
で与えられる点 $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$ の動きを知りたい。(1) の一般解は

(2) $x(t) = C_1 \mathrm{e}^t$, $y(t) = C_2 \mathrm{e}^{-t}$

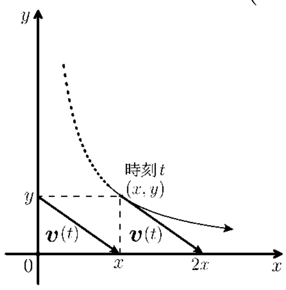
であり，任意定数 C_1, C_2 が $\pm 1, 0$ の各場合の点の軌道を図 1 に描いた。太い線 (矢線) は $t = 0$ から $t = 1$ までの点の軌道であり，点線は $t < 0$ の場合である。
時刻 t における点の速度は，位置 (x, y) に対し

(3) $\boldsymbol{v}(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right) = (x, -y)$

となる (図 2)。



(図 1)



(図 2)

前ページの例のように，全ての流れが原点に向かっているとき，このような流れを「**吸い込み**」という。又，前ページの問のように全ての流れが原点から遠ざかるとき，このような流れを「**わき出し**」という。また，上の例のような流れを「**よどみ**」という。
「吸い込み」や「わき出し」があるかないかは，速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) の関係によって決まる。記号

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{div}(v_1, v_2) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}$$

を**発散** (divergence) という。

前ページの例では $\boldsymbol{v} = (-x, -y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) = -2$

前ページの問では $\boldsymbol{v} = (x, y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(y) = 2$

上の例では $\boldsymbol{v} = (x, -y)$ より $\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-y) = 0$

となる。よって $\mathrm{div}\ (\boldsymbol{v}) > 0$ であれば「わき出し」が，$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) < 0$ であれば「吸い込み」がある。

問 微分方程式 $\dfrac{\partial x}{\partial t} = -x$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} = y$ で定まる流れに対し，速度 $\boldsymbol{v}(t)$ の発散 $\mathrm{div}\ \big(\boldsymbol{v}(t)\big)$ を計算せよ。

< 平面上の流れ 3 >

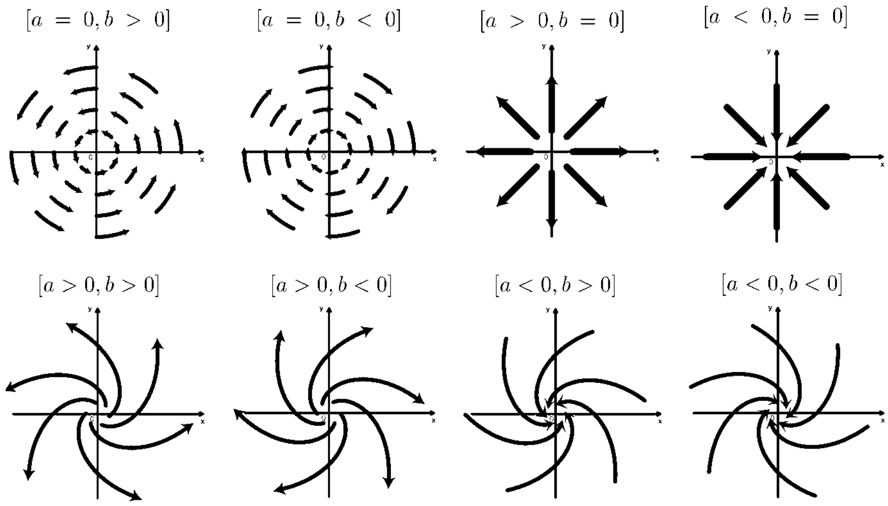
例　平面上を動く点の時刻 t における座標 (x, y) が，a, b を定数として

(1)　$x = e^{at+c_1}\cos(bt + c_2)$, $y = e^{at+c_1}\sin(bt + c_2)$

で与えられているとする。c_1, c_2 は任意定数である。(1) を t で微分すると，式

(2)　$\dfrac{dx}{dt} = ax - by$, $\dfrac{dy}{dt} = ay + bx$

を満たす。従って (1) は微分方程式 (2) の一般解である。
(1) が表す平面上の流れは，次のようになる。



図から分かるように，$b \neq 0$ ならば**渦**（うず）ができる。
渦があるかないかは，速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) の関係で決まる。記号

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{rot}(v_1, v_2) = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$$

を**回転** (*rotation*) という。上の例では

$$\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\right) = (ax - by\ ,\ ay + bx)$$

であるから

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = \frac{\partial}{\partial x}(ay + bx) - \frac{\partial}{\partial y}(ax - by) = 2b$$

となる。よって $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = 0$ ならば渦がない。

問　速度 $\boldsymbol{v}$ と位置 (x, y) が次の場合に，$\mathrm{div}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

(1)$\boldsymbol{v} = (2x, 2y)$　　(2)$\boldsymbol{v} = (2x - y, 2y + x)$　　(3)$\boldsymbol{v} = (2x + 3y, 4x - 5y)$

$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) =$

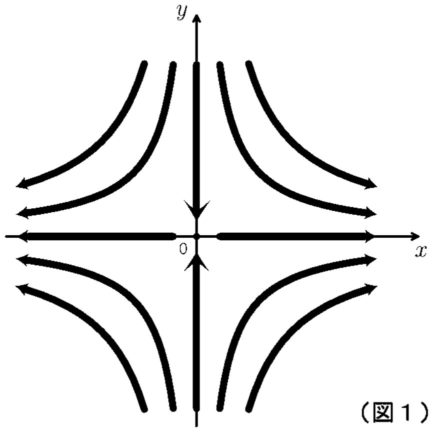
$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$　　$\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) =$

＜平面上の流れ 4＞

例 1 23 ページの例の場合，時刻 t における位置 (x, y) と速度 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = (x, -y)$$

となっていた。この流れは図 1 のように，x 軸上では原点から遠ざかり，y 軸上では原点に近づく。この動きは，次のようにモデル化できる。図 2 のような曲面の上に球を置き，曲面の傾斜にそって下に転がりながら落ちるところを真上から見ると図 1 のような動きになる。図 2 の曲面を $z = U(x, y)$ とすると，曲面の傾きが上向き（＝傾きが正）であれば，速度は逆方向（負）だから



（図 1）

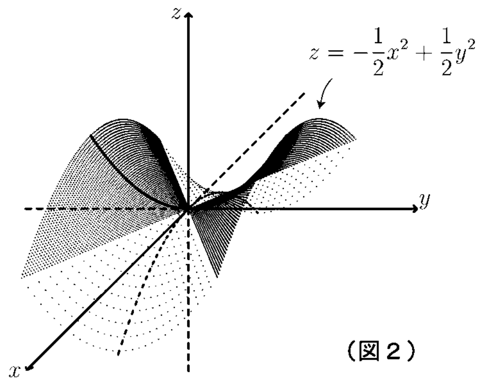
$$(*) \qquad \boxed{\boldsymbol{v} = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right)}$$

の関係がある。実際，図 2 の関数は

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

であり

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (x, -y) = \boldsymbol{v}$$



（図 2）

で $(*)$ の関係が成り立つ。このような関数 $U(x, y)$ を**ポテンシャル**という。

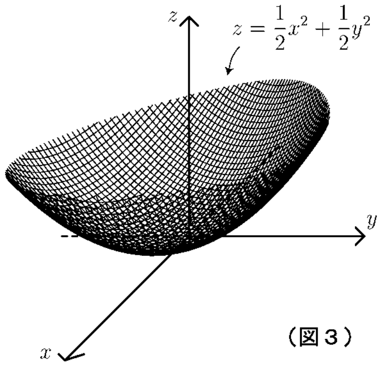
例 2 22 ページの例の場合は，$\boldsymbol{v} = (-x, -y)$ であり，原点が「吸い込み点」であった。この場合のポテンシャル U は

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

となる（図 3）。実際

$$\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\ ,\ -\frac{\partial U}{\partial y}\right) = (-x, -y) = \boldsymbol{v}$$

で $(*)$ が成り立つ。



（図 3）

一般に

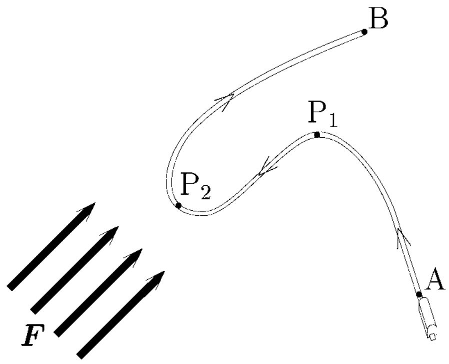
「渦なし $(\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = 0)$ であれば，ポテンシャル U が存在する」

問 $\boldsymbol{v} = (x, y)$ の場合のポテンシャル $U(x, y)$ を求めよ。

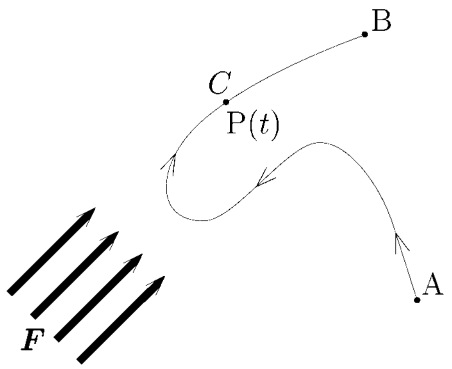
＜平面のベクトル場の線積分１＞

平面上の流れの場合は，平面の各点 (x, y) に 速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \big(v_1(x, y), v_2(x, y)\big)$ が対応していた。これと同様に平面上の各点に ベクトル $\boldsymbol{F} = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$ が対応しているとき，**ベクトル場** $\boldsymbol{F}$ という。$\boldsymbol{F}$ は例えば風，水流，磁力，電界などの力を表すと思ってよい。このようなベクトル場の中を 点が運動する と考えて，ベクトル場から受ける力を計算したい。

例　図１のようなモノレールがあり A 駅から B 駅へ行くとする。そこへ大型台風がやって来た。台風の風力を$\boldsymbol{F}$とする。モノレールは A から P_1 地点までは横風で進み，P_1 から P_2 までは向かい風にあい，P_2 から B までは追い風になる。追い風のとき，モノレールにはプラスの力が加わる。向かい風のとき，モノレールにはマイナスの力が加わる。真横の風のときは風の力を無視する。モノレールが A から B まで進むとき台風の風力 $\boldsymbol{F}$ から受ける力の合計を計算したい。モノレールの軌道を座標平面上の曲線 $\boldsymbol{C}$ (図 2) と考えると，時刻 $\boldsymbol{t}$ での位置 $\mathrm{P}(\boldsymbol{t})$ にかかる風力$\boldsymbol{F}$からの影響は風力$\boldsymbol{F}$の接線方向の成分である。



（図１）



（図２）

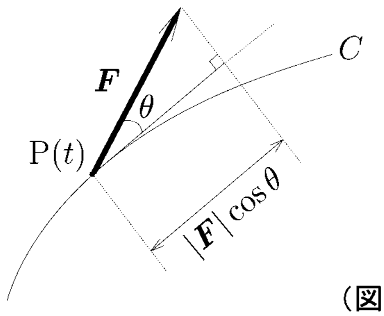
図 3 より接線方向の成分は

$$|\boldsymbol{F}| \cos \boldsymbol{\theta}$$

であるから，$\boldsymbol{F}$から受ける力の合計は

$$\int_{\boldsymbol{C}} |\boldsymbol{F}| \cos \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{ds} \quad \text{(弧長に関する線積分)}$$

で表される。



（図３）

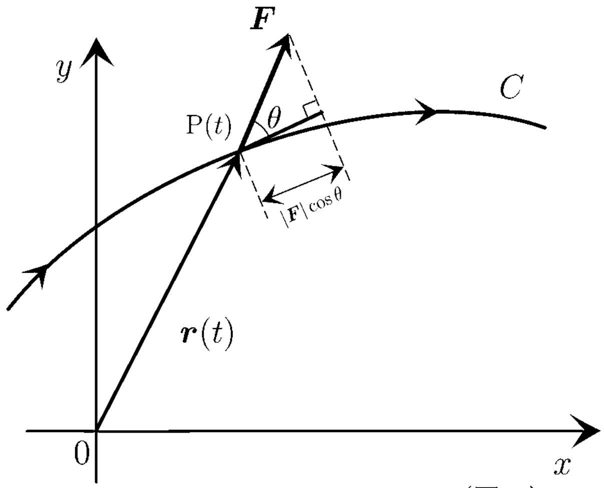
< 平面のベクトル場の線積分 2 >

平面上の各点 (x, y) にベクトル

$$\boldsymbol{F}(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$$

が対応しているベクトル場$\boldsymbol{F}$の中を曲線 C に沿って点が運動するとき図 1 のような場合点が$\boldsymbol{F}$によって受ける力の合計は前ページより

$$\boxed{\int_C |\boldsymbol{F}| \cos\theta ds}$$



（図 1）

であった。この線積分の具体的な計算方法を求めたい。時刻 t における点 $\mathrm{P}(t)$ の位置ベクトルを

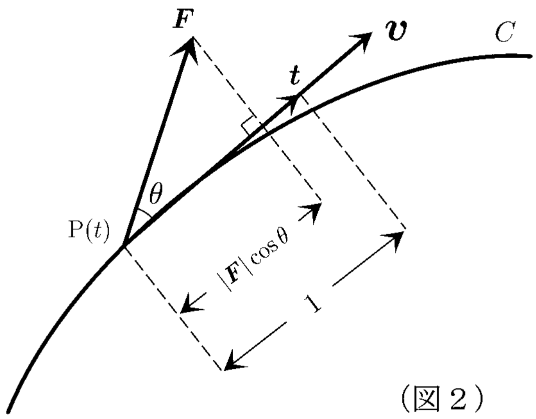
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

とおくと $\mathrm{P}(t)$ における速度ベクトル

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \quad \cdots \quad (1)$$

は曲線 C の接線方向のベクトルであり

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \quad \cdots \quad (2)$$



（図 2）

は接線方向の単位ベクトルである (図 2)。このとき$\boldsymbol{F}$と$\boldsymbol{t}$の内積は

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t} = |\boldsymbol{F}| \times |\boldsymbol{t}| \times \cos\theta = |\boldsymbol{F}| \times \cos\theta \quad \cdots \quad (3)$$

となる。一方 15 ページより

$$ds = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = |\boldsymbol{v}| dt \quad \cdots \quad (4)$$

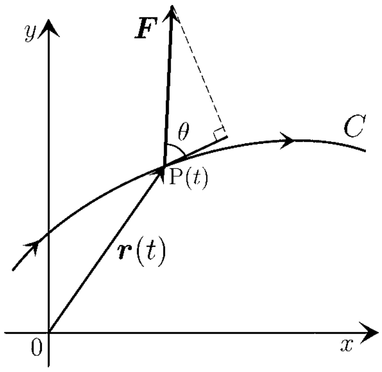
であるから (1)〜(4) より

$$\int_C |\boldsymbol{F}| \cos\theta ds = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{t}\, |\boldsymbol{v}| dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt$$

となる。

＜平面のベクトル場の線積分 3＞

平面上のベクトル場$\boldsymbol{F}$に対し,
曲線Cを動く点が$\boldsymbol{F}$から受ける
力の合計は前ページより



$$\boxed{\int_C |\boldsymbol{F}|\cos\theta\ ds = \int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt}$$

であった。ここで$\boldsymbol{r}(t)$はC上を動く点P(t)の位置ベクトル$\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\big)$であり,
$\boldsymbol{F} = \big(f_1, f_2\big)$とすると

$$\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (f_1, f_2)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = f_1\frac{dx}{dt} + f_2\frac{dy}{dt}$$

であるから

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_C f_1\frac{dx}{dt}dt + \int_C f_2\frac{dy}{dt}dt = \int_C f_1dx + \int_C f_2dy$$

となる。ここで$d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$をベクトルと考え,

$$f_1dx + f_2dy = (f_1, f_2)\cdot(dx, dy) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

という記号で表すと,

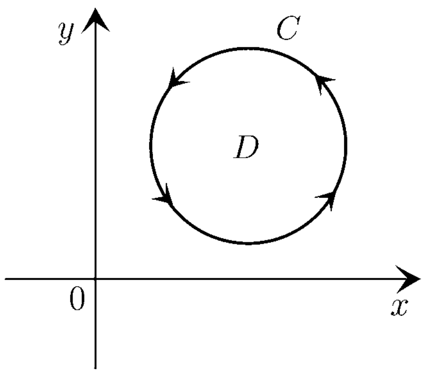
$$\boxed{\int_C \boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt = \int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (f_1dx + f_2dy)}$$ （ベクトル$\boldsymbol{F}$の線積分）

となる。この式の値を**ベクトル場$\boldsymbol{F}$の曲線Cに沿った線積分**という。

問　曲線Cは右図のような反時計まわりの単一閉曲線であり,Cで囲まれた領域をDとする。ベクトル場$\boldsymbol{F} = (f_1, f_2)$に対し

$$\iint_D \mathrm{rot}(\boldsymbol{F})dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dxdy$$

をグリーンの定理 (21 ページ) を使って線積分で表せ。(これを**平面のストークスの定理**という。)

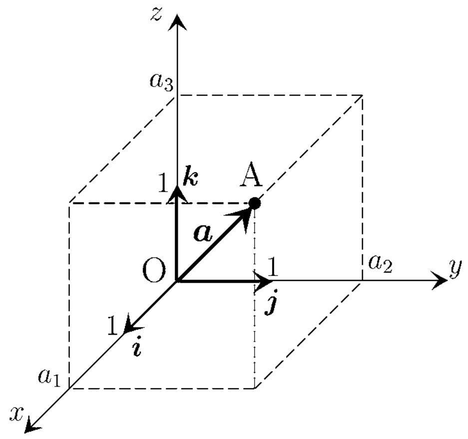


＜空間のベクトル１＞

空間座標における原点 O(0 , 0 , 0) と点 A(a_1 , a_2 , a_3) に対し，点 A の位置ベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$$

で表す。成分は横ベクトル表示を使う。ベクトルは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 等のアルファベットの太文字で表す。特に



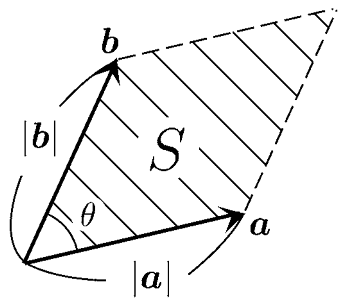
$$\boldsymbol{i} = (1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ \ ,\ \ \boldsymbol{j} = (0\ ,\ 1\ ,\ 0)\ \ ,\ \ \boldsymbol{k} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

は**基本ベクトル**といい，常にこの意味でこの記号を使う。これを用いると

$$\boldsymbol{a} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

となる。$\boldsymbol{a}$ の大きさは

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$$



である。$\boldsymbol{a} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)$ の内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

である。また２つのベクトル$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$が作る平行四辺形の面積 S は

$$S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta = \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}$$

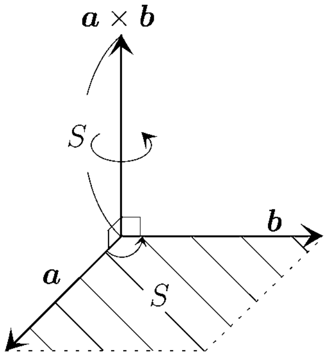
である。

問　$\boldsymbol{a} = (1\ ,\ 2\ ,\ 3)$, $\boldsymbol{b} = (3\ ,\ 0\ ,\ -1)$ であるとき，次の値を求めよ。

(1) $|\boldsymbol{a}| =$　　　(2) $|\boldsymbol{b}| =$　　　(3) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

(4) $\theta =$　　　(5) $S =$

＜空間のベクトル 2 ＞



$\boldsymbol{a}=(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直で $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ にまわる右ねじの進む方向にあり，大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 S に等しい。
これを成分で表すと

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

となる。これを形式的に３次の行列式の記号で

$$\boxed{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)\times(b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}\quad \text{(外積の成分表示)}$$

と書くと覚えやすい。

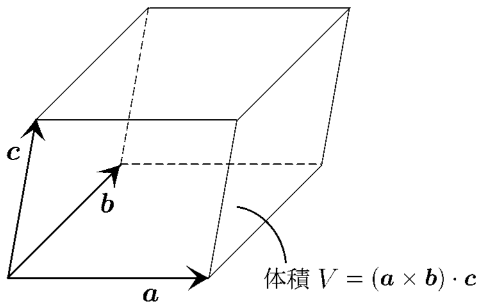
例　$\boldsymbol{a}=(1\ ,\ 2\ ,\ 3)$ ， $\boldsymbol{b}=(4\ ,\ 0\ ,\ 5)$ のとき

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}=(10\ ,\ 7\ ,\ -8)$$

$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ が右手系 ($\boldsymbol{a}$が親指，$\boldsymbol{b}$が人差指，$\boldsymbol{c}$が中指の順) であれば $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のスカラー三重積

$$\boxed{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 V を表す。

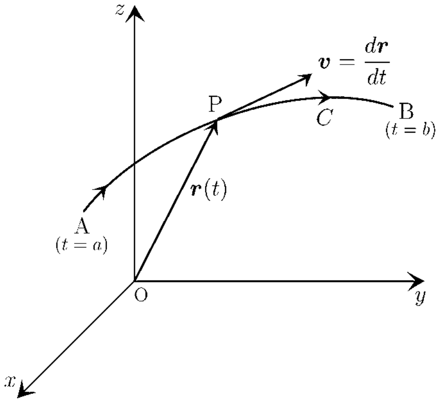


問　$\boldsymbol{a}=(3\ ,\ 2\ ,\ 0),\boldsymbol{b}=(1\ ,\ 4\ ,\ 0),\boldsymbol{c}=(1\ ,\ 1\ ,\ 3)$ のとき次を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　　　(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$　　　　(4) $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$

＜空間の運動＞



座標空間内に点 P が動く。時刻 t における点 P の座標を $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$ とし，その位置ベクトルを

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$$

とおくと，時刻 t における速度ベクトルは

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\ ,\ \frac{dy}{dt}\ ,\ \frac{dz}{dt}\right)$$

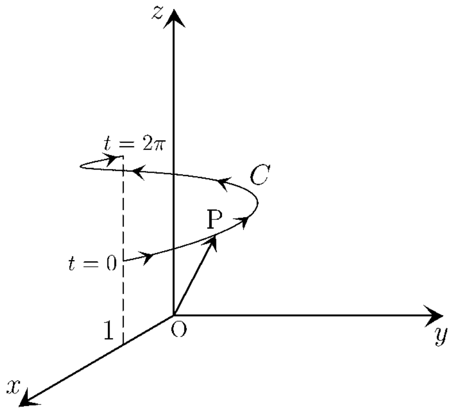
となる。点 P が時刻 $t=a$（位置 A）から時刻 $t=b$（位置 B）まで動いた軌道を曲線 C とする。速度ベクトルの大きさは

$$|\boldsymbol{v}| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2}$$

であり，方向は点 P の曲線 C における接線方向である。12 ページと同様にして，曲線 C の長さ s は

$$\boxed{s = \int_a^b \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\tfrac{dz}{dt}\right)^2}\,dt} \qquad \text{(曲線の長さ)}$$

となる。



問　動点 P の時刻 t における位置 $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)$ が $x(t) = \cos t\ ,\ y(t) = \sin t\ ,\ z(t) = 0.2t + 1$ であるとき，速度ベクトル $\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ とその大きさ $|\boldsymbol{v}|$ を求め $t=0$ から $t=2\pi$ までの軌道

$$C = \left\{\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)\ :\ 0 \leqq t \leqq 2\pi\right\}$$

の長さ s を求めよ。

$\boldsymbol{v} = (\qquad\quad ,\qquad\quad ,\qquad\quad)$

$|\boldsymbol{v}| = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,\ s =$

< 空間の線積分 >

空間の曲線 C が

$$C = \left\{ \boldsymbol{r}(t) = \big(\ x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t) \ \big) \ : \ a \leqq t \leqq b \right\}$$

と表されるとする。3 変数関数 $f(x \ , \ y \ , \ z)$ に対して,

$$\boxed{\int_C f ds = \int_a^b f\big(x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t)\big)\frac{ds}{dt}dt = \int_a^b f\big(x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t)\big)\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt}$$

を平面の場合（15 ページ）と同様に **曲線 C に沿った線積分** という。
ただし

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

である。また x 成分, y 成分, z 成分に関する線積分も平面の場合（17 ページ）と同様に

$$\boxed{\int_C f dx = \int_a^b f\big(x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t)\big)\frac{dx}{dt}dt} \ (x \text{ 成分に関する線積分 })$$

$$\boxed{\int_C f dy = \int_a^b f\big(x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t)\big)\frac{dy}{dt}dt} \ (y \text{ 成分に関する線積分 })$$

$$\boxed{\int_C f dz = \int_a^b f\big(x(t) \ , \ y(t) \ , \ z(t)\big)\frac{dz}{dt}dt} \ (z \text{ 成分に関する線積分 })$$

と定める。

問　曲線 C は前ページの問と同じ曲線とする。

$$f(x \ , \ y \ , \ z) = x \ + \ y \ + \ z$$

のとき，次の線積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_C f ds$　　　　(2) $\displaystyle\int_C f dz$

< 空間のベクトル場の線積分 >

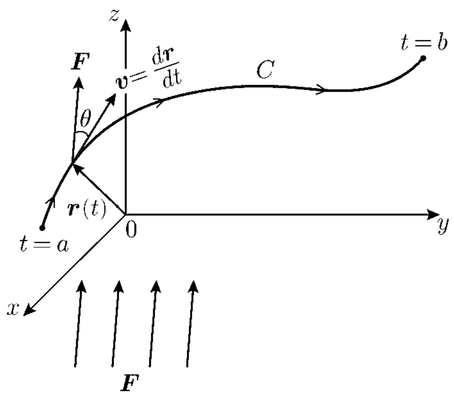
曲線 C が

$$C=\{\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) : a\leqq t\leqq b\}$$

で表わされている。
また空間の各点 (x,y,z) に対しベクトル

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(f_1(x,y,z),f_2(x,y,z),f_3(x,y,z)\big)$$

が対応しているとする。角度 θ が右図のような場合に平面の場合（26〜28 ページ）と同様に



$$\boxed{\begin{aligned}&\int_C|\boldsymbol{F}|\cos\theta ds=\int_C\boldsymbol{F}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_C(f_1dx+f_2dy+f_3dz)\\&=\int_a^b f_1\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dx}{dt}dt+\int_a^b f_2\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dy}{dt}dt+\int_a^b f_3\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dz}{dt}dt\end{aligned}}$$

を**ベクトル場 F の曲線 C に沿った線積分**という。

例　曲線 C は 31 ページの問と同じ曲線とする。今ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(x^2+y^2\ ,\ \frac{y}{x}\ ,\ z\right)$$

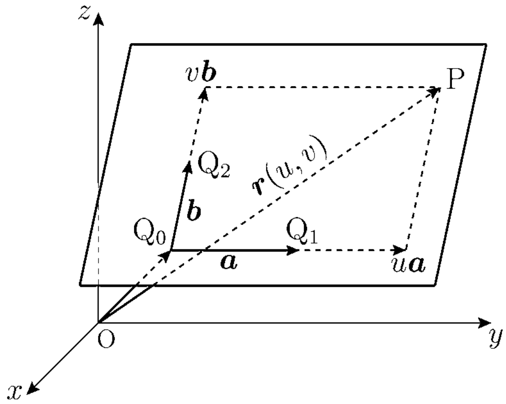
のとき C に沿った線積分は

$$\int_C\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\left\{\big(x(t)\big)^2+\big(y(t)\big)^2\right\}\frac{dx}{dt}dt+\int_0^{2\pi}\left\{\frac{y(t)}{x(t)}\right\}\frac{dy}{dt}dt+\int_0^{2\pi}z(t)\frac{dz}{dt}dt$$

となる。

問　例の線積分の計算を完成させよ。

＜平面のパラメーター表示＞



空間の 3 点 Q_0，Q_1，Q_2 を通る平面を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1} = \boldsymbol{a} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_2} = \boldsymbol{b}$$

とおく。この平面上の任意の点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{P}}$ は（右図より）ある定数 u と v によって

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{P}} = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

と表される。点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}(u,v)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_0} + \overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_0} + u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b}$$

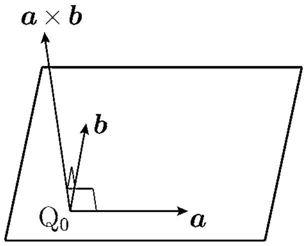
となる。ここで成分を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x,y,z)\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_0} = (x_0,y_0,z_0)\ ,\ \boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)\ ,\ \boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$$

とすると

$$\boldsymbol{r}(u,v) = (x,y,z) = (x_0 + ua_1 + vb_1\ ,\ y_0 + ua_2 + vb_2\ ,\ z_0 + ua_3 + vb_3)$$

となるから



$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

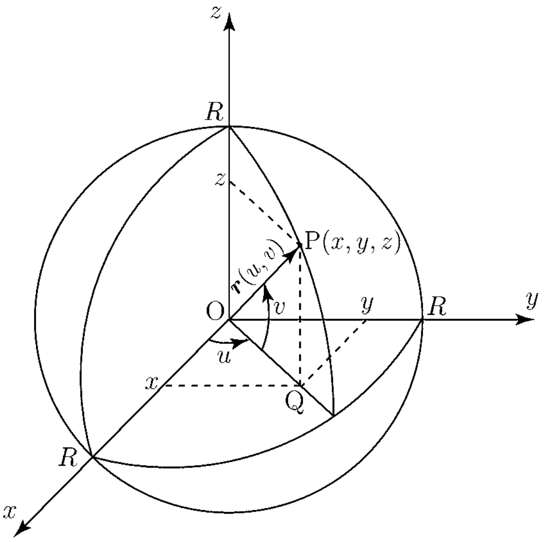
と表される。これがこの平面の方程式である。
この平面は点 $\mathrm{Q}_0(x_0,y_0,z_0)$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ に垂直な平面である。このようなベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ をこの平面の**法線ベクトル**という。
ここで v を定数と考え，$\boldsymbol{r}(u,v)$ を u で偏微分すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (a_1,a_2,a_3) = \boldsymbol{a}$$

となる。

問 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ を求め，法線ベクトル $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ で表せ。

< 球面のパラメータ表示 >

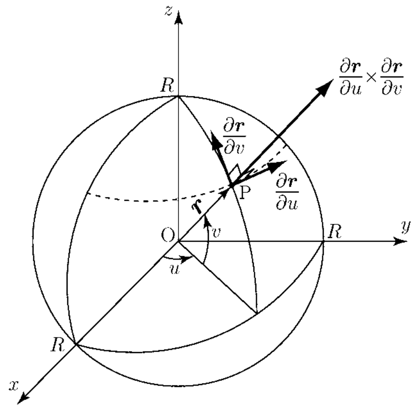


原点を中心として半径 R の球面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とする。点 P の x 軸からの角度（経度）を u（ラジアン），xy 平面からの角度（緯度）を v（ラジアン）とする。点 P の xy 平面への射影を $\mathrm{Q}(x, y, 0)$ とすれば右図より

$$\mathrm{OQ} = \mathrm{OP}\cos v = R\cos v$$
$$x = \mathrm{OQ}\cos u$$
$$y = \mathrm{OQ}\sin u$$
$$z = \mathrm{PQ} = \mathrm{OP}\sin v$$

より

$$(*)\begin{cases} x = R\cos v\cos u \\ y = R\cos v\sin u \\ z = R\sin v \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \leqq u \leqq 2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right)$$



となる。この式 $(*)$ を**球面のパラメータ表示**という。点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(u, v)$ とすれば

$$\boldsymbol{r}(u, v) = \big(R\cos v\cos u\ ,\ R\cos v\sin u\ ,\ R\sin v\big)$$

となる。これを略して $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と書く。このとき点 P における経度方向 (東西方向) の接線ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}\right) = \big(-R\cos v\sin u\ ,\ R\cos v\cos u\ ,\ 0\big)$$

であり，緯度方向 (南北方向) の接線ベクトルは

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \big(-R\sin v\cos u\ ,\ -R\sin v\sin u\ ,\ R\cos v\big)$$

である。

問 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ は点 P における法線ベクトルである。この成分を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(u, v)$ の定数倍として表せ。

< 曲面の面積 1 >

例　図 1 のような原点を中心とした半径 R の球面の一部分 S の面積を求めたい。

$$x(u,v) = R\cos v\cos u$$

$$y(u,v) = R\cos v\sin u$$

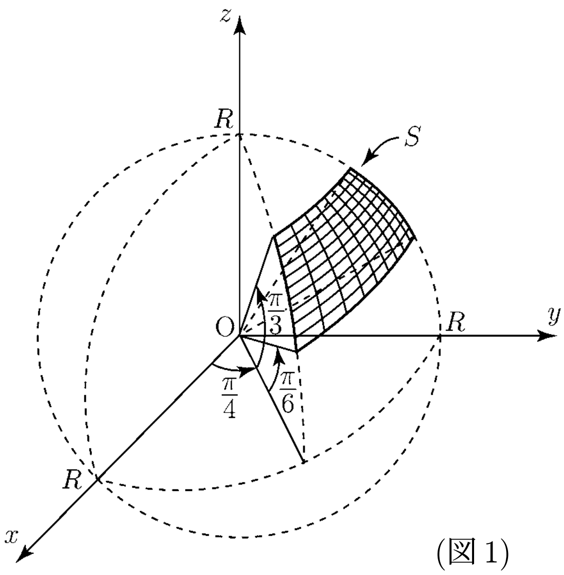
$$z(u,v) = R\sin v$$

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

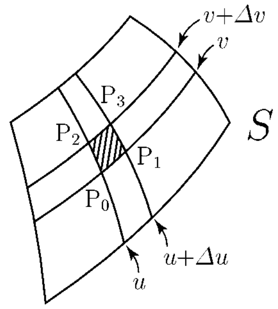
$$D = \left\{(u,v) : \frac{\pi}{4} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6} \leqq v \leqq \frac{\pi}{3}\right\}$$

とおくと曲面 S は

$$S = \big\{\boldsymbol{r}(u,v) : (u,v) \in D\big\}$$



(図 1)



(図 2)

と表される。曲面 S を同緯度 (東西方向) の線と同経度 (南北方向) の線で細かくわける。その 1 つを 図 2 の斜線部分とする。各点の位置は P_0(経度 u, 緯度 v), P_1(経度 $u+\varDelta u$, 緯度 v)， P_2(経度 u, 緯度 $v+\varDelta v$)， P_3(経度 $u+\varDelta u$, 緯度 $v+\varDelta v$) とする。斜線部分の面積を $\varDelta S$ とする。$\varDelta u$ と $\varDelta v$ が十分小さいとき, $\varDelta S$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}$ のつくる平行四辺形の面積 $\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\right|$ で近似できる。すなわち

$$\varDelta S \ \fallingdotseq\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} \times \overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\right|$$

一方

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} - \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} \ = \ \boldsymbol{r}(u+\varDelta u, v) - \boldsymbol{r}(u,v)$$

$$= \big(x(u+\varDelta u, v) - x(u,v)\ ,\ y(u+\varDelta u, v) - y(u,v)\ ,\ z(u+\varDelta u, v) - z(u,v)\big)$$

$$\fallingdotseq \left(\frac{\partial x}{\partial u}\varDelta u\ ,\ \frac{\partial y}{\partial u}\varDelta u\ ,\ \frac{\partial z}{\partial u}\varDelta u\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u}\right)\varDelta u \ = \ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\varDelta u$$

となる。同様にして

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \ \fallingdotseq\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\varDelta v$$

と近似できる。

< 曲面の面積 2 >

例　前ページの例の問題を考える。前ページ図 2 の斜線部分の面積 ΔS は Δu と Δv が十分小さいとき

$$\Delta S \fallingdotseq \left|\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}\right| \fallingdotseq \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta u\right| = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|\Delta u \Delta v$$

で近似できる。図 1 の曲面 S の面積も同じ S で表すと，面積 S は ΔS を集めたものであるから $\Delta u \to 0$, $\Delta u \to 0$ の極限を考えると，2 重積分の定義から

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$$

で計算される。35 ページ問の結果より

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (R^2\cos^2 v\cos u\ ,\ R^2\cos^2 v\sin u\ ,\ R^2\cos v\sin v) = R\cos v\,\boldsymbol{r}(u,v)$$

であるから

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = R\cos v\,|\boldsymbol{r}(u,v)| = R^2\cos v$$

より

$$\begin{aligned} S &= \iint_D R^2\cos v dudv = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos v du\right\}dv \\ &= \frac{\pi}{4}R^2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos v dv \ = \ \frac{\pi}{4}R^2\Big[\sin v\Big]_{v=\frac{\pi}{6}}^{v=\frac{\pi}{3}} \ = \ \frac{\pi R^2}{8}(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

一般に曲面 S が

$$S = \{\boldsymbol{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$$

で表されているとき，曲面の面積を同じ記号 S で表すと，面積 S は

$$\boxed{S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv} \quad \text{(曲面の面積)}$$

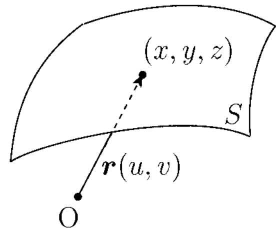
で求められる。

問　半径 R の球面の面積 S を上の方法で求めよ。

< スカラー場の面積分 >

曲面 S は

$$S = \left\{\boldsymbol{r}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) : (u,v) \in D\right\}$$

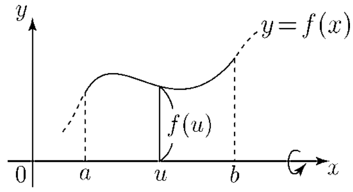


と表されているとする。今曲面の各点 (x, y, z) に対して，3 変数関数 $\varphi(x, y, z)$ が対応しているとする。このとき

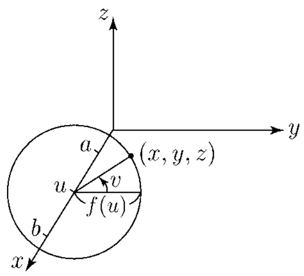
$$\boxed{\int_S \varphi\, dS = \iint_D \varphi\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv} \quad \text{(スカラー場 } \varphi \text{ の面積分)}$$

を**スカラー場 φ の曲面 S 上の面積分**という。例えば曲面 S の点 (x, y, z) に質量 $\varphi(x, y, z)$ がかかっているとすれば，上の面積分は曲面 S の全質量を表す。$\varphi = 1$ のときは面積を表す。

例 区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) > 0$ のとき，曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ から $x = b$ までの部分を x 軸のまわりに回転してできる回転体の側面を S とする。x 座標が u のとき，右下図の角度を v とすれば、S 上の点 (x, y, z) は



$$\begin{cases} x = u \\ y = f(u)\cos v \\ z = f(u)\sin v \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} a \leqq u \leqq b \\ 0 \leqq v \leqq 2\pi \end{pmatrix}$$



と表される。$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ に対し，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} &= \big(1, f'(u)\cos v, f'(u)\sin v\big) \times \big(0, -f(u)\sin v, f(u)\cos v\big) \\ &= \big(f'(u)f(u), -f(u)\cos v, -f(u)\sin v\big) \end{aligned}$$

より

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\big(f'(u)f(u)\big)^2 + \big(f(u)\big)^2\cos^2 v + f(u)^2\sin^2 v} = f(u)\sqrt{1 + \big(f'(u)\big)^2}$$

となるからスカラー場 φ の面積分は

$$\int_S \varphi\, dS = \int_0^{2\pi} \left\{\int_a^b \varphi\big(u, f(u)\cos v, f(u)\sin v\big) f(u)\sqrt{1 + \big(f'(u)\big)^2} du\right\} dv$$

となる。

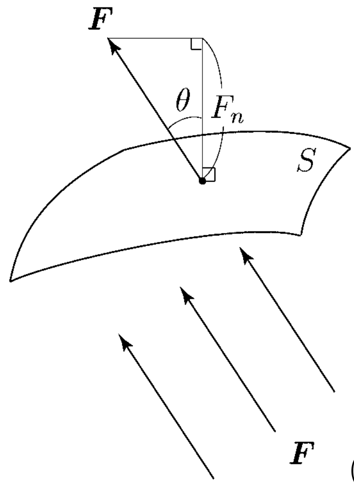
問 例で $\varphi \equiv 1$ の場合に上の面積分を計算し，10 ページの公式と等しくなるのを確かめよ。

＜ベクトル場の表面積分 1＞

空間の各点 (x, y, z) にベクトル $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ が対応しているベクトル場を考える。$\boldsymbol{F}$ は例えば風･水流などを考えてよい。風の場合，曲面 S に $\boldsymbol{F}$ が与える影響は曲面に対して 垂直に押す力 F_n（図1）であるから，その力の合計は面積分

$$\int_S F_n \, dS$$

で与えられる。これを**ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の曲面 S 上の表面積分**といい



(図1)

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S F_n \, dS} \quad \text{(ベクトル場の表面積分)}$$

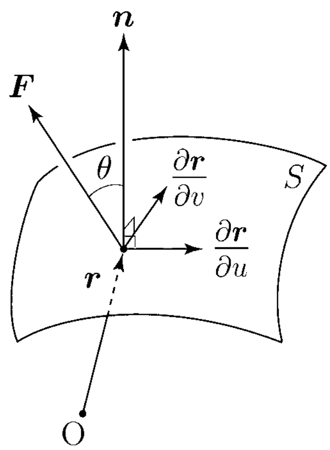
と書く。ここで F_n は $\boldsymbol{F}$ の面に垂直な成分であるから

$$F_n = |\boldsymbol{F}| \cos\theta$$

である。今曲面 S が

$$S = \{\boldsymbol{r}(u, v) : (u, v) \in D\}$$

で表されているとき



(図2)

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)$$

は法線方向のベクトルで $|\boldsymbol{n}| = 1$ である。この $\boldsymbol{n}$ を**単位法線ベクトル**という。この $\boldsymbol{n}$ を使うと

$$F_n = |\boldsymbol{F}| \cos\theta = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{n}| \cos\theta = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$

となり，F_n が $\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{n}$ の内積で表される。

< ベクトル場の表面積分 2 >

ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の曲面 S 上の表面積分は単位法線ベクトルを用いて

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

と書かれる。$\boldsymbol{n}$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ による表現を使うと，スカラー場の面積分の定義から

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv = \iint_D \boldsymbol{F}\cdot\frac{\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)}{\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv$$

であるから

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv} \quad \left(\begin{array}{l}\text{表面積分の}\\ \text{パラメーター表示}\end{array}\right)$$

が成り立つ。今

$$\boldsymbol{F}(x\ ,\ y\ ,\ z) = \big(f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)\big)$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u\ ,\ v) = \big(x(u,v)\ ,\ y(u,v)\ ,\ z(u,v)\big)$$

のときは

$$\boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right) = (f_1,f_2,f_3)\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}f_1 & f_2 & f_3\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}$$

となる。

例　曲面 S は原点を中心とした半径 1 の円とする。すなわち

$$S=\left\{\left(\cos v\cos u\ ,\ \cos v\sin u\ ,\ \sin v\right) : 0 \leqq u \leqq 2\pi\ ,\ -\frac{\pi}{2} \leqq v \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$$

である。今ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が位置 $(x\,,y\,,z)$ に無関係なベクトル $\boldsymbol{F}=(a\,,b\,,c)$ であるとき

$$\boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix}a & b & c\\ -\cos v\sin u & \cos v\cos u & 0\\ -\sin v\cos u & -\sin v\sin u & \cos v\end{vmatrix}$$
$$= a\cos^2 v\cos u + b\cos^2 v\sin u + c\cos v\sin v$$

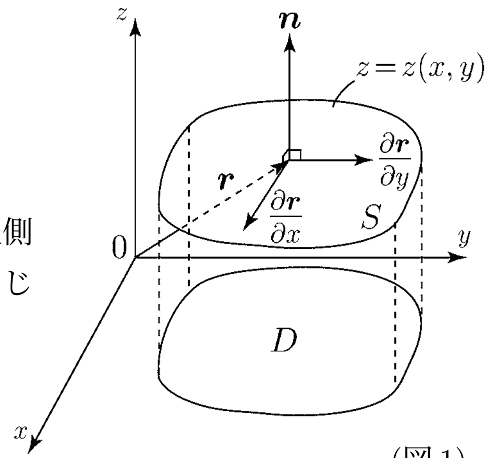
より

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(a\cos^2 v\cos u + b\cos^2 v\sin u + c\cos v\sin v\right)dv\right\}du$$

となる。

問　例の表面積分の値を求めよ。

< ベクトル場の表面積分 3 >



(図 1)

例 1 曲面 S が 2 変数関数 $z(x,y)$ によって

$$S=\left\{\boldsymbol{r}(x,y)=\big(x,y,z(x,y)\big):(x,y)\in D\right\}$$

と表されている場合を考える。
単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が図 1 のように曲面の上側に向いているとき，外積 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}$ は $\boldsymbol{n}$ と同じ方向だから

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right|}$$

となる。ベクトル場 $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ の曲面 S 上の表面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y}\end{vmatrix}dxdy$$

$$=\iint_D \left(f_3-f_1\frac{\partial z}{\partial x}-f_2\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$$

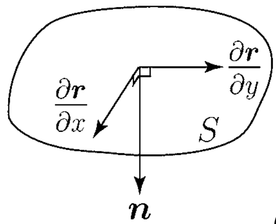
となる。特に $f_1=f_2=0$ のとき

$$\int_S (0,0,f_3)\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D f_3\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy$$

となる。

例 2 例 1 と同じ場合で，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が図 2 のように曲面の下側に向いている場合は，

$$\boldsymbol{n}=\frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right|}$$



(図 2)

であるから $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ の表面積分は

$$\int_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\right)dxdy=-\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right)dxdy$$

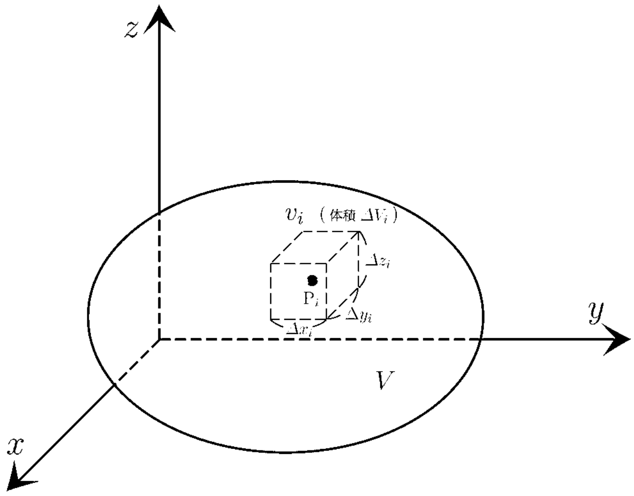
で例 1 の結果にマイナスをかけた値になる。

(注) 例 1 を**表 (おもて) 面の表面積分**と考えれば，例 2 は**裏 (うら) 面の表面積分**といえる。

問 例 2 の場合に $\boldsymbol{F}=(0,0,f_3)$ の表面積分を求めよ。

$$\int_S (0,0,f_3)\cdot d\boldsymbol{S}$$

＜ 体積積分 1 ＞



空間内のある立体を V とし，V を含むある範囲で定義された 3 変数関数 $\varphi=\varphi(x,y,z)$（スカラー場）があるとする。立体 V を xy 平面，yz 平面，xz 平面に平行な平面により微少な立体 v_1 , v_2 , $\cdots$, v_n（これらは全て直方体とみなしてよい）に分割し，各 i について v_i の体積を ΔV_i ， v_i 内の任意の点を $\mathrm{P}_i(x_i\ ,\ y_i\ ,\ z_i)$ とし，v_i の x 軸，y 軸，z 軸に平行な辺の長さを Δx_i , Δy_i , Δz_i とする。このとき P_i における φ の値と ΔV_i との積の和

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i\ ,\ y_i\ ,\ z_i)\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i\ ,\ y_i\ ,\ z_i)\Delta x_i\Delta y_i\Delta z_i$$

を考え，分割を限りなく細くした極限 ($n\to\infty$, $\Delta x_i\to 0$, $\Delta y_i\to 0$, $\Delta z_i\to 0$) を

$$\boxed{\int_V \varphi\ dV=\iiint_V \varphi(x\ ,\ y\ ,\ z)\ dxdydz} \qquad (1)$$

と書き,（スカラー場）φ の立体 V についての**体積積分**または**三重積分**という。特に領域 V が直方体

$$V=\left\{(x\ ,\ y\ ,\ z)\ \ :\ \ x_1\leqq x\leqq x_2\ ,\ y_1\leqq y\leqq y_2\ ,\ z_1\leqq z\leqq z_2\right\}$$

のときは

$$\boxed{\int_V \varphi\ dV=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\int_{y_1}^{y_2}\left(\int_{z_1}^{z_2}\varphi(x\ ,\ y\ ,\ z)\ dz\right)dy\right\}dx} \qquad (2)$$

で求められる。

問　$V=\{(x\ ,\ y\ ,\ z)\ \ :\ \ 0\leqq x\leqq 3\ ,\ 0\leqq y\leqq 2\ ,\ 0\leqq z\leqq 1\}$ のとき

$\displaystyle\int_V \varphi\ dV$ を (2) 式の右辺の形にせよ。

< 体積積分 2 >

例 $V = \{(x, y, z) \ : \ 0 \leqq x \leqq 3\ ,\ 0 \leqq y \leqq 2\ ,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$ で $\varphi(x, y, z) = xz + y$ のとき φ の体積積分は

$$\int_V \varphi dV = \int_0^3 \left\{ \int_0^2 \left(\int_0^1 \varphi(x, y, z) dz \right) dy \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^2 \left(\int_0^1 (xz + y) dz \right) dy \right\} dx = \int_0^3 \left\{ \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{2} xz^2 + yz \right]_{z=0}^{z=1} \right) dy \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x + y \right) dy \right\} dx = \int_0^3 \left\{ \left[\frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \{x + 2\} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{9}{2} + 6 = \frac{21}{2}$$

(別解) 変数 y と z の積分の順序を入れかえると

$$\int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^2 \varphi(x, y, z) dy \right) dz \right\} dx = \int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^2 (xz + y) dy \right) dz \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^1 \left(\left[xzy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \right) dy \right\} dx = \int_0^3 \left\{ \int_0^1 (2xz + 2)\, dz \right\} dx$$

$$= \int_0^3 \left\{ \left[xz^2 + 2z \right]_{z=0}^{z=1} \right\} dx = \int_0^3 \{x + 2\} dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{x=0}^{x=3} = \frac{21}{2}$$

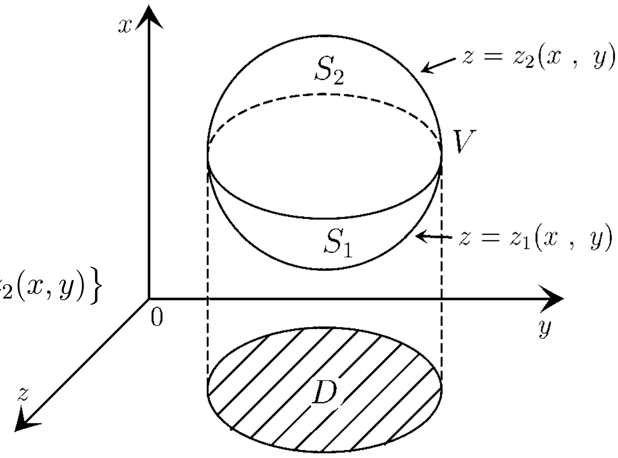
となり，結果は同じ。

一般に領域 V が例のような直方体領域のときは積分順序を入れ変えても結果は同じである。

問 $V = \Big\{(x, y, z) \ : \ 0 \leqq x \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq 3,\ 0 \leqq z \leqq 2\Big\}$

$\varphi(x, y, z) = x + y + z$ のとき $\displaystyle\int_V \varphi dV$ を求めよ。

< 体積積分 3 >



2 変数関数 $z_1(x,y), z_2(x,y)$
と xy 平面上の領域 D に対し,
空間の領域 V が

$V = \Big\{(x,y,z) : (x,y) \in D\ \ ,\ \ z_1(x,y) \leqq z \leqq z_2(x,y)\Big\}$

と表されている場合を考える。
このときスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ の体積積分は

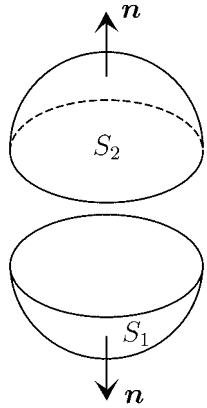
$$\int_V \varphi\ dV = \iint_D \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(x,y,z)dz \right\} dxdy$$

となる。今ある関数 $f(x,y,z)$ に対し $\varphi = \dfrac{\partial f}{\partial z}$ となっている場合は

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \iint_D \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz \right\} dxdy = \iint_D \left\{ \Big[f(x,y,z) \Big]_{z=z_1(x,y)}^{z=z_2(x,y)} \right\} dxdy$$

$$= \iint_D f\big(x,y,z_2(x,y)\big)dxdy - \iint_D f\big(x,y,z_1(x,y)\big)dxdy$$

となる。ここで領域 V が下半面 S_1 と上半面 S_2 によって囲まれているときを考える。上曲面 $S_2 = \Big\{\big(x,y,z_2(x,y)\big)\!:(x,y) \in D\Big\}$ は上方向に
法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が向いているとすれば 41 ページより



$$\iint_D f\big(x\ ,\ y\ ,\ z(x,y)\big)dxdy = \int_{S_2} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$

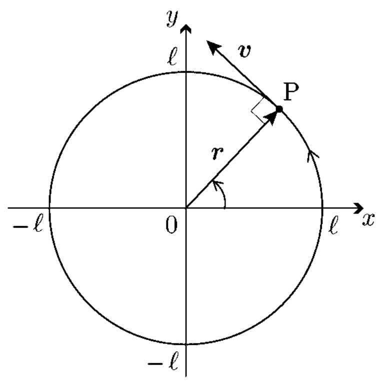
となる。下曲面 $S_1 = \Big\{\big(x\ ,\ y\ ,\ z_1(x,y)\big)\ ;\ (x\ ,\ y \in D)\Big\}$ は
下方向に法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が向いているとすれば

$$-\iint_D \varphi\big(x\ ,\ y\ z(x\ ,\ y)\big)dxdy = \int_{S_1} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$

となる。S_1 と S_2 を合わせた曲面を S とすれば体積積分を以下のように表面積分で表される。

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial z} dV = \int_{S_2} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S_1} (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S (0\ ,\ 0\ ,\ f) \cdot d\boldsymbol{S}$$

< 回転１ >



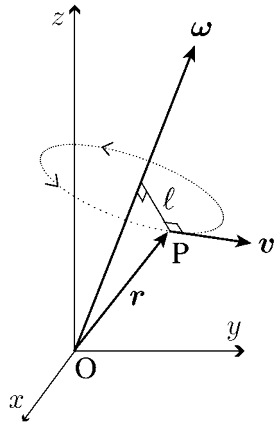
例１ 原点を中心として半径 ℓ の円周上を点Ｐが動く。点 $(\ell\ ,\ 0)$ から出発して１秒間に角度 θ（ラジアン）だけ回転するとすれば，t 秒後のＰの位置ベクトル $\boldsymbol{r}= (x,y)$ は

$$x = \ell\cos(\theta t)\quad ,\quad y = \ell\sin(\theta t)$$

で表される。このとき速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\right) = \bigl(-\theta\ell\sin(\theta t)\ ,\ \theta\ell\cos(\theta t)\bigr) = (-\theta y\ ,\ \theta x)$$

となる。$\boldsymbol{v}$ の方向は $\boldsymbol{r}$ に垂直で大きさは $|\boldsymbol{v}| = \theta\ell$ となる。

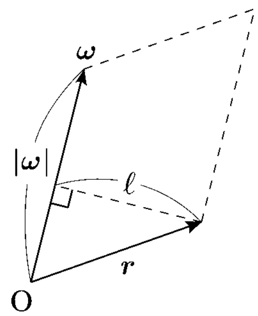


例２ 空間のベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1\,,\,\omega_2\,,\,\omega_3)$ は原点Ｏを始点とするベクトルで，大きさは θ

$$|\boldsymbol{\omega}| = \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 + (\omega_3)^2} = \theta$$

とする。点Ｐはベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を中心軸として右ねじの進む方向に回転しているとする。点Ｐは 軸ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ から距離 ℓ だけ離れた軌道上を１秒間に角度 θ（ラジアン）の速度で等速回転しているとする。このとき点Ｐの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$，速度ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすれば

$\boldsymbol{v}$ の方向	: $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ に垂直
$\boldsymbol{v}$ の大きさ	: $|\boldsymbol{v}| = \theta\ell = |\boldsymbol{\omega}| \times \ell$
	$=$ $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ の作る平行四辺形の面積



となる。外積の幾何学的意味より

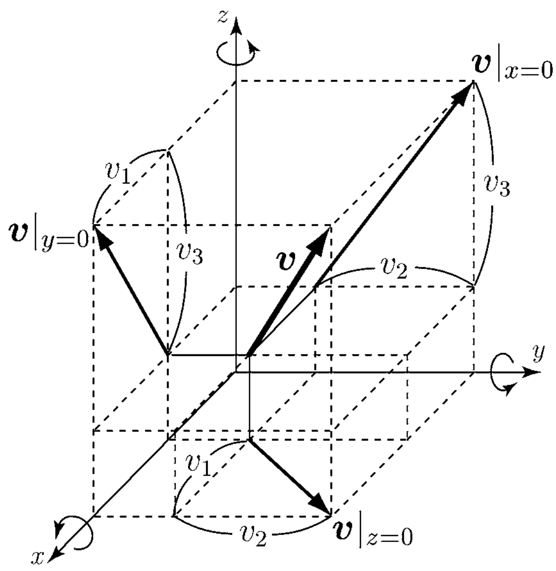
$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}$$

となることが分かる。

問 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (v_1,v_2,v_3)$ として $\boldsymbol{v}$ の成分を $\boldsymbol{\omega}$ の成分 $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ と $\boldsymbol{r}$ の成分 (x,y,z) で表わせ。

$v_1 =$ 　　　　　　$v_2 =$ 　　　　　　$v_3 =$

＜ 回転 2 ＞



空間の各点 (x,y,z) に速度ベクトル
$\boldsymbol{v}(x,y,z)=\big(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z)\big)$
が対応しているベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を考える。ベクトル $\boldsymbol{v}$ の xy 平面 $(z=0)$ への射影を $\boldsymbol{v}|_{z=0}$ とすれば, $\boldsymbol{v}|_{z=0}$ は xy 平面上のベクトル場 $\boldsymbol{v}|_{z=0}=(v_1,v_2)$ とみなせる。この回転量は 24 ページより

$$\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{z=0}\big)=\mathrm{rot}(v_1,v_2)=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

となる。これを z 軸まわりの回転量と考え

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_z=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{z=0}\big)=\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}$$

と書く。同様に y 軸まわりの回転量を (zx 平面の回転量として)

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_y=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{y=0}\big)=\mathrm{rot}(v_3,v_1)=\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}$$

とする。また x 軸まわりの回転量を (yz 平面の回転量として)

$$(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_x=\mathrm{rot}\big(\boldsymbol{v}|_{x=0}\big)=\mathrm{rot}(v_2,v_3)=\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}$$

とする。それらを成分としたベクトルを

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}&=\big((\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_x\,,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_y\,,(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v})_z\big)\\&=\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z},\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x},\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\end{aligned}}\quad(\text{ベクトル場}\ \boldsymbol{v}\ \text{の回転})$$

と書き，空間のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**回転** (***rotation***) という。

例 $\boldsymbol{\omega}=(1,2,3)\,,\boldsymbol{r}=(x,y,z)\,,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=(2z-3y\,,3x-z\,,y-2x)$ のとき $\boldsymbol{v}$ は ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を軸とした等速回転の速度ベクトルを意味する。このとき $\boldsymbol{v}$ の回転は

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}&=\left(\frac{\partial}{\partial y}(y-2x)-\frac{\partial}{\partial z}(3x-z)\,,\frac{\partial}{\partial z}(2z-3y)-\frac{\partial}{\partial x}(y-2x)\,,\frac{\partial}{\partial x}(3x-z)-\frac{\partial}{\partial y}(2z-3y)\right)\\&=\big(1-(-1)\,,2-(-2)\,,3-(-3)\big)=(2,4,6)=2(1,2,3)=2\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

となる。rot $\boldsymbol{v}$ は回転軸 $2\boldsymbol{\omega}$ を表す。

問 ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が以下の場合にベクトル場 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ の回転 rot $\boldsymbol{v}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{\omega}=(0,0,\theta)$　　　(2) $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$

< 発散 >

空間のベクトル場$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\big(f_1(x,y,z)\ ,\ f_2(x,y,z)\ ,\ f_3(x,y,z)\big)$ に対して
平面の場合 (23 ページ) と同様に

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}} \quad (発散)$$

を$\boldsymbol{F}$の**発散 (*divergence*)**という。

例1 点 A(a_1,a_2,a_3) を空間の定点をする。動点 P(x,y,z) が微分方程式

$$(1)\quad \frac{\partial x}{\partial t}=-x+a_1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial t}=-y+a_2 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial t}=-z+a_3$$

に従って運動しているとする。(1) の一般解は

$$x(t)=a_1+C_1e^{-t} \quad , \quad y(t)=a_2+C_2e^{-t} \quad , \quad z(t)=a_3+C_3e^{-t}$$

$(C_1,C_2,C_3$は任意定数$)$

である。$t=0$ のとき $\big(x(0)\ ,\ y(0)\ ,\ z(0)\big)=(a_1+C_1\ ,\ a_2+C_2\ ,\ a_3+C_3)$ であり
$t\to\infty$ のとき $e^{-t}\to 0$ より $\big(x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ z(t)\big)\to(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ となる。点 P は空間の任意の点 $(a_1+C_1\ ,\ a_2+C_2\ ,\ a_3+C_3)$ から出発し ($t\to\infty$ のとき) 点 A $(a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$ に向かって進む。このような流れを**「吸い込み」**といい，点 A を**「吸い込み点」**という。
点 P の速度ベクトル$\boldsymbol{v}$は

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial t}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial t}\right)=(-x+a_1,-y+a_2,-z+a_3)$$

であり，$\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(-x+a_1)+\frac{\partial}{\partial y}(-y+a_2)+\frac{\partial}{\partial z}(-z+a_3)=-1-1-1=-3$$

例2 点 B$=(b_1\ ,\ b_2\ ,\ b_3)$ を空間の定点とする。速度ベクトル$\boldsymbol{v}$が

$$\boldsymbol{v}=(x-b_1\ ,\ y-b_2\ ,\ z-b_3)$$

であるような点 (x,y,z) の運動は点 B から遠ざかっていく動きをあらわす。このような空間の流れを**「わき出し」**といい，点 B を**「わき出し点」**という。
ベクトル場 $\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(x-b_1)+\frac{\partial}{\partial y}(y-b_2)+\frac{\partial}{\partial z}(z-b_3)=1+1+1=3$$

例3 速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v}=(-x\ ,\ -y\ ,\ 2z)$$

であるような点 (x,y,z) の運動は，xy 軸上では原点に向って進み，z 軸上では原点から遠ざかる動きをあらわす。このような流れを**「よどみ」**という。
$\boldsymbol{v}$の発散は

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(-x)+\frac{\partial}{\partial y}(-y)+\frac{\partial}{\partial z}(2z)=-1-1+2=0$$

問 ベクトル場$\boldsymbol{v}$が以下の場合に発散 div$\boldsymbol{v}$を求めよ。

(1) $\boldsymbol{v}=(ax-by\ ,\ ay+bx\ ,\ cz)$
div $\boldsymbol{v}=$

(2) $\boldsymbol{v}=(\omega_2z-\omega_3y\ ,\ \omega_3x-\omega_1z\ ,\ \omega_1y-\omega_2x)$
div $\boldsymbol{v}=$

< ハミルトンの演算子 >

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対して

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{k}$$

によって定義されるベクトル場 $\nabla\varphi$ を φ の**勾配**$(\boldsymbol{gradient})$という。$\nabla\varphi = \mathrm{grad}\ \varphi$ とも書く。∇ は**ハミルトンの演算子**と呼ばれ，**ナブラ**と読み，形式的に

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\right) = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

で定義されるベクトルとする。従って $\nabla\varphi$ はベクトル ∇ と，スカラー φ の形式的な積と考えられる。この記号を使うとベクトル場$\boldsymbol{F}$= (f_1, f_2, f_3) の発散は

$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}f_1 + \frac{\partial}{\partial y}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}f_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f_1, f_2, f_3) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}}\ (\text{発散})$$

となり ∇ と F の内積として表される。また回転は

$$\boxed{\mathrm{rot}\ \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\ ,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla\times\boldsymbol{F}}\ (\text{回転})$$

となり ∇ と$\boldsymbol{F}$の外積として表される。このように表した方が覚えやすい。

例

$$\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\ ,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\ ,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right) = \boldsymbol{0}$$

一般にスカラー場 φ，ψ とベクトル場$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{G}$に対して

(1) $\nabla(\varphi+\psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$	,	$\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$
(2) $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\cdot\boldsymbol{G}$	,	$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{F} + \varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{F})$
(3) $\nabla\times(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}) = \nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\times\boldsymbol{G}$	,	$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F}) = (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{F} + \varphi(\nabla\times\boldsymbol{F})$
(4) $\nabla\times(\nabla\varphi) = \boldsymbol{0}$	,	$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$

が成り立つ。

問　ベクトル場 $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, f_3)$ に対し $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F}) = 0$ を示せ。

< ポテンシャル >

ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ に対し，あるスカラー場 $U(x,y,z)$ が存在して

$$\boldsymbol{v}=\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\,,-\frac{\partial U}{\partial y}\,,-\frac{\partial U}{\partial z}\right)=-\nabla U$$

と表されているとき U をベクトル場 $\boldsymbol{v}$ の**ポテンシャル**または**スカラーポテンシャル**という。そのイメージは，平面の場合 (25 ページ) と同様に，「U の勾配にそって球がころがりながら落ちるときの速度が $\boldsymbol{v}$」と考えればよい。

例 1　吸い込み (47 ページ例 1) の場合 $\boldsymbol{v}=(-x+a_1\,,-y+a_2\,,-z+a_3)$ であった。ここで $U(x,y,z)=\frac{1}{2}(x-a_1)^2+\frac{1}{2}(y-a_2)^2+\frac{1}{2}(z-a_3)^2$ とおくと

$$-\nabla U=\left(-\frac{\partial U}{\partial x},-\frac{\partial U}{\partial y},-\frac{\partial U}{\partial z}\right)=(-x+a_1\,,-y+a_2\,,-z+a_3)=\boldsymbol{v}$$

となり U が $\boldsymbol{v}$ のポテンシャルであることが分かる。

問 1　ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が以下の場合にポテンシャル U を求めよ。

(1) $\boldsymbol{v}=(x-b_1\,,y-b_2\,,z-b_3)$　　　(2) $\boldsymbol{v}=(-x\,,-y\,,2z)$

一般のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対し $\boldsymbol{F}=\nabla\varphi$（ポテンシャル $U=-\varphi$）を満たすスカラー場 φ が存在する場合は前ページより

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}(\nabla\varphi)=\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{0}\quad\text{(ゼロベクトル)}$$

を満たす。このようなベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を「**渦なし**」という。つまりポテンシャルが存在する場合は「渦なし」である。逆に「渦なし」であればポテンシャルが存在する。

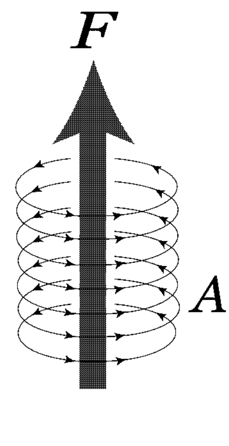
問 2　ベクトル場 $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)$ は「渦なし」とする。すなわち $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ より

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}=\frac{\partial f_2}{\partial z}\,,\quad\frac{\partial f_1}{\partial z}=\frac{\partial f_3}{\partial x}\,,\quad\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial y}$$

を満たすとする。このとき任意定数 a,b,c に対し

$$\varphi(x,y,z)=\int_a^x f_1(t,y,z)dt+\int_b^y f_2(a,t,z)dt+\int_c^z f_3(a,b,t)dt$$

とおく。$\boldsymbol{F}=\nabla\varphi$ を満たすことを示せ。



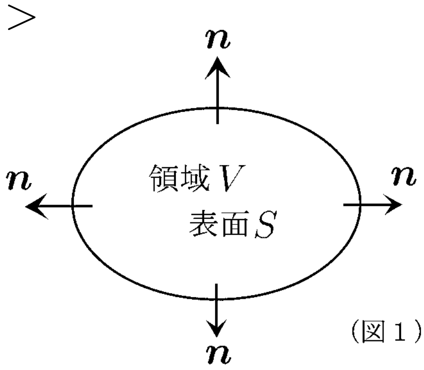
ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が発散しない場合，つまり $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0$ のとき，あるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が存在して

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$$

を満たす（証明略)。このベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{F}$ の**ベクトルポテンシャル**という。$\boldsymbol{A}$ が右の図のような「渦」の場合，$\boldsymbol{F}$ は「渦」の回転軸の方向で，右ねじをまわしたとき進む向きのベクトルである。

< 発散定理・ストークスの定理 >

< **発散定理** >



（図 1）

空間の立体 V の表面を S とする。曲面 S 上の単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$は図 1 のように外側に向いているとする。このとき 44 ページより関数 $f_3 = f_3(x\ ,\ y\ ,\ z)$ に対して

(1) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_3}{\partial z} dV = \int_S (0\ ,\ 0\ ,\ f_3) \cdot d\boldsymbol{S}$

が成立する。同様に関数 $f_2 = f_2(x, y, z)$, $f_1 = f_1(x, y, z)$ に対して,

(2) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_2}{\partial y} dV = \int_S (0\ ,\ f_2\ ,\ 0) \cdot d\boldsymbol{S}$

(3) $\displaystyle\int_V \frac{\partial f_1}{\partial x} dV = \int_S (f_1\ ,\ 0\ ,\ 0) \cdot d\boldsymbol{S}$

が成立する。ここで $\boldsymbol{F} = (f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3)$ とすれば $(1) + (2) + (3)$ より

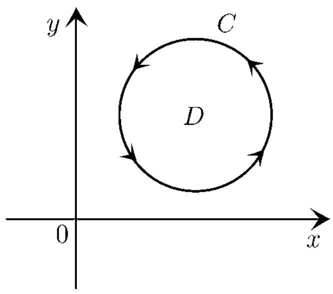
$$\boxed{\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{F} dV = \int_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}} \qquad \text{(発散定理)}$$

が成立する。これを**ガウスの発散定理**という。

例　図 1 のような V と S に対し，$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$ より

$$\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\big) dV = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) dV = 0$$

< **ストークスの定理** >



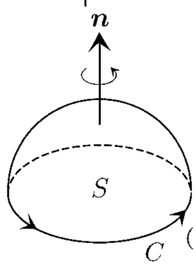
（図 2）

図 2 のような xy 平面上の領域 D と境界 C に対し，28 ページより，グリーンの定理は

$$\boxed{\iint_D \mathrm{rot}(f_1, f_2) dxdy = \int_C (f_1, f_2) \cdot d\boldsymbol{r}} \qquad \text{(グリーンの定理)}$$

と書かれる。これは以下のように空間の場合に一般化できる。図 3 のような空間の曲面 S の境界線を C とする。空間のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (f_1\ ,\ f_2\ ,\ f_3)$ に対し

$$\boxed{\int_S \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}} \qquad \text{(ストークスの定理)}$$



（図 3）

が成立する。これを**ストークスの定理**という。

（注）ストークスの定理の曲面 S（図 3）は例の曲面 S（図 1）の上半分と考える。

問　図 3 のような曲線 C とスカラー場 φ に対し，$\displaystyle\int_C \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ。