論理的な記述力の向上を目指した数学教育の一実践

鈴木　利幸
（受領日：2012年５月11日）

高知工科大学共通教育教室
〒782-8502　高知県香美市土佐山田町宮ノ口185

E-mail: *suzuki.toshiyuki@kochi-tech.ac.jp

要約：大学生の学力が低下したと言われている。特に、彼らの多くは論理的な記述が苦手である。本稿は、論理的な記述力の向上を目指した数学教育の１つの実践の報告である。

1．はじめに

日本数学会は、2011年４月から７月にかけて全国の大学生約6,000人を対象に、テスト形式の「大学生数学基本調査」を行った。その目的は、高等教育を受ける前提となる数学的素養と論理力を大学生がどの程度身につけているのか、その実態を把握し、大学教育の改善に活用するとともに、初等中等教育に対する提言の材料とすることであった。その基本調査によって明らかとなった問題点を踏まえ、日本数学会は大学に対しては以下のような提言を行った[8]：

> 数学の入試問題はできるかぎり記述式にする。１年次２年次の数学教育において、思考整理と論理的記述を学生に体得させる。

本稿では、筆者がこの提言以前から行っていた本学の１年次および２年次の数学の授業での、論理的な記述力の向上を目指した教育実践を報告する。

2．本学の数学教育の状況

2.1 現在の大学生世代への数学教育のこれまで

現在の大学生世代が経験してきた数学教育の状況を、近年の学習指導要領の改訂の流れを中心としてまとめてみる。

2002年度から小・中学校で実施された学習指導要領[4]（高等学校は2003年度から学年進行で実施）が一般には「ゆとり教育」と言われているようだが、実際には、1980年度実施（中学校は1981年度から実施、高等学校は1982年度から学年進行で実施）のもの[4]から「ゆとりカリキュラム」は始まっていた。1992年度実施（中学校は1993年度から実施、高等学校は1994年度から学年進行で実施）のもの[4]では、「関心・意欲・態度」を重視する「新学力観」が導入された。尾木直樹はその状況を次のように述べている[3]：

> 当時の文部省が、これまで私たちが学力の中心として考えてきた計算力や暗記力など計測可能な「知識の量」や「理解の力」ではなく、教科に対する「関心・意欲・態度」こそ学力であるとしたとらえ方の転換の結果である。したがって、実は学校現場ではこの間「できないのも個性」として扱われてきたのだ。
>
> （中略）
>
> こうして、“教え込むこと”が機械的一面的に禁じられていったのである。今日の低学力問題の根底には、結果としてこれら具体的で身近な変化も横たわっているのである。けっして世間でよく言われている“ゆとり教育”のせいだけではない。

大学入試についても、1989年までは国公立大学の入学志願者を対象として５教科７科目に統一された「共通一次試験」が行われていた。それが、1990年からは私立大学も利用可能なア・ラ・カルト方式の「大学入試センター試験」に変わった。また、1990年代には、多くの大学が入学試験の科目数を減らした。このことは、少子化の時代に受験生の確保や見かけの偏差値を上げるためには効果があったようだ。さらに、高等学校の選択科目の広がりや、総合学科の設置（1994年）なども行われ、高校生には様々な選択肢が示されるようになった。これらのことを通して、自分が好きなこと・得意なことだけをやればよく、嫌なこと・嫌いなことはやらなくてもよい、という「隠れたカリキュラム」が子どもたちに刷り込まれたのではないだろうか。

1992年９月からの月１回、1995年４月からの月２回の学校５日制は、2002年４月から完全実施された。

それに伴い、2002年度実施の学習指導要領では、小学校中学年から高等学校において「総合的な学習の時間」が創設され、教科の内容は「３割削減」された。現時点ではしばしば批判される「ゆとり教育」だが、刈谷剛彦は1999年当時のことを次のように述べている[2]：

> ……九九年の最初のころは、教育改革によって学力が低下するのではないか、と言っただけで、たくさんの批判が上がった。マスコミの論調は今とは逆向きでしたからね。教育改革を支持する論調が強かった。

一方、日本数学会では、

> 日本数学会に所属する約5000名の大学教員の間では1990年代初頭から、大学初年次における数学の学力低下が言われていました。それを受けて日本数学会は1994年に大学基礎教育ワーキンググループを立ち上げ、[8]

そのワーキンググループのメンバーである岡部恒治・西村和雄・戸瀬信之が「分数ができない大学生」[1]を1999 年６月に出版した。それをきっかけに始まった「学力低下論争」はマスコミの論調や世論の流れを変え、新学習指導要領が正に実施される直前の2002年１月には遠山敦子文部科学大臣が緊急アピール「学びのすすめ」を出さざるを得ない状況となった。しかも、学習指導要領は「最低基準」であるとして、一度は削除した内容を「発展的な学習」として教科書に載せることを急遽認めるようになる。その後、2003年の「PISA ショック」を受けて、最新の学習指導要領[5]（小学校は2011年度から、中学校は2012年度から実施、高等学校は2013年度から学年進行で実施）では「脱ゆとり教育」へ舵を切った。（この学習指導要領は、小・中学校は2009年度から、高等学校は2012年度からそれぞれ一部の内容を先行実施している。）

なお、筆者も学んだ「現代化カリキュラム」と言われる1971年度実施（中学校は1972年から実施、高等学校は1973年度から学年進行で実施）のもの[4]では、小学校算数で集合を扱っていた。この教材は、当時、親たちの間では評判が悪かったらしい。しかし、筆者個人の感想としては、小学校の頃から繰り返し集合の記号を扱っていたので、知らず知らずの内に「記号に慣れた」ような気がする。現行の学習指導要領では、高等学校の数学Ａで初めて集合の記号を学び、その後利用する機会も少ない。今の大学生の中には$\in$と$\subset$の区別がつかなかったり、$\cap$と$\cup$を混同してしまう者も少なくない。同様に、不等号（$<,>$）自体も以前は小学校２年生で学んでいたが、現行の学習指導要領では中学校１年で初めて不等号を学び、一次不等式の解法を学ぶのは高等学校１年生のときになる。これでは、なかなか身に付かないだろう。また、現行および新しい学習指導要領では、小学校の算数および中学校・高等学校の数学のいずれでも「公理」という用語は扱っていない。「数学が公理から始まる演繹体系である」という感覚を身につけていることを、今の子どもたちには期待できないのである。

そして、2012年度の新入学生の多くは2000年４月に小学校に入学している。今の学生をみて「こんなことも知らないのか」「こんなこともできないのか」と一方的に責めては彼らが気の毒である。彼らは、本人達が選んだわけでもない「ゆとり教育」と「学力低下論争」に振り回された世代だと言えるだろう。

2.2 本学の数学教育

1997年に公設民営大学として設立された本学は、2009年度から公立大学法人化した。

私学時代は、工学部の一般入試の数学の出題範囲は数学Ⅰ、Ⅱ、A、Bであり、出題形式はマーク方式ではないものの結果だけを問うものであった。公立法人化後は、工学系は数学Ⅲ,Cまでを出題範囲とし、出題形式は完全記述式に変えた。ただし、マネジメント学部については、個別学力検査では数学を課していない。さらに、前期日程のB方式や後期日程では大学入試センター試験の内３教科３科目だけで受験できるので、数学の入学試験勉強をほとんど経験せずに入学してくる学生がいる可能性すらある。

約４割を占める推薦入学者は数学の学力検査を経ずに入学している。（数学の出題範囲に注目した入試区分とそれぞれの定員は表１の通りである。）

高等学校の数学の必履修科目は「数学Ⅰ」（または「数学基礎」）だけである。数学Ⅲどころか数学Ⅱすら十分に学ばないまま高等学校を卒業し、大学へ入学してくる学生もいるのである。数学の基礎力に不安を持っている推薦入学者への対応として、本学では井上昌昭教授が中心となって入学前教育を行っている。推薦合格者へは合格発表後から入学までの間、郵送方式で

1. まず、高校数学の範囲のどこに自分の弱点があるのか、自己診断用のテストを行う。
2. 自分の力が不足しているレベルから、記入式のワークブックで勉強する。

3. １冊終わるごとに大学へ送付。折り返し、その号の解答と次の号のワークブックを大学から送付する。
4. 最終号については添削して返却する。

というきめ細かい対応をしている。

区分	学群・学部	数学の出題範囲	定員
一般入試	工学系３学群	センター＋III・Cまで(記述式)	220
	マネジメント	センターだけ	30
		数学なしも可	30
推薦入試	工学系３学群	なし	140
	マネジメント	なし	40
特別推薦	各学群学部	なし	若干名
		合計	460

表１　入試区分と定員

それでも、入学者間の学力差は大きい。数学は「積み上げ型」という性格が強いので、予備知識の差が大きすぎると一斉授業は難しくなる。そのため、入学後の「プレースメントテスト」で推奨クラスを分けている。レベルを大きく３段階

1. 数学Ⅲを大体理解していることを前提とするクラス
2. 数学Ⅱまでは大体理解しているが、数学Ⅲは未履修かあまり分かっていない学生向けのクラス
3. 数学Ⅱの復習から始めるクラス

に分ける。さらに、１クラスの人数が50〜60名程度になるように各レベルを複数のクラスに分けることもある。

ただし、プレースメントテストは教科書の基本レベルの問題を中心とした、選択式（マーク方式）の単純な試験である。当然、思考力や論証力などは直接測ることはできない。また、学生本人が推奨クラスよりも上や下のクラスに入ることを望んだ場合は、原則として本人の希望を優先している。

本学は１年を４期に分けるクォータ制を導入しており、１つの科目は週に２コマずつ８週で完結する。１年次の数学のカリキュラムは次の表の通りである:

クラス	１Ｑ	２Ｑ	３Ｑ	４Ｑ
上級クラス	数学１（微分法）	数学２（積分法）	数学３（微分方程式）	数学４（行列）
初級クラス	基礎数学２	数学１	数学２	数学３
入門クラス	基礎数学１	基礎数学２	数学１	数学２
教職クラス	微分積分学１		微分積分学２	
	線形代数学１		線形代数学２	

表２　１年次カリキュラム

例えば、第１クォータ（１Q）に上級クラスの数学１を履修したとして、無事合格すれば２Qは数学２へ進む。もし、微分法を学ぶ数学１が不合格だった場合は、積分法を学ぶ数学２へそのまま進んでも合格の可能性は低くなってしまうだろう。しかし、先に基礎を固めるため数学１を再履修しようとしても、通常のカリキュラムでは翌年まで待つ必要がある。ところが、本学では次の２Qに初級クラスの数学１に再挑戦することができ、そこで微分法をマスターしてから３Qには積分法の学習へ進むことができるようになっている。

また、基礎数学２は高等学校の数学Ⅲの初歩から、基礎数学１は数学Ⅱの主な内容の確認から始め、学生それぞれの既習内容から大学の数学へ、できるだけ無理なく接続するようにしている。

なお、通常のクラスとは別に、2011年度から高等学校および中学校の数学の教職課程が導入され、これらの授業は半期科目となっている。

また、本学はシステム工学群・環境理工学群・情報学群の工学系３学群と所謂「文系」に分類されるマネジメント学部からなる。しかし、「文系」のマネジメント学部生も特別扱いすることなく、工学系の学生と合同で数学の授業を行っている。マネジメント学部生も経済学や経営学などの専門科目を学ぶときに数学の基礎知識が必要になることはもちろんのこと、さらに、合理的な考え方の育成に数学的なものの見方が有効と考えられることが、その理由である。

3. 授業のガイダンスから

ここからは、本学における筆者の授業の実践を報告する。ただし、本学の数学教室が全体としてこのような授業を行っているわけではないことは、念のため申し添えておく。

本学では上述の通り「習熟度別クラス編成」を行っ

ているが、筆者は新入生の学力差（予備知識の差）をそれほど大きなものとは考えていない。それ以上に、大学で学ぶ意欲や向上のための「学び方」を有しているかどうかが、その後の伸びを大きく左右するものとみている。

そのため、大学の基礎教育としての数学の授業では、その数学的内容以上に「学び方」をできるだけ早い機会に身につけてもらいたいと考えている。

授業の進め方は以下の通りである：

1. 前半は講義形式で基本事項の説明や例題の模範解答を示す。
2. 授業時間の終わりに15分位の時間を取って「演習プリント」を配布し各自で解かせる。(図１)
3. 何人かの学生が解き終えた頃、解答例を配布する。自分なりに解き終えてから解答例をみて各自が答合わせをし、間違えている部分は赤で正しく修正する。もし、(ノートなどをみても) 自分で出来なかった所は、解答を赤で写す。(図２)
4. 答合わせを完了したものを提出する。(図３)
5. 演習の時間を十分に取れない場合は、宿題として後日期限を定めて提出させることもある。
6. 提出されたプリントを評価および添削して次の授業時に返却する。

なお、この「演習プリント」を提出した学生には「課題点」を付けることを約束しているが、成績評価における課題点の割合は最大で２割までとしている。最初に、次のことを学生に強調して伝えている：

- 課題を提出することが目的ではない。課題を勉強するという手段を通して、実力を向上させることが目的である。
- 配られた課題プリントを自力で解かず、解答例が配られるのを待って、正解を鉛筆で写し、赤でマルを付ければ、毎回「たいへんよくできました」のハンコを貰うことも可能ではある。しかし、このやり方で実力がつくはずがない。プリントを毎回提出しても、それだけでは合格点に達しない。
- 間違うことを恐れてはいけない。間違い方は一人一人違う。練習のときに自分独自の間違い方を発見して、自分の見方や考え方を修正しておかないと、結局、本番の試験のときに間違えてしまう。自力でやって「しっかりと」間違えて、解答例を見て「正しく修正」出来たら、課題としては「合格」である。
- プリントを提出したら勉強は終わり、ではない。さらに、その新たに獲得した考え方や技術を定着させるように各自で練習することが大切である。

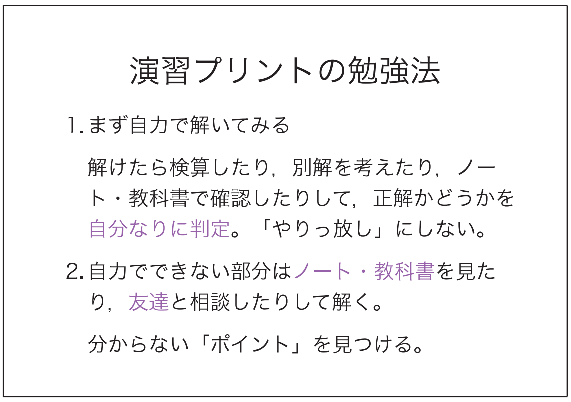

図１　ガイダンス１

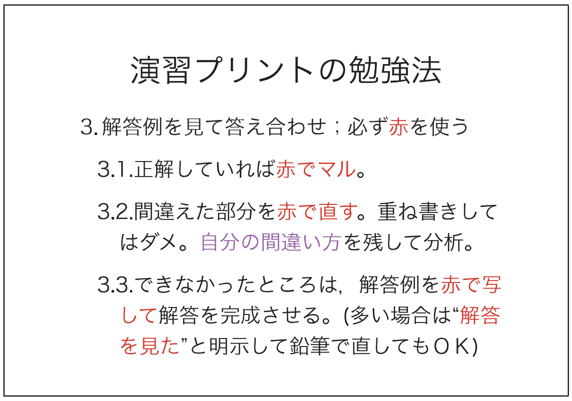

図２　ガイダンス２

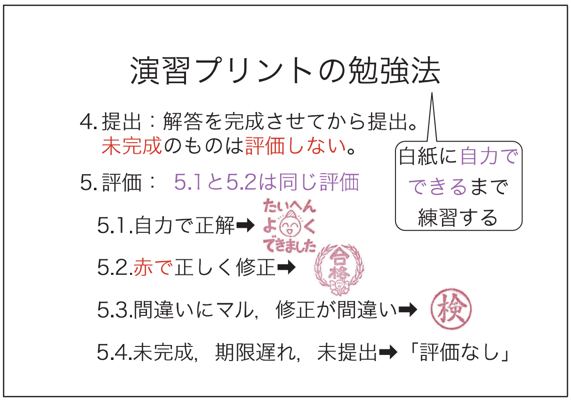

図３　ガイダンス３

ノートや教科書を見ずに解く「小テスト」で「点数」を付ける方が、授業も真剣に聞き、課題にまじめに取り組むのではないか、という考え方もあるだろう。確かに「できる学生」ばかりの集団では有効な方法かも知れない。しかし、小テストでは「でき

ない学生」は自分のできなさを毎回再確認させられるだけに終わってしまう。

『悪い点がいやなら勉強すればいいだろう』と言いたくなるが、それができるくらいならば、これまで数学が苦手なままでは来なかったのではないだろうか。「できない学生」の立場から見れば、『勉強しても小テストで点が取れなかったら、自分は本当の“落ちこぼれ”ということになる。だったら、勉強しないでいよう。そうすれば自分は実は“やればできる人間”という可能性を留保できる』と「無意識のうちに」考えて、授業中寝ていたり、欠席したりするようになることも自然ではないだろうか。

模範解答を配ったら、宿題の意味がない。わかるまで考えることが大切だし、もし、自分一人で考えてわからなかったら、本を調べたり友達と議論したりすることが本当の勉強だ、という考え方もあるだろう。それが勉強の正道だと筆者も思う。しかし、「できない学生」はこのような勉強法を実行してくれない。

ちょっと考えてわからなかったら、（場合によっては、考えるより先に）友達の書いたものを「丸写ししよう」とするだけである。先にできた友達に意味を教えてもらいながら書くのであれば、立派な勉強になるが、多くの場合、そのような手順はとらない。友達が書き上げたプリントを借りてきて、意味不明な記号列を文字通り「丸写ししよう」とする。しかし、意味を考えないで書いているから、しばしば「劣化コピー」となってしまう。「丸写し」もなかなか難しいのである。また、「数学ができない学生」の友達はやはり「数学ができない学生」であることが多いので、「劣化コピー」された間違った解答が（場合によっては、より劣化されつつ）「複製」されることになる。自分で考えた上で間違うのならば、とても良いことである。自分の間違いに気づくと、自己の認識を振り返るきっかけになる。しかし、他人の書いた誤った解答を無批判に写しても、なんの勉強にもならない。どうせ写すのであれば、模範解答を写した方がましであろう。これで「劣化」した場合は、指導を入れることもできる。

4. 演習プリントの誤答例から

学生が提出した「演習プリント」の中から、主な「誤答例」を取り上げて、考察してみる。

最初の授業で「演習プリント」の勉強法のガイダンスをするなかで、

> 間違いにマルを付けたり、修正の仕方を間違えたら「検」印

と言うと、少なくない学生たちは苦笑する。「そんな馬鹿なヤツがいるのか」といったところだろう。しかし、最初の演習ではほとんどの学生が「検」印となってしまうクラスもある。

本人はマルと思っても表現が適切でなかったり、解答例から大切な部分をわざわざ抜かして写す者が多い。「他人に読んでもらう答案」の書き方が身に付いていないのである。大学入学までに適切な指導を受ける機会が少なかったのかも知れない。

それでも、何回か指導をしていく中で、多くの学生は適切にマルを付けたり、正しく修正できるようになっていく。以下に挙げる誤答例は、決して本学の多数派ではない。しかし、「学び方」を身に付けることができないまま大学に入学してくる学生たちがいる、ということには注意しておく必要があるだろう。

なお、学生が書いたプリントをそのまま載せると筆跡から本人が特定される恐れもあるので、以下の「誤答例」はすべて筆者が書き直したものである。

4.1 間違いにマルをつける

最初の例は、行列式の値の計算の練習問題である。解答例は以下のもの（図４）を示した:

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & -3 & -9 & 4 \end{vmatrix}$ $\boxed{\text{4次以上ではサラスの方法は使えない}}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & -9 & 4 \end{vmatrix}$ ①↔③ $\boxed{\text{行や列を交換すると符号が逆転する}}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ ②＋①×(−3) ④＋①×(−5)

$= -1\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ [第１列に関する展開] $\boxed{\text{ここでサラスを使うと，数学の力がアップしない}}$

$= -2\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ [第１行と第３行の共通因数をくくり出す] $\boxed{①\times\frac{1}{2}\ \text{とやってはダメ！}}$

$= -6\cdot 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ [第３列の共通因数をくくり出す]

$= -18\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ②＋①×(−5) ③＋① $\boxed{\text{慣れたら，すぐに「}= -18\cdot 1(-6+12)\text{」}}$

$= -18\cdot 1\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ [第１列に関する展開]

$= -18(-6+12) = -18\cdot 6 = -108$

図４　解答例１

> 計算問題における途中計算は証明の一種である。正しい道順ならば、どの経路を辿ってもよいが、途中に誤りがあれば、最後の数値が正解と一致していても、それは間違いである。

と日頃から解説しているが、なかなか定着しない。数学の「答」が、途中の計算も含めた「議論の全体」だとは思っていない学生が多いようである。

図５は解答例で強調している部分も見過ごしてマルを付けてしまっている。最後の数値さえ合ってい

ればマルだと思っているのだろう。

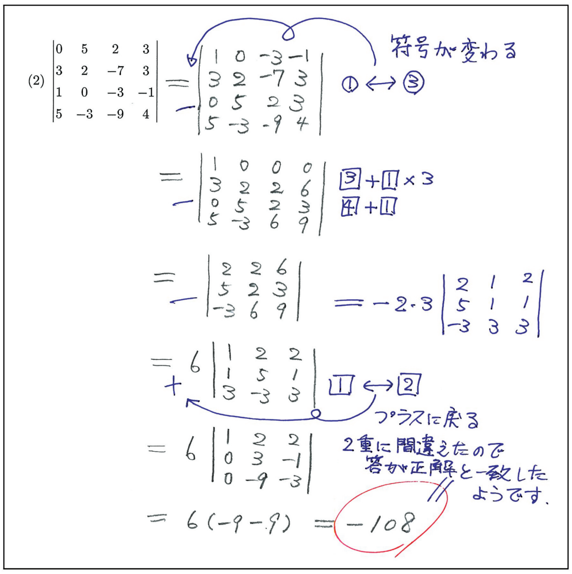

図５　途中の間違い

また、図６では等号記号を抜かして計算している。行列式の値の計算は、その値を変化させないような変形を繰り返しているので、等号記号で結ぶ必要がある。これは、等号記号で結んではいけない行列の基本変形と対比させて認識するべき基本事項であろう。芹沢光雄も以下のように指摘している[6]：

> 以下、特に重視する各論を述べると、はじめに等号記号「＝」を大切にすることを指摘したい。等号記号「＝」を軽視する生徒が小学校から高校・大学まで増えてきており、その問題が数学のつまずきとなって現れている。小学校では、一部ではあるが、児童ばかりでなく教員までもが数式において、「＝」を一切省略する記述を行うようになっている。この問題は中学校以降で、方程式と恒等式における「＝」の意味の違いや、ベクトルに関する「＝」の意味を認識できない形で顕著に現れている。

「このくらいのことで、目くじら立てなくてもいいじゃないか」という意見もあるだろうが、基本を身に付けるべき初学者には大切なことだと考える。

> 本番の試験でも、等号記号を適切に使わないと、最後の数値が合っていてもマルにはしないので、日頃から注意して書きましょう。

と指導している。

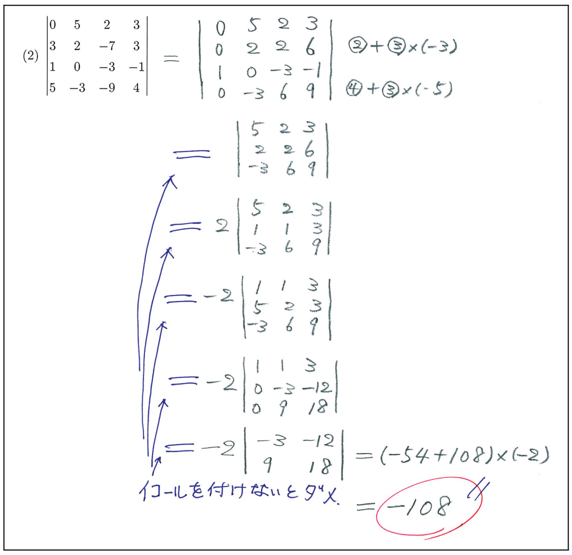

図６　等号記号を抜かす

同様に、問題文にない変数や記号を使うときには先に定義することや、分数やルートの横線の長さ（図７）や括弧の扱いについても注意が必要である。本来であれば、中学段階で身に付けておいて欲しい事柄ではあるが、定着していない学生が少なくないのが現状である。折に触れて指導する必要がある。

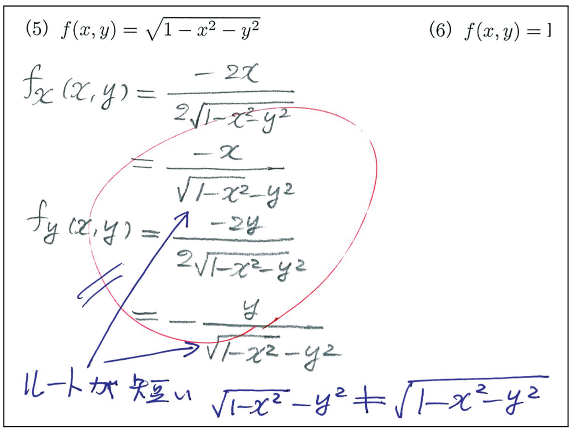

図７　ルートが短い

4.2 直し方の間違い

次は、掃き出し法による連立一次方程式の解き方である。解答例は図８の通りである。

図９は途中まで正しいやり方で計算しているのに、それを「重ね書き」つまり自分のやったことを「否定」して正解を丸写ししている。自分のやり方のどこに問題があり、どう考え方を修正すればよいのかを検討しようとはしていない。むしろ、間違いには価値がなく、正解を覚えることが勉強だと考えているのかも知れない。

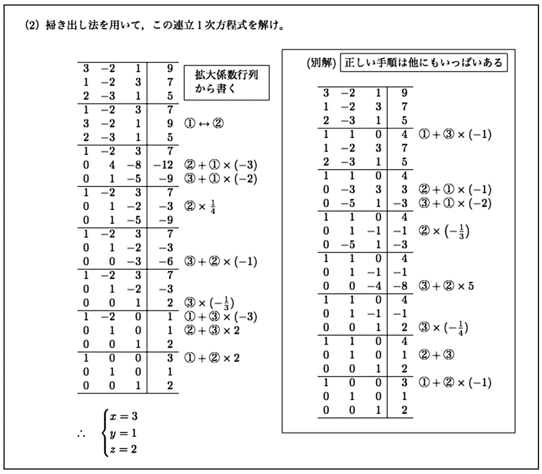

図８　解答例２

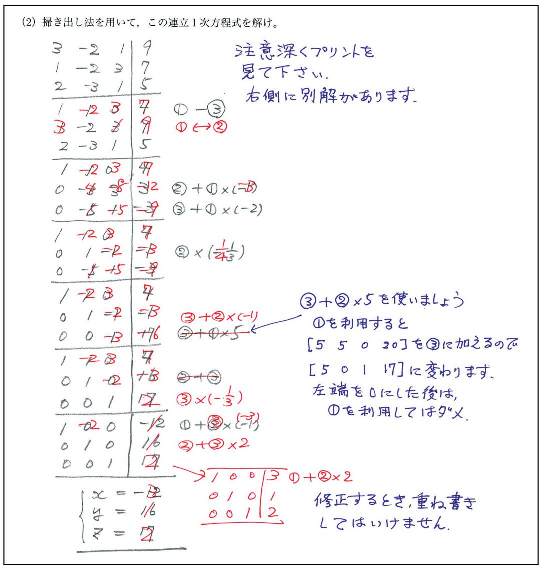

図９　重ね書き

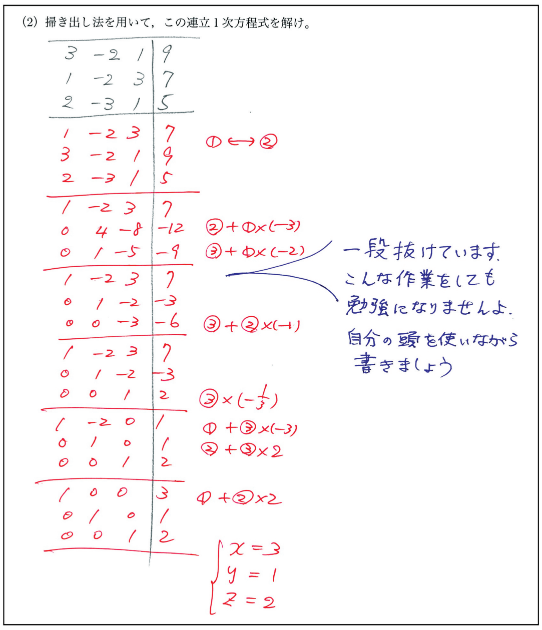

図10　苦役？

図10 は、自力では出来なかったので解答を見て「写そう」としているが、正しく写すことができない例である。意味や内容を考えず、「苦役」として作業をしているのだろうか？（元のプリントの学生が書いた字は、もっと乱雑に書きなぐったものであった）課題へのこのような対応の仕方として、朝比奈なをが報告している「教育困難校」の実態を思い出した[7]：

> ……「教育困難校」では、文章の丸写しが非常に多く用いられている。校則違反をした生徒に懲罰の意味で課す課題や、赤点を解消するための追加課題等、様々な場面で丸写しという手法が使われている。
>
> （中略）
>
> 早く終えることだけを目指すので、途中の数行が抜けていたり、誤字・脱字も目立つ。後から見直すと、書いた本人も読めないような乱雑な字で書いている生徒もいる。

4.3 取り繕う

最初のガイダンスで「解答を鉛筆で写して赤でマルを付けても意味はない」と念押ししても、それをやろうとする学生はいる。しかし、このような学生は「意味」を考えないで写すので、結局正しく書けないことが多い（図11）。

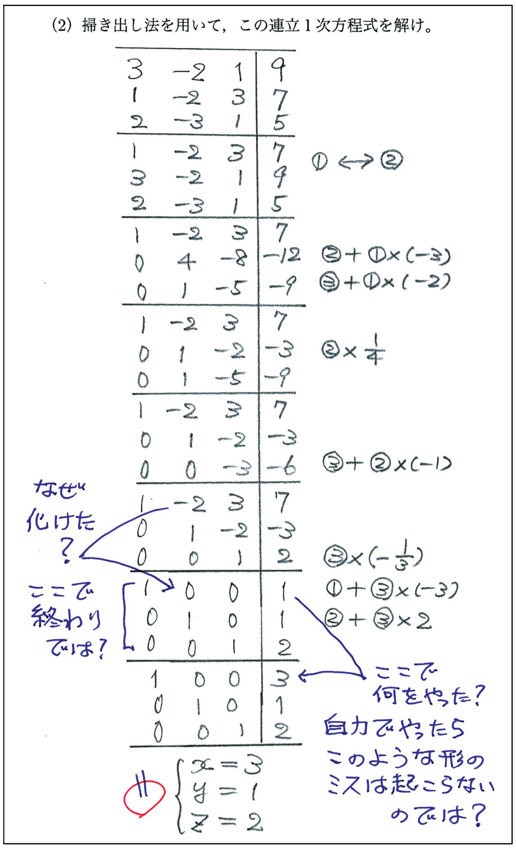

図11　ごまかした？

また、こちらが用意した解答例が間違っていたのに、それと同じ「正解者」が何人も出たことがあった。

偏微分の計算練習で、出題した問題は

$$f(x,\,y)=x^3-3x^2y+xy^3$$

だったのに、こちらがうっかりして、配布した解答例では最後の項の y の指数を２として（図12）解いてしまっていた。

(1) $f(x,y)=x^3-3x^2y+xy^2, (a,b)=(2,1)$

$$f_x(x,y)=3x^2-6xy+y^2$$
$$f_y(x,y)=-3x^2+2xy$$
$$f_x(2,1)=3\cdot2^2-6\cdot2\cdot1+1^2=1$$
$$f_y(2,1)=-3\cdot2^2+2\cdot2\cdot1=-8$$

図12　解答例３

正しく解いた学生が答合わせをしようとすれば、解答例と食い違うことになる。問題を見比べれば、解答例が解いている問題は、自分が解いた問題とは異なるものだと気づくはずである。自分の方が正解だと自信があれば、マルを付ければよい。多少不安が残るのであれば、マル付けを保留したり「答がおかしい」とコメントしておけばよい。

ところが、学生自身が正しい答を出しているのに、自分が間違えたと思ってバツをしたものが５名もいた。この「自信のなさ」は気になる。

さらに、解答例と同じ計算をしてマルを付けた（図13）ものが10名もいたことに驚いた。

自己採点	人数
正しくマル，マル保留	21
答がおかしいとコメント	8
自力でやって間違えた	3
正しいのに自分がミスしたと思いバツ	5
赤で丸写し	1
丸写ししてマルを付けた	10
合計	48

表３　自己採点

しかもこの10名のうち７名は芸の細かいことをやっていた。このときのプリントは問題が４問あったのだが、４問すべてで答を丸写ししてマルを付けているわけではないのである。

(1) $f(x,y)=x^3-3x^2y+xy^3, (a,b)=(2,1)$

$f_x(x,y)=3x^2-6xy+y^2$

$f_y(x,y)=-3x^2+2xy$

$f_x(2,1)=3\cdot2^2-6\cdot2\cdot1+1^2=1$

$f_y(2,1)=-3\cdot2^2+2\cdot2\cdot1=-8$

解答例が問題を間違えています。
これがマルになるということは，
自力でやらずに答をそのまま
写したということでしょ？
合格したいのなら，勉強の
やり方を変えましょう．

図13　答を丸写し

最初の１問だけ、あるいは、前半の２問は自分に出来てもおかしくないくらい易しそうな問題なので、「答を丸写ししてマルを付ける」。しかし、後半の問題を自分が解いては「不自然」だろうから、それらについては「解けなかった」ことにして「最初から赤で写し」て、全体としては「合格」印をもらおう、ということをやっていた。

このような、「他者（特に教師）の視線」ばかりを気にする姿勢では、学力向上は覚束ない。いつ頃から身につけた処世術なのだろうか？

4.4 論理や概念についての誤り

学生の多くが嫌う証明問題の指導も難しい。「演習プリント」の解答例は以下（図14）の通りである：

2. 任意の n 次正方行列 A に対し，$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA), C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ とおく。

(1) 行列 B が対称行列であることを証明せよ。

$${}^tB={}^t\left\{\frac{1}{2}(A+{}^tA)\right\}=\frac{1}{2}\{{}^tA+{}^t({}^tA)\}=\frac{1}{2}({}^tA+A)=\frac{1}{2}(A+{}^tA)=B$$

従って，B は対称行列である。

図14　解答例４

正しく証明を書いてマルを付けていた学生も少数ではあるがいた。

一方、多くの学生は何を書けばよいのか分からなかったようで、最初から赤で正解を写していた。ところが、力が比較的あると思われる学生たちの中で、以下（図15）のような「間違ったマル」を付けるものが何人もいたのである：

2. 任意の n 次正方行列 A に対し，$B=\frac{1}{2}(A+{}^tA), C=\frac{1}{2}(A-{}^tA)$ とおく。

(1) 行列 B が対称行列であることを証明せよ。

行列 B が対称行列であるとすると　証明するべきことを仮定してはいけません

${}^tB=B$ をみたす．

${}^tB={}^t\{\frac{1}{2}(A+{}^tA)\}=\frac{1}{2}({}^tA+A)=B$

よって 行列 B は対称行列である．

図15　結論を仮定

自力で書いた証明の中で、うっかり結論を仮定してしまうことはあるだろう。正解と見比べて、「これではいけないのだな」と気づいてくれることを期待していた。ところが、彼らは正解を見た上で、「自分の証明も正しい」と判断してマルを付けたのである。所謂「できない学生」たちではなく、むしろ「できる学生」たちの中にも、仮定と結論の区別がつかないものが少なくないのである。

授業で、いくら分かりやすく論理的に説明したつもりでも、彼らがどのように受け取っているのかは予想がつかない。こまめにチェックを入れるなどの工夫が必要であろう。

また、数学を「計算の術」と本気で信じているのか、計算のアルゴリズムだけはよく練習しても、その経験を通して何が得られるのかまでは考えようとしない学生が多い。

行列の基本変形や行列式のまとめとして次のような問題を試験に出した:

> n 次正方行列 A についての条件
> A は正則である（A は逆行列をもつ）
> と同値な条件を４種類書け。
> ただし、以下のキーワードや記号を参考にせよ:
> rank（A)、簡約化、方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$、
> 自明な解、一次独立、$|A|$

試験の直前の授業で「正則性」をまとめた定理を扱い、

> この授業のまとめの定理だから、その内容をしっかり理解して、書けと言われたら正確に書けるようにしておくこと。箇条書きの文を丸暗記するのではなく、これまで練習してきた計算問題の経験と照らし合わせて、納得しながら文を読み書きしましょう。

と強調したが、さまざまなタイプの誤答があった。

1. Aを含まない表現
   ・簡約化できる。
   ・自明な解以外の解を{もつ|もたない}。
   ・自明な解をもつ。
   ・一次独立である。
   ・一次独立が存在する。
2. Aの性質を規定する条件になっていないもの
   ・Aは簡約化できる。
   ・$|A|$は存在する。
   ・rank$(A)\leqq$n
   ・方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$が成り立つ。
3. 数、ベクトル、行列、方程式、解などの概念が適切に切り分けられていないもの
   ・$|A|=E$
   ・Aは一次独立である。
   ・Aは自明な解を１つだけもつ。
   ・rank(A)の簡約化はEになる。
   ・方程式$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$の簡約化は一次独立である。
   ・Aの簡約化=零ベクトル

このような文を書いている学生たちが数学の勉強を放棄している、というわけではない。それどころか、「問題の解き方」は一生懸命「練習」した様子が見られる。このような誤答例を書いていた学生のほとんどは、計算問題等で点を稼ぎ、授業の評価はＡやＢを取得している。対照的に、不合格になった学生の多くは、この問題にはまったく手をつけていなかった。

授業で学んだ「公式」を

> 式だけではなく、その前提条件から正確に書け。

と試験で問うこともある。「公式」は書けても、その式を利用できるかどうかの判定に必要な前提条件は書けない学生が何人もいる。

ベクトルを利用した平行四辺形の面積の公式を学んだ後、三角形の面積を求める問題を出題したときも、平行四辺形の面積の公式に数値を当てはめるだけで済まそうとする学生が少なくない。何の面積か、どういう議論でその式が得られたか、は意識に残らず、「面積の公式」としてしか認識されていないのだろう。解説すれば、彼らも「あぁ、そうか」という顔をするが、「問われている状況」を調べたり、自分が使っている「公式の意味」や目の前にある「問題の意味」を考える、という習慣が身に付いていないように思える。

自分が何を計算しているのか、その意味も分からず、計算したことから何が得られるのかも考えない。文字通り「意味不明」な数字や記号列の操作を一時的に覚えて試験の答案用紙に書き出すことが「数学」のイメージなのだろうか？もしそうだとすると、20年前後の彼らの人生の中で、このようなイメージはいつ頃から形作られたのだろう？

このような「数学のイメージ」を打破したいと思う。そのために、授業ではできるだけ分かりやすい説明を心掛け、「演習プリント」を添削したり、試験では計算問題の途中の式や議論をチェックし、証明問題も出題している。しかし、その道のりは遠い。

なお、「試験に出す」「ちゃんと書かないと減点す

る」と言わないと、彼らの多くはその課題に本気で向き合ってくれないのが現状である。

5. おわりに

授業終了後に学生が提出した無記名アンケートから「演習プリント」に関係すると思われるものをいくつか抜き出してみる：

- 最初はすごい細かい先生だと思っていましたが、最後は自分も細かく書かないと逆に気になるようになっていました。
- 毎回の講義の後にプリントが出されるので、復習もできるし要点もつかめるのでとても楽しかったです。
- 細かいミスや本人がうっかりしたミスなどていねいに指摘していただいたので、どこでおかしくなったのかが分かりやすく、反省がしやすかった。
- 丁寧に課題を見てくれるので自分の間違い癖が分かりミスをしにくくなった。
- この授業で、自分の解答の細かいところまで見るようになりました。
- 細かい数式の不備にも課題のチェックで指摘してもらえ、数式が合っているか自分で確認する習慣ができたので、自分の力になったと思う。
- 自分の間違った場所を消さない、ということで、自分がどこを間違っているかが分かり勉強しやすくなった。
- 見直しする癖がついたので良かった。
- 自分にとって内容が難しかったが、努力すればできることが改めてわかった。数学は難しいけど面白い。

(最後のものは「演習プリント」とは直接関係ないかも知れない。)

せっかく学びたいと思って入学して来た学生が、具体的な「学び方」を習得していない現実がある。本人は一生懸命「勉強」しているのに、それが本来の「学び」とはズレた方向を向いているため空回りしてしまう。

課題の「添削」は、実際にはとても手間のかかる作業である。しないで済めばこちらも楽ではある。ここまで手をかけるのは、学生を甘やかし過ぎである、という意見もあるかも知れない。

しかし、証明問題だけではなく、「ただの計算問題」と思われる課題の中にも、論理的な考え方や的確な表現方法を学ぶ場面は多数ある。それらを学生に身に付けさせるには、

　　まずは書かせて、その上で自分が書いたものを振り返らせる

ことが大切である。自分一人でこの作業ができない学生には、誰かが手助けする必要があるだろう。できれば、大学入学までに身に付けて来て欲しかった「学び方」ではあるが、それが欠けてしまったのは、その学生だけの責任ではないのかも知れない。実際、最近の学生たちはとても真面目であり、授業にも良く出席し、筆者の授業では私語もほとんどない。

一人でも多くの学生が数学（だけではなく「学ぶこと」自体） の面白さに気づいてくれることを願っている。

文献

（1） 岡部恒治・西村和雄・戸瀬信之編“分数ができない大学生”（東洋経済新報社, 1999年）
（2） 刈谷剛彦“なぜ教育論争は不毛なのか　学力論争を超えて”（中央公論新社, 2003年）
（3） 尾木直樹“新・学歴社会がはじまる〜分断される子どもたち”（青灯社, 2006年）
（4） 学習指導要領データベース作成委員会“学習指導要領データベース”（URL=http://www.nier.go.jp/guideline/, 2007年４月30日最終訂正）
（5） 文部科学省“新学習指導要領・生きる力”（URL=http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/youryou/index.htm, 2008年告示）
（6） 文部科学省“教科書の改善・充実に関する研究報告書（算数）ー平成18、19 年度文部科学省委嘱事業「教科書の改善・充実に関する研究事業」ー”（URL =http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/kyoukasho/seido/08073004/003.htm, 2008年）
（7） 朝比奈なを“高大接続の“現実”“学力の交差点”からのメッセージ”（学事出版, 2010年）
（8） 日本数学会““大学生数学基本調査」に基づく数学教育への提言”（URL=http://mathsoc.jp/comm/kyoiku/chousa2011/, 2012年）

A Practice of Mathematics Education aimed at improving Logical Description

Toshiyuki Suzuki
(Received: May 11th, 2012)

Department of Core Studies, Kochi University of Technology,
185 Miyanokuchi, Tosayamada, Kami city, Kochi 782-8502

E-mail: *suzuki.toshiyuki@kochi-tech.ac.jp

Abstract: It is said that the scholastic abilities of Japanese university students have declined. Most of them are especially weak in logical description. This paper is a report on the practice of mathematics education aimed at improving logical description.