数学的概念の理解を支えるイメージ

河野　芳文 *

(受領日：2016 年 5 月 24 日)

高知工科大学共通教育教室
〒 782-8502　高知県香美市土佐山田町宮ノ口 185

* E-mail: kohno.yoshifumi@kochi-tech.ac.jp

要約：本研究では、PISA 調査等を踏まえて、中等教育段階以後の数学の学びのあり方について検討し、生徒や学生が数学を学ぶ際どのようなことを心掛ければよいか考察した。何かを学ぶには情報をただ受け取るだけでなく、自ら吟味して取り込む働きやそれを活用する場面を経験するなど主体的活動が付きものである。そこで、活用をも視野に入れた理解を念頭に理解と不可分の関係にあると考える論理、直観、表象・イメージの関連とその獲得にどう取り組むべきか幾つかの提案をする。

1. 緒言

数学教育は、数学を学ぶことを通して子供たちの人間形成を支援する営みであるという。この言葉には、数学教育に対する優れた見識がうかがえるが、同時にこれが数学教育を規定するかのような響きがある。しかし、筆者はこの主張は数学教育の一面を語るに過ぎないものであり、数学教育全体を説明するものではないと考えたい。数学教育は、数学の学びを通して数学的な見方や考え方、あるいは数学の有用性や論理的思考を育てるという役割もあるからである。

筆者は教職に携わって以来、数学をいかに分かりやすく、そしていかに面白く伝えるかに関心があり、当初よりそれに腐心してきた。しかし、筆者はいわゆる理学部数学科を卒業した者であり、数学教育を本格的に学んだ者ではない。したがって、数学の学びに関わる心理学的あるいは認知科学的素養や哲学的素養が不十分であることを認めざるを得ない。ただ、大学で数学を学びながら、自分を含め多くの学び手が正しい証明を示されながらもそれを内容的に正しく理解できず、誤った理解やイメージをもつ場面にしばしば遭遇した。大学院で数学の論文を読むようになっても、一度発表された論文に勘違いがあったとその間違いを修正する論文が続いて発表される例が少なからず存在することを知り、証明付きの数学にも誤りが存在しうることに驚きを感じたことがある。その後しばらくして、物理学者から哲学に進んだカール・ポパーの哲学に出会い、科学における可謬性の主張を知るに至って、人間の営みの結果である数学に対して誤ったイメージを所有していたと知るに至ったのである。この経験から、数学の絶対性を信じていた自分もようやく人間の考察・思考の成果である数学は当然のこととして可謬性を内包するものであり、そうした現実があり得るとの前提に立った上で数学の学び手に如何にして正しい理解やイメージづくりをもたらすかが大切だと考えるようになった。

一方、かつて教育は知識や技能を身につけた大人がそれを持たない子供など初心者に知識・技能を提供する、あるいは知識を注入する営みであると考えられたが、ルソーやペスタロッチの考えを発展させたとも言えるスイス生まれの発生的認識論学者ジャン・ピアジェは、子供の学びはそのように単純なものではないと考える。子供たちには、この世に生を受けてより彼ら自身が日々の生活を通して経験したことや学んだことを基にして内面に形成されたある種の知識・技能の系統的体系であるシェマがあり、新たな情報が与えられてもすでに自分がもつシェマと調整（同化と調節）しながら取り込むのであり、無批判に受け入れるものではないと主張する。筆者も前任校で、これに関わる経験をしたことがある。それは、筆者の授業を受けた生徒が筆者の

部屋を訪れ、ある事柄がよく分からないのでと説明を求めた時のことである。筆者は生徒の質問の内容を踏まえてより丁寧な説明を始めたが、しばらくすると「先生、丁寧に説明していただくのもいいですが、あまりに丁寧すぎると自分で考えて分かったと実感する場面がなくなり、面白さや感動がなくなります。私なりに思考し、合点しながら理解できるよう考える余地を残してほしいです。例えば、ヒントのみが与えられればその先を自分で考えて前に進むことができます。」といった発言があり、教えすぎが学ぶ楽しみを奪う可能性があることや、丁寧すぎる説明は理解のプロセスを一方的に決定してしまう恐れがあると知らされたことである。

こうした経験を踏まえて、学びの場面における学び手のシェマを踏まえた彼ら自身による主体的な学びの支援や理解における直観や論理の役割について考察を行いたい。

2. 学びにおける主体性とその支援の工夫

我々が何かについて学びたいと感じるには、その対象について何の情報をも持たないではあり得ない。その対象についての知識や情報をすでに所有しているからこそ、もう少し詳しく知りたいとか納得できるまで調べてみたいと思うのであり、学びを意識すると言えるのではないだろうか。

したがって、人がそうした思いを抱くとき学びが始まるのであり、主体的学びに向かう可能性が生まれると言える。それでは、何かについて学びたいと感じるにはどうすればいいか。これについては、周知のように内発的動機付けや外発的動機付けがある。筆者の経験から言っても、算数や理科を学ぶ過程からこれは何故だろうとか、この対象は面白いからもっと知りたいと感じ始めた経験が多く、その意味では他者による情報提示や教授の役割は極めて重要である。当然ながら学び手の興味や関心には差異があるから、周囲からの刺激、あるいは情報は多様であるべきであると考えられる。したがって、幼少段階から様々な教科について学ぶとか、スポーツや様々な習い事を経験させることは子供たちが主体的な学びに目覚めるきっかけを掴むためにも有効であろう。学校での学びはこうした外発的動機付けの典型と言えるだろうが、指導する教師は子供たちが興味を持ち主体的に学びたいと感じるよう指導に工夫が求められる。

前章での生徒とのやりとりも含めて、指導者が過度に親切であることは子供の主体性や思考力を育てる上で必ずしも適切とは言えず、注意を要する。伝統工芸などにおける師弟関係でも、多くの熟達者は弟子に何もかも親切に教えていては人が育たないと主張する。基礎は徹底して指導するが、そこから先は教えるのではなく師匠の仕事から学ばせる、自分で学び取らせ工夫させなければ一人前の職人に育つのは難しいというのである。

このように、学びにおいてその多くは外発的動機付けから始まることが多いが、ある程度の習熟に達した段階からは自分で考えたり工夫させるのが、学びへの興味を高めたり主体的な学びに誘うよい方法ではないかと思われる。内発的動機付けと言えどもすでに何らかの情報あるいは知識が前提されるのであり、そのもとを辿れば外発的動機に繋がることが多いと考えられる。

主体的学びに関わるいくつかの事例を数学に限定せず、挙げてみよう。

筆者は、高校生頃から始めた座禅との関連でいくらかの禅籍に触れてきたが、弟子が師匠と同じ悟りに達したというのでは師匠の徳を半減させるものでしかないとの表現にしばしば遭遇した。当初は不思議に思ったが、悟りは教えてもらうものではなく、自ら掴んでこそあるいは師を超える独自の見解（けんげ）を発してこそ、その法を継ぐに相応しいとの言辞は数学の学びにも相通ずると合点したものである。ある僧が厳しい修行に励んでいて、道すがら蹴った石が竹藪の竹に当たりカーンと響いた瞬間に悟り、師匠の言辞や境地を瞬時に我が物にした話は印象的である。

高校数学では、相加・相乗平均の不等式を学んだ後、いくつかの事例を通してこの不等式が最小値を求める際便利であることを学ぶが、しばらくするとその経験が偏見を生み、過大な評価を生みがちである。しかし、幾度か利用して誤る経験をすれば、何がよくないのかとの疑問を生み、その原因を知りたい気持ちにさせる。こうしたタイミングで、再度誘導しつつ相加・相乗平均の不等式に立ち返ってその意味を考えさせれば、より深く柔軟な理解が得られると言える。すぐに教えず、タイミングを待つことの大切さを知ることである。これについては後述する。

また、教科書を用いた学習においては理論の説明の後例題があり類似の問題が扱われるが、大抵の場合例題の手法を模倣すれば正解が得られる。これは生徒を分かった気持ちにさせる効果があり、例題の手法を身につけるには必要でもあるが、実際は例題の模倣ができたにすぎないとも言える。したがって、幾分習熟した後で自分の理解を確かめたり、深

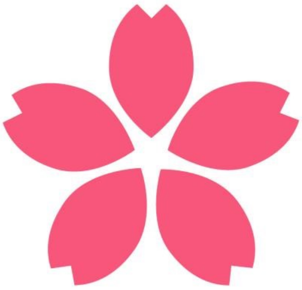

図 1. 桜の花びら

める展開が必要となる。数学の活用であり、理解の振り返りであり、そのために問題解決の課題提示などが行われる。そこには、これまでの学習との間に何らかのギャップが設定されており、取り組む生徒には何某かの思考、判断等が求められる。

そうした事例として、筆者は中学 3 年生や高校 1 年生に次のような問題を作成し、考えさせたことがある。

「図 1 のような桜の花びらを作図するには
どうすればよいか分析し、定規とコンパス
を用いてこれを作図しなさい。」

2 次方程式を学んできた生徒は、やや唐突に示されたこの問題がなぜ提示されたのかと感じながらも、しばらく話し合い考察するうちに 5 枚の花びらの中心に気づき、それらを結んでできる正五角形を作図すればよいと考えるに至った。その後しばらく経つと、その作図には一辺の長さ 1 をもとにして対角線の長さ x を求めねばならないことに気づき、漸く相似な三角形をもとに x についての 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を発見し、その解 $x = (1 + \sqrt{5})/2$ を求めることができた。その後、$\sqrt{5}$ の作図法でやや悩んだが、何とか 50 分の授業内で解決を見た。それに気づき発表した生徒は数学教師になった今もその瞬間を鮮明に記憶しているという。自分で自力解決した達成感があったからであろうと思われる。

2003 年の OECD による PISA 調査でも、日本の子供の学力の高さに反し、生活習慣、数学への印象や自分の将来への希望、自尊感情等に課題が見られ、生徒の学びのあり方が懸念されたが、その改善において数学的活動を重視すべきとした学習指導要領数学科編・理数科編目標の意図が「学びの主体性」にあることは十分窺える。授業では教師の説明が主となりやや受け身の学びとなりがちな点を改め、生徒自身が考え解決する場面をつくるよう舵を切ったとも言えるだろう。勿論、その趣旨が徹底するには時間も要するに相違ない。

3. 数学理解と論理・直観とイメージ

数学と言えば、まず論理性を想起する。そのくらい数学と論理が密接な関係にあることは事実である。しかし、数学に論理が必要であることは事実としても、数学を理解しこれを活用することを考えれば、それで十分とは言えずやや状況は異なる。

ときに数学は自然科学の言語であると言われるが、それは数学が数学や自然科学をはじめとした諸科学の原理や理論の正当性を説明するに相応しい証明や論理・記号などの体系を有するからであろう。しかし、論理による説明や証明が必ずしも概念や事象のよりよい理解をもたらすものではないことを知っておく必要がある。数学や物理を学んだことがある者は、ある事柄の証明を通してそれが論理的に正しいと分かるにも拘わらず、その数学的な意味や物理的意味が分からないという経験をしたことがあるはずだからである。数学や物理等の学びでは、論理的に理解することは理解の第一段階に過ぎず、その内容の幾何学的意味や物理的意味をある種のイメージや表象を伴って把握しない限りその内容を理解したと言えないことが多いのである。

なお、数学を学ぶと言っても、出来上がった数学を学ぶことと新たな結果を求めて研究する際の学びではその質が異なるものであることも指摘しておきたい。極端に言えば、出来上がった数学は論理的に整理されており、それを学ぶ者は証明などの論理的説明にしたがって理解を進めるが、研究者は何某かの疑問や関心から課題を見つけ、結果を予想してもその結果の正当性を帰結するまでには様々な紆余曲折があり、試行錯誤するはずである。その間には考え違いをしてもとに戻るなど、予想に向かっての論理的かつ直線的な歩みばかりでないことは多くの研究者が経験し吐露するところである。しかし、最終的に得られた成果を発表する段階では、これを他者に分かるよう証明などを添えて論理的に整理するのである。フランスのフィールズ賞受賞数学者 R. トムは、問題意識から結果を予想しそれを解決するまでが数学であり、出来上がった数学は死んでいるとまで極論したが、出来上がった数学には思考の形跡が失われ、論理で整理されていることが多いことを知っておく必要がある。筆者の恩師もかつて「数学は論理的だと言うが、それは数学を知らない人が言うことだ。数学を創造する過程は決して論理的だと言えないものであり、出来上がった成果を整理して論理的にまとめたものが公表されているにすぎない。」と発言したことがある。した

がって、整理され思考の跡が隠れてしまった数学を学ぶ者は理論の背景や課題意識を探りながら学ぶ必要があるとも言えるだろう。

また、ある英語教師から次のような話を聞いたことがある。「多くの人が英語を話したいと考えているが、単語や熟語を覚えるのも大切ながら、より重要なのは単語や熟語のもつイメージである。look も see もただ “見る” と覚えるのではなく、その語のもつニュアンスや適切なイメージを身につけなければ自由に話すことは覚束ないだろう。我々が他者とコミュニケーションをとっているとき、会話の流れに沿って瞬時に単語や文を発する必要があるので、瞬間瞬間でその場面に相応しい単語を直観で選べなければ会話のキャッチボールは難しい。」

将棋の名人も、局面局面で考えられる手は無数にあるが、その中の一手を一種の直観で判断することも多いと言っていて、それが可能なのは若い頃から繰り返し打って身につけた定跡のお陰でもあると言っている。最近の認知科学も、熟達者は必要ないくつかの手のみを想起し、初心者ほど多くの手を想起していないと主張する。

こうしたことから、生徒が数学を学ぶには典型的な問題を繰り返し解いて身につけた基礎知識や技能とそれから得られるシェマやイメージが大切であると分かるが、それだけで十分とは言えない。

筆者が中高生や大学生を指導して得た経験によれば、そうした基礎知識やイメージ・直観は多くの問題を解けば正しく身につくとは言えないことである。これについて、最近の認知科学研究も経験則から身についたシェマは一種の「思い込み理論」であり、常に正しいとはいえないものであると言っている。このことを上述した相加・相乗平均の不等式で説明しよう。

高等学校の教科書では、

「$a>0$ のとき、$a+\dfrac{1}{a}$ の最小値を求めよ。」

といった例題が扱われるが、その解法を理解した生徒は類題をこなすうちに知らず知らず “相加・相乗平均の不等式は、正数の加法における最小値を求めるためのもの” と言った観念、表象あるいはイメージをもつようになり、例えば

「$x>0$ のとき、$x^2+\dfrac{1}{x}$ の最小値を求めよ。」

といった問題に出会うと、

「相加・相乗平均の不等式より

$$x^2+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x}$$

したがって、$x^2=\dfrac{1}{x}$ のとき、即ち $x=1$ のとき与式は最小値 2 をとる。」

と答えてしまう。そこで、こちらが

「では、『$x>0$ のとき、x^2+1 の最小値を求めよ。』という問題を『$x^2+1\geq 2x$ だから、$x^2=1$ のとき、即ち $x=1$ のとき与式は最小値 2 をとる。』と答えていいですか。」

と尋ねると、しばらくして

「いや、左辺は放物線の右半分を示し端点を含まないからおかしい。」

と答える。そこで、改めて相加・相乗平均の不等式を意識させ、その意味を検討させると、生徒は「$a>0, b>0$ のとき、不等式 $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ が成り立つが、この不等式はただ単に左辺が右辺以上であることを意味するものであり、等号成立の条件が満たされるとき、左辺の値と右辺の値が一致することを主張するに過ぎない」ことを理解することになる。そして、さらに何故この不等式で最小値が求められたのか考えさせると、最小値が求まるのは右辺が定数のときであり、右辺のグラフが x 軸に平行な直線だから左辺の表す式のグラフがこの直線の上にあること、したがって接する点があればその点で最小値をとることに漸く気づく。

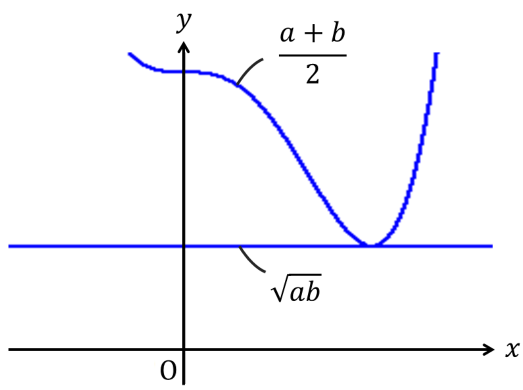

図 2. ab = 定数 のときの不等式の図

加えて、右辺が定数であることの意味やその重要性をなるほどと理解するのである。ここまで理解すると、上述の問題

「$x>0$ のとき、$x^2+\dfrac{1}{x}$ の最小値を求めよ。」

の誤答の意味を理解し、稀にではあるが

$$x^2+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

とする解答も散見されるようになる。すなわち、相加・相乗平均の不等式「$a>0, b>0, c>0$ のとき、$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ が成り立つ。」を使って、右辺が定数になるべく変形したのである。

筆者は、この不等式のように微妙な概念や技能を学ぶ際は、すぐにその仕組みを教授するのではなく、ある程度習熟した段階で疑問と同時に提示して再考させたり吟味させるのが有益だと考えている。いわゆる適切なタイミングでの「振り返り」である。

もう一例挙げてみよう。等式 $f(x)=g(x)$ が恒等式であるとは、両辺が定義される x について、左辺＝右辺が成り立つことをいう。教科書では、この定義の後 2 次式や 3 次式について恒等式となる条件を調べて簡単な例を挙げ、類題を載せる。それで終わりとする教科書もあるが、応用例題として分数式の恒等式を取り上げて、分母を払った整式が恒等式だからとその後は整式の恒等式による議論で解を導く。多くの生徒はそうするのかと従うが、深く考える生徒は分母を払った等式が恒等式になる理由を納得できない。そこで、先生に質問するが、十分納得できず仕舞である。また、その後しばらくすると微分法を学ぶが、その応用として

「整式 $f(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れるための必要十分条件は、$f(a)=f'(a)=0$ が成り立つことである。」

といった命題に出会う。しかし、その証明に恒等式を微分しても恒等式であることを用いることで更なる混乱を招く。

数学が苦手な生徒はそれでいいのかと思うことも多いが、力のある生徒はそこで納得がいかず質問する。そこで、指導者はそれを好機と捉えて「それでは、分数式の恒等式の分母を払った等式も、恒等式を微分した等式もなぜ恒等式になるのか考えてみよう。」と投げかけ、恒等式とは何か、あるいはどのような性質があるのかを再考する機会とする。この展開も「振り返り」であるが、いわば前者は図的・幾何学的考察による理解の深化とイメージの修正、後者は論理と代数的・解析的考察に基づく理解の深化とイメージの修正であり、イメージや表象の修正における 2 つの代表的な手法を与える。なお、その際理解とイメージ表象は互いに不可分に近い関係にあり、両者を結び付ける力は論理的思考力あるいは推論の力であることを強調したい。

このように、人は何かを学ぶ際、その理解とともに対象に対する素朴な判断や表象・イメージ（これを素朴理論という）を獲得するが、修正を必要とする場面を経験するなどして吟味・再考する必要に迫られる。そして、幾何学的・視覚的検討や論理的検討等を経てより深い理解や適切なイメージ・表象を獲得する。修正されたり深まった理解に基づくイメージ・表象は、様々な場面におけるその事柄に関わる直観をより適切で正確なものとするのである。この点に関して、数学者高木貞治が著書「数学の自由性」で

「さて、しからば実用性はどこから来るかというと、それは完全な理解、徹底的な理解から来る。徹底的な理解の上にのみ実用性がある。それなくしては、実用性は得られないというのが、私の考えであります。」（p.122）

と述べているが、確実な理解が実用性（活用）と不可分であることを示すものと言えるであろう。また、物理学者湯川秀樹も著書「創造への飛躍」で

「我々の納得の仕方はいろいろあります。相当込み入った問題になると、ただ数学的に正しいから、あるいは事実がそうだというので、受け入れてしまうこともないではありません。しかし、もっと基本的な問題に対しては、それでは具合が悪くて、明証といいますか全体のイメージがぱっと疑いようもなくはっきりしているところまでゆかないと納得できない、つまり論理や実証でよいとは言うものの、それでは尽くせない気持ちがあるわけです。本当に納得がゆくというのは、単につじつまがあっているというのとは違って、全体のイメージが細部も含めて一瞬にして明らかになるという段階がどこかにあるのではないでしょうか。…それは俗にカンと言われたり、直観、想像力、構想力と言われているものと関連しています。」（p.154）

と述べている。

このように、理解、論理と直観およびそのイメー

ジ・表象は相互に密接に関連し合っているものであり、互いに連携しながらより正確な概念理解、表象・イメージ形成へと成長・発展していくのである。

数学に限らず、我々は何かについて学ぶ際、いわゆる理解と活用をも視野に入れるべきであり、両者を合わせて理解とよぶならば、理解に伴う概念や性質のイメージ・表象をより良く改善するための吟味・振り返りを常に心がけるべきであろう。深い理解に基づいたイメージ・表象が活用場面で柔軟な直観を働かせると信じるからである。

筆者は、中等教育段階以降の数学の学びにおいて、このテーマ「理解」を重要なものと考えており、この対象に関する考察を心理学や認知科学あるいは哲学の成果に負いながら整理した上で、理解の実践的研究につなげていきたいと考えている。

4. 今後の展望

これまで述べてきた見解は、その多くを自らの教育実践や学びの経験と学生時代より指導していただいた数学者あるいは数学教育研究者に負うものであるが、研究は緒についたばかりであり、未熟なものである。今後は日々の教育実践や数学、あるいは数学教育の哲学についての知見を増すとともに、認知科学等の成果を踏まえて、より実践的な理解研究を行わねばならないと考えている。それが中等教育、大学教育を通して実践的な数学教育に関わってきた者の宿命であり、責任ではないかとも考えている。

文献

1) 岩崎秀樹, “数学教育の成立と展望”, ミネルヴァ書房, 2007.
2) 平林一栄, “数学教育の活動主義的展開”, 東洋館出版, 1987.
3) 河野芳文, “相加平均と相乗平均の不等式について — その有用性と限界 —”, 日本数学教育学会誌 数学教育第 78 巻第 7 号, pp. 2–8, 1996.
4) 河野芳文, “正 n 角形の作図可能性と授業実践”, 広島大学付属中学校研究紀要第 42 集, pp. 29–38, 1996.
5) 今井むつみ他, “人が学ぶということ”, 北樹出版, 2013.
6) 今井むつみ, “学びとは何か”, 岩波書店, 2016.
7) 湯川秀樹, “創造への飛躍”, 講談社, 1971.
8) 高木貞治, “数学の自由性”, 筑摩書房, 2010.

Symbol or Image that Facilitates the Understanding of Mathematical Concepts

Yoshifumi Kohno*

(Received: May 24th, 2016)

Core Studies, Kochi University of Technology
185 Tosayamadacho-Miyanokuchi, Kami, Kochi, 782-8502, JAPAN

* E-mail: kohno.yoshifumi@kochi-tech.ac.jp

Abstract: This paper examines the pedagogy in the upper secondary school mathematics, and discusses how students learn mathematics effectively. Learning is an active process, where students do not merely receive information, but they examine or utilize the information. This paper also proposes some pedagogical ideas concerning logic, intuition, symbol or image which are necessary in utilizing mathematical knowledge and are closely related to the understanding of the mathematical concepts.