定数係数線形微分方程式の高校生向け解法

新井　広

(受領日：2018 年 5 月 7 日)

高知工科大学共通教育教室
〒782–8502 高知県香美市土佐山田町宮ノ口 185

* E-mail: arai.hiroshi@kochi-tech.ac.jp

要約：2 階定数係数線形斉次微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の一般解は、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解によって決定することはよく知られている。このことを示すのには、特性方程式が虚数解である場合、複素数値関数あるいは逆三角関数が用いられることが多い。ここでは積分因子を用いる方法による定数係数線形微分方程式の解法を紹介する。複素数値関数も逆三角関数も使わないので微分学積分学を学んだ高校生でも本論文で説明される主要な考えは容易に理解することができるであろう。

1. はじめに

1.1 動機

次の 3 つのことが本論文を書く動機となった。

1. 積分因子による解法は高校生にも理解できる
   2 階定数係数線形斉次微分方程式の一般解は指数関数と三角関数を利用して記述されている。そのことを示すには、複素数値関数あるいは逆三角関数という、解には用いられない関数が利用されることが多い。2 階定数係数線形斉次微分方程式は、その方程式自身も、解も、高校生が理解できる形でありながら、証明のみが高校数学の範囲を超えてしまっていて理解を妨げてしまっている。高校では微分方程式を扱わないにしても、残念なことである。積分因子による解法であれば、複素数値関数も逆三角関数も使わないので、微分・積分を学んでいる高校生なら理解できる。
2. 高階においても通用する方法である
   積分因子による線形微分方程式の解法は、1 階においては広く知られている。また、高階の場合であっても、積分因子を見つけることができれば、階数を下げることができることは広く知られており、いくつかの特殊な形においてはその解法が主流となっている。しかしながら、2 階以上においては、最も簡単な定数係数の場合であっても、積分因子による解法は、それほど広く知られているとは言えないように思う。演算子法の公式の中には、式の意味を考えれば積分因子による解法と捉えられるものも多いが、そのように捉えている人も多くはないように思う。
3. 非斉次でも利用でき、簡単に解が求まる場合がある
   複素数値関数を用いる手法は、2 階定数係数線形斉次微分方程式の特性方程式が虚数解をもつ場合でも、三角関数を用いずに指数関数だけを用いて議論することができる。その場合に限れば、積分因子による解法は、複素数値関数を用いる手法と比較して、技巧的な変形に頼る見通しの悪い方法といえる。積分因子による解法が広くは知られていない理由はそこにあると思われる。しかしながら、積分因子による解法は、非斉次の場合であっても斉次の場合と同じ統一的な手法で解くことができ、特定の形においては、定数変化法や未定係数法よりも比較にならぬほどはるかに見通し良く簡単に解ける場合もある。

1.2 目的とその達成のために

以上のことから、本論文の最大の目的は微分・積分を学んだ高校生にも理解できるよう積分因子を用いた定数係数線形微分方程式の解法を紹介する

こととする。当然、その解法で簡単に解ける微分方程式の例も紹介する。主要な部分については極力他の文献にあたらずとも理解できるようにする。

積分因子による解法が有効な場合を際立たせるために、他の解法との関連についても触れる。この部分を高校生が理解するには、他の文献に当たらざるを得ない。

話題と定義はこれらの目的を達成するように選ばれる。例えば、定数係数でない高階の線形微分方程式、解の一意性、斉次方程式の解の線形性などの話題には触れない。

定義は一般的なものではなく話題にそった狭い意味のものとなることがある。例えば積分因子は一般的な定義よりも強い定義が採用される。

詳細に弁別された定義がなされることが一般的でもそれを省略することもある。例えば線形微分方程式の解については、一般解と特殊解の定義がなされるのが一般的である。積分因子で押し通す本論文の手法では非斉次の場合でも斉次の場合でも特殊解の考察なしに一般解を求めることができるために、初学者がそれらの区別をする必要が全くない。そのため、少々乱暴で気が引けたが、それらの定義は省略することとした。他の解法との比較もあり、定義しておいた方が良いところも確かにあるが、主要な部分ではその必要はない。

既に述べたように、多くの部分については高校生がそのまま読めるように書く努力をする。しかし、それを徹底すればあまりに冗長となるので、時に高校教員であるならば通じるであろう程度の書き方しかしない。例えば、積分因子については、体裁上定義しないわけにも行かないので、定義を書いたが、それは高校生向けのものではない。著者が高専や大学で行った講義において言えば、積分因子については正確な定義をせず、いくつもの具体例を見せた上で、「このようなものを積分因子という」で済ませている。高専生や大学生にもわかりやすくて簡潔な定義が思いつかないからである。そのため、ここでは高校教員であるならば通じるであろう程度の定義を採用する。参考文献の中にも「このような因数を、われわれは積分因数とよぶ」という表現で済ませている文献[3]もあるので、そのようにすべきなのかも知れない。

他にも、初学者に気を使っていないところはある。例えば、両辺を積分したときの積分定数を右辺にまとめるとか、任意定数に0ではない特定の定数をかけるなど任意性を失わない操作を施した場合に改めて任意定数におき直すとか、微分方程式の初学者がつまづきがちなところには一切注意が払われていない。

解法の紹介が最大の目的なので、命題や定理は設けない。そもそも本質的に新しい結果は1つも存在していないためでもある。

紹介したい解法や例題は個別に節を設ける。定義や例、注意は共有される通し番号をつける。

1.3 記法と定義

$a, b, p, q, A, B, C, \alpha, \beta$ などの文字は実数をあらわすものとする。

微分、積分の初歩については既知とする。x の関数 y の導関数を y' であらわす。k を非負整数とするとき、y を k 回微分したものを y の k 階導関数といい $y^{(k)}$ であらわす。

$x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ を利用してあらわされる式を n 階の式という。特に独立変数 x と未知関数 y および $y', \ldots, y^{(n)}$ の関係式を、階数 n の微分方程式、あるいは、n 階の微分方程式という。階数を気にしないときは単に微分方程式という。

微分方程式中の未知関数をみたす関数を、微分方程式の解といい、微分方程式の解を求めることを、微分方程式を解く、という。

ここでは次の形の微分方程式を扱う。

定義 1. $a_1, \ldots, a_n$ を n 個の実数とするとき、

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \cdots (*1)$$

の形の微分方程式を n 階定数係数線形微分方程式という。特に $f(x)$ が恒等的には0と等しくないとき、$(*1)$ は非斉次的であるといい、$(*1)$ を n 階定数係数線形非斉次微分方程式という。このとき $f(x)$ を非斉次項という。

定義 2. $a_1, \ldots, a_n$ を n 個の実数とするとき、

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \cdots (*2)$$

は斉次的であるといい、$(*2)$ を n 階定数係数線形斉次微分方程式という。また $(*2)$ に対して

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

を $(*2)$ の特性方程式という。

特性方程式は斉次方程式に関して定義されるが、本論文では積分因子による解法を話題とし、そこでは斉次方程式と非斉次方程式の解法に区別が無くなるので、非斉次方程式についても「非斉次項を0とおいた斉次方程式の特性方程式」に言及したいことはしばしばあり、いちいちそのような言い回し

をするのも面倒なので、そのような場合にも単に特性方程式ということがある。

2. 積分因子

定義 3. n 階の式 $F(x,y,y',..,y^{(n)})$ が x の 0 でない関数 $u(x)$ と $n-1$ 階の式 $G(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$ により

$$u(x)F(x,y,y',..,y^{(n)}) = \frac{d}{dx}G(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

となるとき、$u(x)$ を $F(x,y,y',..,y^{(n)})$ の積分因子という。文脈から $F(x,y,y',..,y^{(n)})$ が明らかなときは $u(x)$ を単に積分因子という。

一般的な積分因子の定義では、積分因子が x のみの関数であることは期待されていないが、今後の議論において積分因子は x のみの関数であることが重要なので上記の定義を採用する。一般的な定義については例えば文献[4)] を参照されたい。

例 4. a を定数とするとき、e^{ax} は $y'+ay$ の積分因子である。

この例は $(e^{ax}y)' = e^{ax}y' + ae^{ax}y = e^{ax}(y'+ay)$ であることから明らかである。

注意 5. 仮に $y'+ay$ の積分因子が何であったか忘れてしまっても、積の微分公式より $(u(x)y)' = u(x)y' + u'(x)y$ であることと、この式が $u(x)(y'+ay)$ と等しいと仮定すると $u(x)$ は積分因子となることに気づけば、「変数分離形」と呼ばれる微分方程式を解くことにより積分因子 $u(x)$ を求めることができる。そのことを示そう。

$$\begin{aligned} u(x)\left(y'+ay\right) &= (u(x)y)' \\ u(x)y' + au(x)y &= u(x)y' + u'(x)y \\ \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx} &= a \quad (u(x)\neq 0) \\ \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx &= \int a\,dx \\ \log|u(x)| &= ax + A \quad (A \text{ は任意定数}) \\ u(x) &= \pm e^{ax+A} = \pm e^{A}e^{ax} \\ u(x) &= Ce^{ax} \quad (C = \pm e^{A}) \end{aligned}$$

ここで特に $C=1$（すなわち $A=0$）とすれば $y'+ay$ の積分因子として e^{ax} を選ぶことができる。

例 6. $\cos x$、$\sin x$ は $y''+y$ の積分因子である。

この例において $\cos x$ が積分因子であることは次のことから明らかである。

$$\begin{aligned} &(y'\cos x + y\sin x)' \\ &= y''\cos x + y'\cdot(-\sin x) + y'\sin x + y\cos x \\ &= (y''+y)\cos x \end{aligned}$$

$\sin x$ が積分因子であることも同様に示すことができる。

注意 7. 仮に $y''+y$ の積分因子を忘れていたとしても、次の思考の流れで積分因子を導くことができる。積分因子の候補を $u(x)$ とするとき、

$$\begin{aligned} u(x)(y''+y) &= u(x)y'' + u(x)y \\ &= u(x)y'' + u'(x)y' - u'(x)y' + u(x)y \\ &= \{u(x)y'\}' - u'(x)y' + u(x)y \end{aligned}$$

であるから、仮に

$$\begin{aligned} -u'(x)y' + u(x)y &= v(x)y' + v'(x)y \\ &= \{v(x)y\}' \end{aligned}$$

となる関数 $v(x)$ が存在すれば、$u(x)$ は積分因子となる。それには、$-u'(x) = v(x)$ かつ $u(x) = v'(x)$ であれば十分で、このとき $u(x) = -u''(x)$ となり、

$$\begin{aligned} u(x)(y''+y) &= u(x)y'' + u(x)y \\ &= u(x)y'' + u'(x)y' - u'(x)y' + u(x)y \\ &= u(x)y'' + u'(x)y' - u'(x)y' - u''(x)y \\ &= \{u(x)y' - u'(x)y\}' \end{aligned}$$

となる。よって $u(x) = -u''(x)$ をみたす $u(x)$ は、$y''+y$ の積分因子となることがわかる。

$(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$ より $\cos x, \sin x$ は $u(x) = -u''(x)$ をみたすので $\cos x, \sin x$ は積分因子であることがわかる。

注意 8. 今後の式変形において重要な役割を果たすので、

$$\begin{aligned} (y''+y)\cos x &= \{y'\cos x - y(\cos x)'\}' \\ &= \left\{\left(\frac{y}{\cos x}\right)' \text{ の分子}\right\}' \\ (y''+y)\sin x &= \{y'\sin x - y(\sin x)'\}' \\ &= \left\{\left(\frac{y}{\sin x}\right)' \text{ の分子}\right\}' \end{aligned}$$

であることも意識しておくとよい。

次のことも最早明らかであろう。

例 9. $\cos qx$ と $\sin qx$ は $y'' + q^2 y$ の積分因子で次が成り立つ。

$$(y'' + q^2 y)\cos qx = \{y'\cos qx - y(\cos qx)'\}' = \left\{\left(\frac{y}{\cos qx}\right)' \text{の分子}\right\}'$$

$$(y'' + q^2 y)\sin qx = \{y'\sin qx - y(\sin qx)'\}' = \left\{\left(\frac{y}{\sin qx}\right)' \text{の分子}\right\}'$$

注意 10. $y'' + y$ の積分因子でここでは利用しないものについても話題にしておく。本論文では積分因子に x の関数であるという制限を付けたが、一般にはこのような制限はしない。一般の定義のもとでは例えば y' も積分因子とされる。それは $y'(y'' + y) = \left\{\frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2}y^2\right\}'$ という形で利用される。この積分因子 y' は物理学で有用な式を導くのに利用できるが、非斉次微分方程式の階数を下げるという用途に利用することはできない。

3. 積分因子による 1 階定数係数線形微分方程式の解法

まず一般の場合を考察し、その後に例題を 1 つ取り扱う。

3.1 $y' + ay = f(x)$

1 階定数係数線形微分方程式

$$y' + ay = f(x)$$

の積分因子による解法は広く知られている。次の手順で解くことができる。

1. 積分因子を選ぶ

   積分因子として e^{ax} を選択する
2. 積分因子を式の両辺にかける

$$e^{ax}(y' + ay) = e^{ax} f(x)$$

3. 積の微分公式を用いて左辺を変形する

$$e^{ax}(y' + ay) = e^{ax}y' + ae^{ax}y = e^{ax}y' + (e^{ax})'y = (e^{ax}y)'$$

   であるので

$$(e^{ax}y)' = e^{ax} f(x)$$

4. 両辺を積分する

$$e^{ax}y = \int e^{ax} f(x)dx$$

5. 両辺を積分因子で割り、解を得る

$$y = e^{-ax}\int e^{ax} f(x)dx$$

注意 11. この結果は、定数係数を仮定しない、より一般の 1 階線形微分方程式

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

の解が

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}\,dx\right)$$

となることの特殊な場合である。このことは $e^{\int P(x)dx}$ が $y' + P(x)y$ の積分因子であることを利用して定数係数の場合と同じように示すことができる。文献 [3]、文献 [5] では、一般の 1 階線形微分方程式の解の公式の証明においては、積分因子を利用する手法を紹介している。しかしながらどちらの文献も、2 階以上の定数係数線形微分方程式に対しては積分因子による解法は紹介していない。ただし、文献 [5] においては、演算子法の解説で 3 階の定数係数線形非斉次微分方程式を 1 階の線形微分方程式に帰着させる例題を扱っている。これは積分因子を直接は用いていないものの、積分因子による解法と思えなくもない。

3.2 $y' - 2y = 3x^2e^{2x}$

先ほどと同じ手順で解いてみる。

1. 積分因子を選ぶ

   積分因子として e^{-2x} を選択する
2. 積分因子を式の両辺にかける

$$e^{-2x}(y' - 2y) = 3x^2$$

3. 積の微分公式を用いて左辺を変形する

$$\left(e^{-2x}y\right)' = 3x^2$$

4. 両辺を積分する

$$e^{-2x}y = x^3 + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

5. 両辺を積分因子で割り、解を得る

$$y = x^3e^{2x} + Ce^{2x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

この例題の一般的な解法は 1 階線形微分方程式の解の公式や定数変化法（これはここでは扱わない）と呼ばれる手法の利用であろう。どちらを用いても簡明に解が求められる。1 階の場合、解を求める簡明さという点において、積分因子を用いる手法の優

位性は特には見当たらない。

ところが2階以上になると、非斉次の場合に1階のように統一的な解の公式は存在しないし、定数変化法も1階のときのような簡明さは失われてしまう。

以下では、2階以上でも積分因子を用いる手法を用いることにより、簡明さを保ったまま解が求められることを示していく。特性方程式の解がわかる場合は、高階非斉次の場合であっても、解の公式が存在することがわかるであろう。

4. 積分因子による2階定数係数線形微分方程式の解法の場合分け

積分因子を用いる解法では斉次の場合と非斉次の場合で解法に差は無いが、理解のしやすさを考慮すれば、まず斉次の場合からみるのが良いだろう。

2階定数係数線形斉次微分方程式は解の公式が知られている。解は、特性方程式の解の形により3通りに場合分けされて示される。積分因子による解法においても、特性方程式の解の形によって場合分けをする必要がある。

2次方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解は次の3通りに場合分けされる。

1. 2つの異なる実数解の場合
   解を α,β（$\alpha \neq \beta$）とするとき、$a = -(\alpha + \beta)$, $b = \alpha\beta$ である。
2. ただ1つの実数解の場合
   解を α とするとき、$a = -2\alpha, b = \alpha^2$ である。
3. 2つの異なる虚数解の場合
   2つの解は複素共役となることを考慮して
   $p + qi, p - qi$（p,q は実数で、q は正）とするとき、$a = -2p, b = p^2 + q^2$ である。

それぞれの場合について、考察すべき斉次方程式は次の形になる。

1. $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$（$\alpha \neq \beta$）
2. $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$
3. $y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$（$q > 0$）

非斉次の場合でも斉次の場合と解法は変わらないので、どの場合についても斉次の場合の直後に対応する非斉次の場合を説明し、その例題も解くという流れで進めることにする。特性方程式の解により場合分けされる3通りそれぞれの場合ごとに1つの章を立て、それぞれの章の中で、斉次方程式、非斉次方程式、例題ごとに節を分けることにする。

5. 2階特性方程式が異なる2つの実数解を持つ場合

5.1 $y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$ $(\alpha \neq \beta)$

1. $Y = y' - \alpha y$ とおき、1階の定数係数線形微分方程式とみる。

$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0$$
$$y'' - \alpha y' - \beta(y' - \alpha y) = 0$$
$$Y' - \beta Y = 0$$

2. 1階の定数係数線形微分方程式を解く手順を踏襲する。すなわち
   (a) 積分因子 $e^{-\beta x}$ をかける
   (b) 積分する
   (c) 積分因子 $e^{-\beta x}$ で割る

   を実行する。

$$e^{-\beta x}Y' - \beta e^{-\beta x}Y = 0$$
$$\left(e^{-\beta x}Y\right)' = 0$$
$$e^{-\beta x}Y = C$$
$$Y = Ce^{\beta x}$$

   ここで、C は任意定数である。

3. Y（$= y' - \alpha y$）を y におき戻し、1階の定数係数線形微分方程式に帰着する。

$$y' - \alpha y = Ce^{\beta x}$$

4. 1階の定数係数線形微分方程式を解く手順を踏襲する。すなわち
   (a) 積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかける
   (b) 積分する
   (c) 積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割る

   を実行する。

$$e^{-\alpha x}y' - \alpha e^{-\alpha x}y = Ce^{(\beta-\alpha)x}$$
$$(e^{-\alpha x}y)' = Ce^{(\beta-\alpha)x}$$
$$e^{-\alpha x}y = \frac{C}{\beta - \alpha}e^{(\beta-\alpha)x} + A$$
$$y = \frac{C}{\beta - \alpha}e^{\beta x} + Ae^{\alpha x}$$

   ここで、A は任意定数である。$\dfrac{C}{\beta - \alpha}$ を改めて任意定数 B でおき直せば、

$$y = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} \quad (A, B \text{ は任意定数})$$

5.2 $y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta y = f(x)\ (\alpha \neq \beta)$

次に非斉次の場合について考察する。斉次の場合、式の左辺のみに注意を払ってどのような変形が行われるかが決定し、変形が行われていた。方程式の両辺に対する変形の要点は次の通りである。

1. 積分因子 $e^{-\beta x}$ をかける
2. 積分する
3. 積分因子 $e^{-\beta x}$ で割る
4. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかける
5. 積分する
6. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割る

非斉次の場合でもこの変形を行うだけで、次の解を得る。

$$y = e^{\alpha x}\left\{\int e^{-\alpha x}e^{\beta x}\left(\int e^{-\beta x}f(x)\,dx\right)\,dx\right\}$$

注意 12. 最後の形は、あまり見かけぬ形ではないかと思われる。この式と同等の役割を果たす式は、演算子法を扱っている文献で、演算子を用いた形でよく見かける。例えば文献[5]で積分が和に分かれた形で見ることができる。文献[3]には、積分が和に分かれた形でしかも高階でより一般の場合に言及した式が載っている。

本論文でも積分が和にわかれた形を導いても良かったのだが、1 階の場合の手順の繰り返しだけで解けることを強調するために積分が入れ子になる形を選ぶことにした。

演算子法ではなく、積分因子による方法で積分が和に分かれた形を導きたいのならば、2 つの積分因子を一度ずつ使った式を 2 つ用意して y' を消去すればよい。

5.3 $y'' - 7y' + 10y = 6e^{2x}$

この微分方程式を解いてみよう。まず、次のように捉えることができることに注意する。

$$y'' - (2+5)y' + 2\cdot 5y = 6e^{2x}$$

方針を最後まで見通した解法 1 と、着実に変形を進める解法 2 を示す。

解法 1

方程式の両辺に次の変形を行う。

1. 積分因子 e^{-5x} をかける
2. 積分する
3. 積分因子 e^{-5x} で割る
4. 積分因子 e^{-2x} をかける
5. 積分する
6. 積分因子 e^{-2x} で割る

すると左辺は y となり、右辺は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&e^{2x}\left\{\int e^{-2x}e^{5x}\left(\int e^{-5x}6e^{2x}\,dx\right)dx\right\}\\
&= e^{2x}\left\{\int e^{-2x}e^{5x}\left(\int 6e^{-3x}\,dx\right)dx\right\}\\
&= e^{2x}\left\{\int e^{-2x}e^{5x}\left(-2e^{-3x}+C\right)dx\right\}\\
&= e^{2x}\left\{\int(-2+Ce^{3x})dx\right\}\\
&= e^{2x}\left\{-2x+\frac{C}{3}e^{3x}+A\right\}\\
&= -2xe^{2x}+Ae^{2x}+\frac{C}{3}e^{5x}
\end{aligned}$$

ここで、C, A は任意定数である。$C/3$ をあらためて任意定数 B とおけば、求める解は次のようになる。

$$y = -2xe^{2x} + Ae^{2x} + Be^{5x} \quad (A, B\ \text{は任意定数})$$

左辺を y にする操作をしっかり見通して、その操作を右辺に実行することにより解を得たが、著者が積分因子による方法を講義した場合、このような変形をするものは皆無である。多くは左辺の変形も一歩ずつ進めていく次のような解法を取る。

解法 2

$$\begin{aligned}
y'' - (2+5)y' + 2\cdot 5y &= 6e^{2x}\\
(y''-2y') - 5(y'-2y) &= 6e^{2x}\\
(y'-2y)' - 5(y'-2y) &= 6e^{2x}
\end{aligned}$$

$Y = y' - 2y$ とおくと

$$\begin{aligned}
Y' - 5Y &= 6e^{2x}\\
e^{-5x}Y' - 5e^{-5x}Y &= 6e^{-3x}\\
\left(e^{-5x}Y\right)' &= 6e^{-3x}\\
e^{-5x}Y &= -2e^{-3x} + C\\
Y &= -2e^{2x} + Ce^{5x}\\
e^{-2x}y' - 2e^{-2x}y &= -2 + Ce^{3x}\\
\left(e^{-2x}y\right)' &= -2 + Ce^{3x}\\
e^{-2x}y &= -2x + \frac{C}{3}e^{3x}x + A
\end{aligned}$$

ここで C, A は任意定数である。 $C/3$ を B とおく。

$$y = -2xe^{2x} + Ae^{2x} + Be^{5x} \quad (A, B\ \text{は任意定数})$$

注意 13. この例題は、定数変化法で行っても 1 階の場合のようにはすっきりとはいかない。また、未定係数法と呼ばれる方法で解こうとする初学者の中には、そもそも解のおき方自体を間違う者が少なくない。非斉次項が斉次方程式の解となることにうま

く対処できなかったことが原因のようである。

先ほどの方針では面倒な計算は無かったが、積分因子を使う順序を逆にすると、部分積分をする必要があり、計算はもう少し面倒になる。非斉次項と2つの積分因子を見比べて計算が楽になりそうな順番で2つの積分因子を利用したのである。

6. 2階特性方程式の解がただ一つの実数解を持つ場合

6.1 $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$

1. 積分因子を利用しやすい形に変形する
$$(y'' - \alpha y') - \alpha(y' - \alpha y) = 0$$
2. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかける
$$e^{-\alpha x}(y'' - \alpha y') - \alpha e^{-\alpha x}(y' - \alpha y) = 0$$
3. 積の微分公式を用いて左辺を2階導関数の形にする
$$\begin{aligned}(y' e^{-\alpha x})' - \alpha(e^{-\alpha x} y)' &= 0\\ (y' e^{-\alpha x} - \alpha e^{-\alpha x} y)' &= 0\\ (e^{-\alpha x} y)'' &= 0\end{aligned}$$
4. 2度積分する
$$e^{-\alpha x} y = Ax + B$$
ここで A, B は任意定数である。
5. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割る
$$y = (Ax + B)e^{\alpha x} \ (A, B \text{ は任意定数})$$

注意 14. たった今解いた微分方程式は、先ほど扱った
$$y'' - (\alpha + \beta)y' + \alpha\beta y = 0 \ (\alpha \neq \beta)$$
において、条件 $\alpha \neq \beta$ をはずし $\alpha = \beta$ とすることにより全く同じ積分因子 $e^{-\alpha x}$ を2度使う方針でも解を得ることができる。ただし、右辺の積分を計算する際に $\alpha = \beta$ とした影響があらわれて、解は指数関数だけでは表現できず、指数関数と1次関数の積が現れることになる。

積分因子を2度使う方針は、簡略可能な計算を含むため、ここでは採用しないこととし、積分因子を使うのは1度だけという方針を採用した。この方針では、積の高階導関数についてのライプニッツの公式の2階の場合を用いれば、少し楽ができるので、著者は高専や大学での講義ではライプニッツの公式を用いているが、高校生向けということでまずはライプニッツの公式を用いない解法を紹介した。

注意 15. ライプニッツの公式を用いる方法も紹介しておく。$u(x), v(x)$ が n 回微分可能であるとき、
$$\{u(x)v(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \, u^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x)$$
（ライプニッツの公式）

特に、$n = 2$ のとき、
$$\{u(x)v(x)\}'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$
このことと $(e^{-\alpha x})' = -\alpha e^{-\alpha x}, (e^{-\alpha x})'' = \alpha^2 e^{-\alpha x}$ に注意すれば、次の解法は最早明快であろう。
$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$$

1. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかける
$$e^{-\alpha x} y'' - 2\alpha e^{-\alpha x} y' + \alpha^2 e^{-\alpha x} y = 0$$
2. 形を整え、ライプニッツの公式を適用する
$$\begin{aligned}e^{-\alpha x} y'' + 2(e^{-\alpha x})' y' + (e^{-\alpha x})'' y &= 0\\ (e^{-\alpha x} y)'' &= 0\end{aligned}$$
3. 2回積分する
$$e^{-\alpha x} y = Ax + B$$
ここで A, B は積分定数である。
4. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割る
$$y = (Ax + B)e^{\alpha x} \ (A, B \text{ は任意定数})$$

6.2 $y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = f(x)$

次に非斉次の場合について考察する。やはり斉次の場合には式の左辺のみに注意を払ってどのような変形を行うべきかが決定し、変形が行われていたので、斉次の場合の式変形と同じ変形を行えば解を得ることができる。斉次の場合、方程式の両辺に対する変形の要点は次の通りであった。

1. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかける
（左辺は $(e^{-\alpha x} y)''$ の形になる）
2. 2回積分する
3. 積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割る

非斉次の場合でもこの変形を行うと、次の解を得る。
$$y = e^{\alpha x}\left\{\int\left(\int e^{-\alpha x} f(x)\, dx\right) dx\right\}$$

注意 16. この式を意味するような式はやはり演算子法を扱っている本で見ることができる。例えば文献[3]には高階に対応した形で書かれている。

6.3 $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$

次の方針で式変形しても解を得ることができる。

1. 積分因子 e^{2x} をかける
2. 式変形して積分することを 2 度繰り返す
3. 積分因子 e^{2x} で割る

$$
\begin{aligned}
e^{2x}y'' + 2e^{2x}y' + 2\left(e^{2x}y' + 2e^{2x}y\right) &= x \\
\left(e^{2x}y'\right)' + 2\left(e^{2x}y\right)' &= x \\
e^{2x}y' + 2e^{2x}y &= \frac{1}{2}x^2 + A \\
\left(e^{2x}y\right)' &= \frac{1}{2}x^2 + A \\
e^{2x}y &= \frac{1}{6}x^3 + Ax + B \\
y &= \left(\frac{1}{6}x^3 + Ax + B\right)e^{-2x}
\end{aligned}
$$

（A, B は任意定数）

ライプニッツの公式を用いれば少し見通しが良くなる。方針は次のようになる。

1. 積分因子 e^{2x} をかける
2. 左辺を積の 2 階導関数の形にする
3. 2 回積分する
4. 積分因子 e^{2x} で割る

$$
\begin{aligned}
e^{2x}y'' + 2\cdot 2e^{2x}y' + 2^2e^{2x}y &= x \\
e^{2x}y'' + 2\cdot(e^{2x})'y' + (e^{2x})''y &= x \\
(e^{2x}y)'' &= x \\
(e^{2x}y)' &= \frac{1}{2}x^2 + A \\
e^{2x}y &= \frac{1}{6}x^3 + Ax + B \\
y &= \left(\frac{1}{6}x^3 + Ax + B\right)e^{-2x}
\end{aligned}
$$

（A, B は任意定数）

注意 17. ある年に担当した微分方程式の講義の期末試験 (受験者 79 名) で、この問題を出題した。そのときの解答の方針と正解者数を表 1 に示す。

表 1. 解答の方針と正解者数

方針	正解	ほぼ正解	不正解	計
積分因子	44	5	14	63
未定係数法	2	0	10	12
定数変化法	1	0	1	2
ほぼ手つかず	0	0	2	2
計	47	5	27	79

未定係数法の不正解者 10 名は全員が予想する解の形を間違えていた。非斉次項が斉次方程式の解となることにうまく対処できなかったことが原因だと思われる。講義ではその点に注意することは伝えてあったが、残念なことである。そもそも積分因子による解法を学んでいながらこの問題に未定係数法を使うところからして、注意すべき点をあまりきちんと認識していないように思われる。

7.2 階特性方程式が 2 つの異なる虚数解を持つ場合

7.1 $y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = 0$（$q > 0$）

左辺の積分因子として $e^{-px}\cos qx$ や $e^{-px}\sin qx$ などがあり、一気に計算を進める方法もあるが、ここでは少しずつ変形していくことにする。

1. 式の特徴をつかむ

$$(y'' - 2py' + p^2y) + q^2y = 0$$

2. $y'' - 2py' + p^2y$ の積分因子 e^{-px} をかける
   $e^{-px}(y'' - 2py' + p^2y)$ が $(e^{-px}y)''$ となることは既にみているので、式全体は次のようになる。

$$(e^{-px}y)'' + q^2(e^{-px}y) = 0$$

3. $Y = e^{-px}y$ とおく

$$Y'' + q^2Y = 0$$

4. 積分因子 $\cos qx$ をかけて変形する

$$
\begin{aligned}
Y''\cos qx + q^2Y\cos qx &= 0 \\
Y''\cos qx + Y'(\cos qx)' & \\
-Y'(\cos qx)' + q^2Y\cos qx &= 0 \\
(Y'\cos qx)' + qY'\sin qx + q^2Y\cos qx &= 0 \\
(Y'\cos qx)' + q\{Y'\sin qx + Y(\sin qx)'\} &= 0 \\
(Y'\cos qx)' + q\,(Y\sin qx)' &= 0
\end{aligned}
$$

5. 積分して変形する

$$
\begin{aligned}
Y'\cos qx + qY\sin qx &= C \\
Y'\cos qx - Y(\cos qx)' &= C
\end{aligned}
$$

6. 積分因子 $\dfrac{1}{\cos^2 qx}$ をかけて変形する

$$
\begin{aligned}
\frac{Y'\cos qx - Y(\cos qx)'}{\cos^2 qx} &= \frac{C}{\cos^2 qx} \\
\left(\frac{Y}{\cos qx}\right)' &= \frac{C}{\cos^2 qx}
\end{aligned}
$$

ここで C は任意定数である。

7. 積分する

$$\frac{Y}{\cos qx} = \frac{C}{q}\tan qx + A$$

ここで A は任意定数である。

8. $\cos qx$ をかけ、Y（$=e^{-px}y$）をおき戻す

$$Y = \frac{C}{q}\sin qx + A\cos qx$$
$$e^{-px}y = \frac{C}{q}\sin qx + A\cos qx$$

9. e^{-px} で割る

C/q をあらためて任意定数 B とする。

$$y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$
（A, B は任意定数）

7.2 $y'' - 2py' + (p^2 + q^2)y = f(x)$（$q > 0$）

次に非斉次の場合について考察する。斉次方程式の両辺に対する変形の要点は次の通りである。

1. $e^{-px}\cos qx$ をかける
2. 積分する
3. $\dfrac{1}{\cos^2 qx}$ をかける
4. 積分する
5. $e^{px}\cos qx$ をかける

非斉次の場合でもこの変形を行うだけで、次の解を得る。

$$y = e^{px}\cos qx\left\{\int \frac{1}{\cos^2 qx}\left(\int f(x)e^{-px}\cos qx\,dx\right)dx\right\}$$

積分因子 $\cos qx$ のかわりに $\sin qx$ を用いれば、次のように表すこともできる。

$$y = e^{px}\sin qx\left\{\int \frac{1}{\sin^2 qx}\left(\int f(x)e^{-px}\sin qx\,dx\right)dx\right\}$$

注意 18. これらの式もあまり見かけないように思う。これと同等の役割を果たす式はやはり演算子法を解説している文献に見ることができる。例えば文献 [5] には複素数値関数を用いて積分を和に分けた形のものを見ることができる。三角関数を避けて指数関数だけにしてしまおうという強い意志を感じる。文献 [3] には実数の範囲で積分を和に分けた形のものを見ることができる。その証明にはやはり複素数値関数が用いられている。

これから下に示す例題は、典型的重要問題である。積分因子は先を見越して適切なものを選ぶと、かなり計算が楽になる。

7.3 $y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos 3x$

積分因子を用いる手法では

- 積分因子をかける
- 積分する
- 積分因子で割る

という操作の繰り返しが基本である。この 1 連の流れで操作を捉えるとわかりやすいのだが、斉次方程式を解く際に紹介した操作は、式の一部の変形に積分因子を使うだけで積分は実行しないとか、積分後に積分因子で割る前に次の積分因子をかけるなどが行われているため、整理された操作は記憶に残りにくい。具体的な問題を解く際には細かく手順を踏むか、記憶に残りやすい目標をいくつか設けて計算を進めるのが良いであろう。

1. 式の特徴をつかむ

$$(y'' - 4y' + 4y) + 9y = e^{2x}\cos 3x$$
$$(y'' - 2\cdot 2y' + 2^2y) + 3^2y = e^{2x}\cos 3x$$

2. $y'' - 2\cdot 2y' + 2^2y$ の積分因子 e^{-2x} をかける

$$(e^{-2x}y)'' + 3^2e^{-2x}y = \cos 3x$$

3. $Y = e^{-2x}y$ とおく

$$Y'' + 3^2Y = \cos 3x$$

4. 積分因子 $\sin x$ をかける

積分因子をかけて積分した後に、積分因子の 2 乗で割ることを考慮した上で積分因子を選択する。正確に言えば、「積分した後に積分因子の 2 乗で割る」のではなく、「積分した後に既に選んだ積分因子で割り、次に選ぶ積分因子は先ほど用いた積分因子の逆数なので、それをかける」ということになる。それを考慮する。ここでは、将来 $\sin^2 3x$ か $\cos^2 3x$ で割ることになることを考慮し、積分因子として $\sin 3x$ を選択すれば、右辺の積分にちょうど $\sin^2 3x$ がでてきて都合が良いとの判断から、積分因子 $\sin 3x$ を選び、それをかける。

左辺は

$$\begin{aligned}&(Y'' + 3^2Y)\sin 3x\\ &= Y''\sin 3x + 3Y'\cos 3x - 3Y'\cos 3x + 3Y(\cos 3x)'\\ &= (Y'\sin 3x)' + 3(Y\cos 3x)'\end{aligned}$$

となる。

右辺は

$$\sin 3x\cos 3x = (\sin 3x)\left(\frac{1}{3}\sin 3x\right)' = \left(\frac{1}{6}\sin^2 3x\right)'$$

となる。

5. 積分する
積分因子 $\sin 3x$ を選んだので、左辺は $(Y/\sin 3x)'$ の分子となることを思い出せるとよい。

$$Y'\sin 3x + 3Y\cos 3x = \frac{1}{6}\sin^2 3x + C$$
$$Y'\sin 3x - Y(\sin 3x)' = \frac{1}{6}\sin^2 3x + C$$

ここで C は任意定数である。

6. $1/\sin^2 3x$ をかける

$$\frac{Y'\sin 3x - Y(\sin 3x)'}{\sin^2 3x} = \frac{1}{6} + \frac{C}{\sin^2 3x}$$
$$\left(\frac{Y}{\sin 3x}\right)' = \frac{1}{6} + \frac{C}{\sin^2 3x}$$

7. 積分する

$$\frac{Y}{\sin 3x} = \frac{1}{6}x + \frac{C}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\tan 3x}\right) + A$$

ここで A は任意定数である。

8. $\sin 3x$ をかけ、$Y(= e^{-2x}y)$ をおきもどす

$$Y = \frac{1}{6}x\sin 3x - \frac{C}{3}\cos 3x + A\sin 3x$$
$$e^{-2x}y = \frac{1}{6}x\sin 3x - \frac{C}{3}\cos 3x + A\sin 3x$$

9. 積分因子 e^{-2x} で割る
$-C/3$ を任意定数 B におき直す。

$$y = \frac{1}{6}xe^{2x}\sin 3x + Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x$$

（A, B は任意定数）

注意 19. この問題の場合を未定係数法で解く場合、未定係数法が解説されているほとんどの本が勧めることに素直に従えば、解の 1 つは次の形で予想することになる。

$$y = xe^{2x}(a\sin 3x + b\cos 3x)$$

しかし、積分因子による解法に習熟していれば、この問題の場合、途中で $\sin 3x$ という積分因子を選ぶと、最終的に $xe^{2x}\sin 3x$ の形が出てくるが、$xe^{2x}\cos 3x$ は出てこないと見通せるので、それを考慮した上で、1 つの解の形を次の形で予想することができる。

$$y = axe^{2x}\sin 3x$$

実際にはそこまで見通せるなら、微分方程式から指数関数を消し去った

$$Y'' + 3^2Y = \cos 3x$$

の形にしてから、その一つの解を $Y = ax\sin 3x$ と予想するであろう。

注意 20. 例題の類題を未定係数法で解く場合、他の文献でどのように扱われているか見てみよう。文献[2]には

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^x\sin 2x$$

の 1 つの解を

$$y = xe^x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

の形で予想して議論を進める例題が載っている。初学者が間違いがちな、単に非斉次項を x 倍した

$$y = axe^x\sin 2x$$

という予想ではうまくいかないため、斉次方程式の解全体を x 倍した形の中から探さねばならないという基本を示す意図によるものであろう。積分因子による解法の方針で少し考えれば、

$$y = axe^x\cos 2x$$

の形で予想すれば十分なことがわかる。

文献[1]には

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

の 1 つの解を

$$y = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

の形で予想して議論を進める例題が載っている。積分因子による解法の方針で少し考えれば

$$y = ax\cos 2x$$

の形で予想して十分なことがわかる。

8. 高階の定数係数線形微分方程式

2 階の場合と同様にすれば、特性方程式の解がわかっている場合は、高階であっても、非斉次的であっても、定数係数線形微分方程式は積分因子を利用して解くことができる。ここでは 1 つの例題と、ライプニッツの公式が活用できる特性方程式がただ 1 つの実数解を持つ場合の紹介にとどめる。

8.1 $y''' - 3y' + 2y = xe^x$

1. 式の特徴をつかむ
必要であれば特性方程式を解く。ここでは視察

で特性方程式が $(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0$ であることは見て取れたとして次のように変形する。積分因子は e^{-x} よりも e^{2x} を先に用いた方が良いという判断による。

$$(y''-2y'+y)'+2(y''-2y'+y)=xe^x$$

2. 積分因子 e^{2x} をかける

$$\begin{aligned} e^{2x}(y''-2y'+y)'+2e^{2x}(y''-2y'+y)&=xe^{3x} \\ \left\{e^{2x}(y''-2y'+y)\right\}'&=xe^{3x} \end{aligned}$$

3. 積分する
左辺は $e^{2x}(y''-2y'+y)$ となる。右辺は部分積分を利用する。

$$\begin{aligned} \int xe^{3x}\,dx &= \int x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)'\,dx \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+A \end{aligned}$$

ここで A は任意定数である。

4. 積分因子 e^{2x} で割る

$$y''-2y'+y=\frac{1}{3}xe^x-\frac{1}{9}e^x+Ae^{-2x}$$

5. 積分因子 e^{-x} をかける

$$\begin{aligned} e^{-x}(y''-2y'+y)&=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+Ae^{-3x} \\ (e^{-x}y)''&=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+Ae^{-3x} \end{aligned}$$

6. 2 回積分する

$$e^{-x}y=\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{18}x^2+\frac{A}{9}e^{-3x}+C_1x+C_2$$

ここで C_1, C_2 は任意定数である。

7. 積分因子 e^{-x} で割る
$A/9$ を任意定数 C_3 におき直すと

$$y=\left(\frac{1}{18}x^3-\frac{1}{18}x^2+C_1x+C_2\right)e^x+C_3e^{-2x}$$

（C_1, C_2, C_3は任意定数）

注意 21. これも未定係数法で解く際に解の形の予想を間違う者が非常に多い問題である。

8.2 $\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(-\alpha)^k y^{(n-k)} = 0$

これは特性方程式がただ一つの実数解 α を持つような n 階の斉次方程式である。この解を求めるには、両辺に積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかけ、両辺を n 回積分し、両辺を積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割ればよい。任意定数の形を整えれば、求める解は

$$y=\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_kx^k\right)e^{\alpha x}$$

（$C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$は任意定数）

となる。

8.3 $\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(-\alpha)^k y^{(n-k)} = f(x)$

この解を求めるには、斉次方程式の場合と同様、両辺に積分因子 $e^{-\alpha x}$ をかけ、両辺を n 回積分し、両辺を積分因子 $e^{-\alpha x}$ で割ればよい。

$$y=e^{\alpha x}\int\left(\cdots\int\left(\int e^{-\alpha x}f(x)\,dx\right)dx\cdots\right)dx$$

（積分は n 回）

9. おわりに

タイトルは「積分因子による定数係数線形微分方程式の解法」の方が適切だと考える人もいるであろう。そうしなかった理由を説明したい。2 階の定数係数線形微分方程式を解く際には、特性方程式が虚数解を持つ場合でも、積分因子を使う方法でうまくいくという話題を出すと、積分因子に y' を用いる斉次的な場合に限定的な話だと勘違いされることがある。また、2 階において「斉次方程式には公式があるが、非斉次方程式には公式がない」と勘違いをしている人もいる。これらの誤解を解くのには積分因子による解法を実際に見せるのが最も良いと考えている。しかしながら、定数係数線形微分方程式は枯れた話題である。いくつかの有力な解法が知られている。それらに習熟した人が今更別の解法に興味を持つとも思えない。タイトルを「積分因子による定数係数線形微分方程式の解法」としても特段興味を持ってもらえるとは思えない。そこで、高校生向けの解法ということを謳うことにしたのである。高校生向けということであるならば、特性方程式が虚数解の場合はどうするのかとか、非斉次方程式の扱いはどのようになるのかとか、気になる人もいるのではないかと考えた。少しでも興味を持っていただけた方には、定数係数線形微分方程式は、その特性方程式の解がわかれば、積分因子を利用する方法により、階数に関わらず、斉次的であるか非斉次的であるかどうかにも関わらず、解くことができることを、心から納得していただけるように書いたつもりである。

勿論、与えられた問題によっては、積分因子による解法は、必ずしも楽な解法とはならない。しかしながら、ある種の問題についてなら、非常に楽な解法となることも事実である。著者は、本論文で紹介した例題の類題に関してよく質問を受けた。著者には高専での教育経験があるが、その質問は高専在職時に特に多かった。質問される問題の多くは高専から大学への編入学試験問題であったり、大学院の入学試験問題であった。質問の内容は、「この問題を未定係数法で解くときには解の形はどのように設定すればいいのですか」というものであった。その質問に対して、質問者が予想した形だとどうしてうまくいかないのかという理由を示すのにも、適切な解の形を予想するにはどのような考え方をするのが良いのかということを示すのにも、積分因子による解法を説明することは非常に有効であった。そして積分因子による解法を十分理解した質問者は、類題について、最早、未定係数法に固執することはなかった。積分因子を用いるか、未定係数法を用いるにしても、積分因子による解法を併用して適切な解の形を予想するようになった。「もうこの手の問題ならば暗算で答えが出せます」と頼もしい言葉を残していった質問者も何人もいた。非斉次方程式で、非斉次項が斉次方程式の解あるいはその解に多項式をかけたものである場合などは、積分因子による解法で楽に解ける場合があることはもっと知られて良いことのように思う。

他の解法との関係で出来れば書きたかったことで書き残してしまった話題もまだある。しかしながら、最低限伝えたいと考えたことは書くことができた。真に新しいことは何も書かかれておらず、もう少し光が当たれば良いのにと感じるところに、わずかに光を当てただけのものに過ぎないが、読んで何か得るものがあったと感じる人がいるならば、それは著者の大きな喜びである。

文献

1) 新井一道, 碓氷久, 斎藤斉, 鈴木道治, 高遠節夫, 向山一男, “新訂　微分積分 II”, 大日本図書, 2004.
2) 西本敏彦, “微分積分学講義”, 培風館, 1996.
3) 矢野健太郎, “微分方程式通論”, 日新出版, 1969.
4) 吉田耕作, “微分方程式の解法 第2版”, 岩波書店, 1978.
5) Morris Tenenbaum, Harry Pollard, “ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS”, Dover, 1963.

Solution of Linear Differential Equations with Constant Coefficients for High School Students

Hiroshi Arai

(Received: May 7th, 2018)

Core Studies, Kochi University of Technology
185 Miyanokuchi, Tosayamada, Kami City, Kochi 782–8502, JAPAN

* E-mail: arai.hiroshi@kochi-tech.ac.jp

Abstract: Among mathematicians, it is well known that the general solution of a second order linear homogeneous differential equation with constant coefficients $y'' + ay' + by = 0$ is determined by the solutions of the characteristic equation $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. To show this when the characteristic equation has imaginary solutions, complex-valued functions or inverse triangular functions are usually used. However, in this paper we will demonstrate that the integrating factor method can also be used to solve linear differential equations with constant coefficients. We will use neither complex-valued functions nor inverse triangular functions, so that high school students who learned calculus should be able to easily understand the main idea of this paper.