

修士論文

光複素振幅の幾何学的変換を用いた光渦モード変換

Optical-Vortex Mode Conversion using Geometric

Transformation of Optical Complex Amplitude

報告者

学籍番号: 1215044

氏名: 高嶋 悟

指導教員

小林 弘和 准教授

平成 31 年 2 月 12 日

高知工科大学 電子・光システム工学コース

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究背景	1
1.2	光渦の生成および制御方法	1
1.2.1	軸対称偏光素子 (q -plate)	2
1.2.2	空間光変調器 (SLM)	3
1.3	研究目的	4
1.4	論文構成	4
第 2 章	光渦とは	5
第 3 章	複素振幅の幾何学変換	7
3.1	幾何学変換のイメージ (拡大や縮小)	7
3.2	実関数の幾何学変換	8
3.2.1	フレネル積分と $2f$ 系の入出力関係	8
3.2.2	位相停留法	9
3.3	$2f$ 系内における位相停留条件	10
3.4	光渦モード変換に有用な座標変換の例	10
3.4.1	Log-Polar(円 \leftrightarrow 線)	10
3.4.2	分数指数 (円 $\leftrightarrow 1/N$ の扇形)	11
3.5	複素形式	11
3.5.1	可積分条件の複素表現とその解	11
3.5.2	連続条件を満たす関数としての反正則関数	12
3.6	幾何学変換に必要となる位相分布	13
3.6.1	$2f$ 系の途中における位相停留法の式	13
3.6.2	必要な変換用と補正用の位相分布	14
第 4 章	幾何学変換を用いた光渦モード分離	15
4.1	本研究の分離手法の概要	15
4.1.1	対数極座標変換	15
4.1.2	対数曲座標変換に必要な位相分布	18
4.1.3	対数曲座標変換に用いる位相分布の改良	18
4.2	実験	19
4.2.1	実験構成	19
4.2.2	実験結果	20

第 5 章	幾何学変換を用いた光渦モード変換	23
5.1	光渦モードの逡倍変換	23
5.1.1	光渦モードの N 逡倍	23
5.1.2	複数の位相分布の混合	24
5.1.3	2 逡倍のときに SLM に与える具体的な位相分布	26
5.1.4	伝搬シミュレーション	27
5.2	実験	28
5.2.1	実験構成	28
5.2.2	実験結果	30
	角スペクトル移動法を用いた振幅の計算	30
	モード分布の解析	31
	光渦モード逡倍変換の光パワー効率	33
第 6 章	まとめ	35
	謝辞	36
	参考文献	37

第 1 章

序論

1.1 研究背景

光渦とは図 1.1 のように強度分布が円環状で、中心に強度暗転をもつ光ビームである。図 1.1 において、明るさは強度を示し、色は位相を示す。多数の空間モード ($l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を有するこの光ビームはビーム断面内で螺旋状の位相勾配 $2\pi l$ を持ち、1 光子当たり $l\hbar$ の軌道角運動量 (OAM : Orbital Angular Momentum) を持つ。光渦の位相勾配や OAM を利用して、多重化通信や光計測、量子計算などへの応用が期待されており、いずれの応用でもモード変換 [1] やモード分離技術が重要となる [2]。多重化通信の場合、図 1.2 のように異なるモード l の光渦に異なる情報を載せ、それを同時に送ったものを受信側で分離することで行うため、モード分離の精度は非常に重要である。モード分離の技術に関しては、入射光の断面における光複素振幅分布の幾何学変換を利用したモード分離などが研究されている。

光渦の生成方法としては軸対称偏光素子 (q -plate) [3,4] や円錐鏡 [5]、空間光変調器 (SLM : Spatial Light Modulator) [6] を用いた手法が確立されている。SLM は液晶を用いているため光波による損傷しきい値が低く、電極の吸収や散乱による光学損失も考慮しなければならぬのが欠点であるが、ビーム成型に対する自由度が極めて高くなっており複数の光渦を複合した重ね合わせのモードの生成も容易にできる。また、これらの手法は光渦モード l を $l' = l + \delta l$ に加算的、減算的操作をすることが可能であるが、乗算的なモード変換手法はいまだ十分に確立されていない。

光波のビーム断面における光複素振幅分布の幾何学変換手法 [7,8] については、ガウシアンビームから矩形の強度分布を持つトップハットビームに変換する手法や任意の強度分布の作成など、古くから研究が行われてきた。近年、この幾何学変換を利用して軌道角運動量 (OAM) を持った光ビームである光渦のモード分離やモード変換が多数報告されている [9–13]。

1.2 光渦の生成および制御方法

光渦生成の方法としては軸対称偏光素子 (q -plate) や円錐鏡、空間光変調器 (SLM) を用いる方法があるが、ここでは本研究で用いる q -plate と SLM について説明する。

1.2 光渦の生成および制御方法

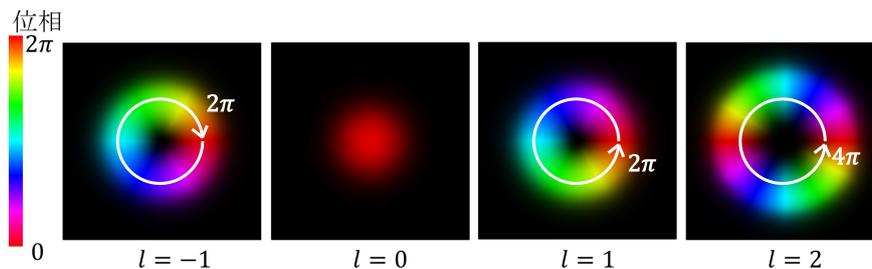


図 1.1 光渦モード l の強度と位相分布

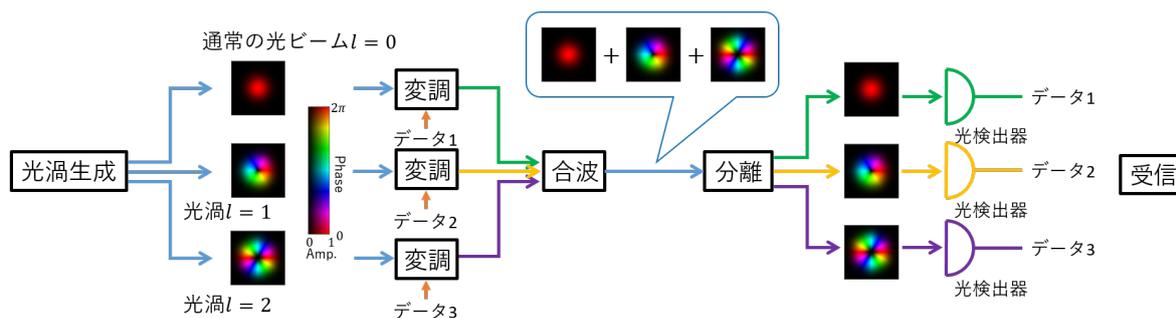


図 1.2 光渦の応用 (通信)

1.2.1 軸対称偏光素子 (q -plate)

軸対称偏光素子 (q -plate) とは、図 1.3 に示すようにモード $l = 0$ の円偏光を入射すると、円偏光の右回りか左回りの回転方向によってモード l を q -plate のトポロジカルチャージに応じて $l \rightarrow l \pm 2q$ することができる。ここで q は q -plate の速軸が一周で変化する角度 $q\pi$ である。 q -plate は $1/2$ 波長板の速軸が場所によって異なっている光学素子である。円偏光を $1/2$ 波長板に通すと、逆回りの円偏光となるが、 q -plate はその場所ごとに速軸の向きが異なるため、通過した円偏光の断面内で位相差が生じる。この位相差により中心部で干渉による打ち消しあいが生じて、ドーナツ型の強度分布の光渦を生成する。本研究ではモード分離、モード変換を行う際の光渦生成法として q -plate を用いている (第 4,5 章参照)。

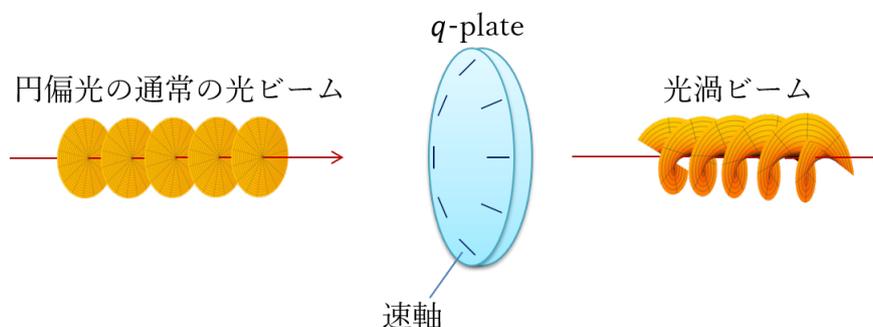


図 1.3 q -plate を用いた光渦生成

1.2 光渦の生成および制御方法

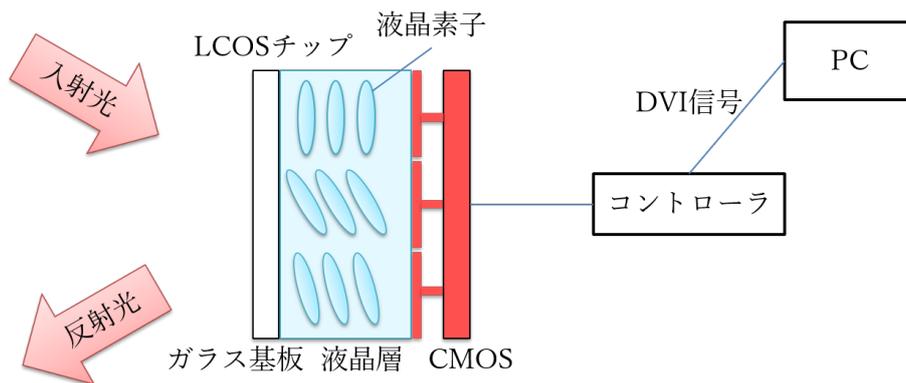


図 1.4 SLM の動作原理

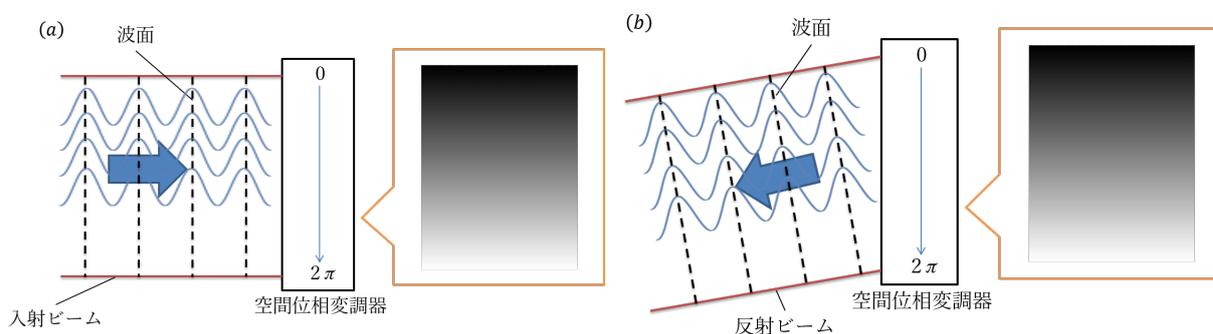


図 1.5 SLM の使用例 (a)SLM への入射光 (b)SLM からの反射光

1.2.2 空間光変調器 (SLM)

SLM とは、図 1.4 のようにアドレス部に CMOS 技術を用いてヘッドの液晶部分をパソコンのアプリケーションからの信号を用いて直接電圧制御することで、ピクセル毎に位相変調できる変調器である。反射面に液晶で構成された多数のピクセルを有しており、パソコンからのアドレス部への書き込み情報により、加える電圧を変化させ、反射面にある液晶素子の立ち上がりを制御することで各ピクセルの屈折率を変化させる。屈折率の異なるピクセルを光が通過することで光の位相の変調量を変化させ、自由に位相を制御することができ、任意の空間モードを生成できる。SLM を用いた光渦生成法では、コンピュータを用いて必要となる位相分布を計算し、それを SLM のアドレス部へ入力し、液晶画面での位相変調をすることで光渦を生成する。SLM は液晶を用いているため光波による損傷しきい値が低く、電極の吸収や散乱による光学損失も考慮しなければならないのが欠点であるが、ビーム成型に対する自由度が極めて高くなっており複数の光渦を複合した重ね合わせのモードの生成も容易に生成できるというメリットがある。アドレスへの入力値はグレースケールのビットマップ画像を用いて行う。階調は 8bit であり、黒色は位相変調量 0、白色は位相変調量 2π となる。例えば、図 1.5 のように黒色から白色に線形に変わっている画像を用意して入力すると、黒色の部分のピクセルの位相変調量は 0 で、白色の部分のピクセルの位相変調量が 2π

1.3 研究目的

なので、入射光に対して反射光の波面が傾き、進行方向がずれる。光渦を生成するには、単純には $0 \sim 2\pi l$ の位相分布を SLM に入力すれば良いが、グレーティング形状の位相分布を入力した方が、生成の精度が高くなる。

1.3 研究目的

本研究では $2f$ 系によるフーリエ変換を利用した光複素振幅の幾何学変換を用いて、光渦の重ね合わせのビームからそれぞれのモードへの分離及び、光渦のモード l を整数倍するモード変換手法を提案し実証実験を行う。近年、入射光の断面における光複素振幅分布の幾何学変換が研究されており、本研究ではこれをモード分離、整数倍のモード変換に利用する。モード分離の手法としては $2\pi l$ の断面内位相差を持つ光渦を棒状の振幅分布に幾何学変換を行うことで、モード l 毎に異なる位置に集光させて分離する。幾何学変換には、多数のピクセルを持ちピクセルごとに位相を変調することができる空間位相変調器 (SLM) を用いる。モード変換の提案手法では幾何学変換に必要な複数の位相分布を混合することで、一枚の位相分布で光渦モードの変換を高効率かつ高精度に実現可能であり、OAM 制御技術の基盤になりうる。本稿では幾何学変換とモード変換の原理、伝搬シミュレーション、実験結果を示す。

1.4 論文構成

1 章では研究背景と研究対象である光渦の応用、生成及び制御方法、目的について述べた。2 章では光渦について波動方程式を用いて詳しい説明を行う。3 章では本研究で我々が用いる光複素振幅の幾何学変換について詳しく説明する。4 章では光の複素振幅の幾何学的変換を用いた光渦モード分離について述べ、その実験結果を示す。5 章では同じく光複素振幅の幾何学的変換を用いた光渦モード変換について述べ、その実験結果を示す。6 章では 4,5 章で得られた実験結果について考察し、まとめとする。

第 2 章

光渦とは

自由空間での電磁波の電場 $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ の伝搬を支配する波動方程式は、 $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ 、時間を t とすると

$$\nabla^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

であり、この波動方程式を原点として電磁波の各種性質が導かれる。 c は光速を表し、 $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s}$ である。このとき $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ は電磁波の全ての情報を含んでいるが、単一の周波数 ω のみであると仮定すると空間成分 $U(\mathbf{r})$ を用いて $\tilde{E}(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ と書くことができ、これを式 (2.1) に代入すれば、ヘルムホルツ方程式

$$(\nabla^2 + k^2) U(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2)$$

が得られる。ここで k は波数であり、 $k = \omega/c$ である。さらに電磁波が z 方向のみに伝搬していると仮定し、 $U(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \exp(ikz)$ として式 (2.2) に代入すれば、近軸ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) - i2k \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。ここで $E(\mathbf{r})$ は z に対してゆっくりと変化する包絡線を表しているため、式 (2.3) を導く際に、 $\left| \frac{\partial E(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \ll k |E(\mathbf{r})|$ 、 $\left| \frac{\partial^2 E(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right| \ll k^2 |E(\mathbf{r})|$ を仮定した。この近似式の最も簡単な解はガウシアンビームと呼ばれ、 $z = 0$ として x - y 平面を極座標 (r, θ) で表すことにすれば、

$$E(r, \theta, z = 0) = A \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

である。ここで A は振幅、 σ は光強度が最大値の $1/e$ となるビーム径を表し、 r, θ は極座標における原点からの距離と偏角を表す。以降、特に z 座標を問題にしない場合は、式 (2.4) の左辺を $E(r, \theta)$ のように z を省略して書く。

式 (2.3) の解はガウシアンビームだけではなく、様々な高次のモードが存在する。特に式 (2.3) を円筒座標で解くとラゲールガウスモードと呼ばれる以下の解が導かれる。

$$E_l(r, \theta) = A_l r^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(il\theta) \quad (2.5)$$

ここで l はこのモードを特徴づける整数、 A_l は振幅である。式 (2.4) のガウシアンビームは式 (2.5) を $l = 0$ とした特殊なケースである。まず、のちの積分計算を簡単化するために、光ビームの全光強度を正規化する正規化係数として A_l を定める。式 (2.5) の光強度分布は

$$|E_l(r, \theta)|^2 = A_l^2 r^{2|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.6)$$

である。これを全空間にわたって積分した値が 1 となるように A_l を決定すると

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty A_l^2 r^{2|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) r dr d\theta = A_l^2 \pi |l|! \sigma^{2(1+l)} = 1 \quad (2.7)$$

となるため、 $A_l = 1/\left(\sqrt{\pi |l|!} \sigma^{|l|+1}\right)$ とすれば良い。これを用いて光渦の電界分布を以下の式で定義する。

$$E_l(r, \theta) = A_l r^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(il\theta) \quad (2.8)$$

式 (2.8) において、 $|l| > 1$ とすると $r^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$ がドーナツ型の強度分布を形成し、 $\exp(il\theta)$ が l 重螺旋の波面を形成する。このように螺旋状の波面を持つビームを一般に光渦ビームと呼ぶ。光渦は図 2.1 のようにビーム断面で位相が $l\theta$ 変化するため、位相が π 違う部分の強度が互いに打ち消しあい、その結果中心に強度暗点ができる。図 2.1 では右回りに位相 $l\theta$ が変化する $l = 1$ の光渦となっているが、左回りに位相 $l\theta$ が変化する光渦も存在し、そのときモード l は $l = -1$ となる。

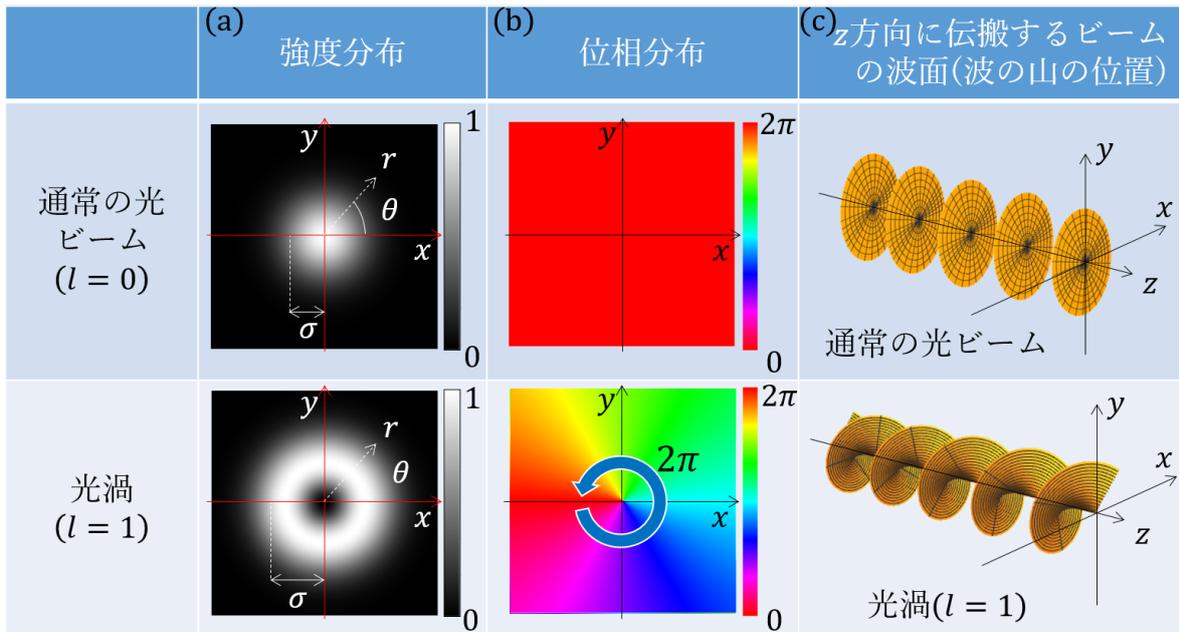


図 2.1 通常の光ビームと光渦 (a) 光ビーム断面の強度分布 (b) 光ビーム断面の位相分布 (c) 光ビームの波面

第 3 章

複素振幅の幾何学変換

第 2 章では光渦のモード分離、モード変換のどちらにも使用する光波の複素振幅の幾何学的変換について述べる。伝搬する光波について考えるため、フレネル回折積分と凸レンズを用いた $2f$ 系について述べ、積分計算を実関数と複素関数において解くための位相停留法について説明する。そして入射面から出射面にかけての条件を満たす変換式について述べ、その幾何学変換を実現するために光波に与えるべき位相分布について述べる。

3.1 幾何学変換のイメージ (拡大や縮小)

まず幾何学変換についての説明を行うために直交座標系の幾何学変換を考える。例として本研究で用いる幾何学変換を図 3.1 に示す。(a) は拡大変換、(b) は対数極座標変換、(c) は分数指数 (扇形) 変換の幾何学変換を示す。それぞれ元の座標系を拡大したもの、円環の分布から線状の分布、円環から扇形の分布に変換されていることが分かる。それぞれの変換については後に詳しく説明する。

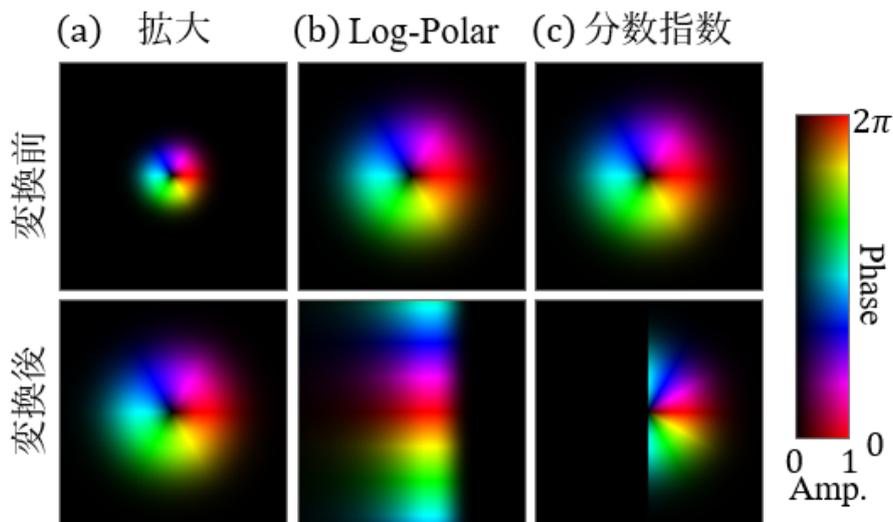
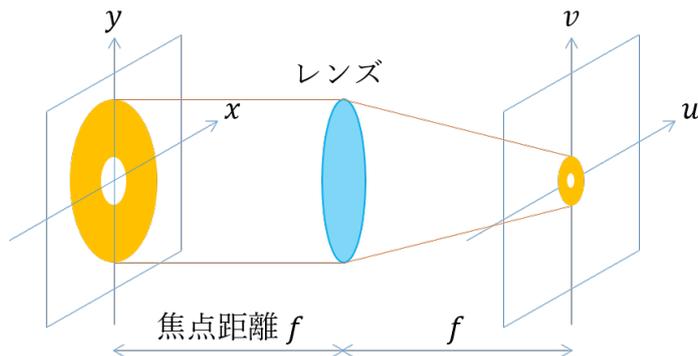


図 3.1 座標変換の例 (a) 拡大変換 (b) 対数極座標変換 (c) 分数指数 (扇形) 変換

3.2 実関数の幾何学変換



$$E_{\text{in}}(x, y) \rightarrow \text{フーリエ変換} \rightarrow E_{\text{out}}(u, v) = \underset{\text{フーリエ変換}}{FT}[E_{\text{in}}(x, y)]$$

図 3.2 レンズを用いた $2f$ 系

3.2 実関数の幾何学変換

図 3.2 のようにある振幅分布 $E_{\text{in}}(x, y)$ を焦点距離 f のレンズを通過し、 $z = 0$ から $z = 2f$ まで伝搬させ出力 $E_{\text{out}}(u, v)$ を得るシステムを $2f$ 系と呼ぶ。ここで、 $E_{\text{in}}(x, y)$ にある位相分布 $\varphi(x, y)$ を付加し、 $E_{\text{out}}(u, v)$ に含まれる余分な位相項を二つ目の位相分布 $\Psi(u, v)$ を与えることにより消去することで所望の幾何学変換を得ることができる。

3.2.1 フレネル積分と $2f$ 系の入出力関係

フレネル回折積分と $2f$ 系についての説明を行う。 $z = 0$ の入射面 $\mathbf{r} = (x, y)$ における複素振幅 $E_{\text{in}}(\mathbf{r})$ に対して位相分布 $\varphi(\mathbf{r})$ を付加する。その後、距離 z だけ伝搬した出射面 $\mathbf{s} = (u, v)$ における複素振幅 $E_{\text{out}}(\mathbf{s}, z)$ はフレネル回折積分を用いて、

$$E_{\text{out}}(\mathbf{s}, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \int E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} e^{i\frac{k}{2z}|\mathbf{r}-\mathbf{s}|^2} d\mathbf{r} \quad (3.1)$$

である。式 (3.1) を用いて入射面 $z = f$ までの伝搬を計算し、 $z = f$ の平面 (\mathbf{t}) に焦点距離 f の凸レンズを配置する。凸レンズの位相分布はレンズ中心からの距離 $|\mathbf{t}|^2$ に比例し、焦点距離 f の凸レンズの位相分布は $\exp\left(-i\frac{k}{2f}|\mathbf{t}|^2\right)$ である。その後距離 $z = 2f$ まで伝搬させる。これを $2f$ 系と呼び、入出力関係は

$$E_{\text{out}}(\mathbf{s}, 2f) = -i\frac{e^{i2fk}}{2f\lambda} \int E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \exp\left[-i\frac{k}{f}\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}\right] d\mathbf{r} \quad (3.2)$$

$$= -i\frac{e^{i2fk}}{2f\lambda} \mathcal{F}\left[E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})}\right] \left(\frac{k}{f}\mathbf{s}\right) \quad (3.3)$$

となるため $2f$ の出力面における電場 $E_{\text{out}}(\mathbf{s}, z)$ は $E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ のフーリエ変換と一致する。

3.2 実関数の幾何学変換

3.2.2 位相停留法

式 (3.3) の $2f$ 系を位相停留法による近似計算を考える。位相が早く変化するとき、変化がゆるやかになる停留点すなわち微分値が 0 となる位相停留点の条件として

$$\nabla \left(\varphi(\mathbf{r}) - \frac{k}{f} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \right) = 0 \quad (3.4)$$

である必要がある。ここで $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) = \frac{k}{f} \nabla(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) = \frac{k}{f} \mathbf{s} \quad (3.5)$$

である。よって

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \frac{k}{f} u, \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \frac{k}{f} v \quad (3.6)$$

である。式 (3.6) の x, y 成分をそれぞれ y, x で偏微分すれば式 (3.6) の $\varphi(x, y)$ が解を持つ条件 (連続条件) として

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.7)$$

が導かれる。したがって式 (3.7) の連続条件を満たす所望の幾何学変換 $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ を実装したい場合、式 (3.6) の偏微分方程式を $\varphi(x, y)$ について解き、 $2f$ 系の入射面に $\varphi(x, y)$ を配置すれば良い。ただし、位相分布 $\varphi(x, y)$ を与えたことにより $\varphi(x, y)$ が $u-v$ 座標の関数となった $\varphi(x(u, v), y(u, v))$ と、フーリエ変換によって加わる項が余分な位相として出射面に現れる。よって、2 つ目の位相分布補正用の位相分布 $\Psi(u, v)$ を用いて余分な位相を削除する必要があるため、式 (3.3) を位相停留法を用いて解くことで求める。位相停留点を (x_0, y_0) として、式 (3.6) より $\left. \frac{\partial^2 \varphi(x_0, y_0)}{\partial x^2} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \varphi_{xx}$, $\left. \frac{\partial^2 \varphi(x_0, y_0)}{\partial y^2} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \varphi_{yy}$, $\left. \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x_0, y_0) \right|_{x=x_0, y=y_0} = \varphi_{xy}$ とする。ここで、 $\frac{k}{f} u = k_x$, $\frac{k}{f} v = k_y$ として式 (3.3) を解くと

$$E_{\text{out}}(\mathbf{s}, 2f) = -i \frac{e^{i2fk}}{2f\lambda} \frac{E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(x_0, y_0)} e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)}}{2\pi i (\varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.8)$$

となる。ここで、補正すべき余分な位相項は $\varphi(x_0, y_0) - (k_x x_0 + k_y y_0)$ であるので、位相補正用の位相分布 $\Psi(u, v)$ は

$$\Psi(u, v) = -\varphi(x_0, y_0) + (k_x x_0 + k_y y_0) \quad (3.9)$$

を与えれば良い。

3.3 $2f$ 系内における位相停留条件

式 (3.1) のフレネル回折積分を位相停留法による近似計算を考えると、位相停留点の条件として

$$\nabla \left(\varphi(\mathbf{r}) + \frac{k}{2z} |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 \right) = 0 \quad (3.10)$$

である必要があるため、

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) = -\frac{k}{2z} \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = -\frac{k}{z} (\mathbf{r} - \mathbf{s}) \quad (3.11)$$

である。凸レンズ通過後のフレネル回折積分について、レンズからの伝搬距離は $z - f$ で、 $z \geq f$ とすると

$$E_{\text{out}}(\mathbf{s}, z) = -i \frac{e^{ikz}}{\lambda z} \int E_{\text{in}}(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})} \exp \left[-i \frac{k}{f} \left\{ \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} - \left(1 - \frac{z}{2f} \right) |\mathbf{r}|^2 \right\} \right] d\mathbf{r} \quad (3.12)$$

である。同様に位相停留条件について計算すると

$$\nabla \varphi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\frac{k}{z} (\mathbf{r} - \mathbf{s}) & (0 \leq z \leq f) \\ -\frac{k}{f} \left\{ \left(2 - \frac{z}{f} \right) \mathbf{r} - \mathbf{s} \right\} & (f \leq z \leq 2f) \end{cases} \quad (3.13)$$

が得られる。式 (3.13) は第一式がレンズの手前、第二式がレンズ後の伝搬の条件式である。式 (3.13) を用いれば $2f$ 系を用いた幾何学変換の過程を計算することができる。例えば、～で示した拡大、対数極座標変換、分数指数の伝搬途中の座標系の変化を下に示す。

3.4 光渦モード変換に有用な座標変換の例

$2f$ 系における座標変換の途中計算の簡単な例として x - y 平面から u - v 平面への幾何学変換について $(u, v) = (\alpha x, \alpha y)$ を行った結果を図 3.3 に示す。(a) は $\alpha = 2$ の変換、(b) は $\alpha = 0.5$ の変換であり、それぞれ 2 倍と $1/2$ に変換されたことがわかる。

ここでは、光渦モード分離とモード変換に有用な座標変換の伝搬の様子を 2 つ示す。複素平面 $\zeta = x + iy = r e^{i\theta}$ から $\omega = u + iv = \rho e^{i\phi}$ への座標変換を考える。

3.4.1 Log-Polar(円 \leftrightarrow 線)

$\omega = \log \zeta$ とする変換を対数極座標変換 (Log-Polar) と呼ぶ。ここで

$$(u, v) = \left(\log \sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x} \right), (x, y) = (e^u \cos v, e^v \sin v) \quad (3.14)$$

であり、図 3.4 のようになる。円から線への幾何学変換となっていることがわかる。この変換については第 4 章の光渦モード分離に使用しているため、そちらで詳しい説明を行う。

3.5 複素形式

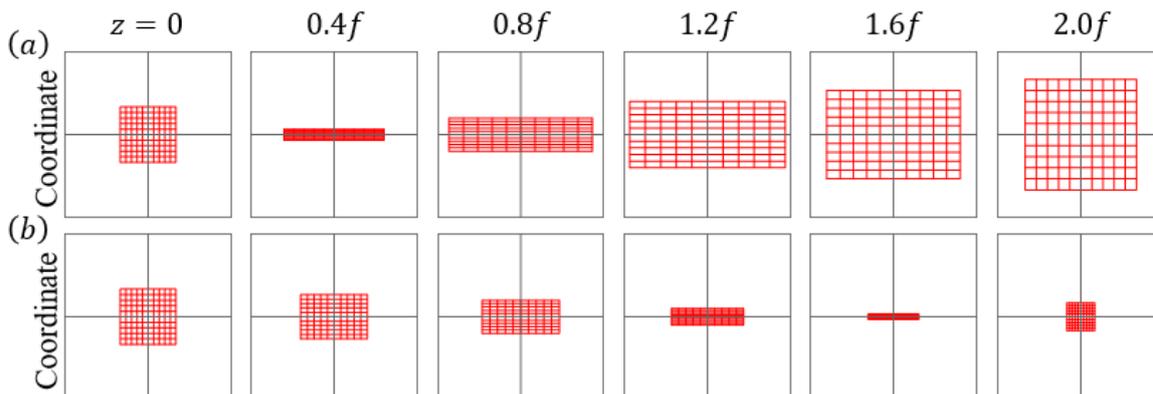


図 3.3 直交座標系の幾何学変換 (a)2 倍に変換 (b)0.5 倍に変換

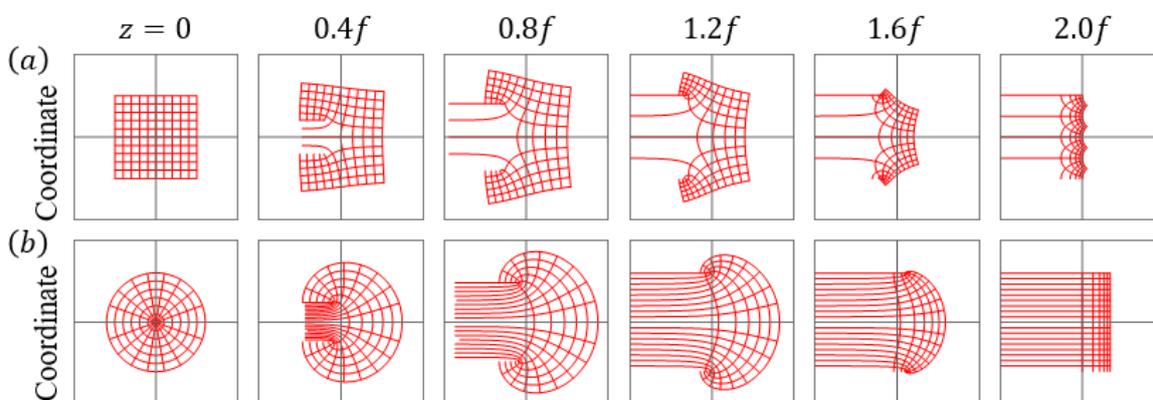


図 3.4 対数極座標変換 (a) 直交座標系 (b) 極座標系

3.4.2 分数指数 ($\omega \leftrightarrow 1/N$ の扇形)

$\omega = \zeta^{\frac{1}{N}}$ とする変換を図 3.5 に示す。ここで、

$$(\rho, \phi) = \left(r^{\frac{1}{N}}, \frac{\theta}{N} \right), (r, \theta) = (\rho^N, N\phi) \quad (3.15)$$

であり、円から $1/N$ の扇形の分布となることがわかる。この変換については第 5 章の光渦モード変換に使用しているため、そちらで詳しい説明を行う。

3.5 複素形式

3.5.1 可積分条件の複素表現とその解

$2f$ 系に対する停留点の条件を複素関数として書き表すために、上記の議論を複素関数へと拡張して、 ζ から ω への座標変換を考える [14]。 $\zeta = x + iy$ と $\omega = u + iv$ という複素数を導入し、 $\varphi(x, y)$ を ζ と $\bar{\zeta}$ で書き表した関数 $\varphi(\zeta, \bar{\zeta})$ を考える。ここで、伝搬距離 z の座

3.5 複素形式

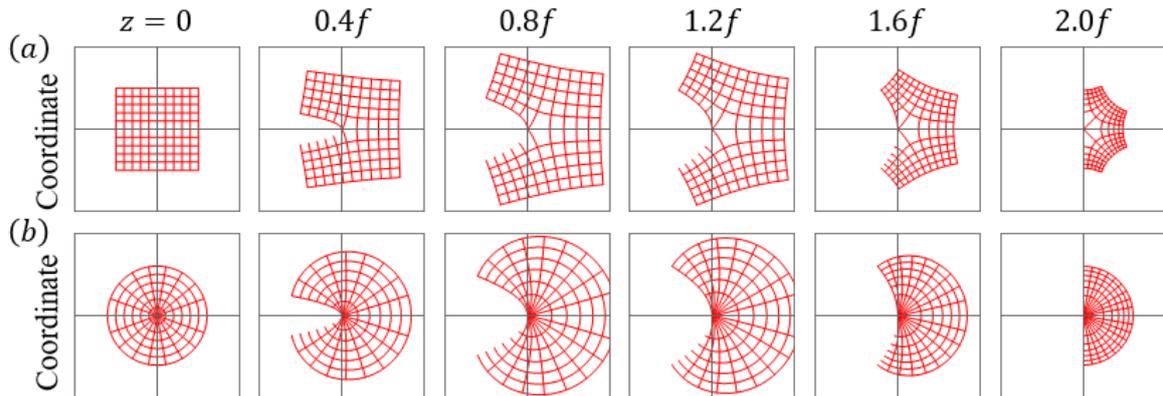


図 3.5 分数指数 $N = 2$ の幾何学変換 (a) 直交座標系 (b) 極座標系

標系を $\omega(z)$ とする。これらを用いれば式 (3.13) の第一式を複素領域において書き直すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(x, y) = \frac{k}{f} \{ (x - u) + i(y - v) \} \quad (3.16)$$

である。ここで、複素偏微分作用素 (Wirtinger operator) $\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ を用いれば

$$2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \varphi(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{k}{f} \{ (x + iy) - (u + iv) \} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta} = \frac{k}{2f} (\zeta - \omega(z)) \quad (3.18)$$

となる。式 (3.13) の第二式も同様に書き直すと

$$\frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = \begin{cases} -\frac{k}{2z} (\zeta - \omega(z)) & (0 \leq z \leq f) \\ -\frac{k}{2f} \left\{ \left(2 - \frac{z}{f} \right) \zeta - \omega(z) \right\} & (f \leq z \leq 2f) \end{cases} \quad (3.19)$$

が得られる。特に $z = 2f$ のときは

$$\frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{k}{2f} \omega(2f) \quad (3.20)$$

が成立する。 $\varphi(\zeta, \bar{\zeta})$ が実関数であることを利用すれば、両辺の複素共役をとって以下も成り立つ。

$$\frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta} = \begin{cases} -\frac{k}{2z} (\bar{\zeta} - \bar{\omega}(z)) & (0 \leq z \leq f) \\ -\frac{k}{2f} \left\{ \left(2 - \frac{z}{f} \right) \bar{\zeta} - \bar{\omega}(z) \right\} & (f \leq z \leq 2f) \end{cases} \quad (3.21)$$

3.5.2 連続条件を満たす関数としての反正則関数

まず、複素数の正則関数 $g(\zeta)$ を考える。 $g(\zeta)$ の実部を $u(x, y)$ 、虚部を $v(x, y)$ とおくと

$$g(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.22)$$

3.6 幾何学変換に必要なとなる位相分布

であり、この正則関数は以下の (Cauchy-Riemann) の関係式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.23)$$

したがって、式 (3.7) の連続条件は複素数の正則関数が満たす (Cauchy-Riemann) の関係式の一つの符号を反転した式となっている。そこで正則な複素関数 $g(\zeta)$ に対して、 $z = 2f$ における座標変換式として $\bar{\zeta}$ を変数とした

$$\omega(2f) = g(\bar{\zeta}) \quad (3.24)$$

を考えると、式 (3.24) は反正則関数と呼ばれる。 $g(\bar{\zeta})$ の実部を $U(x, y)$ 、虚部を $V(x, y)$ とおくと、 $\bar{\zeta} = x - iy$ なので $U(x, y)$ と $V(x, y)$ は式 (3.22) の $u(x, y)$ と $v(x, y)$ の y 座標の符号を反転した式であり、

$$g(\bar{\zeta}) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (3.25)$$

$$= u(x, -y) + iv(x, -y) \quad (3.26)$$

である。したがって $g(\bar{\zeta})$ に対する Cauchy-Riemann の関係式は

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.27)$$

となる。これは式 (3.7) の連続条件を満たしており、反正則関数 (anti-analytic function) が満たす連続条件の複素表現である。以上のことから、反正則関数で表現される幾何学変換は $2f$ 系で実装可能である。

3.6 幾何学変換に必要なとなる位相分布

3.6.1 $2f$ 系の途中における位相停留法の式

$2f$ 系で変換される過程での幾何学変換の様子を考える。距離 z 伝搬した座標系を $\omega(z)$ と表すと式 (3.19,3.20) より

$$\omega(0) = \zeta \quad (3.28)$$

$$\omega(2f) = \frac{2f}{k} \frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} \quad (3.29)$$

である。したがって式 (3.19) より

$$\omega(z) = \begin{cases} \zeta + \frac{z}{f} \omega(2f) & (0 \leq z \leq f) \\ \left(2 - \frac{z}{f}\right) \zeta + \omega(2f) & (f \leq z \leq 2f) \end{cases} \quad (3.30)$$

となる。この $\omega(z)$ を計算することで、位相分布 $\varphi(\zeta, \bar{\zeta})$ を与えた後の伝搬中の振幅分布を知ることができる。

3.6 幾何学変換に必要なとなる位相分布

3.6.2 必要な変換用と補正用の位相分布

$2f$ 系において幾何学変換を行う際に必要な位相分布は、上で求めた式 (3.20) とその位相共役より

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{k}{2f} g(\bar{\zeta}) \\ \frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \zeta} = \frac{k}{2f} \overline{g(\bar{\zeta})} = \frac{k}{2f} g(\zeta) \end{cases} \quad (3.31)$$

である。両式をそれぞれ $\zeta, \bar{\zeta}$ で積分すると

$$\begin{cases} \varphi(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{k}{2f} \int g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} + C(\zeta) \\ \varphi(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{k}{2f} \int g(\zeta) d\zeta + C'(\bar{\zeta}) \end{cases} \quad (3.32)$$

となる。ここで C と C' は積分定数である。式 (3.32) の 2 式を満たす関数 $\varphi(r, \theta)$ は、

$$\varphi(r, \theta) = \frac{k}{2f} \left(\int g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} + \int g(\zeta) d\zeta \right) \quad (3.33)$$

$$= \frac{k}{f} \operatorname{Re} \left[\int g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \right] \quad (3.34)$$

である。また、補正するべき位相分布は式 (3.9) に位相停留点 $\bar{\zeta}_0(\omega)$ を用いて

$$\Psi(\rho, \phi) = -\varphi(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) + \frac{k}{2f} (\omega_0 \bar{\zeta}_0 + \bar{\omega}_0 \zeta_0) = \frac{k}{f} \operatorname{Re} \left[\omega_0 \bar{\zeta} - \int g(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \right] \quad (3.35)$$

となる。

第 4 章

幾何学変換を用いた光渦モード分離

本章では、3 章で少しふれた対数極座標変換を用いて光複素振幅の幾何学変換を行い、円環の分布から $2\pi l$ の位相勾配を保持した線状の分布に変換することで、それぞれのモードの持つ位相勾配により別々の場所に集光させ分離する手法を説明する。また、円環の分布から線状の分布に変換する際に回折格子の効果を用いて、一つの円環から複数の線状の分布へと変換することで、モード間の干渉を減らす手法についても説明する。そして、それぞれの手法について実験を行い、モード間干渉を用いた比較を行う。

4.1 本研究の分離手法の概要

M を用いた光渦のモード分離には、レンズのフーリエ変換作用を利用して光の座標変換を行う [15]。光渦の円形の強度分布に SLM で位相を与え、その分布をレンズを通してフーリエ変換することで、図 4.1(a) のように位相勾配を保持したまま直線状の強度分布へと変換する。この座標変換を対数極座標変換と呼ぶ。 $0 \sim 2\pi l$ の位相勾配をもった直線状の光ビームは、図 4.1(b) のように元の光渦のモード l に依存して別々の場所に集光される。

この対数極座標変換を光学系で実現するために我々が用いる方法は図 4.2 のような光ビームの (x, y) 平面から (u, v) 平面への幾何学変換である。図 4.2 では SLM が透過型となっているが、実験で用いるのは反射型の SLM である。元の強度分布 $E_l(x, y)$ に座標変換用の位相分布 $\varphi(x, y)$ を与えレンズでフーリエ変換し、それによって生じた余分な位相を位相補正用の分布 $\Psi(u, v)$ を与えて消去することで、位相情報を保持した所望の座標変換を得ることができる。対数極座標変換を光学系で行うことで、光渦の円状の強度分布から位相情報を保持したまま直線状の強度分布へと変換すると、元の光渦の位相勾配によって違う場所に集光させることができるため、光渦のモード l ごとに分離することができる。

4.1.1 対数極座標変換

本節では対数極座標変換 (Log-Polar 変換) に必要となる位相分布を求める。平面を複素数 ζ を用いて表すと

$$\zeta = x + iy = re^{i\theta} \quad (4.1)$$

4.1 本研究の分離手法の概要

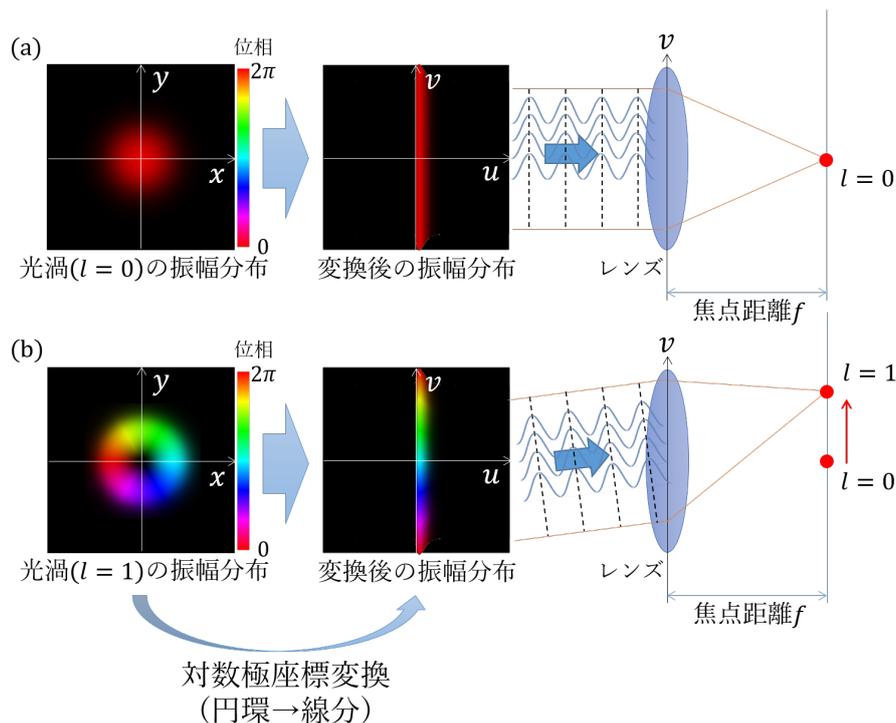


図 4.1 対数極座標変換による光渦モード分離 (a) $l = 0$ (b) $l = 1$

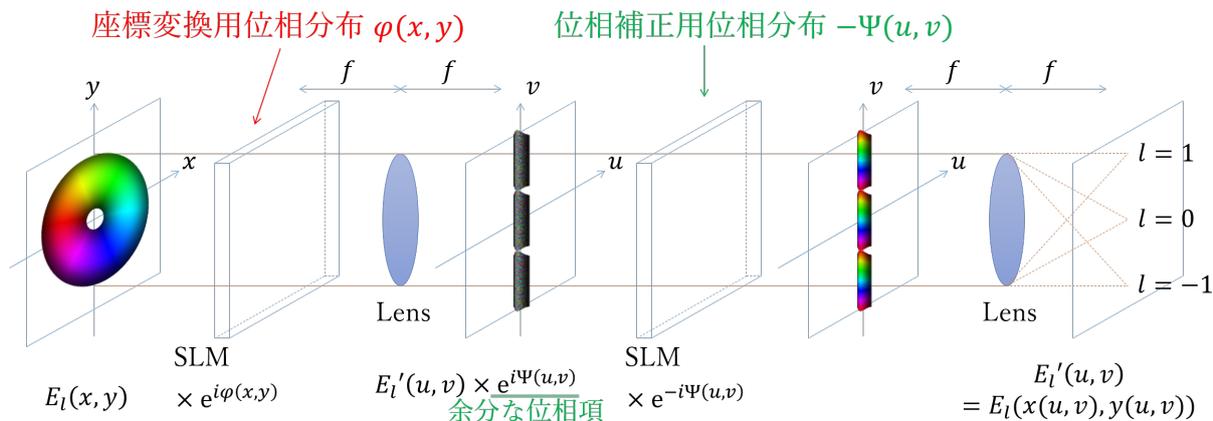


図 4.2 幾何学変換の全体像

となり、変換後の平面を $\omega = u + iv$ として、幾何学変換を表す反正則関数として複素対数関数を考えると

$$\omega = g(\bar{\zeta}) = \log \bar{\zeta} = \log r e^{-i\theta} = \log r - i\theta \quad (4.2)$$

となる。式 (4.2) より、 (x, y) 平面において原点から距離 r 、偏角 θ の点は、図 4.3 のように実軸が $\log r$ 、虚部が θ の点へと座標変換される。ここで、幾何学変換のための反正則関数に定数 p, q を導入すると

$$g(\bar{\zeta}) = q \log \frac{\bar{\zeta}}{p} = q (\log r - \log p - i\theta) \quad (4.3)$$

4.1 本研究の分離手法の概要

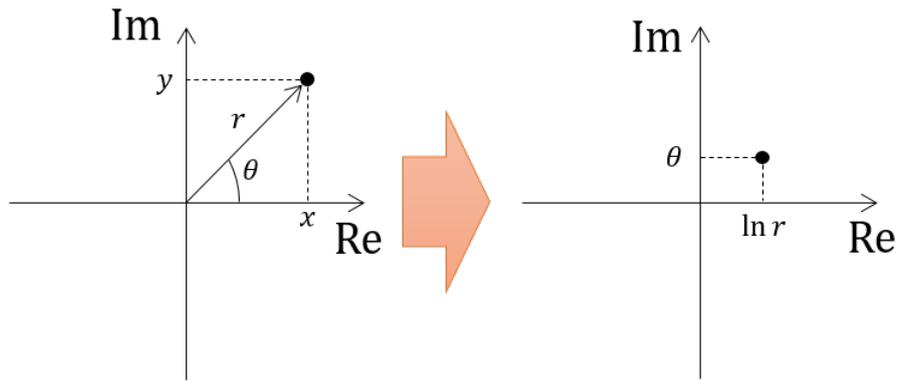


図 4.3 (x, y) 平面から $(\log r, \theta)$ 平面へ座標変換

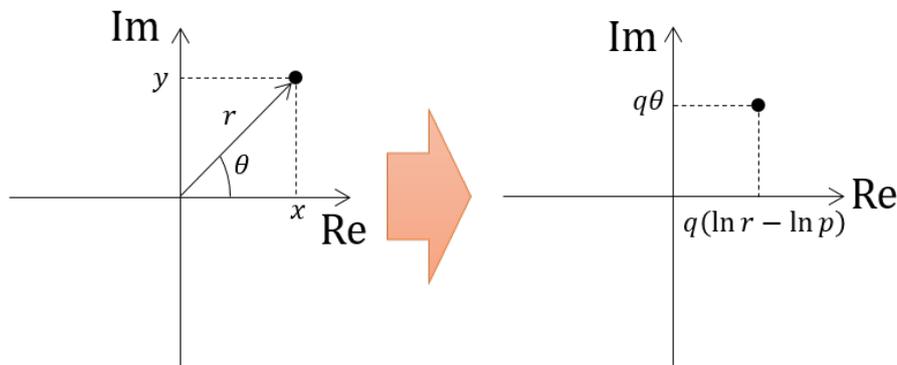


図 4.4 pq を導入した (x, y) 平面から $(\log r, \theta)$ 平面へ座標変換

となり、図 4.4 のように定数 q が変換後のスケールを決め、定数 p によって変換後の実軸が移動する。この変換式 (4.3) を (x, y) 座標から (u, v) 座標への写像として表すと

$$(u, v) = q(\log r - \log p, -i\theta) = q \left(\log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{p}, -\tan^{-1} \frac{y}{x} \right) \quad (4.4)$$

となる。この変換を実現することで図 4.1 のように円から直線状の強度分布への座標変換ができる。変換後の光は図 4.1 のように、変換前の光渦の位相勾配によって別々の場所に集光される。しかし、光ビームの座標変換を直接行うことはできないため、位相停留法を用いて SLM に与える位相 $\varphi(x, y)$ を求め、位相変調した光ビームをレンズでフーリエ変換した焦点面で座標変換を実現する。

4.1 本研究の分離手法の概要

4.1.2 対数曲座標変換に必要な位相分布

2f系において幾何学変換を実現するために与える位相分布 $\varphi(x, y)$ は式 (3.34) より、

$$\varphi(x, y) = \frac{k}{f} \operatorname{Re} \left[\int q \log \frac{\bar{\zeta}}{p} d\bar{\zeta} \right] \quad (4.5)$$

$$= \frac{kq}{f_L} \left(-y \tan^{-1} \frac{y}{x} + x \log \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{p} - x \right) \quad (4.6)$$

となる。位相補正については式 (3.35) より

$$\Psi(u, v) = \frac{k}{f} \operatorname{Re} \left[qp \exp \left(\frac{\omega}{q} \right) \right] = \frac{k}{f} qp \exp \left(\frac{u}{q} \right) \cos \left(\frac{v}{q} \right) \quad (4.7)$$

である。

光ビームに一つ目の位相ホログラム $\varphi(x, y)$ を与えレンズでフーリエ変換すると、その焦点面で直線状の強度分布に座標変換される。そこに二つ目の位相ホログラム $\Psi(u, v)$ を与えレンズでフーリエ変換すると、余分な位相項が消去されて光ビームのモード l によって異なる位相勾配をもつため、レンズの焦点面で異なる場所に集光させることができる。

4.1.3 対数曲座標変換に用いる位相分布の改良

4.1.1 節の対数極座標変換では、 $0 \sim 2\pi l$ まで変化するモード l 光渦の場合だと位相が $0 \sim 2\pi l$ 変化する直線に変換できた。直線に変換した後の分離にはレンズによる集光を用いるが、位相の勾配量が大きいほど集光した際に集光点が小さくなる特性を活かし、分離の度合いを向上させることができる。そこで、位相分布に回折格子の性質 [11] を加えることにより、直線上の分布を複製し縦に 3 つ並べる変換を考える。このとき与える位相分布 $\varphi'(x, y)$ は

$$\begin{aligned} \varphi'(x, y) = & \frac{2\pi q}{\lambda f} \left(y \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{x}{2} \ln (x^2 + y^2) + px \right) \\ & + \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{m=-N}^N b_m \sin \left[\frac{2\pi\Theta}{\lambda} my + a_m \right]}{\sum_{m=-N}^N b_m \cos \left[\frac{2\pi\Theta}{\lambda} my + a_m \right]} \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

である。ここで、 a_m, b_m は均一な強度の複製を実現するための定数であり、 N により $2N + 1$ の複製されたビームの数が生成され、 $\Theta = (2\pi d)/f$ は複製したビーム間を分ける角度である。また、位相補正のための分布 $\Psi'(u, v)$ は

$$\Psi'(u, v) = \sum_{m=-N}^N \left[- \left\{ \frac{2\pi L \exp(p-1)}{\lambda f} \exp \left(-\frac{u}{L} \right) \cos \left(\frac{v}{L} \right) - \phi_{bc}(m) \right\} \operatorname{rect} \left(\frac{v - 2m\pi L}{2\pi L} \right) \right] \quad (4.9)$$

であり、 $L = (\Theta f)/2\pi$ 、 $\phi_{bc}(m)$ は $m = (-1, 0, 1)$ に対して $(0, 3\pi/2, 0)$ 、 $\operatorname{rect}(x)$ は $|x| < \frac{1}{2}$ で 1、それ以外で 0 となる矩形関数である。図 4.5 と図 4.6 に、対数極座標変換に複製効果

4.2 実験

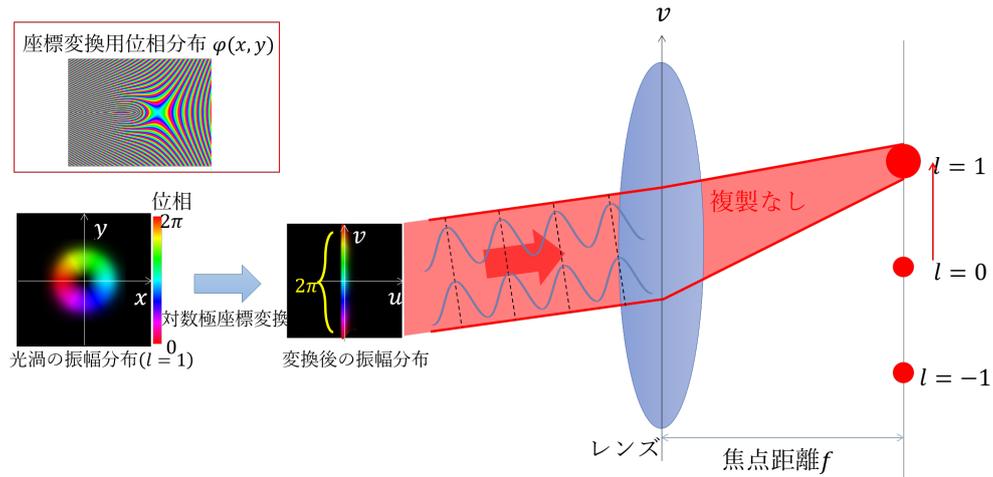


図 4.5 複製していないモード分離

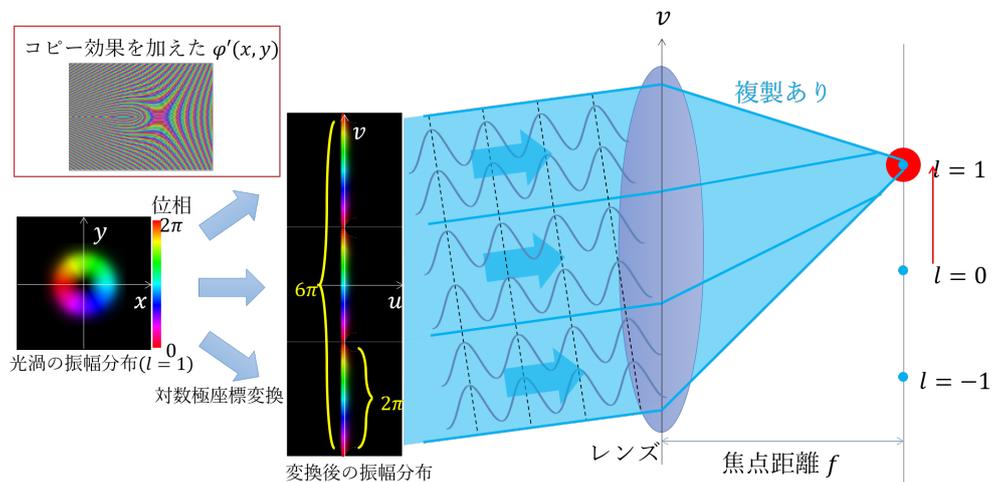


図 4.6 複製したモード分離

を加えたものと加えていないものを示す。座標変換により3つに複製することで集光した際に $1/3$ の大きさの強度分布にすることができる。

4.2 実験

4.2.1 実験構成

実験系を図 4.7 に示す。実験系としては光渦の生成、SLM を用いた複素振幅の幾何学的変換、CCD カメラによる測定系の3つから構成されている。光源は 635nm のファイバピグテール LD であり、水平偏光を入射している。その後、 q -plate を用いて光渦を生成するが、QWP1, QWP2 それぞれの角度を 45° または 135° とすることで光渦モードの符号を選択する。今回用いる q -plate は $q = \frac{1}{2}$ であるため、 $l = 0, \pm 1$ について実験を行う。次に幾

4.2 実験

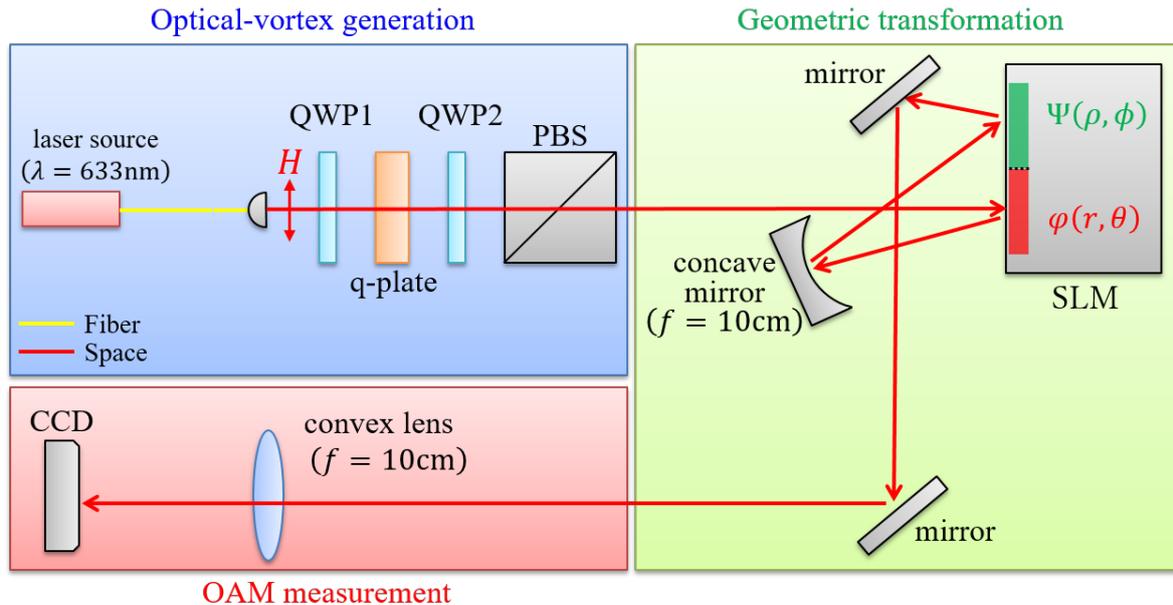


図 4.7 光渦モード分離の実験系

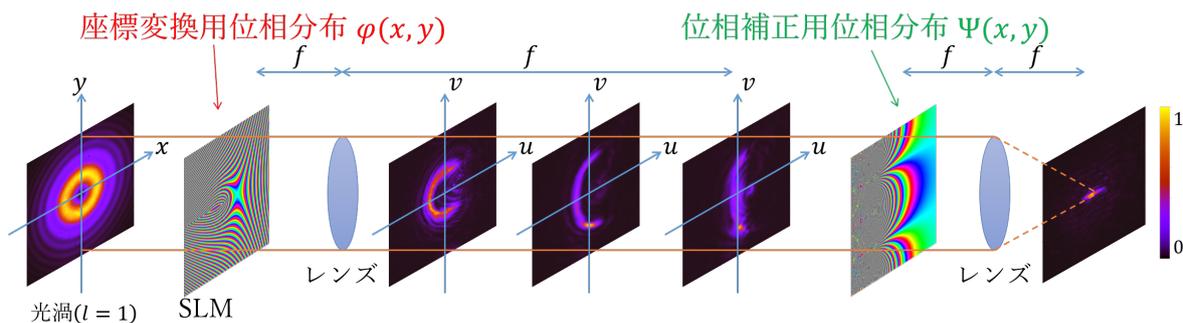


図 4.8 伝搬中の幾何学変換

何学的変換の部分について説明する。生成した光渦に座標変換のための位相分布 $\varphi(x, y)$ を与え、レンズのかわりに凹面鏡での反射によりフーリエ変換を行い $2f$ 伝搬後に補正の分布 $\Psi(u, v)$ を与える。実験系の簡素化のため、2つの位相分布は SLM の半分ずつに表示する。補正後に CCD カメラで光強度分布を観測した。

4.2.2 実験結果

実際に幾何学変換を行った結果を図 4.8 に示す。光渦の持つ円環の強度分布から直線状の強度分布へと変換され、その後レンズで集光することでモード分離が実現できることが分かる。次に、 $l = -1, 0, +1$ の光渦を分離した際の位置のずれを図 4.9(a) に示す。この図の破線の断面を見てみると図 4.9(b) のように各モードごとに分離できていることがわかる。モード間の分離の度合いを評価するため、図 4.10 のようにモード間干渉というものを定義する。2つのモード間 l_n, l_m に対して2つの強度分布の中央位置を境界として、境界を超える面積

4.2 実験

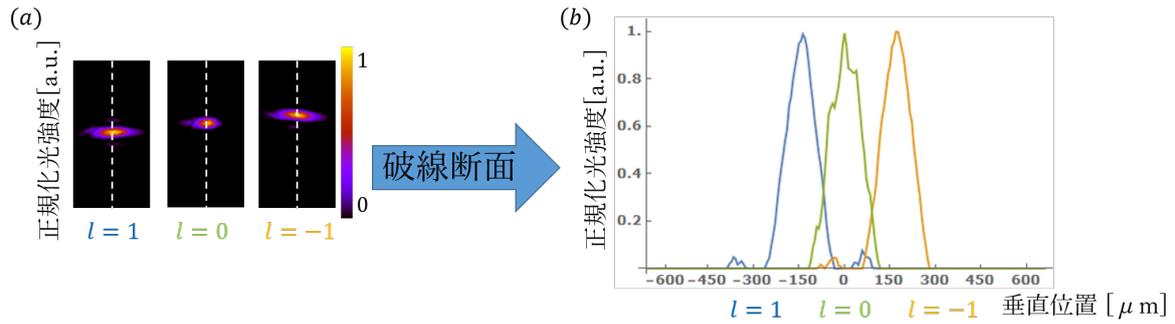


図 4.9 モード分離の実験結果 (a) 各モードの位置ずれ (b) 各モードの破線断面

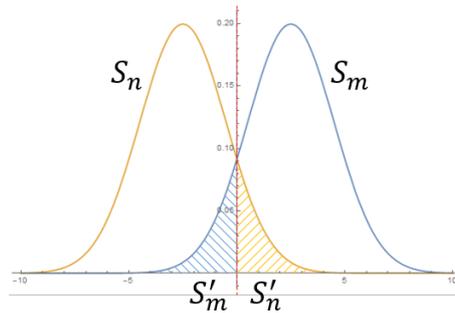


図 4.10 モード間干渉

をそれぞれ S'_n, S'_m とし、各モードの面積を S_n, S_m とするとモード間干渉 $R_{n \rightarrow m}, R_{m \rightarrow n}$ はそれぞれ

$$R_{n \rightarrow m} \equiv \frac{S'_n}{S_n}, R_{m \rightarrow n} \equiv \frac{S'_m}{S_m} \quad (4.10)$$

で定義される。モード間干渉の評価結果を複製なしと 4.1.3 節で説明した複製ありの場合について図 4.11 に示す。それぞれのモード間干渉を比較すると、幾何学変換に回折格子の性質を入れて分布を複製することによって 8.18% から 0.98% と大幅に減少することがわかった。

4.2 実験

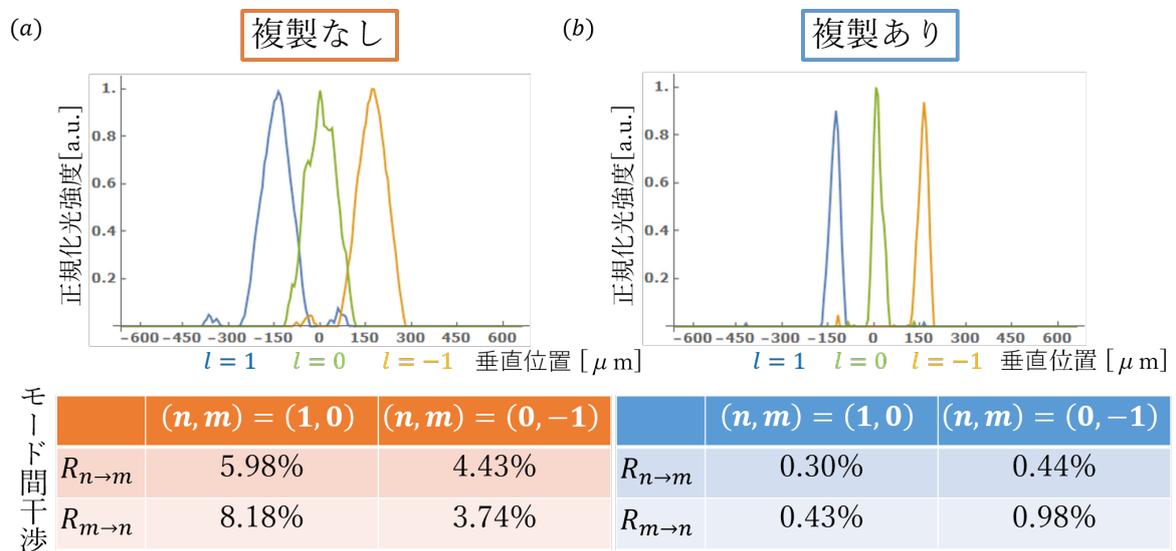


図 4.11 光渦モード分離の実験結果 (a) 複製なし (b) 複製あり

第 5 章

幾何学変換を用いた光渦モード変換

本章では 3 章で少しふれた分数指数 (扇形) 変換を用いて、光複素振幅の幾何学変換を行い、光渦の円環の分布から $2\pi l$ の位相勾配を保持した半円状の分布に変換する。また、半円状の分布を反対側に折り返した分布へと変換することにより、2 つの半円で $4\pi l$ の位相勾配を持った一つの円環へと変換できる。つまり、円環から半円へと幾何学変換を行うことで光渦のモード l を 2 通倍できる。同様に、半円ではなく $1/3$ の扇形へと変換した分布を 3 つ用いることによって、光渦のモード l を 3 通倍できる。2 通倍、3 通倍それぞれについて実験を行い、通倍変換された分布に所望モードが含まれる割合を求め、含まれる平均モードも求める。

5.1 光渦モードの通倍変換

5.1.1 光渦モードの N 通倍

次に、光渦モードを N 通倍変換するための座標変換について考える。各平面を極座標 (r, θ) から (ρ, φ) への変換と考え (x, y) 平面でのある点を $\zeta = x + iy = re^{i\theta}$ とすると、 l の光渦モードをもつ光複素振幅は式 (2.5) より $E_l(r, \theta) \propto E_0(r) (re^{i\theta})^l \propto \zeta^l$ となる。ここで $E_0(r)$ は基本ガウシアンモードの光複素振幅である。幾何学変換を表す反正則関数として

$$g(\bar{\zeta}) = \alpha \bar{\zeta}^{1/N} \quad (5.1)$$

を考える。ここで α は任意の実定数である。2 つの座標の関係を極座標で表せば、

$$\omega = \rho e^{i\phi} = \alpha (re^{-i\theta})^{1/N} = \alpha r^{1/N} e^{-i(\theta+2n\pi)/N} \quad (5.2)$$

となる。複素数の分数べき関数は多価関数であり、ある ζ に対して N 個の ω が存在するため

$$(\rho, \phi) = \left(\alpha r^{1/N}, -\frac{\theta + 2n\pi}{N} \right), \quad (n = 0, \dots, N-1) \quad (5.3)$$

であり、逆に (r, θ) は

$$(r, \theta) = \left(\left(\frac{\rho}{\alpha} \right)^N, -N\phi \right) \quad (5.4)$$

5.1 光渦モードの通倍変換

と書ける。式 (5.1) より $(\bar{\zeta} = (\omega/\alpha)^N, \zeta = (\bar{\omega}/\alpha)^N)$ なので、モード l の光渦の複素振幅 $\zeta^l = r^{|l|}e^{il\theta}$ は

$$\zeta^l = \left(\frac{\bar{\omega}}{\alpha}\right)^{Nl} = r^{N|l|}e^{-iNl\theta} \quad (5.5)$$

となるためモード l から $-Nl$ に $-N$ 通倍される。この通倍変換は式 (5.3) のように多価関数を含むため、 N 通倍するためには N 個の幾何学変換を実現するための位相分布 $\varphi_n (n = 1, \dots, N)$ が必要である。

式 (3.34) より、 N 通倍を実現するために必要な位相分布 $\varphi_n(r, \theta)$ は

$$\varphi_n(r, \theta) = \frac{\alpha k}{f} \operatorname{Re} \left[\int \bar{\zeta}^{\frac{1}{N}} d\bar{\zeta} \right] \quad (5.6)$$

$$= \frac{\alpha k}{f} \operatorname{Re} \left[\frac{N}{N+1} \bar{\zeta}^{1+\frac{1}{N}} \right] \quad (5.7)$$

$$= \frac{\alpha k}{f} \frac{Nr^{1+\frac{1}{N}}}{N+1} \cos \left[\frac{(N+1)\theta + 2n\pi}{N} \right] \quad (5.8)$$

である。求めた $\varphi(r, \theta)$ により強度分布は所望の変換が得られるが、幾何学変換のために与えた位相分布が (ρ, ϕ) 平面の関数に変換された項とフーリエ変換のために加わる項の2つが余分な項として残るため、それを補正しなければ所望の位相分布が得られない。補正すべき位相分布は

$$\Psi(\rho, \phi) = -\varphi(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) + \frac{k}{2f} (\omega_0 \bar{\zeta}_0 + \bar{\omega}_0 \zeta_0) \quad (5.9)$$

$$= \frac{k}{f} \left(\frac{\rho}{|\alpha|} \right)^N \left[\frac{\rho \cos[(N+1)\phi]}{N+1} \right] \quad (5.10)$$

であり、これを補正用の位相分布として与えることで所望の幾何学変換を得られる。

例として、 $N = 2$ のモード変換の概念図を図 5.1(a) に示す。上で説明したように2つの位相分布によって2つの座標変換を行う必要があり、それぞれの幾何学変換によって実現される分布を赤 ($n = 0$) と青 ($n = 1$) の点線で示している。それぞれ円環から半円に変換され、位相分布に注目すると $l \rightarrow -2l$ となっていることがわかる。 (r, θ) 座標での ζ は一点を表すが、 (ρ, ϕ) での ω は2つの幾何学変換によって二点となる。同様に $N = 3$ のモード変換の概念図を図 5.1(b) に示す。それぞれの幾何学変換によって実現される分布を赤 ($n = 0$) と青 ($n = 1$) と緑 ($n = 2$) の点線で示しており、 ζ の一点から ω の三点への変換となる。

5.1.2 複数の位相分布の混合

次に光渦モードを N 通倍する際に必要となる N 個の位相分布による位相変調をどのように実装するのか考える。今回位相変調に用いるのは1つの空間位相変調器のみであるため、

5.1 光渦モードの通倍変換

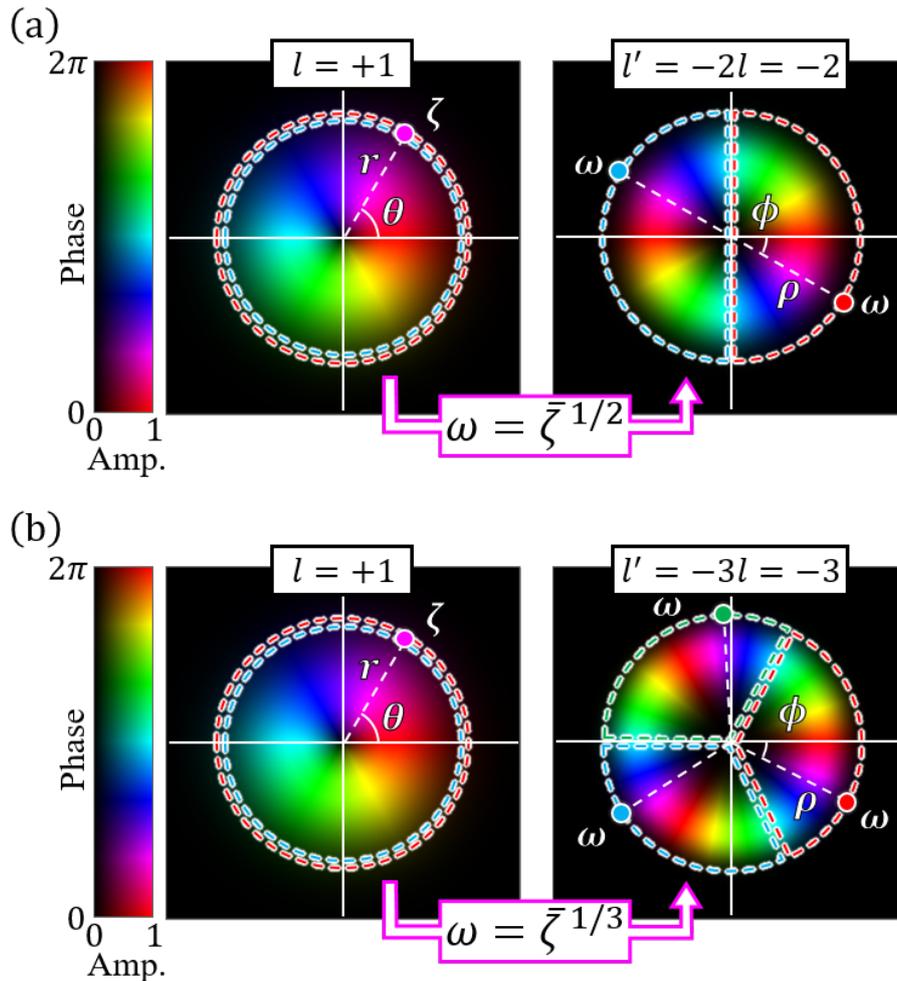


図 5.1 光渦 ($l = 1$) の通倍変換 (a)2 通倍 (b)3 通倍

N 個の位相変調を 1 つの位相分布 φ により実現する必要がある。 N 通倍するために必要な位相分布を $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ として与えると

$$A(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n(\mathbf{r})} \quad (5.11)$$

となり、振幅を表す $A(\mathbf{r})$ と位相を表す $e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ によって N 通倍が実現される。しかし、今回用いる SLM では強度の変換は行うことができないため、位相変調のみを用いて $A(r, \theta)$ の振幅変調を実現するために、文献 [16] を参考にして、まず式 (5.11) を 2 つの位相分布 $P_+(\mathbf{r})$ と $P_-(\mathbf{r})$ を用いて

$$A(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})} = \frac{1}{2} \left[e^{iP_+(\mathbf{r})} + e^{iP_-(\mathbf{r})} \right] \quad (5.12)$$

と表す。このとき

$$P_{\pm}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) \pm \cos^{-1} A(\mathbf{r}) \quad (5.13)$$

5.1 光渦モードの逡倍変換

とすれば式 (5.12) が成立する。更に式 (5.11) を単一の位相分布で実現するために、SLM のピクセル毎に 0 と 1 が交互に現れるチェック柄の分布 $\Pi_+(\mathbf{r})$ とそれと相補的なチェック柄の分布 $\Pi_-(\mathbf{r}) = 1 - \Pi_+(\mathbf{r})$ を用いて、お互いに 1 となる部分が重複しないように足し合わせ

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}) &= P_+(\mathbf{r})\Pi_+(\mathbf{r}) + P_-(\mathbf{r})\Pi_-(\mathbf{r}) \\ &= \varphi(\mathbf{r}) + \Pi_{\pm}(\mathbf{r}) \cos^{-1} A(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (5.14)$$

を位相ホログラムとして用いる。ここで、 $\Pi_{\pm}(\mathbf{r}) \equiv \Pi_+(\mathbf{r}) - \Pi_-(\mathbf{r})$ である。 $\Phi(\mathbf{r})$ を位相として与えることを考えると

$$e^{i(P_+(\mathbf{r})\Pi_+(\mathbf{r})+P_-(\mathbf{r})\Pi_-(\mathbf{r}))} \quad (5.15)$$

$$= e^{i(P_+(\mathbf{r})\Pi_+(\mathbf{r}))} e^{i(P_-(\mathbf{r})\Pi_-(\mathbf{r}))} \quad (5.16)$$

$$= \Pi_+(\mathbf{r})e^{iP_+(\mathbf{r})} + \Pi_-(\mathbf{r})e^{iP_-(\mathbf{r})} \quad (5.17)$$

と変形できる。2f 系による実装を考えるため、上の位相をフーリエ変換すると

$$\mathcal{F}[\Pi_+(\mathbf{r})e^{iP_+(\mathbf{r})}] + \mathcal{F}[\Pi_-(\mathbf{r})e^{iP_-(\mathbf{r})}] \quad (5.18)$$

$$= \mathcal{F}[\Pi_+(\mathbf{r})] * \mathcal{F}[e^{iP_+(\mathbf{r})}] + \mathcal{F}[\Pi_-(\mathbf{r})] * \mathcal{F}[e^{iP_-(\mathbf{r})}] \quad (5.19)$$

となる。ここで、 Π_+ は SLM のピクセルサイズ d として、周期 $2d$ の周期関数であるため、フーリエ級数展開すると、

$$\Pi_+ = \frac{1}{2} + \sum_{n,m \neq 0} [c_{n,m}] e^{i\frac{\pi}{d}(nx+my)}, \quad (5.20)$$

$$c_{n,m} = -\frac{\{(-1)^n - 1\} \{(-1)^m - 1\}}{2nm\pi^2} \quad (5.21)$$

である。よって、式 (5.19) は

$$\frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{iP_+ + iP_-}](k_x, k_y) + \sum_{n,m \neq 0} [c_{n,m}] \mathcal{F}[e^{iP_+} - e^{iP_-}](k_x - \frac{\pi}{d}n, k_y - \frac{\pi}{d}m) \quad (5.22)$$

となる。ここで、SLM のピクセルサイズ d は十分小さいため、上の式の第一項とそれ以外の項は波数空間上で十分に分離されている。したがって、 $(n, m) = 0$ に対応する第一項のみを抜き出し、逆フーリエ変換することで

$$\left(e^{iP_+(\mathbf{r})} + e^{iP_-(\mathbf{r})} \right) / 2 \quad (5.23)$$

となり、式 (5.11) の幾何学変換が実装できる。

5.1.3 2 逡倍のときに SLM に与える具体的な位相分布

ここで、光渦モードの 2 逡倍の場合に必要な具体的な位相分布の式を示す。 $N = 2$ の逡倍変換の場合、

$$\varphi_n(\mathbf{r}) = \frac{2\alpha kr^{\frac{3}{2}}}{3f} \cos\left[\frac{-3\theta + 2n\pi}{2}\right] \quad (5.24)$$

5.1 光渦モードの通倍変換

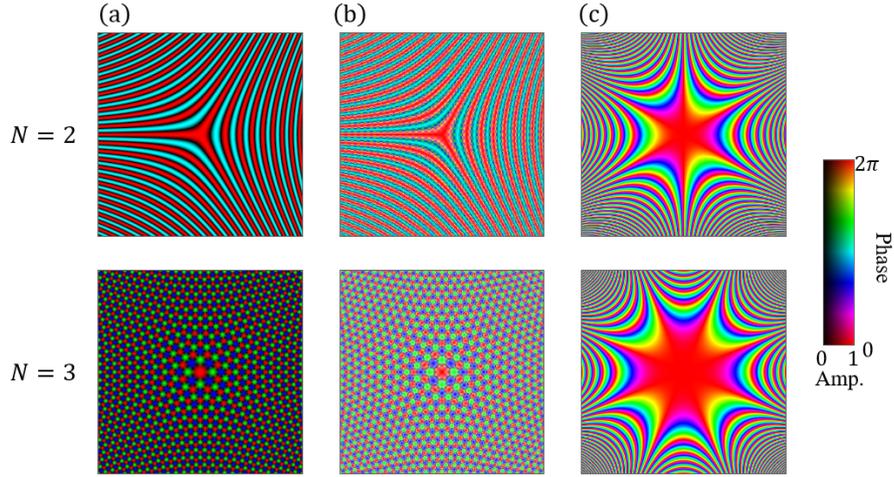


図 5.2 SLM に与える位相分布 (a) 理想的な振幅位相変調 (b) 位相混合した位相分布 $\Phi(r, \theta)$ (c) 位相補正の分布 $\Psi(\rho, \phi)$

である。位相分布の総和を計算すると、

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N e^{i\varphi_n(r, \theta)} = \cos \left[\frac{2i\alpha k r^{\frac{3}{2}}}{3f} \cos \left[\frac{3\theta}{2} \right] \right] \quad (5.25)$$

である。したがって、式 (5.11) を利用して SLM に位相分布を与えることで光渦モードを 2 通倍することができる。また、補正すべき位相分布は式 (5.10) より

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{k}{f} \left(\frac{\rho}{|\alpha|} \right)^2 \left[\frac{\rho \cos[3\phi]}{3} \right] \quad (5.26)$$

である。同様に 3 通倍の場合には

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N = \exp \left[i \frac{\alpha k}{f} \frac{3r^{4/3}}{4} \cos \left[\frac{4\theta + 2n\pi}{3} \right] \right] \quad (5.27)$$

であり、位相補正 $\Psi(\rho, \phi)$ は

$$\Psi(\rho, \phi) = \frac{k}{f} \left(\frac{\rho}{|\alpha|} \right)^2 \left[\frac{\rho \cos[4\phi]}{4} \right] \quad (5.28)$$

である。ここで、2,3 通倍それぞれの位相分布の図を図 5.2 に示す。図 5.2(a) は通倍変換のための理想的な複素振幅を示し、(b) は上で求めた SLM に与えるべき位相混合された位相分布 $\Phi(r, \theta)$ 、(c) は位相補正のための $\Psi(\rho, \phi)$ である。

5.1.4 伝搬シミュレーション

光学系において光の複素振幅の幾何学変換を実装するためには位相分布 $\Phi(r, \theta)$ によって変調し、分布のフーリエ変換することが必要である。そこで、焦点距離 f のレンズを用いて

5.2 実験

複素振幅をフーリエ変換する際、伝搬距離ごとにどのように変化していくかシミュレーションを行う。

光渦モードの通倍変換 $\omega = g(\bar{\zeta}) = \alpha \bar{\zeta}^{\frac{1}{N}}$ を考えると式 (3.29) と式 (3.30) より

$$\omega(2f) = \frac{2f}{k} \frac{\partial \varphi(\zeta, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}} = \alpha \bar{\zeta}^{\frac{1}{N}} \quad (5.29)$$

であり、

$$\omega(z) = \begin{cases} \zeta + \frac{z}{f} \alpha \bar{\zeta}^{\frac{1}{N}} & (0 \leq z \leq f) \\ \left(2 - \frac{z}{f}\right) \zeta + \alpha \bar{\zeta}^{\frac{1}{N}} & (f \leq z \leq 2f) \end{cases} \quad (5.30)$$

となる。

$\omega(z)$ について光渦モードを 2 通倍する幾何学変換の数値シミュレーションを行った結果を図 5.3 に示す。図 5.3(a) には $l = +1$ の光渦モードを 2 通倍した結果を示す。光渦 $l = +1$ に位相分布 $\Phi(r, \theta)$ を与え、焦点距離 f のレンズでフーリエ変換した分布に位相補正 $\Psi(\rho, \phi)$ を与えることで $l' = -2$ の光渦が得られる。図 5.3(b) は 2 つの幾何学変換を赤と青で表しており、 $2f$ の伝搬によって円状の分布となることが分かる。図 5.3(c) は光複素振幅の変換過程を示したものである。 $2f$ 伝搬後の振幅分布を見ると、座標の伝搬と同様に変化していき円環の強度分布になっているが、位相分布を見ると光渦の分布とはかけ離れており補正の必要があることがわかる。光渦モードを 2 通倍と 3 通倍する幾何学変換のとき、極座標の変換過程を図 5.4 に示す。それぞれ 2 つと 3 つの幾何学変換を赤と青と緑で表しており、 $2f$ 伝搬することで円状の分布となることがわかる。

5.2 実験

5.2.1 実験構成

図 5.5 に実験系を示す。実験系としては光渦の生成、SLM を用いた複素振幅の幾何学的変換、参照光との干渉による OAM 測定系の 3 つから構成されている。光源は 635nm のファイバピグテール LD であり、光ファイバカプラで参照光と被測定光に分けてそれぞれ水平偏光を準備している。その後、 q -plate(光渦リターダ)($q = \frac{1}{2}, 1$) を用いて光渦を生成する。 q -plate は入射光の円偏光の状態に応じて l を $l \pm 2q$ に変換する性質を持つ。QWP1, QWP2 それぞれの角度を 45° または 135° とすることで光渦モードの符号を選択する。また、QWP の角度を 0° とすることで光渦モードの正負の重ね合わせを生成する。今回用いる q -plate は $m = 1, 2$ であるため、 $l = 0, \pm 1, \pm 2$ について実験を行う。次に幾何学的変換の部分について説明する。生成した光渦に SLM を用いて幾何学変換のための位相分布 $\Phi(r, \theta)$ を与え、レンズのかわりに凹面鏡で反射して $2f$ 伝搬後に補正の分布 $\Psi(\rho, \phi)$ を与える。2 つの位相

5.2 実験

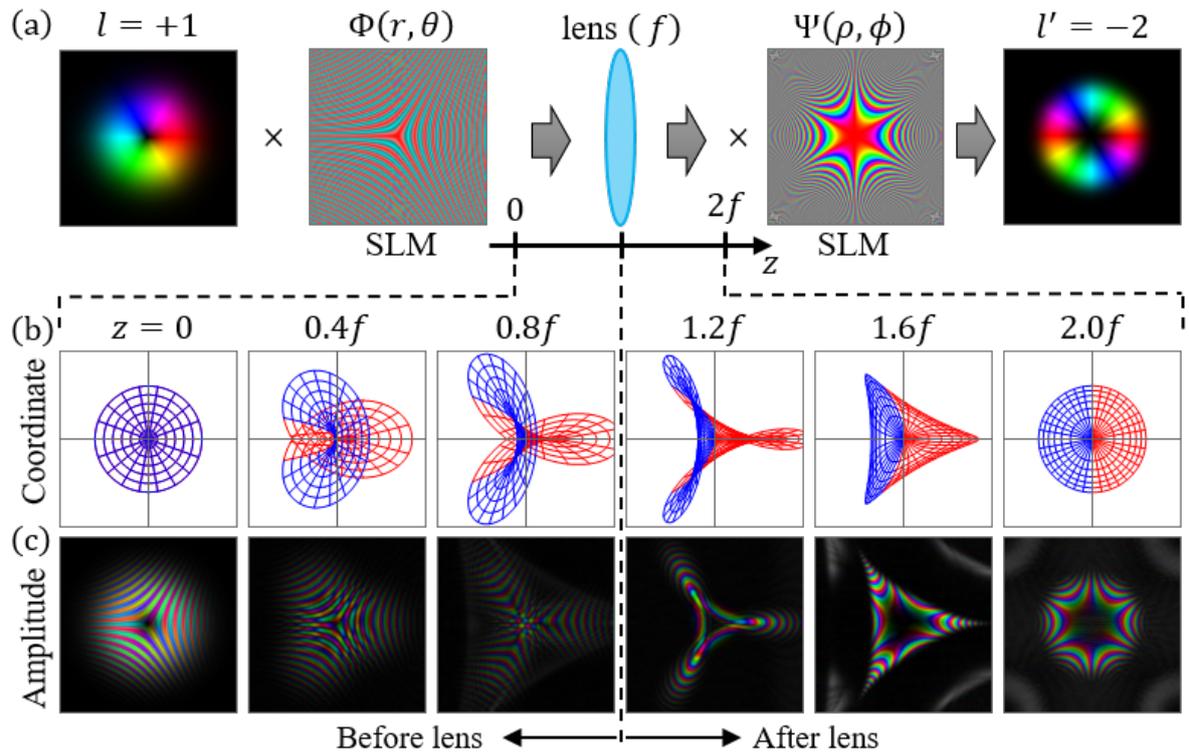


図 5.3 振幅分布と座標の変換過程の数値的シミュレーション (a)2 通倍変換された光渦と与える位相分布 (b) 極座標系の変換過程 (c) 振幅分布の変換過程

分布は SLM の半分ずつに表示する。補正後はレンズとピンホールを用いた空間フィルタによってビームを整形し、CCD カメラで観測する。観測は $l = 0, \pm 1, \pm 2$ を 2 通倍と 3 通倍について行った。CCD カメラでは光の強度分布しか取得できないため、位相分布が所望の通倍変換されているか確認するために $l = 0$ の参照光と干渉させ、その干渉縞から角スペクトル移動法を用いて光渦モードの解析を行った。

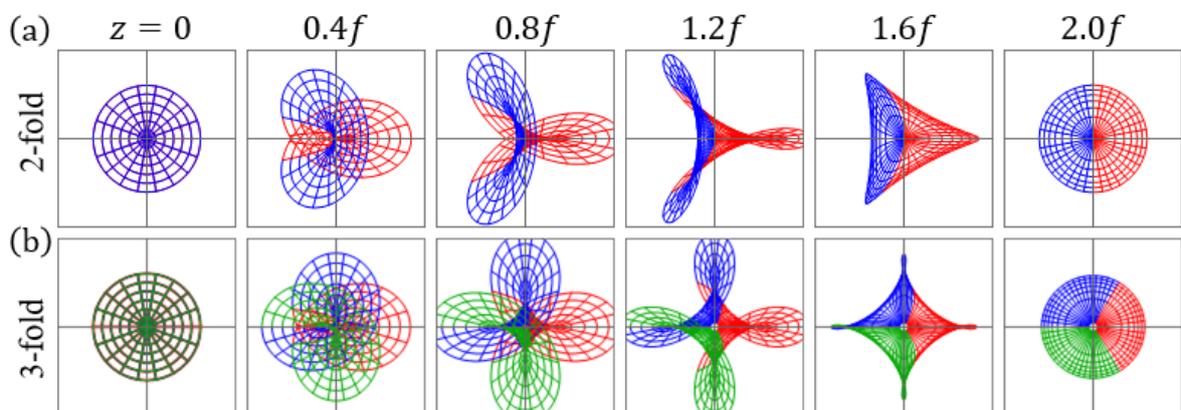


図 5.4 通倍変換における座標の変換過程の数値的シミュレーション (a)2 通倍変換される極座標系 (b)3 通倍変換される極座標系

5.2 実験

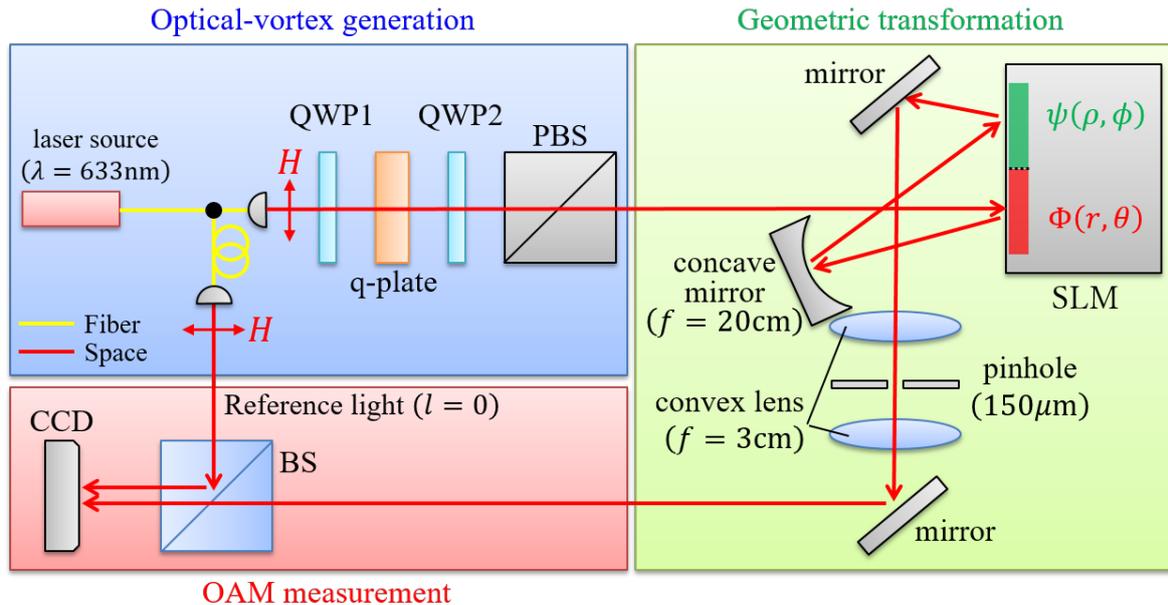


図 5.5 モード変換の実験系

5.2.2 実験結果

図 5.6 に変換前後の強度分布の測定結果を示す。図 5.6(a) は入力した光渦モード、(b) は 2 通倍、(c) は 3 通倍した結果を示す。 $l = \pm 1, \pm 2$ の変換結果に関しては、方位角に沿った明点の個数が 2 倍および 3 倍となっていることから光渦モードの通倍が正しく行えたことが確認できる。 $l = +1, +2$ に関しては円環状の強度分布が観測できたが、位相分布も含めて光渦モードの変換が正確に行えたかどうかわからないため、 $l = 0$ の参照光との干渉縞を観測して、角スペクトル移動法を用いて位相分布を確認した。

角スペクトル移動法を用いた振幅の計算

光渦モード l を有する被測定光と $l = 0$ の参照光との干渉縞を処理し、位相分布を確認する具体的な方法 (角スペクトル移動法) を示す。 $l = 2$ の実験結果による例を図 5.7 に示す。光渦モード l を持つ光の複素振幅を $E_l(\mathbf{r})$ とすると、モード l の光渦に角度 Θ で参照光 $E_0(\mathbf{r})$ が入射したときの干渉縞は

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &\equiv |E_0(\mathbf{r})e^{ik_x \sin \Theta} + E_l(\mathbf{r})e^{il\theta}|^2 \\ &= |E_0(\mathbf{r})|^2 + |E_l(\mathbf{r})|^2 + E_0(\mathbf{r})\overline{E_l(\mathbf{r})} \left\{ e^{i(k_x \sin \Theta - l\theta)} + \text{c.c.} \right\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

となる。但し、 $\overline{E_l(\mathbf{r})}$ は $E_l(\mathbf{r})$ の複素共役である。観測した $I(\mathbf{r})$ をフーリエ変換 \mathcal{F} すると、干渉項に対応する式として

$$\mathcal{F} [E_0(\mathbf{r})\overline{E_l(\mathbf{r})}e^{il\theta}] (k_x - k \sin \Theta), \mathcal{F} [E_0(\mathbf{r})E_l(\mathbf{r})e^{il\theta}] (k_x + k \sin \Theta) \quad (5.32)$$

5.2 実験

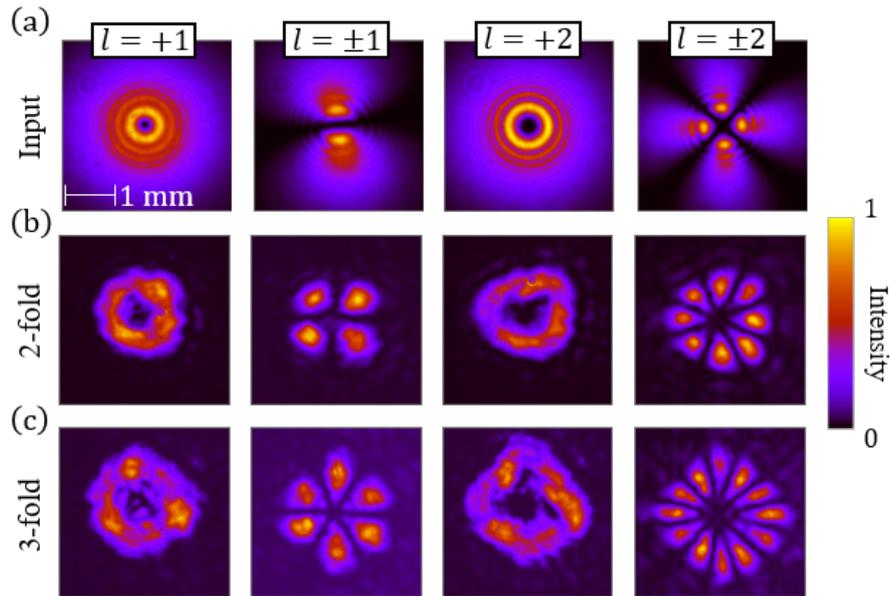


図 5.6 通倍変換された光渦の強度分布 (a) 入射したモード l の光ビーム (b) 入射ビームの 2 通倍変換 (c) 入射ビームの 3 通倍変換

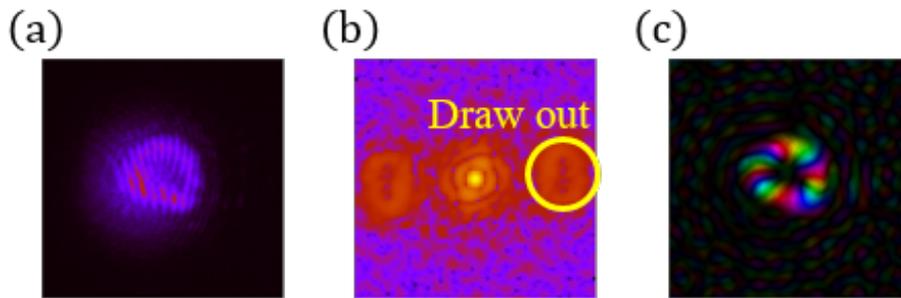


図 5.7 角スペクトル移動法 (a) 参照光 ($l = 0$) との干渉縞 (b) 干渉縞のフーリエ変換 (c) モード l の成分のみ抜き出して逆フーリエ変換

が得られる。これは波数領域において原点から $\pm k \sin \Theta$ だけずれた成分として得られるため、このずれた部分だけを図 5.7(b) のように抜き出して逆フーリエ変換を行うことで $\overline{E_0(\mathbf{r})} E_l(\mathbf{r}) e^{il\theta}$ が得られる。角スペクトル移動法によって $\overline{E_0(\mathbf{r})} E_l(\mathbf{r}) e^{il\theta}$ が得られたため、実験データとして観測した参照光の振幅 $E_0(\mathbf{r})$ で割ることで干渉縞からモード l の光渦の複素振幅 $E_l(\mathbf{r}) e^{il\theta}$ だけを取り出すことができ、変換されたモードの位相分布を確認することができる。

モード分布の解析

角スペクトル法を用いて、実験で観測した干渉縞から通倍変換した光渦モードの複素振幅を取り出した結果を図 5.8 に示す。図 5.8(a) は入力した光渦モードであり、(b) に 2 通倍、(c) に 3 通倍した結果を示す。2,3 通倍どちらの場合も所望の通倍変換が行えていることが

5.2 実験

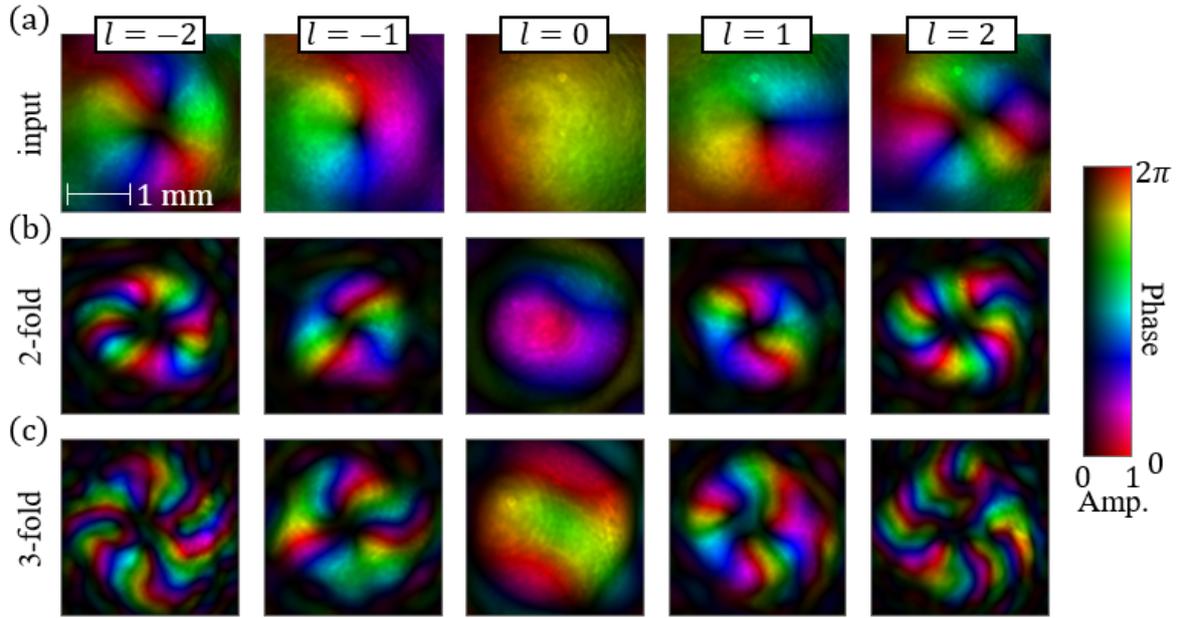


図 5.8 通倍変換された光渦の振幅分布 (a) 入射したモード l の光ビーム (b) 入射ビームの 2 通倍変換 (c) 入射ビームの 3 通倍変換

位相分布から確認できる。 $l = 0$ は通倍しても位相差 0 のままである。

次に、モード分布の解析方法を示す。実験データより得られた光複素振幅を極座標表示で $E(r, \theta)$ とする。実験データ $E(r, \theta)$ はそのままと離散値であるが、補間関数を利用することですべての r, θ について値をとることができる。ここで、 $E(r, \theta)$ は θ について周期 2π であり、 θ についてフーリエ級数展開可能である。よって、

$$E(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l(r) e^{il\theta} \quad (5.33)$$

$$C_l(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E(r, \theta) e^{-il\theta} d\theta \quad (5.34)$$

の関係が成り立つ。ここで、パーセバルの等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(r, \theta)|^2 d\theta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |C_l(r)|^2 \quad (5.35)$$

より、全光強度 P は

$$P = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |E(r, \theta)|^2 r dr d\theta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi \int_0^{\infty} |C_l(r)|^2 r dr \quad (5.36)$$

で求まる。光渦モード l の光強度 I_l を

$$I_l \equiv 2\pi \int_0^{\infty} |C_l(r)|^2 r dr \quad (5.37)$$

5.2 実験

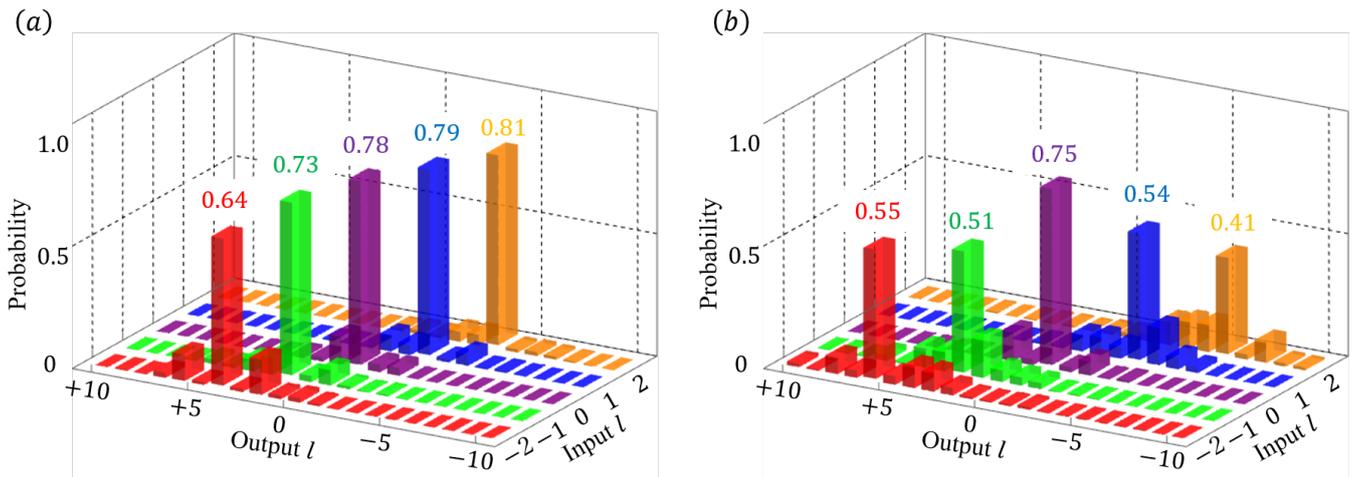


図 5.9 モード分布の解析 (a)2 通倍変換の結果 (b)3 通倍変換の結果

として定義すると、モード l の確率 P_l は

$$P_l \equiv \frac{I_l}{P} \quad (5.38)$$

で定義できる。光渦モードの平均値 $\langle l \rangle$ は、上で求めた確率 P_l を用いて

$$\langle l \rangle \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} l P_l \quad (5.39)$$

で求めることができる。また l の標準偏差 Δl は

$$\Delta l^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (l - \langle l \rangle)^2 P_l \quad (5.40)$$

で求められる。今回は $-10 \leq l \leq +10$ の範囲で計算し、グラフに示した。

2 通倍の場合のモードの解析結果を図 5.9(a) に示す。ほとんどの場合において所望のモードの割合が 70% を超えており、通倍変換が正確に行えたことがわかる。3 通倍の場合のモードの解析結果を図 5.9(b) に示す。2 通倍の場合よりも所望のモードの割合は減少しているが、いずれの入力モードでも所望以外のモードとは 4 倍以上の差があり、通倍変換が行えたと言える。図 5.11 に 2 通倍と 3 通倍それぞれに含まれる平均モード (丸点 ● と四角点 ■) と標準偏差 (各点のエラーバー) のグラフを示す。2 通倍の場合、 Δl の最大値は 0.88 であり、隣の入力モードとの重なりはないため、正確に所望モードが得られたといえる。3 通倍の場合、 Δl の最大値は 1.64 となっており、隣のモードと 0.14 の重なりがあることがわかった。

光渦モード通倍変換の光パワー効率

2 通倍と 3 通倍について入射ビームのパワーに対する変換効率を求めた。SLM や各ミラーの反射率を考慮し、純粋な変換だけの効率を計算する。ここで、SLM での反射の際に

5.2 実験

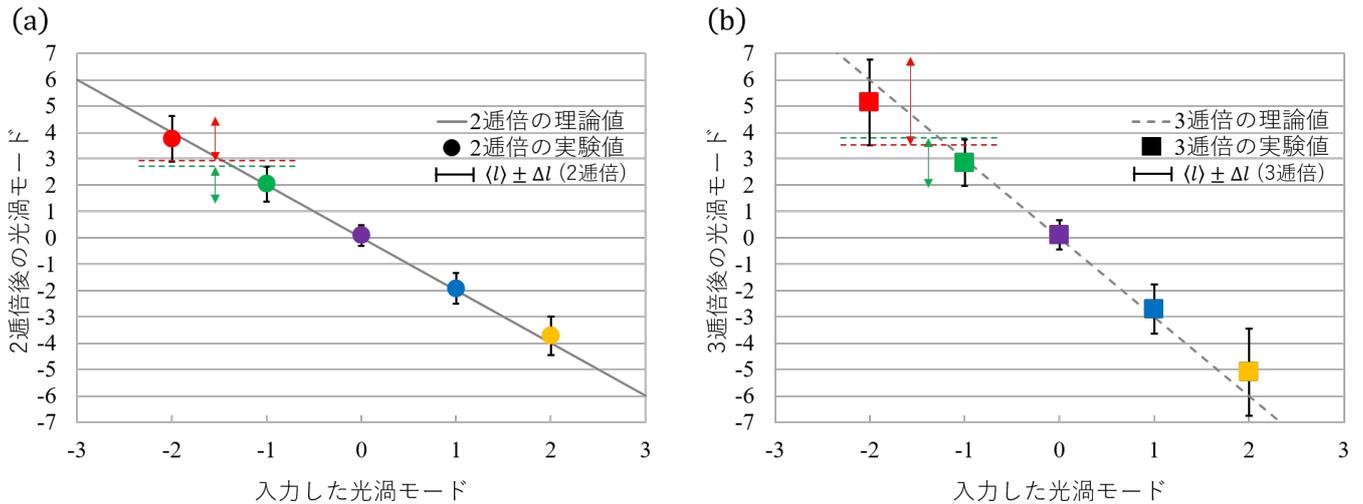


図 5.10 平均モードの解析 (a)2 通倍変換の結果 (b)3 通倍変換の結果

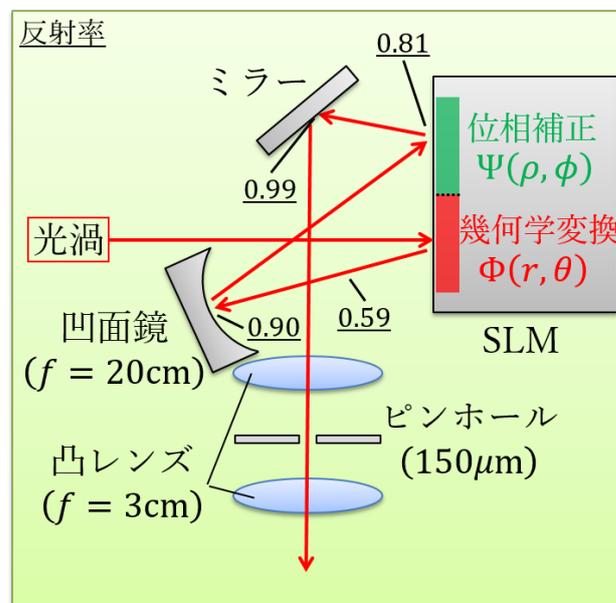


図 5.11 通倍変換時の各反射率

発生する変調されない 0 次項成分を除去するために位相分布にグレーティングを付与しているため、そこでの反射率も考慮する。反射率を測定した結果 SLM0.81、グレーティング 0.59、凹面鏡 0.90、ミラー 0.99 であり、これらを考慮して変換のみの効率を求めた。変換効率として 2 通倍のとき 45%、3 通倍のとき 43% が得られた。

第 6 章

まとめ

4 章では SLM を用いた光複素振幅の幾何学変換による光渦のモード分離の実験を行い、使用する位相分布に回折格子の効果を付加することでモード間干渉が最大 8.18% から 0.98% と大幅に減少させることができた。本研究では一つの円環から三つの線状の分布へと変換することでモード間干渉が 1% 以下にできることを示したが、位相分布を生成する際のパラメータを変えることにより五つや七つの線状の分布へと変換することも可能である。これらを用いて今回の実験よりも更に小さく集光することでモード間干渉を向上させることも期待される。

5 章では SLM を用いた光複素振幅の幾何学変換による光渦モードの通倍手法と、複数の位相分布による幾何学変換を一つの位相分布で実装する手法の提案を行った。また、光波が伝搬中の座標と光複素振幅をシミュレーションし、幾何学変換の視覚化を行った。最後に一つの SLM を使用して幾何学変換と位相補正を行い、光渦モード変換の実験による実証を行った。その結果 2 通倍では 0.55、3 通倍では 0.41 の所望モードが得られた。また、純粋なモード変換のみの光パワー変換効率として 2 通倍のとき 45%、3 通倍のとき 43% が得られた。先行研究 [17] ではモード l の 2 通倍変換しか行えておらず、また変換した際の所望モードも 40% であった。本研究では複数の位相分布による幾何学変換を一つの位相分布で実装することにより実験系の大幅な簡素化を実現し、2 通倍のとき平均して 73% の所望モードが得られ、3 通倍についても実験により実証した。4 通倍以上の変換も位相分布のパラメータを変えることですぐにでも実装可能であり、OAM 状態の制御技術の基盤となりうる提案である。また、この手法は光渦モードの通倍変換だけでなく、分周 (除算) 操作や、様々な空間モードの状態制御に幅広く適用できるため、今後の光科学技術の発展に大きく貢献すると考えられる。

謝辞

本研究に携わって進展と論文の作成にあたり、多大なるご助力とご指導を頂きました高知工科大学大学院電子・光システム工学コース小林弘和准教授に心より感謝申し上げます。お忙しい中、本研究の副査を担当して下さいました岩下克教授、田上周路准教授にも心より感謝を申し上げます。

研究を共に行って3年間共に壁を乗り越えてきた岩下・小林研究室同期の五百蔵雅幸氏、大島浄司氏に感謝致します。同じく研究室の、Poudel Bishal 氏、小林健輔氏、小野一成氏、上山峻央氏、川邊智弘氏、楠瀬康夫氏、原英之氏、原田龍一氏、山西俊輝氏、横川助恒氏、齋藤嶺氏についても深く感謝の意を表します。

最後に、私を支えてくださったすべての方々へ、この場をお借りしまして心から感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Václav Potoček, Filippo M Miatto, Mohammad Mirhosseini, Omar S Magaña-Loaiza, Andreas C Liapis, Daniel KL Oi, Robert W Boyd, and John Jeffers. Quantum hilbert hotel. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 115, No. 16, p. 160505, 2015.
- [2] Juan Carlos García-Escartín and Pedro Chamorro-Posada. Quantum multiplexing with the orbital angular momentum of light. *Phys. Rev. A*, Vol. 78, No. 6, p. 062320, 2008.
- [3] Lorenzo Marrucci. The q-plate and its future. *J. Nanophotonics*, Vol. 7, No. 1, p. 078598, 2013.
- [4] Lorenzo Marrucci, C Manzo, and D Paparo. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 96, No. 16, p. 163905, 2006.
- [5] Hirokazu Kobayashi, Koji Nonaka, and Masao Kitano. Helical mode conversion using conical reflector. *Opt. Express*, Vol. 20, No. 13, pp. 14064–14074, 2012.
- [6] Taro Ando, Yoshiyuki Ohtake, Naoya Matsumoto, Takashi Inoue, and Norihiro Fukuchi. Mode purities of laguerre–gaussian beams generated via complex-amplitude modulation using phase-only spatial light modulators. *Opt. Lett.*, Vol. 34, No. 1, pp. 34–36, 2009.
- [7] Olof Bryngdahl. Geometrical transformations in optics. *JOSA*, Vol. 64, No. 8, pp. 1092–1099, 1974.
- [8] Olof Bryngdahl. Optical map transformations. *Opt. Commun*, Vol. 10, No. 2, pp. 164–168, 1974.
- [9] Gregorius CG Berkhout, Martin PJ Lavery, Johannes Courtial, Marco W Beijersbergen, and Miles J Padgett. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 105, No. 15, p. 153601, 2010.
- [10] Yuanhui Wen, Ioannis Chremmos, Yujie Chen, Jiangbo Zhu, Yanfeng Zhang, and Siyuan Yu. Spiral transformation for high-resolution and efficient sorting of optical vortex modes. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 120, No. 19, p. 193904, 2018.
- [11] Chenhao Wan, Jian Chen, and Qiwen Zhan. Compact and high-resolution optical orbital angular momentum sorter. *APL Photonics*, Vol. 2, No. 3, p. 031302, 2017.
- [12] Martin PJ Lavery, Gregorius CG Berkhout, Johannes Courtial, and Miles J Padgett. Measurement of the light orbital angular momentum spectrum using an optical geometric transformation. *J. Opt.*, Vol. 13, No. 6, p. 064006, 2011.

- [13] Rishabh Sahu, Swati Chaudhary, Kedar Khare, Mishkatul Bhattacharya, Harshawardhan Wanare, and Anand K Jha. Angular lens. *Opt. Express*, Vol. 26, No. 7, pp. 8709–8718, 2018.
- [14] Jack Cederquist and Anthony M Tai. Computer-generated holograms for geometric transformations. *Appl. Opt.*, Vol. 23, No. 18, pp. 3099–3104, 1984.
- [15] Ulf Leonhardt. Optical conformal mapping. *Science*, Vol. 312, No. 5781, pp. 1777–1780, 2006.
- [16] Omel Mendoza-Yero, Gladys Mínguez-Vega, and Jesús Lancis. Encoding complex fields by using a phase-only optical element. *Opt. Lett.*, Vol. 39, No. 7, pp. 1740–1743, 2014.
- [17] Zhe Zhao, Yongxiong Ren, Guodong Xie, Long Li, Yan Yan, Nisar Ahmed, Zhe Wang, Cong Liu, Asher J Willner, Solyman Ashrafi, et al. Invited article: Division and multiplication of the state order for data-carrying orbital angular momentum beams. *APL Photonics*, Vol. 1, No. 9, p. 090802, 2016.