

Split Cayley 代数及びその複素化による G_2 型複素例外 Lie 群の部分群の実現

松岡 学*

(受領日：2019年5月1日)

高知工科大学共通教育教室

〒782-8502 高知県香美市土佐山田町宮ノ口185

* E-mail: matsuoka.manabu@kochi-tech.ac.jp

要約：本研究では八元数、split 八元数及びその複素化を具体的に構成する方法を整備し、数の拡張の観点から考察する。数の拡張は複素数、四元数、八元数の系列だけではなく、split 複素数、split 四元数、split 八元数及びそれらを複素化した系列が考えられる。これらを八元数の複素化を基にしてその構造を明確にし、自己同型群を取ることで G_2 型の例外型 Lie 群の構造を考える。さらに、 G_2 型の複素 Lie 群 G_2^C を考え、その部分群としてコンパクト型や非コンパクト型の Lie 群の埋め込みを具体的に構成する。

1. はじめに

19 世紀中頃、M.S.Lie が Lie 群の概念を与え、19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて、W.Killing、E.Cartan らが分類や構造に関する研究を行った。

例外型 Lie 群、Lie 環の構成においては、八元数と G_2 型の Lie 群が関係することを E.Cartan が言及し、N.Jacobson により split 八元数を用いて G_2 型の非コンパクト Lie 環が与えられた。その後、C.Chevalley、R.D.Schafer により、 F_4 、 E_6 型の Lie 環が与えられ、 E_7 、 E_8 型は H.Freudenthal により与えられた。

一方、 E_6 、 E_7 、 E_8 型の Lie 群としての構成は、分類から 1 世紀のあいだ未知のままであった。これに対し、横田は代数的な手法により、 E_6 型のコンパクト Lie 群の実現に成功した。その後、横田、今井によって、 E_7 、 E_8 型のコンパクト Lie 群の構成がなされた。非コンパクト Lie 群においても、H.Freudenthal、横田、宿澤、今井、保倉らにより実現された。

横田は Lie 群の実現において、八元数、split 八元数及びその複素化を用いた代数的な構成を行った。本論文では、八元数、split 八元数及びその複素化の代数的な構造を数の拡張の観点から整備し、横田の手法に基づき G_2 型例外型 Lie 群の複素型、コンパクト型、非コンパクト型の関係を考察することを目

的とする。

2. 交代代数と Hurwitz 代数

2.1 交代代数の定義と性質

交代代数を定義し、その代数的な性質を調べる。

定義 2.1 K を可換体とする。(必ずしも結合的とは限らない) K -多元環 A が次の 2 つの条件を満たすとき、 K 上の交代代数 (alternative algebra)、または、交代的な代数という。

(1) A の任意の元 a, b に対して $(aa)b = a(ab)$.

(2) A の任意の元 a, b に対して $b(aa) = (ba)a$.

一般に、(必ずしも結合的とは限らない) 代数 A の元 a, b, c に対して、

$$\{a, b, c\} = (ab)c - a(bc)$$

と定め、 a, b, c の結合子 (associator) という。

交代代数は結合的とは限らないが、次の性質を満たす。

命題 2.2 交代代数 A に対して、次が成り立つ。

(1) A の任意の元 a, b に対して $(ab)a = a(ba)$.

(2) A の任意の元 a, b, c に対して

$$\begin{aligned}(ab)c + b(ca) &= a(bc) + (bc)a, \\ (ab)c + (ac)b &= a(bc) + a(cb), \\ (ab)c + (ba)c &= a(bc) + b(ac).\end{aligned}$$

これらは結合子を用いると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\{a, b, c\} &= \{b, c, a\} = \{c, a, b\} \\ &= -\{a, c, b\} = -\{c, b, a\} = -\{b, a, c\}.\end{aligned}$$

(3) A の任意の元 a, b, c に対して

$$(ab)(ca) = a(bc)a. \quad (\text{Moufang の公式})$$

(証明) (1) (2) 交代代数の条件 $(aa)c = a(ac)$ において、 a の代わりに $a+b$ とおくと

$$((a+b)(a+b))c = (a+b)((a+b)c)$$

であり、展開して整理すると

$$(ab)c + (ba)c = a(bc) + b(ac)$$

となり (2) の第 3 式を得る。この式で、 $a = c$ とすると

$$(ab)a = a(ba)$$

となり (1) を得る。

同様に、 $a(bb) = (ab)b$ において、 b の代わりに $b+c$ とおくと、 $(ab)c + (ac)b = a(bc) + a(cb)$ となり、(2) の第 2 式を得る。

次に、 $(ab)c + (ac)b = a(bc) + a(cb)$ において、 a, b, c をそれぞれ b, c, a とおき変え、左辺と右辺を逆にした式 $b(ca) + b(ac) = (bc)a + (ba)c$ と $(ab)c + (ba)c = a(bc) + b(ac)$ の両辺をそれぞれ加えて整理すると

$$(ab)c + b(ca) = a(bc) + (bc)a$$

となり、(2) の第 1 式を得る。

(3) $(ab)c + b(ca) = a(bc) + (bc)a$ において、 b を ab とおいた式と c を ca とおいた式はそれぞれ

$$(a^2b)c + (ab)(ca) = a(ab \cdot c) + (ab \cdot c)a,$$

$$(ab)(ca) + b(ca^2) = a(b \cdot ca) + (b \cdot ca)a$$

であり、これらの両辺をそれぞれ加えると

$$(a^2b)c + 2(ab)(ca) + b(ca^2) = a((ab \cdot c) + (b \cdot ca)) + ((ab \cdot c) + (b \cdot ca))a$$

となる。(2) の第 1 式を用いると右辺は、

$$a(a(bc) + (bc)a) + (a(bc) + (bc)a)a = a^2 \cdot (bc) + 2a(bc)a + (bc)a^2$$

となる。したがって、

$$(a^2b)c + 2(ab)(ca) + b(ca^2) = a^2(bc) + 2a(bc)a + (bc)a^2$$

となり、(2) の第 1 式で a を a^2 とおいた式

$$(a^2b)c + b(ca^2) = a^2(bc) + (bc)a^2$$

を用いることで

$$(ab)(ca) = a(bc)a$$

を得る。

(証明終)

命題 2.3 K を可換体とする。 A を K 上の交代代数とするとき、複素化 A^C は、 K^C 上の交代代数である。

(証明) A^C の任意の元 $a + bi, c + di$ に対して、

$$((a + bi)(a + bi))(c + di) = (a + bi)((a + bi)(c + di))$$

$$(c + di)((a + bi)(a + bi)) = ((c + di)(a + bi))(a + bi)$$

を、直接確かめることができる。(証明終)

2.2 Hurwitz 代数の定義と性質

次に、Hurwitz 代数を定義し、交代的な Hurwitz 代数の性質を調べる。

定義 2.3 K を可換体とする。必ずしも結合的とは限らない K -多元環 A に対して、共役 $\bar{\cdot}$ と非退化な内積 (\cdot, \cdot) が定まり、次の条件を満たすとき、Hurwitz 代数 (Hurwitz algebra)、または、合成代数 (composition algebra) という。

(1) A の任意の元 a と K の任意の元 k に対して

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{ka} = k\bar{a} + \bar{b}, \quad \bar{\bar{a}} = a,$$

$$\bar{1} = 1, \quad \bar{a} + \bar{\bar{a}} \in K, \quad \bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} \in K.$$

(2) A の任意の元 a, b に対して

$$(ab, ab) = (a, a)(b, b),$$

$$(a, b) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b) = \frac{1}{2}(\bar{\bar{a}}\bar{b} + \bar{a}\bar{\bar{b}}).$$

このとき

$$(a, a) = a\bar{a} = \bar{a}a,$$

$$(a, b) = (b, a) = (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{\bar{b}}, \bar{\bar{a}})$$

が成り立つことが分かる。

交代的な Hurwitz 代数に関しては、次の性質が成り立つ。

命題 2.4 A を交代的な Hurwitz 代数とする。このとき、 A の任意の元 a, b, c に対して、次が成り立つ。

$$(1) (ab, ac) = (a, a)(b, c) = (ba, ca).$$

$$(2) (a, b)(c, d) = \frac{1}{2}((ac, bd) + (ad, bc)).$$

(証明) (1) $(\alpha\beta, \alpha\beta) = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ において α の代わりに a, β の代わりに $b+c$ とおくと

$$(ab, ab) + 2(ab, ac) + (ac, ac) = (a, a)(b, b) + 2(a, a)(b, c) + (a, a)(c, c)$$

となり、 $(ab, ac) = (a, a)(b, c)$ を得る。

同様に、 $(\alpha\beta, \alpha\beta) = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$ において α の代わりに $b+c, \beta$ の代わりに a とおくと、 $(ba, ca) = (b, c)(a, a)$ を得る。

(2) $(ab, ac) = (a, a)(b, c)$ において a の代わりに $a+b, b$ の代わりに c, c の代わりに d とおくと

$$(ac, ad) + (ac, bd) + (bc, ad) + (bc, bd) = (a, a)(c, d) + 2(a, b)(c, d) + (b, b)(c, d)$$

となり

$$(ac, bd) + (bc, ad) = 2(a, b)(c, d)$$

を得る。

$$(ac, bd) + (bc, ad) = 2(a, b)(c, d)$$

を得る。

(証明終)

命題 2.5 A を交代的な Hurwitz 代数とし、1 を含む正規直交基底 $u_0 = 1, u_1, u_2, \dots, u_m$ をもつとする。このとき、 A の任意の元 a, b, c に対して、次が成り立つ。

- (1) $(ab, c) = (b, \bar{a}c), (ba, c) = (b, c\bar{a})$.
- (2) $(\bar{a}a)b = a(\bar{a}b), (ab)\bar{a} = a(b\bar{a}), b(\bar{a}a) = (ba)\bar{a}$.
- (3) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$.
- (4) $(ab)(\bar{b}\bar{a}) = a(\bar{b}\bar{b})\bar{a}$.
- (5) $(a, b)c = \frac{1}{2}((ca)\bar{b} + (cb)\bar{a}) = \frac{1}{2}(\bar{a}(bc) + \bar{b}(ac))$.
- (6) $u_i(u_j a) = -u_j(u_i a), (i \neq j)$,
特に、 $u_i u_j = -u_j u_i, (i \neq j)$.

$$u_i(u_i a) = -a,$$

$$\text{特に、} u_i^2 = -1.$$

- (7) $u_i(u_j u_k) = u_j(u_k u_i) = u_k(u_i u_j), (i, j, k \text{ は異なる})$.

(証明) (1) $(ab, c) = (b, \bar{a}c)$ を示す。まず、 $(1, u_i) = \bar{1} \cdot u_i + \bar{u}_i \cdot 1 = 0$ から $\bar{u}_i = -u_i$ が分かる。ここで、 $(a, b)(c, d) = \frac{1}{2}((ac, bd) + (ad, bc))$ において、 $a = u_i, b = 1$ とおくと $(u_i c, d) + (u_i d, c) = 0$ から、 $(u_i c, d) = (c, \bar{u}_i d)$ となり成り立つ。

一般には、 $a = a_0 + a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$ と表されるので $(ab, c) = (b, \bar{a}c)$ が成り立つことが分かる。

同様に、 $(ba, c) = (b, c\bar{a})$ を示すことができる。

- (2) $(ab, ac) = (a, a)(b, c)$ に (1) を用いると $(\bar{a} \cdot ab, c) = (\bar{a}a \cdot b, c)$ となる。これが任意の c に対して成り立つので、内積が非退化であることから、 $\bar{a} \cdot ab = \bar{a}a \cdot b$ を得る。よって、 $(\bar{a}a)b = a(\bar{a}b)$ が成り立つ。

同様に、 $b(\bar{a}a) = (ba)\bar{a}$ を示すことができる。

$(ab)\bar{a} = a(\bar{b}\bar{a})$ については、命題 2.2(2) の第 1 式 $(ab)c + b(ca) = a(bc) + (bc)a$ の c の代わりに \bar{a} とおくことで得られる。

- (3) $(\overline{ab}, c) = (ab, \bar{c}) = (b, \bar{a} \cdot \bar{c}) = (bc, \bar{a}) = (c, \bar{b} \cdot \bar{a}) = (\bar{b} \cdot \bar{a}, c)$

これが任意の c に対して成り立つので $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ を得る。

- (4) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ であるから

$(ab)(\bar{b}\bar{a}) = ab \cdot \overline{ab} = (ab, ab) = (a, a)(b, b) = a(\bar{b}\bar{b})\bar{a}$ となり、 $(ab)(\bar{b}\bar{a}) = a(\bar{b}\bar{b})\bar{a}$ を得る。

- (5) 命題 2.4(2) から $(ac, bd) + (bc, ad) = 2(a, b)(c, d)$ となり、 $(\bar{b} \cdot ac, d) + (\bar{a} \cdot bc, d) = (2(a, b)c, d)$ を得る。これが任意の d で成り立つので、 $\bar{b} \cdot ac + \bar{a} \cdot bc = 2(a, b)c$ となり、 $(a, b)c = \frac{1}{2}(\bar{a}(bc) + \bar{b}(ac))$ を得る。

同様に、 $(a, b)c = \frac{1}{2}((ca)\bar{b} + (cb)\bar{a})$ を示すことができる。

- (6) (5) より $\bar{a}(bc) + \bar{b}(ac) = 2(a, b)c$ であり、この式で a の代わりに u_i, b の代わりに u_j, c の代わりに a とおくと

$$\bar{u}_i(u_j a) + \bar{u}_j(u_i a) = 2(u_i, u_j)a = 0, (i \neq j)$$

であり、 $\bar{u}_i = -u_i, \bar{u}_j = -u_j$ から $u_i(u_j a) = -u_j(u_i a)$ を得る。

- (7) 交代代数の積の定義と $u_i = -\bar{u}_i$ より、

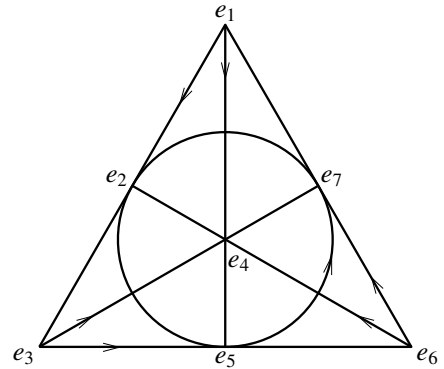
$$u_i(u_i a) = (u_i u_i)a = -(\bar{u}_i u_i)a = -a \quad (\text{証明終})$$

3. Cayley 代数の構成

3.1 Cayley 代数の定義

八元数、split 八元数及びその複素化を定義し、その性質をまとめる。最初に、八元数を定義する。

定義 3.1 $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ を基底とする \mathbf{R} 上の 8 次元ベクトル空間で、下図を用いて次のように積を定義した代数を Cayley 代数といい \mathcal{C} と表す。 \mathcal{C} の元を八元数、または、Cayley 数という。



上図において線上の e_1, e_2, e_3 の間では、

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1,$$

$$e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1,$$

$$e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2,$$

$$e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$$

と積を定義し、他の 6 本の線上でも同様に積を定義する。たとえば、 $e_5 e_7 = e_2$ のようである。さらに任意の元に対して分配法則が成り立つように積を定義する。 $e_0 = 1$ を積の単位元とする。Cayley 代数の積を表にすると次のようになる。

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_5$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

Cayley 代数 \mathcal{C} は、非結合な代数となる。 \mathcal{C} の元

$a = a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i e_i, b = b_0 + \sum_{i=1}^7 b_i e_i$ に対して、共役元 \bar{a} , 内積 (a, b) , ノルム $N(a)$, 長さ $|a|$, \mathbf{R} -線形写像 $\gamma: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ を、次のように定める。

$$\bar{a} = a_0 - \sum_{i=1}^7 a_i,$$

$$(a, b) = \sum_{i=0}^7 a_i b_i,$$

$$N(a) = (a, a) = a\bar{a},$$

$$|a| = \sqrt{(a, a)},$$

$$\gamma(a) = \sum_{i=0}^3 a_i - \sum_{i=4}^7 a_i.$$

このとき、 $(a, b) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a})$ となる。また、0でない Cayley 数 a に対して、 $\frac{\bar{a}}{|a|^2}$ を a^{-1} とおくと、

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

が成り立つので、 \mathfrak{C} は非結合な斜体となる。 γ を対合自己同型という。

積 $a\bar{a}, a^2, \bar{a}^2, ab$ を具体的に書くと次のようになる。

$$a\bar{a} = \bar{a}a = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_7^2,$$

$$a^2 = a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_7^2 + 2a_0a_1e_1 + 2a_0a_2e_2 + \cdots + 2a_0a_7e_7,$$

$$\bar{a}^2 = a_0^2 - a_1^2 - \cdots - a_7^2 - 2a_0a_1e_1 - 2a_0a_2e_2 - \cdots - 2a_0a_7e_7,$$

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1e_1 + \cdots + a_7e_7)(b_0 + b_1e_1 + \cdots + b_7e_7) \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 - \cdots - a_7b_7 \\ &\quad + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_5 - a_5b_4 + a_6b_7 - a_7b_6)e_1 \\ &\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3 + a_6b_4 - a_4b_6 + a_5b_7 - a_7b_5)e_2 \\ &\quad + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_4b_7 - a_7b_4 + a_5b_6 - a_6b_5)e_3 \\ &\quad + (a_0b_4 + a_4b_0 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_2b_6 - a_6b_2 + a_7b_3 - a_3b_7)e_4 \\ &\quad + (a_0b_5 + a_5b_0 + a_1b_4 - a_4b_1 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_6b_3 - a_3b_6)e_5 \\ &\quad + (a_0b_6 + a_6b_0 + a_7b_1 - a_1b_7 + a_4b_2 - a_2b_4 + a_3b_5 - a_5b_3)e_6 \\ &\quad + (a_0b_7 + a_7b_0 + a_1b_6 - a_6b_1 + a_2b_5 - a_5b_2 + a_3b_4 - a_4b_3)e_7. \end{aligned}$$

次に、split Cayley 代数を定義する。

定義 3.2 $1, e_1, e_2, e_3, e'_4, e'_5, e'_6, e'_7$ を基底とする \mathbf{R} 上のベクトル空間において、 $e_0 = 1$ を積の単位元とし、他の元については次の表のように積を定義する。さらに任意の元に対して分配法則が成り立つように積を定義する。このように積を定義した代数を split Cayley 代数といい \mathfrak{C}' と表す。split Cayley 代数 \mathfrak{C}' は、非結合な代数となる。

	e_1	e_2	e_3	e'_4	e'_5	e'_6	e'_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e'_5	$-e'_4$	$-e'_7$	e'_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e'_6	e'_7	$-e'_4$	$-e'_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e'_7	$-e'_6$	e'_5	$-e'_4$
e'_4	$-e'_5$	$-e'_6$	$-e'_7$	1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e'_5	e'_4	$-e'_7$	e'_6	e_1	1	e_3	$-e_2$
e'_6	e'_7	e'_4	$-e'_5$	e_2	$-e_3$	1	e_1
e'_7	$-e'_6$	e'_5	e'_4	e_3	e_2	$-e_1$	1

\mathfrak{C}' の元 $a = a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i e_i + \sum_{i=4}^7 a_i e'_i, b = b_0 + \sum_{i=1}^3 b_i e_i + \sum_{i=4}^7 b_i e'_i$ に対して、共役元 \bar{a} , 内積 (a, b) , ノルム $N(a)$ を、次のように定める。

$$\bar{a} = a_0 - \sum_{i=1}^3 a_i e_i - \sum_{i=4}^7 a_i e'_i,$$

$$(a, b) = \sum_{i=0}^3 a_i b_i - \sum_{i=4}^7 a_i b_i,$$

$$N(a) = (a, a) = a\bar{a} = \sum_{i=0}^3 a_i^2 - \sum_{i=4}^7 a_i^2.$$

積 $a\bar{a}, a^2, \bar{a}^2, ab$ を具体的に書くと次のようになる。

$$a\bar{a} = \bar{a}a = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2 - a_6^2 - a_7^2,$$

$$a^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + 2a_0a_1e_1 + 2a_0a_2e_2 + \cdots + 2a_0a_7e_7,$$

$$\bar{a}^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 - 2a_0a_1e_1 - 2a_0a_2e_2 - \cdots - 2a_0a_7e_7,$$

$$\begin{aligned} ab &= (a_0 + a_1e_1 + \cdots + a_7e'_7)(b_0 + b_1e_1 + \cdots + b_7e'_7) \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 - \cdots - a_3b_3 + a_4b_4 + \cdots + a_7b_7 \\ &\quad + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_5b_4 - a_4b_5 + a_6b_7 - a_7b_6)e_1 \\ &\quad + (a_0b_2 + a_2b_0 + a_3b_1 - a_1b_3 + a_6b_4 - a_4b_6 + a_7b_5 - a_5b_7)e_2 \\ &\quad + (a_0b_3 + a_3b_0 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_7b_4 - a_4b_7 + a_5b_6 - a_6b_5)e_3 \\ &\quad + (a_0b_4 + a_4b_0 + a_5b_1 - a_1b_5 + a_6b_2 - a_2b_6 + a_7b_3 - a_3b_7)e_4 \\ &\quad + (a_0b_5 + a_5b_0 + a_1b_4 - a_4b_1 + a_7b_2 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_6b_3)e_5 \\ &\quad + (a_0b_6 + a_6b_0 + a_1b_7 - a_7b_1 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_3b_5)e_6 \\ &\quad + (a_0b_7 + a_7b_0 + a_6b_1 - a_1b_6 + a_2b_5 - a_5b_2 + a_3b_4 - a_4b_3)e_7. \end{aligned}$$

Cayley 代数の複素化 $\mathfrak{C}^{\mathbf{C}} = \{a + bi \mid a, b \in \mathfrak{C}\}$ を複素 Cayley 代数という。 $\mathfrak{C}^{\mathbf{C}}$ において、共役 \bar{x} , 内積 (x, y) , ノルム $N(x)$, 複素化に関する共役 $\tau(x)$, 対合自己同型 $\gamma(x)$ を、次のように定める。

$$\bar{x} = \bar{a} + \bar{b}i,$$

$$(x, y) = (a, c) - (b, d) + ((ad) + (b, c))i,$$

$$N(x) = x\bar{x} = a\bar{a} - b\bar{b} + (a\bar{b} + b\bar{a})i,$$

$$\tau(x) = a - bi,$$

$$\gamma(x) = \gamma(a) + \gamma(b)i,$$

$$(x = a + bi, y = c + di \in \mathbb{C}^C).$$

このとき、 $\tau\gamma(x) = \gamma\tau(x)$ となる。これらを成分で表すと次のようになる。

$$\bar{x} = a_0 - a_1e_1 - \cdots - a_7e_7 + (b_0 - b_1e_1 - \cdots - b_7e_7)i,$$

$$(x, y) = a_0c_0 + \cdots + a_7c_7 - b_0d_0 - \cdots - b_7d_7$$

$$+ (a_0d_0 + \cdots + a_7d_7 + b_0c_0 + \cdots + b_7c_7)i,$$

$$N(x) = a_0^2 + \cdots + a_7^2 - b_0^2 - \cdots - b_7^2 + (2a_0b_0 + \cdots + 2a_7b_7)i$$

$$= (a_0 + b_0i)^2 + (a_1 + b_1i)^2 + \cdots + (a_7 + b_7i)^2,$$

$$\tau(x) = a_0 + a_1e_1 + \cdots - a_7e_7 - (b_0 + b_1e_1 + \cdots + b_7e_7)i,$$

$$\gamma(x) = a_0 + \cdots + a_3e_3 - a_4e_4 - \cdots - a_7e_7$$

$$+ (b_0 + \cdots + b_3e_3 - b_4e_4 - \cdots - b_7e_7)i,$$

$$\tau\gamma(x) = a_0 + \cdots + a_3e_3 - a_4e_4 - \cdots - a_7e_7$$

$$+ (-b_0 - \cdots - b_3e_3 + b_4e_4 + \cdots + b_7e_7)i.$$

命題 3.3 Cayley 代数 \mathbb{C} , split Cayley 代数 \mathbb{C}' , 複素 Cayley 代数 \mathbb{C}^C は交代的な Hurwitz 代数である。

(証明) \mathbb{C} が交代的な Hurwitz 代数であることを示す。

$ab \cdot \overline{ab} = \overline{a\bar{a}} \cdot \overline{b\bar{b}}$ を直接計算で示すことで、 $(ab, ab) = (a, a)(b, b)$ が導かれる。

次に、命題 2.4 の (1) (2) と同様にして、 $(ab, ac) = (a, a)(b, c) = (ba, ca)$ から $(a, b)(c, d) = \frac{1}{2}((ac, bd) + (ad, bc))$ を示すことができる。このとき、命題 2.5 の (1) (2) と同様にして、 $(ab, c) = (b, \overline{ac})$, $(ba, c) = (b, c\overline{a})$ から $(a\overline{a})b = a(\overline{ab})$, $b(a\overline{a}) = (ba)\overline{a}$ を導くことができる。ここで、 $a = 2a_0 - \overline{a}$ と表されるので、 $\overline{a} = r - a$ ($r \in \mathbf{R}$) として $(a\overline{a})b = a(\overline{ab})$ に代入することで $a^2b = a(ab)$ を得る。同様に、 $b(a\overline{a}) = (ba)\overline{a}$ から $ba^2 = (ba)a$ を得る。

最後に、 $(a, b) = \frac{1}{2}(a\overline{b} + b\overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ba})$ を示す。 $(a, b) = (a \cdot 1, b) = (1, \overline{ab})$ であり、同様に、 $(a, b) = (b, a) = (1, \overline{ba})$ であるから、この 2 つの式を加えると、 $2(a, b) = (1, \overline{ab} + \overline{ba})$ を得る。ここで、 $\overline{ab} + \overline{ba} = \overline{ab} + \overline{ba}$ から $\overline{ab} + \overline{ba}$ が実数であることが分かるので、 $(a, b) = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ba}) \cdot (1, 1)$ 。したがって、 $(a, b) = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ba})$ が示された。また、 $(a, b) = (\overline{a}, \overline{b}) = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ba})$ である。よって、 \mathbb{C} が交代的な Hurwitz 代数であることが示された。

\mathbb{C}' が交代的な Hurwitz 代数であることは同様に示される。

\mathbb{C}^C は、命題 2.3 から交代代数であることが分かり、Hurwitz 代数であることは直接確かめられる。

以上により、 $\mathbb{C}, \mathbb{C}', \mathbb{C}^C$ が交代的な Hurwitz 代数であることが示された。(証明終)

$1, e_1, e_2, e_3, e'_4, e'_5, e'_6, e'_7$ を $1, e_1, e_2, e_3, e_4i, e_5i, -e_6i, e_7i$ へ移す \mathbb{C}' から \mathbb{C}^C への線形写像を φ とすると、 φ は単射な多元環準同型写像になる。

よって、 e'_4, e'_5, e'_6, e'_7 と $e_4i, e_5i, -e_6i, e_7i$ を同一視することにより、split Cayley 代数 \mathbb{C}' は、 \mathbb{C}^C の部分代数 $\langle 1, e_1, e_2, e_3, e_4i, e_5i, -e_6i, e_7i \rangle_{\mathbf{R}}$ と同型になる：

$$\mathbb{C}' \subseteq \mathbb{C}^C.$$

命題 3.4 Cayley 代数の複素化 \mathbb{C}^C と split Cayley 代数の複素化 \mathbb{C}'^C は同型である：

$$\mathbb{C}^C \cong \mathbb{C}'^C.$$

(証明) \mathbb{C}'^C から \mathbb{C}^C への写像を、 $a + bi \in \mathbb{C}'^C$ に対して $\varphi(a) + \varphi(b)i$ で定義すると、これは同型写像になる。(証明終)

以上のことから、 $\mathbb{C}, \mathbb{C}', \mathbb{C}^C$ は結合法則が成り立たないが、それに代わるものとして次の諸公式が成り立つ。

1. $\overline{ab} = \overline{ba}$.
2. $(aa)b = a(ab)$, $(ab)a = a(ba)$, $b(aa) = (ba)a$.
 $(a\overline{a})b = a(\overline{ab})$, $(ab)\overline{a} = a(b\overline{a})$, $b(a\overline{a}) = (ba)\overline{a}$.
3. $(ab)c + b(ca) = a(bc) + (bc)a$,
 $(ab)c + (ac)b = a(bc) + a(cb)$,
 $(ab)c + (ba)c = a(bc) + b(ac)$.
4. $(ab)(ca) = a(bc)a$, (Moufang の公式)
 $(ab)(\overline{ba}) = a(b\overline{a}) = (a, a)(b, b)$.
5. $(a, a) = a\overline{a} = \overline{aa}$,
 $(a, b) = \frac{1}{2}(a\overline{b} + b\overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{ab} + \overline{ba})$,
 $(a, b)c = \frac{1}{2}((ca)\overline{b} + (cb)\overline{a}) = \frac{1}{2}(\overline{a}(bc) + \overline{b}(ac))$.
6. $(a, b) = (b, a) = (\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$.
7. $(ab, ab) = (a, a)(b, b)$,
 $(ab, ac) = (a, a)(b, c) = (ba, ca)$,
 $(a, b)(c, d) = \frac{1}{2}((ac, bd) + (ad, bc))$.
8. $(ab, c) = (b, \overline{ac})$, $(ba, c) = (b, c\overline{a})$.
9. $u_0 = 1, u_1u_2, \dots, u_m$ を正規直交基底とするとき、
 $u_i(u_ja) = -u_j(u_ia)$, ($i \neq j$). 特に、 $u_iu_j = -u_ju_i$.
 $u_i(u_ia) = -a$. 特に、 $u_i^2 = -1$.
 $u_i(u_ju_k) = u_j(u_ku_i) = u_k(u_iu_j)$, (i, j, k は異なる).

3.2 四元数および複素数による表示

\mathbf{R} 上のベクトル空間 $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k$ に、 i, j, k の間の積を

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

で与え、任意の元に対しては分配法則が成り立つように積を定めた多元環を四元数体といい \mathbf{H} で表す。 \mathbf{H} の元を四元数という。 \mathbf{H} は非可換体となる。

\mathbf{H} の元 $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k, b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$ に対して、共役元 \bar{a} , 内積 (a, b) , ノルム $N(a)$ を、次のように定める。

$$\bar{a} = a_0 - a_1i - a_2j - a_3k, \\ (a, b) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \\ N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Cayley 代数 \mathbb{C} において、 $\{1, e_1, e_2, e_3\}$ で生成される部分代数は、 \mathbf{H} と同型になる。この同型により \mathbf{H} は \mathbb{C} に埋め込まれているとみなすことができる。このとき、

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 \\ = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + (a_4 + a_5e_1 - a_6e_2 + a_7e_3)e_4$$

と変形できるので、ベクトル空間として、 $\mathbb{C} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4$ となる。さらに、 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4$ に、積、内積、共役をそれぞれ

$$(a + a'e_4)(b + b'e_4) = ab - \bar{b}'a' + (a'\bar{b} + b'a)e_4, \\ (a + a'e_4, b + b'e_4) = (a, b) + (a', b'), \\ \overline{a + a'e_4} = \bar{a} - a'e_4$$

と定義すると、 \mathbb{C} のそれらに対応するので、実数体 \mathbf{R} 上の代数として \mathbb{C} と $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4$ を同一視することができる：

$$\mathbb{C} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4.$$

一般に、(必ずしも結合的とは限らない) 代数 A が与えられたとき、直和 $A \oplus A$ に積を

$$(a, a')(b, b') = (ab - \bar{b}'a', a'\bar{b} + b'a)$$

と定めることで、 $A \oplus A$ に代数の構造を定めることができる。これを Cayley Dickson 構成法という。

積は次のように定めることもできる：

$$(a, a')(b, b') = (ab + \bar{b}'a', a'\bar{b} + b'a).$$

本論文では、前者をマイナス型、後者をプラス型と呼ぶこととする。可換な代数 A において共役が自明のとき、マイナス型の Cayley Dickson 構成法は複素化と一致する。

Cayley Dickson 構成法は、可換体 \mathbf{K} 上の共役と内積が定められた (必ずしも結合的とは限らない) 代数からなる圏の間の関手となる。

\mathbf{C} は \mathbf{R} からマイナス型の Cayley Dickson 構成法で得られ、 \mathbf{C}' はプラス型の Cayley Dickson 構成法で得られる。

複素数体 \mathbf{C} は、 $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_1$ として、四元数体 \mathbf{H} に埋め込まれる：

$$\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_1 \subseteq \mathbf{H} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_2 \oplus \mathbf{R}e_3.$$

このことを用いると、四元数体 \mathbf{H} は \mathbf{C} からマイナス型の Cayley Dickson 構成法から得られることが分かる。

これらのことから、マイナス型の Cayley Dickson 構成法により、 \mathbf{R} から出発して、 $\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbb{C}$ を順次構成することができる：

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbb{C}.$$

次に、split 四元数を定義する。 \mathbf{R} 上のベクトル空間 $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i' \oplus \mathbf{R}j \oplus \mathbf{R}k'$ に、 i', j, k' の間の積を

$$i'^2 = k'^2 = 1, \quad j^2 = -1 \\ i'j = -ji' = k', \quad jk' = -k'j = i', \quad k'i' = -i'k' = -j$$

で与え、任意の元に対しては分配法則が成り立つように積を定めた多元環を split 四元数環といい \mathbf{H}' で表す。 \mathbf{H}' の元を split 四元数という。 \mathbf{H}' は非可換な 4 次元 \mathbf{R} -多元環となる。

\mathbf{H}' の元 $a = a_0 + a_1i' + a_2j + a_3k', b = b_0 + b_1i' + b_2j + b_3k'$ に対して、共役元 \bar{a} , 内積 (a, b) , ノルム $N(a)$ を、次のように定める。

$$\bar{a} = a_0 - a_1i' - a_2j - a_3k', \\ (a, b) = a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3, \\ N(a) = a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2.$$

split Cayley 代数 \mathbb{C}' において $\{1, e'_5, e_1, e'_4\}$ で生成される部分代数は、 \mathbf{H}' と同型になる。この同型により \mathbf{H}' は \mathbb{C}' に埋め込まれる。このとき、

$$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e'_4 + a_5e'_5 + a_6e'_6 + a_7e'_7 \\ = a_0 + a_5e'_5 + a_1e_1 + a_4e'_4 + (a_2 - a_7e'_5 + a_3e_1 - a_6e'_4)e_2$$

と変形できるので、 \mathbb{C}' の元は、 $a + a'e_2$ ($a, a' \in \mathbf{H}'$) と一意的に表され、ベクトル空間として $\mathbf{H}' \oplus \mathbf{H}'e_2$ となる。また、 $\mathbf{H}' \oplus \mathbf{H}'e_2$ において、積、内積、共役をそれぞれ

$$(a + a'e_2)(b + b'e_2) = ab - \bar{b}'a' + (a'\bar{b} + b'a)e_2, \\ (a + a'e_2, b + b'e_2) = (a, b) + (a', b'), \\ \overline{a + a'e_2} = \bar{a} - a'e_2$$

と定義すると、split Cayley 代数 \mathbb{C}' のそれらに対応するので、 \mathbb{C}' と $\mathbf{H}' \oplus \mathbf{H}'e_2$ を同一視することができる：

$$\mathbb{C}' = \mathbf{H}' \oplus \mathbf{H}'e_2.$$

また、 \mathbb{C}' は \mathbf{H} で分解することもできる。

$a = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e'_4 + a_5e'_5 + a_6e'_6 + a_7e'_7$
 $= a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + (a_4 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3)e'_4$
 と変形できるので、 \mathfrak{C}' の元は、 $a + a'e'_4$ ($a, a' \in \mathbf{H}$) と一意的に表され、ベクトル空間として $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e'_4$ となる。また、 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e'_4$ において、積、内積、共役をそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (a + a'e'_4)(b + b'e'_4) &= ab + \bar{b}'a' + (a'\bar{b} + b'a)e'_4, \\
 (a + a'e'_4, b + b'e'_4) &= (a, b) - (a', b'), \\
 \overline{a + a'e'_4} &= \bar{a} - a'e'_4
 \end{aligned}$$

と定義すると、split Cayley 代数 \mathfrak{C}' のそれらに対応するので、 \mathfrak{C}' と $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e'_4$ を同一視することができる：

$$\mathfrak{C}' = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e'_4.$$

\mathbf{C}' は、 $\mathbf{C}' = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5$ として、 \mathbf{H}' に埋め込まれているものとする。

以上のことから、プラス型の Cayley Dickson 構成法を用いて \mathbf{R} から \mathbf{C}' が得られた後、マイナス型の Cayley Dickson 構成法を用いて、 \mathbf{C}' から \mathbf{H}' , \mathfrak{C}' を順次構成することができる：

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}' \subseteq \mathbf{H}' \subseteq \mathfrak{C}'.$$

また、プラス型の Cayley Dickson 構成法を用いて、 \mathbf{C} から \mathbf{H}' , \mathbf{H} から \mathfrak{C}' を構成することができる。

任意の $a \in \mathfrak{C}'$ は

$$\begin{aligned}
 a &= a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e'_4 + a_5e'_5 + a_6e'_6 + a_7e'_7 \\
 &= (a_0 + a_5e'_5) + (a_1 + a_4e'_5)e_1 + (a_2 - a_7e'_5)e_2 + (a_3 + a_6e'_5)e_3
 \end{aligned}$$

すなわち

$a = a + m_1e_1 + m_2e_2 + m_3e_3$, ($\alpha, m_i \in \mathbf{C}' = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5$) と一意的に表せる。この元 a を $\mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3$ の元

$$a + \mathbf{m} = a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

に対応させる。

また、 $\mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3$ において、積、内積、共役をそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (a + \mathbf{m})(b + \mathbf{n}) &= (ab - \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle) + (a\mathbf{n} + \bar{b}\mathbf{m} + \overline{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}), \\
 (a + \mathbf{m}, b + \mathbf{n}) &= (a, b) + (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\
 &= (a, b) + (m_1, n_1) + (m_2, n_2) + (m_3, n_3) \\
 &= a_0b_0 - a_5b_5 + a_1b_1 - a_4b_4 + a_2b_2 - a_7b_7 + a_3b_3 - a_6b_6, \\
 \overline{a + \mathbf{m}} &= \bar{a} - \mathbf{m} = a_0 - a_5e'_5 + \begin{pmatrix} -a_1 - a_4e'_5 \\ -a_2 - a_7e'_5 \\ -a_3 - a_6e'_5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と定義する。ここで、 $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle$, $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ は、次のように定める。

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = m_1\bar{n}_1 + m_2\bar{n}_2 + m_3\bar{n}_3,$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} m_2n_3 - n_2m_3 \\ m_3n_1 - n_3m_1 \\ m_1n_2 - n_1m_2 \end{pmatrix}.$$

このとき、 $\mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3$ における積、内積、共役はそれぞれ split Cayley 代数 \mathfrak{C}' のそれらに対応するので、 \mathfrak{C}' と $\mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3$ を同一視することができる：

$$\mathfrak{C}' = \mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3.$$

よって、 \mathfrak{C}' は \mathbf{C}' 及び \mathbf{H}' で表される：

$$\mathfrak{C}' = \mathbf{H}' \oplus \mathbf{H}'e_2 = \mathbf{C}' \oplus (\mathbf{C}')^3.$$

数の拡張で表すと次のようになる。

$$\mathbf{C}' = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5 \subseteq \mathbf{H}' = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5 \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e'_4 \subseteq \mathfrak{C}'.$$

次に、 \mathfrak{C}^C を \mathbf{H}^C 及び \mathbf{C}^C で表示することを考える。

任意の $\alpha \in \mathfrak{C}^C$ は、 $a + a'e_4$ ($a, a' \in \mathbf{H}^C$) と一意的に表され、ベクトル空間として $\mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4$ となる。また、 $\mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4$ において、積、内積、共役をそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (a + a'e_4)(b + b'e_4) &= ab - \bar{b}'a' + (a'\bar{b} + b'a)e_4, \\
 (a + a'e_4, b + b'e_4) &= (a, b) + (a', b'), \\
 \overline{a + a'e_4} &= \bar{a} - a'e_4
 \end{aligned}$$

と定義すると、 \mathfrak{C}^C のそれらに対応しているのので、複素数体 $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i$ 上の代数として \mathfrak{C}^C と $\mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4$ を同一視することができる：

$$\mathfrak{C}^C = \mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4.$$

$\mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4$ の積において $a' = b' = 0$ とすると、 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4$ における積、内積、共役を定めるので、 \mathfrak{C} の分解を得る：

$$\mathfrak{C} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}e_4 \subseteq \mathfrak{C}^C = \mathbf{H}^C \oplus \mathbf{H}^Ce_4.$$

以上のことから、複素化により \mathbf{C} から \mathbf{C}^C が得られた後、マイナス型の Cayley Dickson 構成法を用いて、 \mathbf{C}^C から \mathbf{H}^C , \mathfrak{C}^C を順次構成することができる：

$$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}^C \subseteq \mathbf{H}^C \subseteq \mathfrak{C}^C.$$

任意の $\alpha \in \mathfrak{C}^C$ は、

$$\begin{aligned}
 \alpha &= a + m_1e_2 + m_2e_4 + m_3e_6, \\
 (a, m_i \in \mathbf{C}^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_1)^{\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}i})
 \end{aligned}$$

と一意的に表せる。この元 α を $\mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3$ の元

$$a + \mathbf{m} = a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

に対応させる。

また、 $\mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3$ において、積、内積、共役をそれぞれ

$$\begin{aligned}
 (a + \mathbf{m})(b + \mathbf{n}) &= (ab - \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle) + (a\mathbf{n} + \bar{b}\mathbf{m} - \overline{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}), \\
 (a + \mathbf{m}, b + \mathbf{n}) &= (a, b) + (\mathbf{m}, \mathbf{n}),
 \end{aligned}$$

$$\overline{a + \mathbf{m}} = \bar{a} - \mathbf{m}$$

と定義する。ここで、 $\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle, \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ は、次のように定める。

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = m_1 \bar{n}_1 + m_2 \bar{n}_2 + m_3 \bar{n}_3,$$

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} m_2 n_3 - n_2 m_3 \\ m_3 n_1 - n_3 m_1 \\ m_1 n_2 - n_1 m_2 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3$ における積、内積、共役はそれぞれ \mathfrak{C}^C のそれらに対応するので、 \mathfrak{C}^C と $\mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3$ を同一視することができる：

$$\mathfrak{C}^C = \mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3.$$

上記で $a + \mathbf{m}, b + \mathbf{n} \in \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^3$ のとき、 $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^3$ における積、内積、共役を定めるので、 \mathfrak{C} の分解を得る：

$$\mathfrak{C} = \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}^3 \subseteq \mathfrak{C}^C = \mathbf{C}^C \oplus (\mathbf{C}^C)^3.$$

3.3 数の拡張と Cayley 代数の自己同型群

ここでは、数の拡張と Cayley 代数の自己同型群の関係を調べる。

命題 3.5 \mathbf{C}' と $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ は \mathbf{R} 上の代数として同型であり、 \mathbf{H}' と $M(2, \mathbf{R})$ は \mathbf{R} 上の代数として同型である：

$$\mathbf{C}' \cong \mathbf{R} \oplus \mathbf{R},$$

$$\mathbf{H}' \cong M(2, \mathbf{R}).$$

(証明) \mathbf{C}' と $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}$ は、次の対応により \mathbf{R} 上の代数として同型となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}' & & \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \\ 1 & \leftrightarrow & (1, 1) \\ i' & \leftrightarrow & (1, -1) \end{array}$$

次に、 \mathbf{H}' と $M(2, \mathbf{R})$ は、次の対応により \mathbf{R} 上の代数として同型となる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & i' & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ j & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & k' & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

(証明終)

Split Cayley 代数の複素化から Cayley 代数の複素化への同型写像 $\varphi: \mathfrak{C}'^C \rightarrow \mathfrak{C}^C$ の定義域を $\mathbf{H}'^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5 \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e'_4)^C$ に制限すると、値域は $\mathbf{H}^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_5 \oplus \mathbf{R}e_1 \oplus \mathbf{R}e_4)^C$ となる。よって、 $\mathbf{H}^C \cong \mathbf{H}'^C$ がなりたつ。

同様に、 $\varphi: \mathfrak{C}'^C \rightarrow \mathfrak{C}^C$ の定義域を $\mathbf{C}'^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e'_5)^C$ に制限すると、値域は $\mathbf{C}^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}e_5)^C$ となる。よって、 $\mathbf{C}^C \cong \mathbf{C}'^C$ が成り立つ。

このとき、次の命題が成り立つ。

命題 3.6 \mathbf{C}^C と $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ は \mathbf{C} 上の代数として同型であり、 \mathbf{H}^C と $M(2, \mathbf{C})$ は \mathbf{C} 上の代数として同型である：

$$\mathbf{C}^C \cong \mathbf{C}'^C \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{C},$$

$$\mathbf{H}^C \cong \mathbf{H}'^C \cong M(2, \mathbf{C}).$$

(証明) $\mathbf{C}^C, \mathbf{C}'^C, \mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ は、次の対応により \mathbf{C} 上の代数として同型となる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^C & & \mathbf{C}'^C & & \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \\ 1 & \leftrightarrow & 1 & \leftrightarrow & (1, 1) \\ i & \leftrightarrow & i & \leftrightarrow & (i, i) \\ e_5 & \leftrightarrow & -e'_5 i & \leftrightarrow & (-i, i) \\ e_5 i & \leftrightarrow & e'_5 & \leftrightarrow & (1, -1) \end{array}$$

次に、 \mathbf{H}'^C と $M(2, \mathbf{C})$ は、次の対応により \mathbf{C} 上の代数として同型となる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & e'_5 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ e_1 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & e'_4 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

ここで、 $e'_5 = e_5 i, e'_4 = e_4 i$ であるから、 \mathbf{H}^C と $M(2, \mathbf{C})$ の \mathbf{C} 上の代数としての同型対応は次のようになる。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & e_5 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\ e_1 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & e_4 & \leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

以上により、命題が証明された。(証明終)

これまでのことを数の拡張の観点から、次のような図式として表すことができる。

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathfrak{C}^C & & \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ \mathfrak{C} & & \mathbf{H}^C & & \mathfrak{C}' \\ \uparrow \nearrow & & \uparrow \nwarrow & & \uparrow \\ \mathbf{H} & & \mathbf{C}^C & & \mathbf{H}' \\ \uparrow \nearrow & & \uparrow \nwarrow & & \uparrow \\ \mathbf{C} & & \mathbf{R}^C & & \mathbf{C}' \\ & \nwarrow \uparrow \nearrow & \uparrow & & \\ & & \mathbf{R} & & \end{array}$$

数の拡張はマイナス型の Cayley Dickson 構成法、プラス型の Cayley Dickson 構成法、複素化の3つの関手によりなされることが分かる。

数の拡張において、それぞれの自己同型群を考慮することで、Lie 群を具体的に構成することができる。

$\mathbf{H}, \mathbf{H}', \mathbf{H}^C$ の自己同型群はそれぞれ $SO(3), SO(2, 1), SO(3, C)$ となる。

$$\begin{aligned} SO(3) &\cong \text{Aut}(\mathbf{H}) \\ &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbf{H}) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \\ SO(2, 1) &\cong \text{Aut}(\mathbf{H}') \\ &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbf{H}') \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \\ SO(3, C) &\cong \text{Aut}(\mathbf{H}^C) \\ &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{C}}(\mathbf{H}^C) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \end{aligned}$$

$\mathbb{C}, \mathbb{C}', \mathbb{C}^C$ の自己同型群をそれぞれ、 $G_2, G_{2(2)}, G_2^C$ と表す。

$$\begin{aligned} G_2 &= \text{Aut}(\mathbb{C}) = \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbb{C}) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \\ G_{2(2)} &= \text{Aut}(\mathbb{C}') = \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbb{C}') \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \\ G_2^C &= \text{Aut}(\mathbb{C}^C) = \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{C}}(\mathbb{C}^C) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)\} \\ G_2, G_{2(2)}, G_2^C &\text{はそれぞれ } G_2 \text{ 型の例外型コンパクト Lie 群、非コンパクト Lie 群、複素 Lie 群になる。} \end{aligned}$$

命題 3.7 $G = G_2, G_{2(2)}, G_2^C$ とする。このとき、自己同型写像 $\alpha \in G$ は内積と共役を保つ：

$$(\alpha x, \alpha y) = (x, y), \quad \alpha(\bar{x}) = \overline{\alpha x}.$$

(証明) $G = G_2$ とする。最初に、 $\alpha(1) = 1$ を示す。任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して、 $\alpha(x) = \alpha(x \cdot 1) = \alpha(x)\alpha(1)$ がいえるので、 $\alpha(x) = 1$ となる $x \in \mathbb{C}$ をとることで $\alpha(1) = 1$ を得る。

次に、共役を保つことを証明する。

$$\begin{aligned} \alpha(a_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_7 e_7) &= a_0 + a_1 \alpha(e_1) + \cdots + a_7 \alpha(e_7) \\ \alpha(\overline{a_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_7 e_7}) &= a_0 - a_1 \alpha(e_1) - \cdots - a_7 \alpha(e_7) \end{aligned}$$

これらより、各 j に対して、 $\overline{\alpha e_j} = -\alpha(e_j)$ を示せばよい。 $\alpha(e_j)\alpha(e_j) = -1$ の両辺に $\overline{\alpha e_j}$ をかけると $\overline{\alpha e_j}\alpha(e_j)\alpha(e_j) = -\overline{\alpha e_j}$ を得る。ここで、 $p = \overline{\alpha e_j}\alpha(e_j)$ とおくと、 $\overline{\alpha e_j} = -p\alpha(e_j)$ となる。

$\alpha(e_j) = b_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_7 e_7$ とおき、 $b_0 \neq 0$ とする。このとき、 $\overline{\alpha e_j} = -p\alpha(e_j)$ における 1 の係数を比べることで $p = -1$ を得る。一方、 $\overline{\alpha e_j} = \alpha(e_j)$ から、 $\alpha(e_j)$ が実数となる。 $r = \alpha(e_j)$ とおくと $\alpha(r) = r = \alpha(e_j)$ から $r = e_j$ となり矛盾するので $b_0 = 0$ 。したがって、0 でない b_k をとり e_k の係数を比べると $-b_k = -pb_k$ から $p = 1$ となり $\overline{\alpha e_j} = -\alpha(e_j)$ が示された。

内積を保つことは、内積が $(a, b) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a})$ で定められていることから分かる。

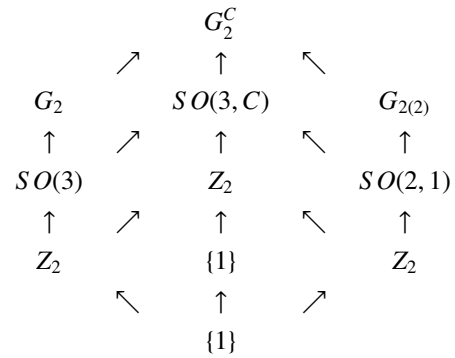
$G = G_{2(2)}, G_2^C$ の場合も同様である。(証明終)

このことから、 $G_2, G_{2(2)}, G_2^C$ の元は代数の演算(和、積、スカラー倍)、共役、内積を保つ全単射として特徴づけられる。

$$\begin{aligned} G_2 &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbb{C}) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), \alpha(\bar{x}) = \overline{\alpha x}, \\ &\quad (\alpha x, \alpha y) = (x, y)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2(2)} &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{R}}(\mathbb{C}') \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), \\ &\quad \alpha(\bar{x}) = \overline{\alpha x}, (\alpha x, \alpha y) = (x, y)\} \\ G_2^C &= \{\alpha \in \text{Iso}_{\mathbf{C}}(\mathbb{C}^C) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y), \\ &\quad \alpha(\bar{x}) = \overline{\alpha x}, (\alpha x, \alpha y) = (x, y)\} \end{aligned}$$

以上のことから、 \mathbf{R} から \mathbb{C}^C までの数の拡張の図式において、それぞれの自己同型群を考えると、次のようになる。



この図式において、 \mathbf{C} を \mathbf{R} 上のベクトル空間とみなすと自己同型群は Z_2 であり、 $\mathbf{C} = \mathbf{R}^C$ を \mathbf{C} 上のベクトル空間とみなすと自己同型群は $\{1\}$ である。

4. Zorn 表示による実現

4.1 Zorn 表示の定義

Zorn 表示の定義から始める。

$\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ とし、(1,1)成分と(2,2)成分が \mathbf{K} の要素、(1,2)成分と(2,1)成分が \mathbf{K}^3 の要素である 2 次の正方行列 ζ を

$$\zeta = \begin{pmatrix} x & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} & y \end{pmatrix},$$

$$(x, y, a_j, b_j \in \mathbf{K}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{K}^3)$$

とし、 ζ の全体からなる集合を

$$\text{Zr}(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}^3 \\ \mathbf{K}^3 & \mathbf{K} \end{pmatrix}$$

と表す。

$$\text{Zr}(\mathbf{K}) \text{ において和、定数倍、積を } \zeta = \begin{pmatrix} x & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & y \end{pmatrix},$$

$\eta = \begin{pmatrix} z & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & w \end{pmatrix} \in \text{Zr}(\mathbf{K}), k \in \mathbf{K}$ に対して、次のように定めると、 $\text{Zr}(\mathbf{K})$ は非結合な代数となる。

$$\zeta + \eta = \begin{pmatrix} x & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & \mathbf{a} + \mathbf{c} \\ \mathbf{b} + \mathbf{d} & y+w \end{pmatrix},$$

$$k\zeta = k \begin{pmatrix} x & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & k\mathbf{a} \\ k\mathbf{b} & ky \end{pmatrix},$$

$$\zeta\eta = \begin{pmatrix} x & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & w \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} xz + (\mathbf{a}, \mathbf{d}) & xc + \mathbf{a}w - \mathbf{b} \times \mathbf{d} \\ \mathbf{b}z + y\mathbf{d} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} & yz + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{pmatrix}.$$

また、共役、内積を次のように定める。

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} y & -\mathbf{a} \\ -\mathbf{b} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} & x \end{pmatrix},$$

$$(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(\zeta\bar{\eta} + \eta\bar{\zeta}) = \frac{1}{2}(xw + yz - (\mathbf{a}, \mathbf{d}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c})).$$

このように定義された非結合な代数 $Zr(\mathbf{K})$ を \mathbf{K} の Zorn 表示という。

命題 4.1 $Zr(\mathbf{R})$ は \mathfrak{C}' と \mathbf{R} -代数として共役と内積を保つ同型であり、 $Zr(\mathbf{C})$ は \mathfrak{C}^C と \mathbf{C} -代数として共役と内積を保つ同型である：

$$\begin{array}{ccc} Zr(\mathbf{C}) & \cong & \mathfrak{C}^C \\ \uparrow & & \uparrow \\ Zr(\mathbf{R}) & \cong & \mathfrak{C}' \end{array}$$

(証明) $\mathbf{v}_1 = {}^t(1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = {}^t(0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = {}^t(0, 0, 1)$ とするとき、次の対応で \mathfrak{C}' と $Zr(\mathbf{R})$ は \mathbf{R} -代数として共役と内積を保つ同型となることが直接の計算で確かめられる。

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad e'_4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix},$$

$$e_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$e'_{k+4} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3).$$

複素化 $Zr(\mathbf{C}) = Zr(\mathbf{R})^C$ の場合は、

$$ie_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbf{v}_j \\ i\mathbf{v}_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3)$$

のように自然に対応を拡張できる。 (証明終)

この命題から、Split Cayley 代数とその複素化の代数的な構造は、Zorn 表示を用いて表されることが分かった。

Zorn 表示 $Zr(\mathbf{K})$ のベクトル空間としての基底を次のように定める。ただし、 \mathbf{v}_j は命題 4.1 の証明で用いたものとする。

$$u_0 = \frac{1}{2}(e_0 + e'_4) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix},$$

$$u_0^* = \frac{1}{2}(e_0 - e'_4) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

$$u_j = \frac{1}{2}(-e_j + e'_{j+4}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{v}_j \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$u_j^* = \frac{1}{2}(e_j + e'_{j+4}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3).$$

このとき、この基底に関する積は次のようになる。

	u_0	u_0^*	u_1	u_2	u_3	u_1^*	u_2^*	u_3^*
u_0	u_0	0	u_1	u_2	u_3	0	0	0
u_0^*	0	u_0^*	0	0	0	u_1^*	u_2^*	u_3^*
u_1	0	u_1	0	u_3^*	$-u_2^*$	u_0	0	0
u_2	0	u_2	$-u_3^*$	0	u_1^*	0	u_0	0
u_3	0	u_3	u_2^*	$-u_1^*$	0	0	0	u_0
u_1^*	u_1^*	0	u_0^*	0	0	0	$-u_3$	u_2
u_2^*	u_2^*	0	0	u_0^*	0	u_3	0	$-u_1$
u_3^*	u_3^*	0	0	0	u_0^*	$-u_2$	u_1	0

\mathbf{K} , $\mathbf{K} \oplus \mathbf{K}$, $M(2, \mathbf{K})$ はそれぞれ、自然に $Zr(\mathbf{K})$ に埋め込まれる：

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} \subseteq M(2, \mathbf{K}) \subseteq Zr(\mathbf{K}).$$

埋め込みの写像は次のように定める。

$$i_1 : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K} \oplus \mathbf{K}$$

$$i_1(\alpha) = (\alpha, \alpha) = \alpha u_0 + \alpha u_0^*,$$

$$i_2 : \mathbf{K} \oplus \mathbf{K} \rightarrow M(2, \mathbf{K})$$

$$i_2(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \alpha u_0 + \beta u_0^*,$$

$$i_4 : M(2, \mathbf{K}) \rightarrow Zr(\mathbf{K})$$

$$i_4 \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \delta \end{pmatrix}$$

$$= \alpha u_0 + \beta u_1 + \gamma u_1^* + \delta u_0^*.$$

数体系における Split 系列の代数的な構造を、直和、行列環、Zorn 表示を用いて図にすると次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} & \rightarrow & M(2, \mathbf{R}) & \rightarrow & Zr(\mathbf{R}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{C}' & \rightarrow & \mathbf{H}' & \rightarrow & \mathfrak{C}' \end{array}$$

よって、 \mathbf{C} 上の Zorn 表示 $Zr(\mathbf{C}) \cong \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}}$ に、 \mathfrak{C}' と \mathfrak{C} を埋め込むことができる。図で表すと次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}} & \cong & Zr(\mathbf{C}) & \cong & \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}} \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \mathfrak{C} & & Zr(\mathbf{R}) & \cong & \mathfrak{C}' \end{array}$$

同型対応 $\mathfrak{C}'^{\mathbf{C}} \cong Zr(\mathbf{C})$ によって $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}}$ の移り先を考えることで、これらを $Zr(\mathbf{C})$ の部分代数として実現することができる。

\mathfrak{C} の元 $a_0 + a_1e_1 + \dots + a_7e_7$ の $Zr(\mathbf{C})$ への埋め込みを具体的に書くと次のようになる：

$$a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 - a_4i & \begin{pmatrix} -a_1 - a_5i \\ -a_2 + a_6i \\ -a_3 - a_7i \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_1 - a_5i \\ a_2 + a_6i \\ a_3 - a_7i \end{pmatrix} & a_0 + a_4i \end{pmatrix}$$

\mathbf{R} は (r, r) の全体として、 $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ に埋め込まれる。これを $Zr^{s1}(\mathbf{C})$ とかく：

$$\mathbf{R} \cong Zr^{s1}(\mathbf{C}) \subseteq Zr(\mathbf{C}).$$

\mathbf{C} は $(\alpha, \tau(\alpha)) = (a + bi, a - bi)$ の全体として、 $\mathbf{C} \oplus \mathbf{C}$ に埋め込まれる。これを $Zr^{s2}(\mathbf{C})$ とかく：

$$\mathbf{C} \cong Zr^{s2}(\mathbf{C}) \subseteq Zr(\mathbf{C}).$$

\mathbf{H} は $\begin{pmatrix} \alpha & -\tau(\beta) \\ \beta & \tau(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & -c + di \\ c + di & a - bi \end{pmatrix}$ の全体として、 $M(2, \mathbf{C})$ に埋め込まれる。これを $Zr^{s4}(\mathbf{C})$ とかく：

$$\mathbf{H} \cong Zr^{s4}(\mathbf{C}) \subseteq Zr(\mathbf{C}).$$

$$\mathfrak{C} \text{ は } \begin{pmatrix} \alpha & \begin{pmatrix} -\tau(\beta) \\ -\tau(\gamma) \\ -\tau(\delta) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} & \tau(\alpha) \end{pmatrix} \text{ の全体として、} Zr(\mathbf{C}) \text{ に}$$

埋め込まれる。これを $Zr^{s8}(\mathbf{C})$ とかく：

$$\mathfrak{C} \cong Zr^{s8}(\mathbf{C}) \subseteq Zr(\mathbf{C}).$$

対合自己同型 $\gamma: \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ を、 $\gamma: Zr(\mathbf{C}) \rightarrow Zr(\mathbf{C})$ で表すと、次のようになる：

$$\begin{pmatrix} \alpha & \begin{pmatrix} -\tau(\beta_1) \\ -\tau(\beta_2) \\ -\tau(\beta_3) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} & \tau(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \tau(\alpha) & \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \tau(\beta_1) \\ \tau(\beta_2) \\ \tau(\beta_3) \end{pmatrix} & \alpha \end{pmatrix}$$

これらのように Cayley 代数と Split Cayley 代数を $Zr(\mathbf{C})$ の部分代数として実現することで、代数的な構造が明確になる。図に表すと次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}} & \cong & Zr(\mathbf{C}) & \cong & \mathfrak{C}'^{\mathbf{C}} \\ & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \\ \mathfrak{C} & \cong & Zr^{s8}(\mathbf{C}) & M(2, \mathbf{C}) & Zr(\mathbf{R}) & \cong & \mathfrak{C}' \\ & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \\ \mathbf{H} & \cong & Zr^{s4}(\mathbf{C}) & \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} & M(2, \mathbf{R}) & \cong & \mathbf{H}' \\ & \uparrow & \nearrow & \uparrow & \nwarrow & \uparrow & \\ \mathbf{C} & \cong & Zr^{s2}(\mathbf{C}) & \mathbf{C} & \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} & \cong & \mathbf{C}' \\ & \uparrow & \nearrow & \nwarrow & \uparrow & & \\ \mathbf{R} & \cong & Zr^{s1}(\mathbf{C}) & & \mathbf{R} & \cong & \mathbf{R} \end{array}$$

4.2 パウリ行列を用いた表示

次の行列をパウリ行列といい、物理学で用いられる。

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ここでは数学的な観点から、パウリ行列を用いて Zorn 表示を構成し、それが Cayley 代数の複素化 $\mathfrak{C}'^{\mathbf{C}}$ と同型であることを示す。

ベクトル空間として、 $P_{\mathbf{C}}$ を次のように定める。

$$P_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\sigma_1 \oplus \mathbf{C}\sigma_2 \oplus \mathbf{C}\sigma_3.$$

$$P_{\mathbf{C}} \text{ の元は具体的に } \begin{pmatrix} z & u \\ v & -z \end{pmatrix}, \quad (z, u, v \in \mathbf{C})$$

として、2 次の正方行列で表される。

$P_{\mathbf{C}}$ の元 A, A' に対して、積 $A \circ A'$ 、内積 (A, A') を次のように定める。

$$A \circ A' = -\frac{i}{2}[A, A'] = -\frac{i}{2}(AA' - A'A),$$

$$(A, A') = \frac{1}{2}\text{tr}(AA').$$

このとき、 $P_{\mathbf{C}}$ は非結合な代数となる。

$$P_{\mathbf{C}} \text{ の元 } A = \begin{pmatrix} z & u \\ v & -z \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} z' & u' \\ v' & -z' \end{pmatrix} \text{ に対し}$$

て、積 $A \circ A'$, 内積 (A, A') を具体的に書くと次のようになる。

$$A \circ A' = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} uv' - vu' & 2zu' - 2uz' \\ -2zv' + 2vz' & -(uv' - vu') \end{pmatrix},$$

$$(A, A') = \frac{1}{2}(2zz' + uv' + vu').$$

また、 P_C におけるパウリ行列の積と内積は次のようになる。

$$\sigma_2 \circ \sigma_3 = -\sigma_3 \circ \sigma_2 = \sigma_1,$$

$$\sigma_3 \circ \sigma_1 = -\sigma_1 \circ \sigma_3 = \sigma_2,$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = -\sigma_2 \circ \sigma_1 = \sigma_3,$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_3 = 0,$$

$$(\sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_3, \sigma_2) = 0,$$

$$(\sigma_3, \sigma_1) = (\sigma_1, \sigma_3) = 0,$$

$$(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_2, \sigma_1) = 0,$$

$$(\sigma_1, \sigma_1) = (\sigma_2, \sigma_2) = (\sigma_3, \sigma_3) = 1.$$

次に、(1,1)成分と(2,2)成分が \mathbb{C} の要素、(1,2)成分と(2,1)成分が P_C の要素である2次の正方行列全体からなる集合を

$$Z_P(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & P_C \\ P_C & \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

と表し、 $Z_P(\mathbb{C})$ における和を成分ごとの和、複素数の作用を各成分への作用とする。

$$\text{また、} Z_P(\mathbb{C}) \text{ の元 } \zeta = \begin{pmatrix} \alpha & A \\ B & \beta \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \alpha' & A' \\ B' & \beta' \end{pmatrix} \text{ に}$$

対して、積、共役、内積を次のように定める。

$$\begin{aligned} \zeta \eta &= \begin{pmatrix} \alpha & A \\ B & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & A' \\ B' & \beta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \frac{1}{2}\text{tr}(AB') & \alpha A' + A\beta' + \frac{i}{2}[B, B'] \\ B\alpha' + \beta B' - \frac{i}{2}[A, A'] & \beta\beta' + \frac{1}{2}\text{tr}(BA') \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\bar{\zeta} = \begin{pmatrix} \beta & -A \\ -B & \alpha \end{pmatrix},$$

$$(\zeta, \eta) = \frac{1}{2}(\zeta\bar{\eta} + \eta\bar{\zeta}) = \frac{1}{4}(2\alpha\beta' + 2\beta\alpha' - \text{tr}(AB') - \text{tr}(BA')).$$

このとき、 $Z_P(\mathbb{C})$ は非結合な代数となる。 $Z_P(\mathbb{C})$ を、 \mathbb{C} 上の代数 P_C の Zorn 表示という。

ここで、 $Z_P(\mathbb{C})$ の元 $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2, \hat{\Omega}_3$ を次のように定める。

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Omega}_j = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

命題 4.2 $Z_P(\mathbb{C})$ と $Zr(\mathbb{C})$ は、 \mathbb{C} -代数として共役と内積を保つ同型である：

$$Z_P(\mathbb{C}) \cong Zr(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}'^C \cong \mathbb{C}^C.$$

(証明) $\mathbf{v}_1 = {}^t(1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = {}^t(0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = {}^t(0, 0, 1)$ とするとき、次の対応で $Z_P(\mathbb{C})$ と $Zr(\mathbb{C})$ は \mathbb{C} -代数として共役と内積を保つ同型となることが直接の計算で確かめられる。

$$\Omega_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_4 \leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & i \end{pmatrix},$$

$$\Omega_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\hat{\Omega}_j \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbf{v}_j \\ -i\mathbf{v}_j & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, 3).$$

(証明終)

この証明の対応により、 Ω_j は e_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$) に対応しており、 $\hat{\Omega}_1$ は e_5 , $\hat{\Omega}_2$ は $-e_6$, $\hat{\Omega}_3$ は e_7 に対応しているので、 $\Omega_j, \hat{\Omega}_k$ の実数係数全体からなる $Z_P(\mathbb{C})$ の部分代数

$$\oplus_{j=0}^4 \mathbf{R}\Omega_j \oplus_{k=1}^3 \mathbf{R}\hat{\Omega}_k$$

を $Z_P(\mathbf{R})$ とおくと、 $Z_P(\mathbf{R})$ は Cayley 代数 \mathbb{C} と同型になる：

$$Z_P(\mathbf{R}) \cong \mathbb{C}.$$

$Z_P(\mathbf{R})$ 自体は Zorn 表示で構成されたわけではないが、このように $\Omega_j, \hat{\Omega}_k$ を基底に取ることで、Zorn 表示 $Z_P(\mathbb{C})$ の部分代数として、Cayley 代数 $\mathbb{C} \cong Z_P(\mathbf{R})$ を構成することができる。

それゆえに、Zorn 表示 $Zr(\mathbb{C})$ は split Cayley 代数 \mathbb{C}' との関係が明確であり、Zorn 表示 $Z_P(\mathbb{C})$ は Cayley 代数 \mathbb{C} との関係が明確な構成であるといえる。

5. G_2^C の部分群の構成

5.1 G_2^C の部分群

G_2^C の部分群 $(G_2^C)_{e_4}$ を構成する。

定理 5.1 G_2^C の部分群

$$(G_2^C)_{e_4} = \{\alpha \in G_2^C \mid \alpha(e_4) = e_4\}$$

は、 $SU(3, \mathbb{C}^C)$ と同型である：

$$(G_2^C)_{e_4} \cong SU(3, \mathbb{C}^C) \cong SL(3, \mathbb{C}).$$

(証明) $\alpha \in (G_2^C)_{e_4}$ による e_1, e_2, e_3 の移り先を次のように定める。

$$\alpha(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_5 + ee_6 + fe_7,$$

$$\alpha(e_2) = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'e_5 + e'e_6 + f'e_7,$$

$$\alpha(e_3) = a''e_1 + b''e_2 + c''e_3 + d''e_5 + e''e_6 + f''e_7,$$

$$(a, \dots, f, a', \dots, f', a'', \dots, f'' \in \mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus \mathbf{Ri})$$

このとき、 $e_1e_4 = e_5, e_2e_4 = -e_6, e_3e_4 = e_7$ より、
 $\alpha(e_5) = -de_1 + ee_2 - fe_3 + ae_5 - be_6 + ce_7,$
 $\alpha(e_6) = d'e_1 - e'e_2 + f'e_3 - a'e_5 + b'e_6 - c'e_7,$
 $\alpha(e_7) = -d''e_1 + e''e_2 - f''e_3 + a''e_5 - b''e_6 + c''e_7$
 となる。

α を基底 e_1, e_2, \dots, e_7 を用いて行列で表すと

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & a' & a'' & 0 & -d & d' & -d'' \\ b & b' & b'' & 0 & e & -e' & e'' \\ c & c' & c'' & 0 & -f & f' & -f'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & d' & d'' & 0 & a & -a' & a'' \\ e & e' & e'' & 0 & -b & b' & -b'' \\ f & f' & f'' & 0 & c & -c' & c'' \end{pmatrix}$$

となる。この α に対して、 $\mathbf{C}^C = (\mathbf{R} \oplus \mathbf{Ri})^{\mathbf{R} \oplus \mathbf{Ri}}$ を成分とする行列

$$A = \begin{pmatrix} a + d\mathbf{i} & a' + d'\mathbf{i} & a'' + d''\mathbf{i} \\ c + f\mathbf{i} & c' + f'\mathbf{i} & c'' + f''\mathbf{i} \\ b - e\mathbf{i} & b' - e'\mathbf{i} & b'' - e''\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

を対応させると、 $A \in SU(3, \mathbf{C}^C)$ である。ただし、 $SU(3, \mathbf{C}^C)$ は、 \mathbf{i} に関する共役で定義する。
 (証明終)

この定理により、 $(G_2)_{e_4}, (G_{2(2)})_{e_4}$ を $(G_2^C)_{e_4}$ の部分群として具体的に実現することができる。

系 5.2 G_2 の部分群 $(G_2)_{e_4} = \{\alpha \in G_2 | \alpha(e_4) = e_4\}$ は、 $SU(3)$ と同型である：

$$(G_2)_{e_4} \cong SU(3) \subseteq (G_2^C)_{e_4}.$$

(証明) $\alpha \in (G_2)_{e_4}$ のとき定理 3.1 における係数は、
 $a, \dots, f, a', \dots, f', a'', \dots, f'' \in \mathbf{R}$
 となるので、対応する行列は $A \in SU(3)$ となる。
 (証明終)

系 5.3 $(G_{2(2)})_{e_4}$ は $SU(3, \mathbf{C}')$ と同型である：

$$(G_{2(2)})_{e_4} \cong SU(3, \mathbf{C}') \cong SL(3, \mathbf{R}) \subseteq (G_2^C)_{e_4}.$$

(証明) $\mathcal{C}' = \langle 1, e_1, e_2, e_3, e_4i, e_5i, -e_6i, e_7i \rangle_{\mathbf{R}}$ より $\alpha \in (G_{2(2)})_{e_4}$ は、 $\langle e_1, e_2, e_3, e_5i, -e_6i, e_7i \rangle_{\mathbf{R}}$ をそれぞれ自身に移す。よって、 α による e_1, e_2, e_3 の移り先は、
 $\alpha(e_1) = ae_1 + be_2 + ce_3 + die_5 + eie_6 + fie_7,$
 $\alpha(e_2) = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3 + d'ie_5 + e'ie_6 + f'ie_7,$
 $\alpha(e_3) = a''e_1 + b''e_2 + c''e_3 + d''ie_5 + e''ie_6 + f''ie_7,$
 $(a, \dots, f, a', \dots, f', a'', \dots, f'' \in \mathbf{R})$
 と表せる。このとき、行列

$$A = \begin{pmatrix} a + d\mathbf{i} & a' + d'\mathbf{i} & a'' + d''\mathbf{i} \\ c + f\mathbf{i} & c' + f'\mathbf{i} & c'' + f''\mathbf{i} \\ b - e\mathbf{i} & b' - e'\mathbf{i} & b'' - e''\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

を対応させると、 $A \in SU(3, \mathbf{C}')$ である。(証明終)

6. おわりに

本論文では Cayley 代数、split Cayley 代数及びその複素化に基づき数体系の拡張を調べ、その観点から G_2 型例外 Lie 群の具体的な構成方法を考察した。split Cayley 代数とその複素化に関しては、Zorn 表示を用いることで、代数的な構造が明確になることを示した。

また、Cayley 代数の複素化を用いて G_2 型複素例外リー群 G_2^C を構成することで、 G_2 及び $G_{2(2)}$ の G_2^C への自然な埋め込みが実現できた。

今後の研究の方向性として、 $G_2, G_{2(2)}$ 及びそれらの部分群がどのような関係にあるかを、 G_2^C への埋め込みの観点から具体的に調べることもある。その発展として、 F_4 型複素例外 Lie 群 F_4^C への埋め込みにも拡張することも考えられる。

また、Zorn 表示の代数的な構造を考察することや圏論的な立場から Cayley Dickson 構成法の性質を調べることも考えられる。

文献

- 1) J. Daboul and R. Delbourgo, Matrix Representation of Octonions and Generalizations, J.Math.Phys. 40 (1999), 4134-4150.
- 2) H. Freudenthal, Octaven, Ausnahamegruppen und Octavengeometrie, Math. Inst. Rijkuniv. te Utrecht, 1951.
- 3) H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I - XI, Indagationes Mathematicae, 1954-1963.
- 4) H. Freudenthal, Lie groups in the foundations of geometry, Advances in Mathematics, Volume 1, Issue 2 (1964), 145-190.
- 5) T. Imai and I. Yokota, Simply connected compact simple Lie group $E_{7(-133)}$ of type E_7 , J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 383-395.
- 6) T. Imai and I. Yokota, Simply connected compact simple Lie group $E_{8(-248)}$ of type E_8 , J. Math. Kyoto Univ. 21 (1981), 741-762.
- 7) N. Jacobson, Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G, Duke Math. J. Volume 5, Number 4 (1939), 775-783.

- 8) T. Miyasaka and I. Yokota, Orbit types of the compact Lie group E_7 in the Freudenthal vector space \mathfrak{B}^C , Tsukuba J. Math. 23 (1999), 229-234.
- 9) O. Shukuzawa and I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{6(6)}$ of type E_6 , J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 14 (1979), 1-13.
- 10) O. Shukuzawa and I. Yokota, Non-compact simple Lie group $E_{6(-14)}$ and $E_{6(2)}$ of type E_6 J. Fac. Sci. Shinshu Univ. 14 (1979), 15-28.
- 11) I. Yokota, Simply connected compact simple Lie group $E_{6(-78)}$ of type E_6 and its involutive automorphisms, J. Math. Kyoto Univ. 20 (1980), 447-473.
- 12) 石原哲雄, 分離型八元数 \mathbf{O}' 上の例外型 Lie 環 $\mathfrak{g}_{2(2)}$ と Lie 群 $G_{2(2)}$, YSTM (2018), 40-86.
- 13) 宮下敏一, 例外型単純 Lie 群における有限位数の自己同型写像による不動点部分群の実現とその応用, 学位論文, 慶應義塾大学, 2007.
- 14) 横田一郎, 古典型単純リー群, 現代数学社, 1990.
- 15) 横田一郎, 例外型単純リー群, 現代数学社, 1992.

Realization of Subgroups of the Complex Exceptional Lie Group of Type G_2 by Split Cayley Algebra and its Complexification

Manabu Matsuoka*

(Received: May 1st, 2019)

Department of Core Studies, Kochi University of Technology
185 Miyanokuchi, Tosayamada, Kami City, Kochi 782–8502, JAPAN

* E-mail: matsuoka.manabu@kochi-tech.ac.jp

Abstract: In this study, we shall develop methods to construct quaternions, split octanions and their complexifications considered from the viewpoint of the extended number system. The extended number system is not only complex numbers, quaternions and octanions, but also split complex numbers, split quaternions, split octanions and sequences obtained by their complexifications. We clarify these structures based on the complexification of the octonion algebra, and take the automorphism group to construct the exceptional complex Lie group of type G_2 . Furthermore, we consider G_2^C , the largest Lie group of type G_2 , and specifically construct embedding of the compact and non-compact Lie groups as the subgroup of G_2^C .