

博士学位論文

振動法による薄板の張力分布同定技術  
に関する研究

Identification method of thin plate tension distribution using  
vibration characteristics

2019年9月

工学研究科基盤工学専攻

学籍番号：1228005

在原 広敏

指導教員：岡宏一教授

# 要旨

鋼板やアルミ板などの金属材料は自動車や電車などの輸送機械、鉄橋やビルなどの建築物の構造部材、飲料缶や家電製品にいたるまで、さまざまな製品分野で利用されている。例えば、アルミ薄板においてはプレス成形のしやすさや鉄に比べて軽量であるなどの特徴を活かして、飲料缶向けのキャン材やエアコン用熱交換器のフィン材、自動車パネル材などに採用されている。ここで、薄板金属材料に求められる代表的な品質としては、板自体のゆがみの少なさである形状品質、プレス加工や絞り加工などの成形加工時の材料の伸びやすさとしての成形性、また腐食や着霜防止のためのコーティングの塗膜品質などがあげられる。

これらの品質の中で、アルミ薄板の製造プロセスでは形状品質の確保が重要な課題となっており、具体的には圧延工程や熱処理工程において不均一な塑性変形が生じることがあり、板面が凸凹状にゆがむような形状不良（ひずみ）を発生させ、これらのひずみは最終製品の形状品質を悪化させる。このような形状不良が残ったままコーティングラインを通板させると、形状不良の凸凹により板が浮き上がり塗膜厚さにムラが生じる場合がある。また、形状品質を改善するためにテンションレベラと呼ばれるひずみ矯正装置を用いてひずみを矯正することができるが、材料を塑性域まで引き伸ばして平坦度を向上させるため、ひずみ矯正後の材料の伸び代が減少して成形加工時の成形性を低下させるという問題がある。従って、形状品質の確保は成形性や塗膜品質などの他の品質に対しても影響を与えるため、薄板製造プロセスにおいては極めて重要な項目である。そのため、薄板製造分野ではひずみ形状をオンラインで把握し、製造中にできるだけ形状不良を小さくしたいというニーズがある。

製鉄やアルミ圧延などの薄板製造分野では、圧延後の製品に対する高い形状品質の要求に対して形状制御を行える圧延機を設置し、板幅や板厚などの寸法精度だけでなく、断面形状（クラウンと呼ばれる板幅方向の板厚不均一）や平坦度の向上に努めてきた。それにともない、圧延機自体の形状制御能力に加えてひずみ形状計測器の測定性能も重要となり、昭和 40 年代初頭より多くの鉄鋼メーカーや圧延機械メーカーにより研究されてきた。今日にいたるまで、さまざまな原理の形状測定法が提案されており、本研究と関連のある代表的な測定方法として光切断法、ロール法、振動法の 3 つの手法がある。

板表面にスポットレーザを板幅方向に走査、またはシートレーザと呼ばれるライン状のレーザ光を照射し、反射光が板表面形状を映した輝線となり、それをカメラで撮影することで薄板の幅方向の形状を把握する方式が光切断法である。光切断法の利点として、非接触計測であるため薄板製品を疵つけることがなく、熱間圧延ラインなどの厳しい計測環境においても適用可能なことがあげられる。しかしながら、光学的な計測方法においては、通板張力によって引き伸ばされて潜在化されたひずみ形状を測定することはできない。

通板ロールにセンサを組み込んで薄板の張力分布を測定することで薄板形状を推定する技術がロール法である。センサロールではロール内部の幅方向に複数の荷重検出器（ロードセル）を配列して埋め込むことで、通板されている薄板の幅方向の張力分布を測定できる機能を付与している。本手法はロードセルによる測定であるため比較的高速な応答の測定信号が得られ、実際の圧延プロセスにおいて圧延機の出側に設置して形状制御に利用されることが多い。しかしながら、加熱帯などの熱処理ラインには適用できず、また測定には比較的大きな通板張力を付加する必要があるため、仕上げラインなど大きな張力を付加できないラインには適用できないなどの制約が多い。

そのような制約を受けない方法として、板振動を利用することで板形状の影響を含めた張力測定方法が提案されている。板のひずみ状態によって生じた張力分布と、その分布に対応する固有振動数と振動モードとの関係に着目し、2つの固有振動数を用いて張力値を算出することで、板のひずみ状態によらず実際の負荷張力に近い値を同定することができる。圧延張力をオンラインで測定するために板の両端側にレーザ変位計を設置して薄板の固有振動数を計測する方法があり、本手法によれば、比較的単純な理論と測定機器構成で非接触の計測が可能であり、実験においてモータによる負荷張力と対応した測定結果が得られている。このような振動法を用いれば装置設置上の制約が少ないという利点があるが、測定できるのは総張力であり幅方向の張力分布の把握はできない。

そこで、本論文では、前述の振動法の長所である制約が少ないことは確保した上で、振動法を大きく発展させ、張力分布が得られる新たな計測法を提案するとともに、それを実機に適用することを目指し以下のことを実施した。

幅方向にひずみ分布を有する薄板に対して長手方向に張力を付加した場合、ひずみ分布に対応した張力分布が発生することに着目し、張力分布をばね分布としてモデル化した簡易モデルを提案した。そして、簡易モデルの運動方程式に基づいて、与えられた固有振動数と幅方向の振動モードより張力分布を同定する理論を導出した。また、有限要素法を用いてひずみ形状を有するアルミ薄板の非線形静解析により張力分布を再現し、続いて振動解析により張力分布に対応した固有振動数と振動モードを算出した。ここで得られた振動特性に張力同定理論を適用して張力分布を同定し、有限要素法により得られた張力分布と理論による同定結果とを比較した結果、提案法が妥当であることが確認できた。

次に、薄板の周囲に存在する空気の付加質量が薄板の振動特性に与える影響について、有限要素法と仮想質量法とを用いて数値解析により検討した。本解析により、空気の付加質量は薄板の見かけの質量を増加させ、振動特性としては固有振動数が低下するだけでなく、幅方向の振動モードも変化すること示し、付加質量の影響を考慮していない張力同定理論では同定精度が大幅に低下することを明らかにした。本課題に対して、仮想質量法により算出された付加質量分布を用いて張力同定理論を付加質量の影響を考慮した理論に発展させ、同定精度を改善する方法を提案した。さらには、構造物の平面上

に作用する流体力を簡易的に計算する手法を応用して、仮想質量法に比べて、より簡便で高速な付加質量の簡易計算法を確立し、本技術の実用化に向けた改良を加えた。

また、実際にひずみ形状を有するアルミ薄板と長手方向に張力を付加できる張力負荷装置とを用いて実ラインを模擬した実験装置を構築し、これまでに提案した張力同定理論について、その有効性を実験的に検討した。本実験装置では、板の振動特性を計測するため圧縮空気をパルス状に噴射し、励起された板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計により計測する構成としており、振動波形から実験モード解析により固有振動数と板幅方向の振動モードを求め張力分布を同定した。また、同定結果の妥当性を検証するために、板表面に貼り付けたひずみゲージの測定値から換算した張力分布と同定値とを比較した。ひずみ形状が異なる3種類のアルミ薄板に対して提案手法を適用し、同定結果とひずみゲージの計測結果とが対応することを示した。

さらに、上記の実験技術に部分空間法の一つである Eigensystem realization algorithm (ERA) 法に基づく実験モード解析技術を組み合わせ、短時間の振動データから逐次モード解析を行って張力分布を同定する技術を完成させることで、実ラインにおけるオンラインでの張力分布の測定を実現した。

薄板製造プロセスにおいて適切な支持ロール間隔と通板張力が作用する場所を選定し、レーザ変位計とエアノズルによる張力分布のオンライン測定方法とその実験結果について示した。実験ではひずみ状態の変化を捉えられるか検証するためにテンションレベラと呼ばれるひずみ矯正装置を用い、まずラインに矯正前の薄板を通板して張力分布を測定し、その後テンションレベラでひずみ矯正を行い同じコイルを再通板することでひずみ矯正後の張力分布を測定して両者を比較した。それにより、矯正前の薄板は圧延時の不均一な引き伸ばしによるものと思われる大きな偏張力が発生しているのに対し、テンションレベラによる矯正後は板幅方向の伸び差が緩和されて偏張力が大幅に減少することを明らかにすることができた。

また、これまでに述べた張力分布同定理論を鋼板に適用範囲を拡大するにあたって、張力を付加してもひずみ形状が引き伸ばしきれずに波形状として残ることを有限要素法による解析で示し、その結果、簡易モデルの仮定と異なる剛性値に対して張力分布を同定するため大きな同定誤差が生じることを明らかにした。

このような問題に対し、新たに簡易モデルの曲げ剛性の値を未知数として張力同定理論を再構築し、張力分布と曲げ剛性分布とを一括して同定する理論とすることで、解析において鋼板に対する同定精度が大幅に改善することを示した。最後に、これまでに評価したアルミ薄板の4倍の板厚を有する比較的曲げ剛性の高いアルミ板を用いて張力負荷装置による実験検証を行い、本技術の有効性を示した。

以上のように、本研究では振動法を用いた張力分布同定技術により、薄板の固有振動数と幅方向の振動モードから張力分布を同定できることを明らかにし、解析および実験による有効性の検証と実ラインへの適用により本技術の実用性を示した。

製鉄やアルミ・銅などの金属圧延分野において、板歪形状の詳細な把握とそれによる形状品質の向上は現在においても重要な技術課題の一つであり、本研究はその課題克服に向けての一役を担う研究になり得る。また、薄板製造分野において、振動技術により形状品質評価技術を実用化した例はほとんどなく、振動法による張力分布同定理論を確立できたことから、金属に限らず製紙や樹脂フィルムなどの帯状体への適用範囲の拡大、帯状体の張力分布と蛇行挙動の解明による通板制御技術の向上など、本分野のさらなる発展が期待される。ただし、本研究で提案した張力同定技術は測定精度の向上や測定値を製造プロセスの改善につなげるシステムの構築など、多くの課題が残されているのが実情である。開発した技術の実ラインへの適用を進め、実製品の品質向上につながる提案につなげていくことが今後の研究課題である。

# 目次

第 1 章	緒論	9
1.1.	研究の背景	9
1.2.	従来の研究	11
1.2.1.	光切断法	11
1.2.2.	ロール法	14
1.2.3.	振動法	16
1.3.	本研究の目的	18
1.4.	本論文の構成	18
第 2 章	振動法による薄板の張力分布同定理論の導出	21
2.1.	緒言	21
2.2.	薄板のモデル化	22
2.3.	張力分布同定理論	26
2.4.	FEM 解析結果への適用	30
2.5.	結言	40
第 3 章	空気付加質量の張力同定精度への影響の評価と同定精度の改善	41
3.1.	緒言	41
3.2.	空気の付加質量を考慮した張力同定法	41
3.2.1.	仮想質量法による付加質量を考慮した FEM 解析	41
3.2.2.	流体力の簡易計算による付加質量算出法	43
3.2.3.	仮想質量法と流体力簡易計算法の比較	44
3.2.4.	付加質量を考慮した張力同定法	46
3.3.	FEM 解析結果への適用	49

3.4.	結言.....	55
第4章	張力同定技術のアルミ薄板への実験適用.....	56
4.1.	緒言.....	56
4.2.	実験装置および実験方法.....	56
4.2.1.	実験装置.....	56
4.2.2.	実験条件.....	58
4.3.	実験結果.....	58
4.3.1.	フラットなひずみ状態のアルミ薄板の計測結果.....	58
4.3.2.	中伸び状態のアルミ薄板の計測結果.....	60
4.3.3.	耳波状態のアルミ薄板の計測結果.....	62
4.4.	結言.....	64
第5章	実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用.....	66
5.1.	緒言.....	66
5.2.	部分空間法による薄板の振動解析.....	66
5.2.1.	ERA法による振動解析理論.....	67
5.2.2.	板振動解析へのERA法の適用.....	68
5.3.	実ラインにおけるアルミ薄板の張力分布同定.....	70
5.3.1.	実験装置.....	70
5.3.2.	張力分布のオンライン測定結果.....	73
5.4.	結言.....	75
第6章	張力分布と曲げ剛性分布の一括同定による鋼板での同定精度改善.....	77
6.1.	緒言.....	77
6.2.	従来の張力同定手法の課題.....	77
6.3.	張力分布および曲げ剛性分布の一括同定理論.....	82

6.4.	提案手法の FEM 解析結果への適用 .....	87
6.5.	提案手法の実験結果への適用 .....	89
6.5.1.	実験装置 .....	89
6.5.2.	実験条件 .....	91
6.5.3.	アルミ薄板の振動特性計測結果と張力分布同定結果 .....	91
6.6.	結言 .....	95
第 7 章	結論 .....	96
謝辞	.....	99
参考文献	.....	100
本研究に関連した既発表論文	.....	102



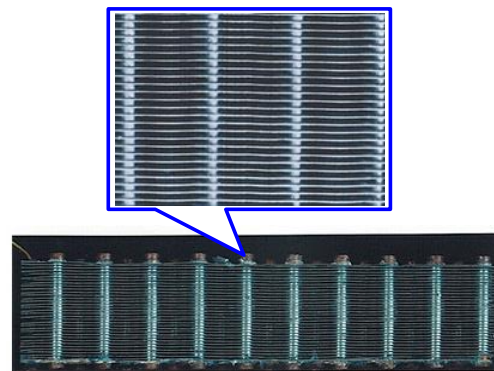
# 第1章 緒論

## 1.1. 研究の背景

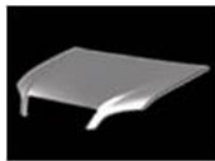
鋼板やアルミ板などの金属材料は自動車や電車などの輸送機械，鉄橋やビルなどの建築物の構造部材，飲料缶や家電製品にいたるまで，さまざまな製品分野で利用されている．例えば，アルミ薄板においてはプレス成形のしやすさや鉄に比べて軽量であるなどの特徴を活かして，図 1-1 に示すような飲料缶向けのキャン材やエアコン用熱交換器のフィン材，自動車パネル材などに採用されている．ここで，薄板金属材料に求められる代表的な品質としては，板自体のゆがみの少なさである形状品質，プレス加工や絞り加工などの成形加工時の材料の伸びやすさとしての成形性，また腐食や着霜防止のためのコーティングの塗膜品質などがあげられる．



(a)飲料缶



(b)エアコン用熱交換器のフィン

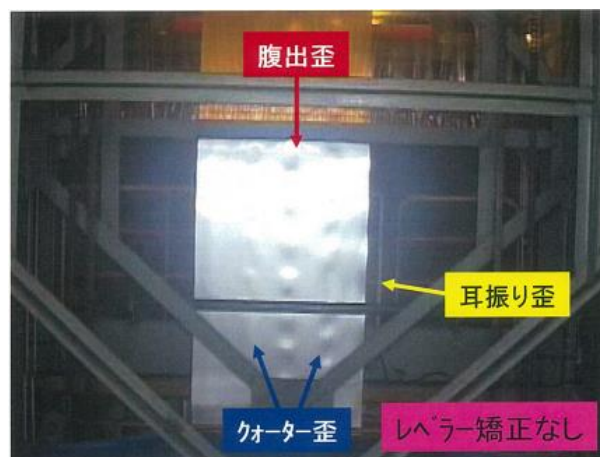


(c)自動車パネル

図 1-1 アルミ薄板製品

これらの品質の中で，アルミ薄板の製造プロセスでは形状品質の確保が重要な課題となっており，具体的には図 1-2 に示すように圧延工程や熱処理工程において不均一な

塑性変形や熱変形が生じることがあり、板面が凸凹状にゆがむような形状不良(ひずみ)を発生させ、これらのひずみは最終製品の形状品質を悪化させる。このような形状不良が残ったままコーティングラインを通板させると、形状不良の凸凹により板が浮き上がり塗膜厚さにムラが生じる場合がある。また、形状品質を改善するためにテンションレベラと呼ばれるひずみ矯正装置を用いてひずみを矯正することができるが、材料を塑性域まで引き伸ばして平坦度を向上させるため、ひずみ矯正後の材料の伸び代が減少して成形加工時の成形性を低下させるという問題がある。従って、形状品質の確保は成形性や塗膜品質などの他の品質に対しても影響を与えるため、薄板製造プロセスにおいては極めて重要な項目である。



(a)熱処理による板ひずみ



(b)冷間圧延による板ひずみ

図 1-2 薄板製造ラインにおける板ひずみの例

そのため、薄板製造分野ではひずみ形状をオンラインで把握し、製造中にできるだけ形状不良を小さくしたいというニーズがある。

## 1.2. 従来の研究

製鉄やアルミ圧延などの薄板製造分野では、圧延後の製品に対する高い形状品質の要求に対して形状制御を行える圧延機を設置し、板幅や板厚などの寸法精度だけでなく、断面形状（クラウンと呼ばれる板幅方向の板厚不均一）や平坦度の向上に努めてきた。それにともない、圧延機自体の形状制御能力に加えてひずみ形状計測器の測定性能も重要となり、昭和 40 年代初頭より多くの鉄鋼メーカーや圧延機械メーカーにより研究されてきた<sup>①</sup>。今日にいたるまで、さまざまな原理の形状測定法が提案されており、本研究と関連のある代表的な測定方法として光切断法、ロール法、振動法の 3 つの手法について説明する。

### 1.2.1. 光切断法

板表面にスポットレーザを板幅方向に走査、またはシートレーザと呼ばれるライン状のレーザ光を照射し、反射光が板表面形状を映した輝線となり、それをカメラで撮影することで薄板の幅方向の形状を把握する方式を光切断法と呼ぶ。

図 1-3 は比較的初期の頃に開発された光切断法による熱間圧延用の平坦度計である。赤熱鋼板の熱輻射光と識別できるようにアルゴンイオンレーザを用い、スキャナーケース内のハーフミラーによりレーザ光が 3 分割され、走査ミラーにより鋼板の幅方向に走査照射される。レーザ照射により生じた輝線を TV カメラで撮影し、三角測量の要領で板表面の浮き上がりを把握して平坦度を評価する。図 1-4 の写真(a)は平坦な鋼板、写真(b)は耳波（板端側が波状にゆがむ形状）が発生している鋼板の画像例である。3 本のレーザ光束を用いることで通板時に発生する鋼板ばたつきの影響を画像処理により除去し、平坦度の不良を適切に評価可能な構成としている。

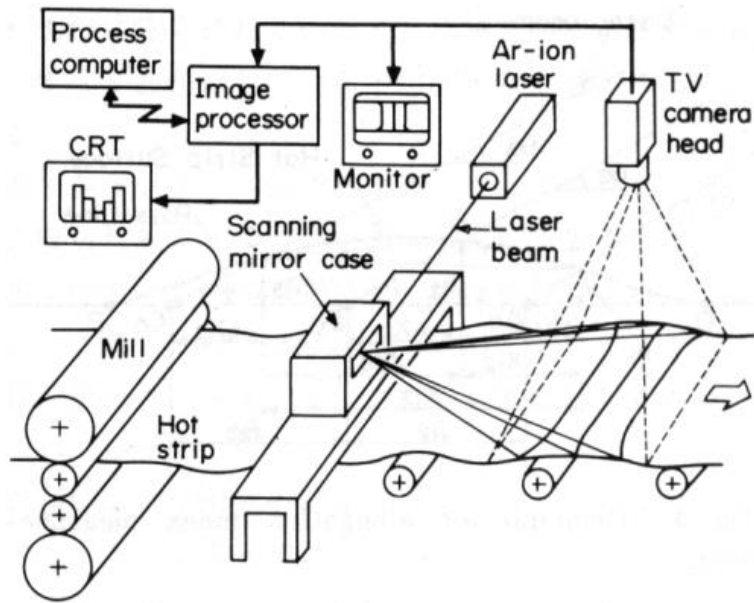


図 1-3 熱間圧延用平坦度計<sup>(2)</sup>

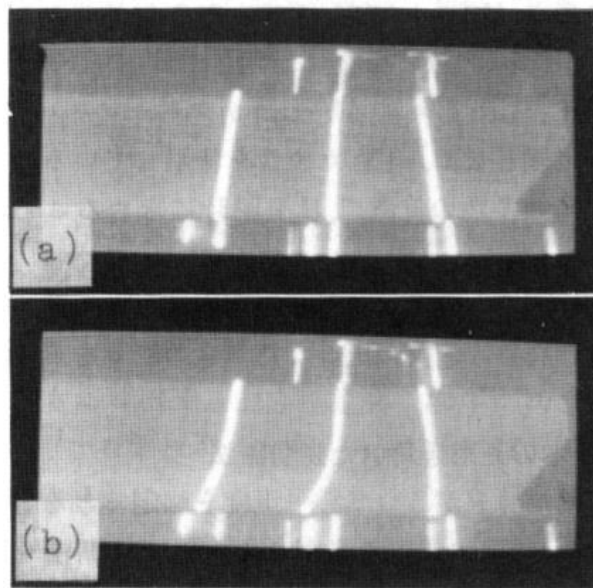
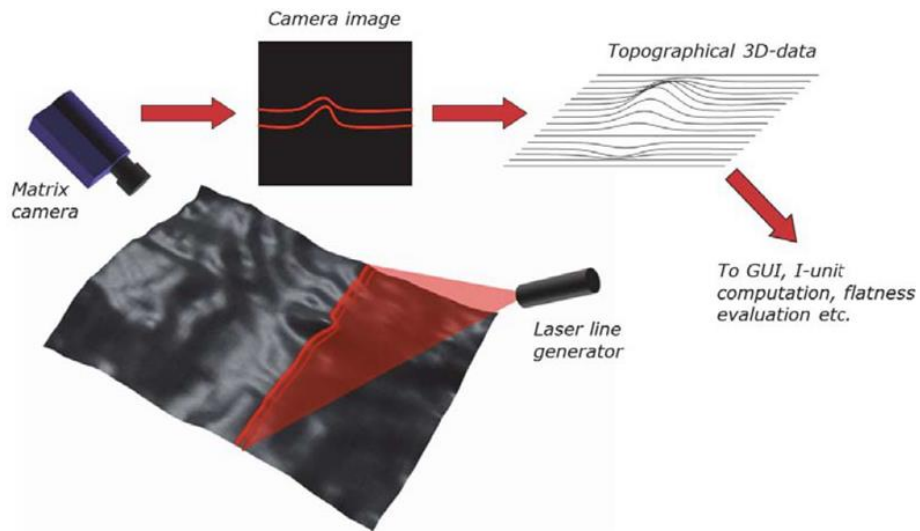


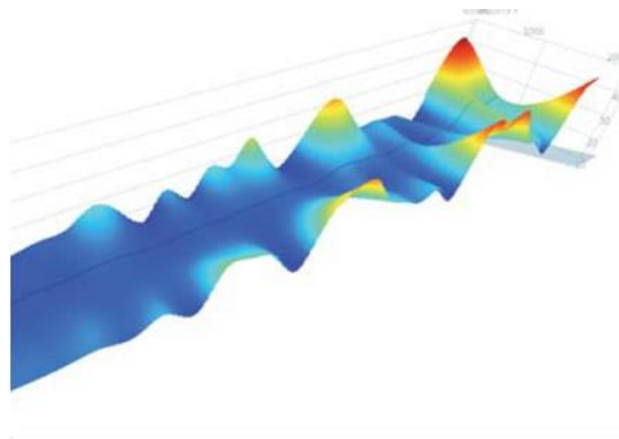
図 1-4 熱間圧延用平坦度計の測定例<sup>(2)</sup>

スポットレーザを走査する計測技術とは異なる方式として、シートレーザと呼ばれるライン状のレーザを照射する方式を図 1-5 に示す。光源以外はすでに述べた走査型と同様に板表面の輝線をカメラで撮影して画像処理により平坦度を評価する構成である。また、本方式でも 2 本のシートレーザを同時に照射することで板振動の影響を除去している。走査型と比較するとシートレーザ方式はレーザスポットを走査する必要がない

め、完全な幅方向の同時計測が可能となり、走査ミラーを省略できるため計測システムも単純化される。光切断法の利点として、非接触計測であるため薄板製品を疵つけることがなく、熱間圧延ラインなどの厳しい計測環境においても適用可能なことがあげられる。



(a)測定システムの構成

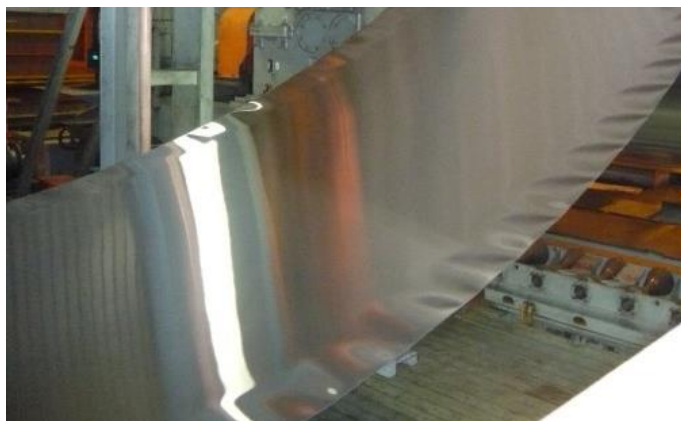


(b)測定結果

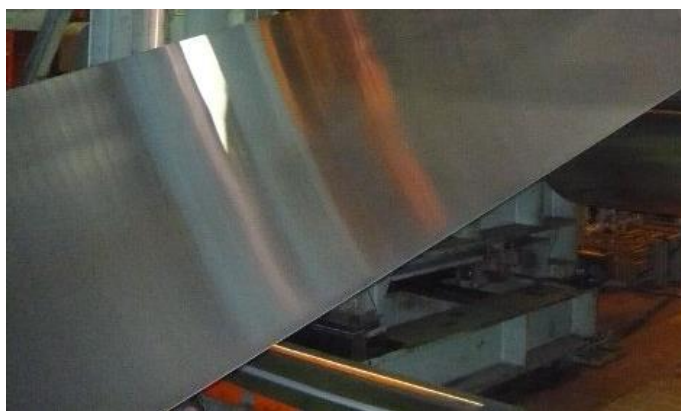
図 1-5 シートレーザによる熱間圧延の薄板形状計測技術<sup>(3)</sup>

実際の薄板製造ラインにおいて通板中の製品のひずみ形状を測定する場合に、ひずみ形状が板表面の凸凹形状として顕在化していれば、レーザやカメラなどを用いて光学的な計測が可能である。しかしながら、実ラインではラインの出口に設置された薄板の巻

き取り装置（テンションリール）によって張力を付加しながら通板することが一般的であり，図 1-6(a)に示すように無張力状態でひずみ形状を持つ板であっても，張力を付加すると薄板の弾性変形によりひずみの波形状が引き伸ばされて潜在化し，図 1-6(b)のようにひずみ形状が見えなくなってしまう場合がある．このような場合においては光学的な計測方法は適用が困難であることが容易に想像できる．



(a)無張力状態の板形状



(b)張力付加時の板形状

図 1-6 張力付加による薄板ひずみ形状の潜在化

### 1.2.2. ロール法

通板ロールにセンサを組み込んで薄板の張力分布を測定することで薄板形状を推定する技術をロール法と呼び，ここでは代表的なロール法の例として分割ロールとセンサロールについて述べる．図 1-7 に分割ロールによる張力分布測定原理を示す．圧延機の出側に軸方向に複数分割されたロールを配列し，各ロールには薄板に作用する張力を検出するための荷重検出器が組み込まれている（図中番号 8）．本方式によれば圧延材

の幅方向の張力分布を正確に検出できるとされている。しかしながら、分割ロールの端面が薄板表面に疵を付ける恐れがあるため、実際の薄板製造ラインでは次に述べるセンサロールが良く用いられる。

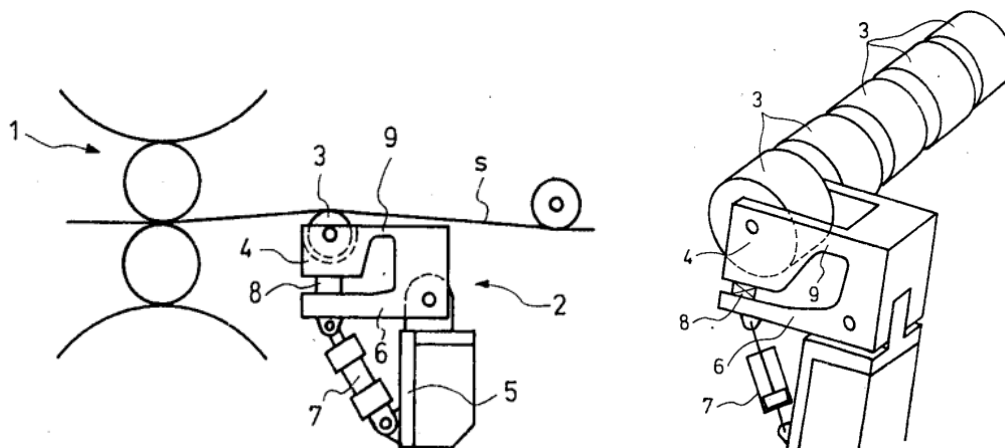


図 1-7 分割ロールによる圧延材の幅方向張力分布検出装置<sup>(4)</sup>

センサロールとは、図 1-9 に示すようにロール内部の幅方向に複数の荷重検出器（ロードセル）を配列して埋め込むことで、通板されている薄板の幅方向の張力分布を測定できる機能を付与したロールである。本手法ではロール表面に分割ロールのような継目がなく、薄板製品表面に疵を付ける恐れがない。また、ロードセルによる測定であるため比較的高速な応答の測定信号が得られ、実際の圧延プロセスにおいて圧延機の出側に設置して形状制御に利用されることが多い（図 1-9）。一方で、ロール法ではロードセルで検出するために高張力を付加できる設備にセンサロールを設置する必要がある、例えばひずみ形状を管理したい最終工程の仕上げラインなどには適用できない場合がある。また、連続焼鈍ラインや亜鉛めっきラインなどへの設置も困難であり、適用できるラインが制約されるといった課題がある。

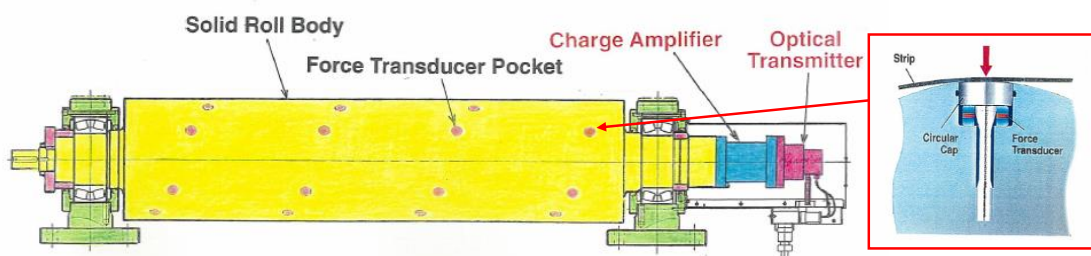


図 1-8 センサロールによる圧延材の幅方向張力分布検出装置

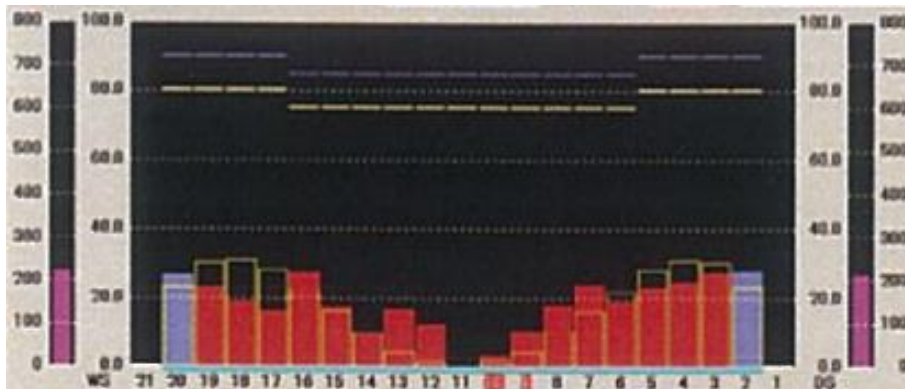


図 1-9 センサロールの測定データ例

### 1.2.3. 振動法

板振動を利用することで板形状の影響を含めた張力測定方法が提案されている<sup>(5)</sup>。図 1-10 に示すように、板のひずみ状態によって生じた張力分布と、その分布に対応する固有振動数と振動モードとの関係に着目し、2つの固有振動数を用いて張力値を算出することで、板のひずみ状態によらず実際の負荷張力に近い値を同定することができる。

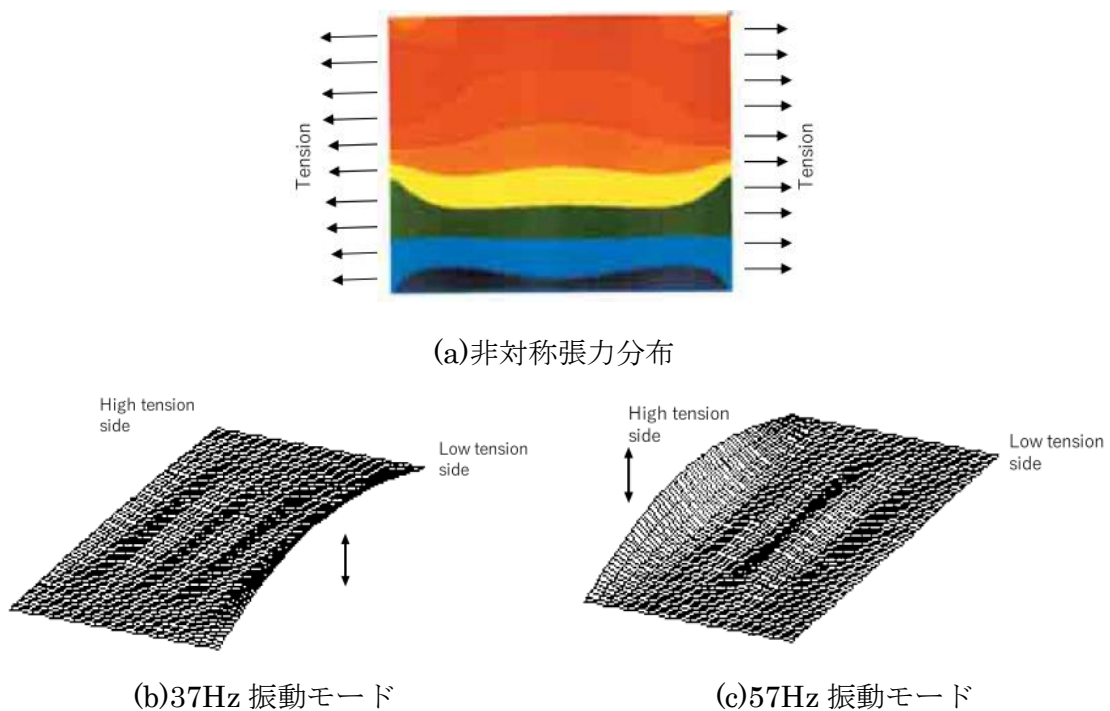
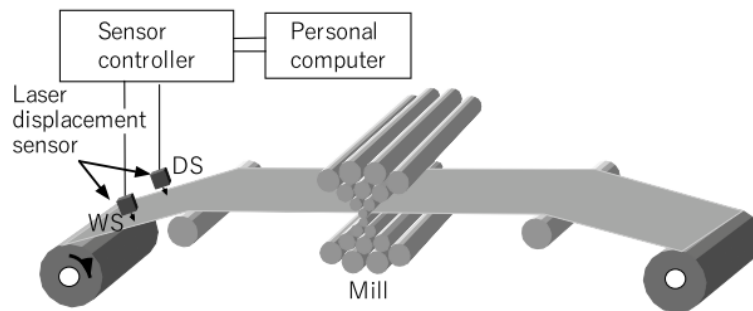


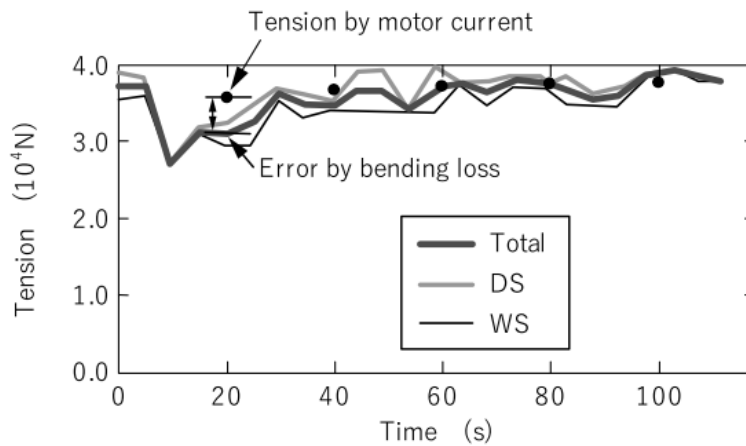
図 1-10 薄板の幅方向張力分布と振動モードの関係



図 1-11(a)は圧延張力をオンラインで測定するために板の両端側にレーザ変位計を設置して薄板の固有振動数を計測する方法を示し，図 1-11(b)は本手法による張力測定結果である．本手法によれば，比較的単純な理論と測定機器構成で非接触の計測が可能であり，実験においてモータによる負荷張力と対応した測定結果が得られている．ただし，薄板全体に付加される総張力を測定する技術に留まっており，板幅方向にさまざまなパターンで発生する張力分布を把握することはできない．



(a)レーザ変位計の設置



(b)通板張力の測定結果

図 1-11 振動法による張力測定技術の圧延機への適用結果

### 1.3. 本研究の目的

本研究では薄板の振動特性から幅方向のひずみ形状に対応した張力分布を同定できる振動法による張力分布同定技術を開発することを目的とする。薄板に作用している張力分布のパターンに対応して薄板の固有振動数と振動モードが変化することに着目し、振動特性より張力分布を逆同定できる理論を導出する。また、振動特性測定技術として薄板の固有振動数と振動モードを励起する加振技術と振動測定技術が必要となる。これにより、通板張力によって引き伸ばされて潜在化したひずみ形状であっても、板振動として顕在化させることで測定可能な対象とすることができる。さらには、板振動が測定可能であればどのようなラインでも適用できる技術として、その適用範囲をすることができる。実機においては薄板の振動特性が周囲に存在する空気の付加質量の影響を受け、特に板厚が薄く幅広の材料ではその形状から付加質量が大きく影響することは明らかであるから、それらを張力同定理論でも考慮する必要がある。また、張力分布を同定するために薄板の固有振動数と振動モードなどの振動特性を使用し、比較的短時間の振動波形から精度よくモード特性を抽出する必要がある。これらの理論や測定、分析技術を開発し、張力分布同定技術として完成させることを目的とする。

### 1.4. 本論文の構成

本論文は全7章からなり、それぞれ、第1章：緒論、第2章：振動法による薄板の張力分布同定理論の導出、第3章：空気付加質量の張力同定精度への影響の評価と同定精度の改善、第4章：張力同定技術のアルミ薄板への実験適用、第5章：実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用、第6章：張力分布と曲げ剛性分布の一括同定による鋼板での同定精度改善、第7章：結論である。次に第2章から第6章までの内容について簡単にその概要を述べる。

第2章では、幅方向にひずみ分布を有する薄板に対して長手方向に張力を付加した場合、ひずみ分布に対応した張力分布が発生することに着目し、張力分布をばね分布としてモデル化した簡易モデルについて示す。そして、簡易モデルの運動方程式に基づいて、与えられた固有振動数と幅方向の振動モードより張力分布を同定する理論を導出する。また、有限要素法を用いてひずみ形状を有するアルミ薄板の非線形静解析により張力分布を再現し、続いて振動解析により張力分布に対応した固有振動数と振動モードを算出する。ここで得られた振動特性に張力同定理論を適用して張力分布を同定し、有限要素法により得られた張力分布と理論による同定結果とを比較することで、その妥当性を検証する。

第3章では、薄板の周囲に存在する空気の付加質量が薄板の振動特性に与える影響について、有限要素法と仮想質量法とを用いて数値解析により明らかにする。本解析により、空気の付加質量は薄板の見かけの質量を増加させ、振動特性としては固有振動数が低下するだけでなく、幅方向の振動モードも変化すること示し、第2章において述べた付加質量の影響を考慮していない張力同定理論では同定精度が大幅に低下することについて述べる。本課題に対して、仮想質量法により算出された付加質量分布を用いて張力同定理論を付加質量の影響を考慮した理論に発展させ、同定精度を改善する方法を提案する。さらには、構造物の平面上に作用する流体力を簡易的に計算する手法を応用して、仮想質量法に比べて、より簡便で高速な付加質量の簡易計算法を確立し、本技術の実用化に向けた改良を加える。

第4章では、実際にひずみ形状を有するアルミ薄板と長手方向に張力を付加できる張力負荷装置とを用いて実ラインを模擬した実験装置を構築し、前章までに提案した張力同定理論について、その有効性を実験的に明らかにする。本実験装置では、板の振動特性を計測するため圧縮空気をパルス状に噴射し、励起された板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計により計測する構成としており、振動波形から実験モード解析により固有振動数と板幅方向の振動モードを求め張力分布を同定する。また、同定結果の妥当性を検証するために、板表面に貼り付けたひずみゲージの測定値から換算した張力分布と同定値とを比較する。ひずみ形状が異なる3種類のアルミ薄板に対して提案手法を適用し、同定結果とひずみゲージの計測結果とが対応することを示す。

第5章では、前章で述べた実験技術に部分空間法の一つである **Eigensystem realization algorithm (ERA)**法に基づく実験モード解析技術を組み合わせ、短時間の振動データから逐次モード解析を行って張力分布を同定する技術を完成させることで、実ラインにおけるオンラインでの張力分布の測定を実現する。薄板製造プロセスにおいて適切な支持ロール間隔と通板張力が作用する場所を選定し、レーザ変位計とエアノズルによる張力分布のオンライン測定方法とその実験結果について示す。実験ではひずみ状態の変化を捉えられるか検証するためにテンションレベラと呼ばれるひずみ矯正装置を用い、まずラインに矯正前の薄板を通板して張力分布を測定し、その後テンションレベラでひずみ矯正を行い同じコイルを再通板することでひずみ矯正後の張力分布を測定して両者を比較する。それにより、矯正前の薄板は圧延時の不均一な引き伸ばしによるものと思われる大きな偏張力が発生しているのに対し、テンションレベラによる矯正後は板幅方向の伸び差が緩和されて偏張力が大幅に減少することを明らかにする。

第 6 章では, 前章までに述べた張力分布同定理論を鋼板に適用範囲を拡大するにあたって, 張力を付加してもひずみ形状が引き伸ばしきれずに波形状として残ることを有限要素法による解析で示し, その結果, 簡易モデルの仮定と異なる剛性値に対して張力分布を同定するため大きな同定誤差が生じることを明らかにする. このような問題に対し, 新たに簡易モデルの曲げ剛性の値を未知数として張力同定理論を再構築し, 張力分布と曲げ剛性分布とを一括して同定する理論とすることで, 解析において鋼板に対する同定精度が大幅に改善することを示す. 最後に, 第 5 章で評価したアルミ薄板の 4 倍の板厚を有する比較的曲げ剛性の高いアルミ板を用いて張力負荷装置による実験検証を行い, 本技術の有効性を示す.

## 第2章 振動法による薄板の張力分布同定理論の導出

### 2.1. 緒言

鋼板や銅板，アルミ板などの薄板生産ラインにおいて圧延や熱処理により薄板にはさまざまな形状不良が生じる．とくに圧延時にはロールのたわみや圧延前の板の形状，圧延中のロール形状の影響を受けるため，同一の板上の幅方向に伸びの差ができることがある．このような幅方向の伸び差（ひずみ分布）は無張力状態では板が座屈して板形状を悪化させる．薄板製品の品質を確保するためにはこのようなひずみ分布の大きさを管理して，ひずみを小さくすることが重要である．そのためさまざまなラインに低コストで簡便に適用できるひずみ分布計測システムが求められている．

板幅方向の伸び差が内部応力に基づく座屈によって板形状として顕在化された状態であれば，レーザ式や渦電流式の変位計を用いた平坦度測定法，走査レーザを用いた光切断法<sup>(2)(3)</sup>などにより通板中の板形状を非接触で直接計測することが可能である．しかしながら，薄板ラインでは板の長手方向に一定の張力を付加しながら通板するのが一般的であり，ひずみ形状は張力により引き伸ばされて潜在化し，見かけ上は平坦な形状となるために形状計による計測が困難であることが多い．このような潜在化した板形状を検出する方法として，ひずみ分布が引き伸ばされることで発生する板幅方向の張力分布を測定できる形状検出ローラが実用化されている<sup>(4)(11)</sup>．形状検出ローラはロールの幅方向にロードセルを埋め込んだ接触式の形状測定方法であり，測定器本体がロール形状で設置しやすいことから多くの圧延ラインに適用されている．一方で連続焼鈍ラインや亜鉛メッキラインなどの加熱帯や冷却帯への設置が困難という課題がある．

ところで，従来の研究において振動法により板の総張力を固有振動数から直接同定する方法が提案されており，比較的単純な理論と測定機器構成で非接触の計測が可能となっている<sup>(5)</sup>．そこで，本章ではひずみ分布計測技術開発のため従来の振動法による張力同定法を発展させ，ひずみ分布を有する薄板の幅方向の固有振動数と振動モードより張力分布を求める方法を開発した．また，開発した手法を FEM 解析結果に適用し，その妥当性を検証した．

## 2.2. 薄板のモデル化

図 2-1(a)に示すような幅方向にひずみ分布を有する薄板に対して長手方向に張力を付加した場合、板を短冊状の領域に分割すると図 2-1(b)のようにひずみの大きい部分の張力は低く、ひずみの小さい部分の張力は高くなる。それぞれの短冊には張力による幾何剛性が発生するから板全体の張力分布を等価剛性分布とみなして図 2-1(c)のようにモデル化することができると考えられる。ここで薄板のひずみが板幅方向および長手方向について分布している場合は板面内における 2 次元の等価剛性分布を考慮する必要があるが、例えば薄板の圧延時において一定の圧延条件であれば板の長手方向のひずみ分布は板を支持するロールの間隔内においてはほぼ一様とみなせる。そこで、張力分布は幅方向のみ考慮してばね分布とし、薄板を長手方向の中央部に縮小した図 2-2 に示すような簡易モデルを作成した。

簡易モデルでは質量  $m$  と重心点回りの慣性モーメント  $J$  を持つ長さ  $l$  の剛体要素をピンで連結したリンクモデルで薄板を表現した。幅方向に分布した振動変位  $z$  は  $l$  に対して十分に小さいとして要素の回転変位  $\theta$  を  $z_{i+1} - z_i \doteq l\theta_i$  と近似し、節点の自由度は並進方向のみとした。よって簡易モデルでは薄板を幅方向に  $n-1$  等分割して節点を配置した場合は自由度  $n$  となる。また、薄板の長手方向の曲げ剛性は十分小さいとして無視し、幅方向の曲げ剛性  $\tau$  を要素間の回転ばねとして、張力分布は各節点に配置したばね分布  $k_i$  ( $i=1 \sim n$ ) でモデル化した。

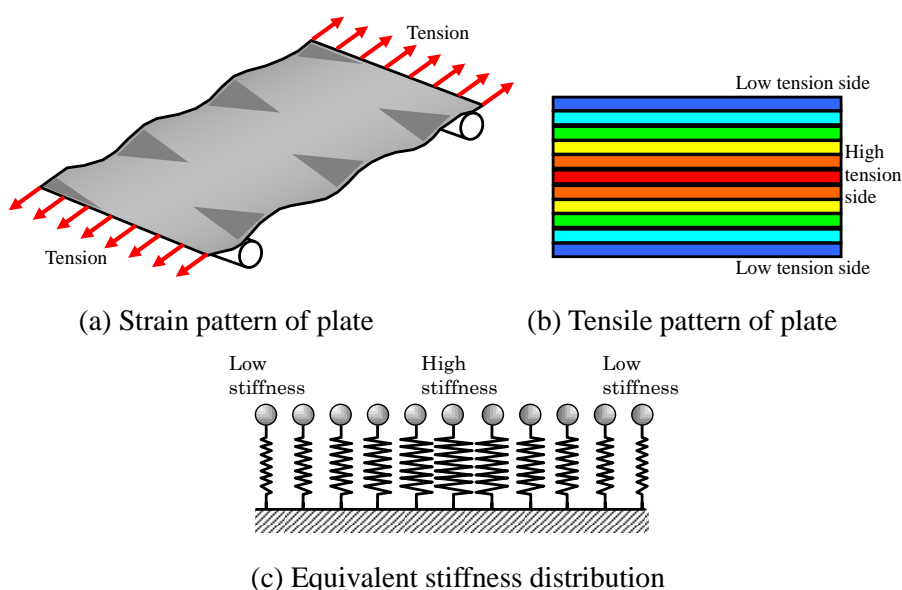


図 2-1 Tensile pattern modelling of thin plate

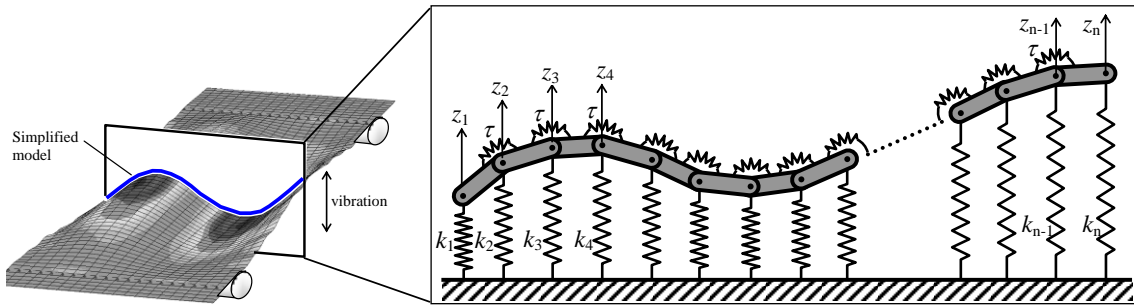


図 2-2 Simplified dynamic link model of thin plate

式(1)に図 2-2 に示した簡易モデルの運動方程式を示す. 式(1)中の  $\mathbf{M}$  は質量マトリクス,  $\mathbf{K}$  は剛性マトリクス,  $\mathbf{z}$  は各節点における変位ベクトルである.  $\mathbf{K}_\tau$  と  $\mathbf{K}_T$  はそれぞれ剛性マトリクスの曲げ剛性成分と張力成分である.  $\mathbf{K}_T$  は同定対象となるばね分布  $k_i$  ( $i=1\sim n$ )を対角要素とする未知行列,  $\mathbf{M}$  および  $\mathbf{K}_\tau$  は板の寸法, 物性より算出される既知行列である.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\mathbf{z} = \{z_1 \quad z_2 \quad \cdots \quad z_n\}^T \tag{2}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2} & \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} & & & & \\ \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} & 2\left(\frac{m}{4} + \frac{J}{l^2}\right) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2\left(\frac{m}{4} + \frac{J}{l^2}\right) & \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} \\ & & & & \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} & \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{K}_\tau = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \tau & -2\tau & \tau & & & & \\ -2\tau & 5\tau & -4\tau & \tau & & & \\ \tau & -4\tau & 6\tau & \ddots & \ddots & & \\ & \tau & \ddots & \ddots & \ddots & \tau & \\ & & \ddots & \ddots & 6\tau & -4\tau & \tau \\ & & & \tau & -4\tau & 5\tau & -2\tau \\ & & & & \tau & -2\tau & \tau \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_T \quad (6)$$

行列の各要素に含まれる質量  $m$  と慣性モーメント  $J$ ，曲げ剛性  $\tau$  を求めるために，図 2-3 に示すような薄板をリンクの長さと同じ幅の短冊に分割した領域を考える．短冊の長手方向 1 次モードを正弦波の半波長と仮定して，長手方向に縮小した場合の等価質量と等価剛性を算出した．

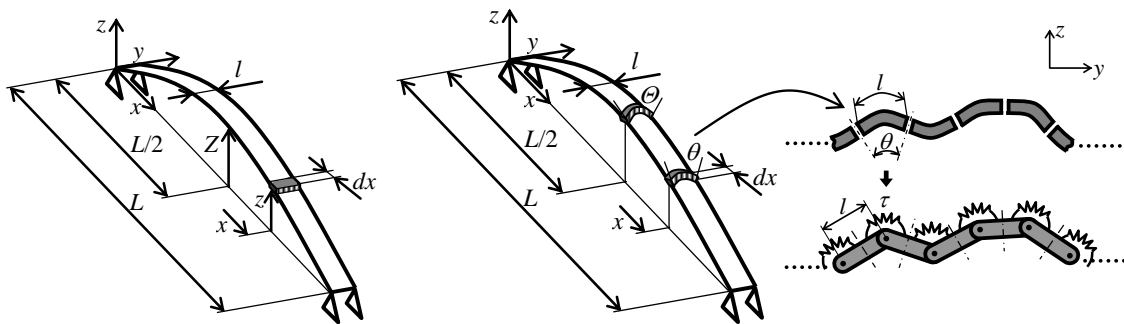


図 2-3 Equivalent mass and equivalent bending stiffness of simplified dynamic link model

短冊の支持ロール間距離を  $L$ ，板厚を  $t$ ，密度を  $\rho$  とすると，支持ロール間の中心における等価質量は長手方向のモードを 1 次とした場合

$$m = \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} x \right) \rho t dx = \frac{\rho t L}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{\rho t L}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\rho t L}{2} \quad (7)$$

により求まる．式(7)より求めた等価質量から要素の慣性モーメント  $J$  は次式で計算される．

$$J = \frac{m}{12} (t^2 + l^2) \quad (8)$$



次に、簡易モデルのリンクの曲げ剛性 $\tau$ を計算するために短冊1つ当たりの幅方向の等価曲げ剛性を計算する。ねじり剛性を無視すると短冊の幅方向の曲げ剛性は梁のたわみの式よりモーメントを $M$ 、たわみ角を $\theta$ として

$$\tau = \frac{M}{\theta} = \frac{EI_{eq}}{l} \quad (9)$$

で表される。 $I_{eq}$ は短冊のたわみ角が長手方向で変化することを考慮した支持ロール間の中心における等価断面二次モーメントである。 $I_{eq}$ を計算するために支持ロール間の中心において短冊がたわみ角 $\Theta$ だけ曲げ変形しているとき、長手方向の各位置におけるたわみ角 $\theta$ を次式で仮定する。

$$\theta = \Theta \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \quad (10)$$

等価断面二次モーメント $I_{eq}$ による曲げひずみエネルギー $U_{eq}$ は式(9)を用いて

$$U_{eq} = \frac{1}{2} M \Theta = \frac{EI_{eq}}{2l} \Theta^2 \quad (11)$$

となる。次に、長手方向にたわみ角 $\theta$ が変化する場合の短冊のひずみエネルギーを計算する。短冊の微小部分 $dx$ におけるひずみエネルギー $dU$ は

$$dU = \frac{E}{2l} \cdot \frac{t^3 dx}{12} \left\{ \Theta \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \right\}^2 \quad (12)$$

であり、全体のひずみエネルギー $U$ は式(12)を長手方向で積分することで次式のように計算される。

$$U = \int_0^L \frac{E}{2l} \cdot \frac{t^3}{12} \left\{ \Theta \sin \left( \frac{\pi}{L} x \right) \right\}^2 dx = \frac{E \Theta^2}{2l} \cdot \frac{t^3}{12} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} x \right) dx \quad (13)$$

式(11)および式(13)より $U_{eq} = U$ として $I_{eq}$ について解けば、短冊全体のひずみエネルギー $U$ と等価断面二次モーメント $I_{eq}$ によるひずみエネルギー $U_{eq}$ が等しくなる $I_{eq}$ が求まる。

$$I_{eq} = \frac{t^3}{12} \int_0^L \sin^2 \left( \frac{\pi}{L} x \right) dx = \frac{t^3 L}{24} \quad (14)$$

簡易モデルにおける要素間の曲げ剛性 $\tau$ は式(14)より計算された $I_{eq}$ を式(9)に代入して

$$\tau = \frac{Et^3L}{24I} \quad (15)$$

と求まる.

### 2.3. 張力分布同定理論

与えられた薄板の固有振動数と幅方向の振動モードより張力分布を求める方法について述べる. 具体的には固有振動数と振動モードから最小二乗法によりばね分布 $k_i$  ( $i=1\sim n$ )を求め, 弦の方程式を利用して各節点における剛性値を個別に張力値に換算して張力分布を算出する方法である.

系全体の節点と同じ振動数で調和運動をしている状態として, 式(1)に示す運動方程式の解を複素指数関数で仮定する.

$$z = \mathbf{Z} e^{j\omega t} \quad (16)$$

式(1)に式(16)を代入すると次式に示す一般固有値問題が得られる.

$$(\omega^2 \mathbf{M} - \mathbf{K}) \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (17)$$

固有値解析により式(17)を解くことで系の固有振動数と固有モードが求まる. それにより求まる薄板の固有振動数 $\omega_i^2$  ( $i=1\sim n$ )を対角要素とする行列を $\mathbf{\Omega}^2$ , 対応するモードベクトルを列ベクトルとするモード行列を $\mathbf{\Phi}$ とおくと式(18)の関係が成り立つ<sup>(6)</sup>.

$$\mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (18)$$

ただし

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (20)$$

$$\phi_i = \{\phi_{i,1} \quad \phi_{i,2} \quad \cdots \quad \phi_{i,n}\}^T \quad (21)$$

とする．式(18)に左側から $\Phi^T$ を乗じると

$$\Phi^T (\mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_T) \Phi = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Omega^2 \quad (22)$$

となる．式(22)の関係を利用して解析あるいは実験により得られる固有振動数と振動モードからばね分布を計算する．使用する固有振動数と振動モードベクトルは張力同定計算を行う上ではいくつでも良く，ここでは式(22)の $\Phi$ を $m$ 次までで打ち切った場合について述べる．式(22)を行列の各成分に展開すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \phi_1^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_1 & \cdots & \phi_1^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_1 & \cdots & \phi_m^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

式(23)の両辺は対称行列であるから上三角成分または下三角成分についての $m(m+1)/2$ 個の独立した等式が得られ，未知数 $\mathbf{K}_T$ について整理すると

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_1 \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_2 \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{K}_T \phi_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \omega_1^2 - \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_1 \\ -\phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \vdots \\ -\phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \omega_2^2 - \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ -\phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_3 \\ \vdots \\ -\phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m \omega_m^2 - \phi_m^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \end{array} \right\} \quad (24)$$

のように求まる．また，剛性行列  $\mathbf{K}_T$  は式(5)に示す通り対角行列であるから，式(24)の左辺を 1 要素について展開し，未知数  $k_i (i=1\sim n)$  についてまとめると，次式に示すようにモードベクトル成分からなる係数ベクトルとばね分布ベクトルとの内積の形になる．

$$\begin{aligned} \phi_i^T \mathbf{K}_T \phi_j &= \phi_{i,1} \phi_{j,1} k_1 + \phi_{i,2} \phi_{j,2} k_2 + \cdots + \phi_{i,n} \phi_{j,n} k_n \\ &= \{\phi_{i,1} \phi_{j,1} \quad \phi_{i,2} \phi_{j,2} \quad \cdots \quad \phi_{i,n} \phi_{j,n}\} \cdot \{k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n\}^T \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)を用いて式(24)の左辺を整理すると既知の係数行列と未知のばね分布ベクトルとの積となる．

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1}^2 & \phi_{1,2}^2 & \cdots & \phi_{1,n}^2 \\ \phi_{1,1} \phi_{2,1} & \phi_{1,2} \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{1,n} \phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{1,1} \phi_{m,1} & \phi_{1,2} \phi_{m,2} & \cdots & \phi_{1,n} \phi_{m,n} \\ \hline \phi_{2,1}^2 & \phi_{2,2}^2 & \cdots & \phi_{2,n}^2 \\ \phi_{2,1} \phi_{3,1} & \phi_{2,2} \phi_{3,2} & \cdots & \phi_{2,n} \phi_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{2,1} \phi_{m,1} & \phi_{2,2} \phi_{m,2} & \cdots & \phi_{2,n} \phi_{m,n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \phi_{m,1}^2 & \phi_{m,2}^2 & \cdots & \phi_{m,n}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \omega_1^2 - \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_1 \\ -\phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \vdots \\ -\phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \omega_2^2 - \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ -\phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_3 \\ \vdots \\ -\phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m \omega_m^2 - \phi_m^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \end{bmatrix} \quad (26)$$

式(26)の未知ベクトルについて最小二乗法で解けばばね分布を求めることができる．式(26)の左辺における係数行列を  $\Phi_k$ ，未知ベクトルを  $\mathbf{k}_T$ ，右辺の既知ベクトルを  $\mathbf{k}_\omega$  とすると

$$\Phi_k \mathbf{k}_T = \mathbf{k}_\omega \quad (27)$$

で表され，最小二乗法は  $\Phi_k$  の擬似逆行列  $\Phi_k^\dagger$  を用いて

$$\mathbf{k}_T = \Phi_k^\dagger \mathbf{k}_\omega \quad (28)$$

$$\Phi_k^\dagger = (\Phi_k^T \Phi_k)^{-1} \Phi_k^T \quad (29)$$

となる。式(28)より求めた値はばね分布であるから、次に張力分布に換算する方法について述べる。図 2-3 に示した短冊の領域において板厚が薄く長手 1 次モードしか考慮しない場合には、張力による幾何剛性に対して長手方向の曲げ剛性は無視できる程度となる。これにより 1 つの短冊を張力の作用した弦とみなし、長手方向のモードを正弦波の半波長として弦中央部の等価質量と等価剛性による 1 自由度系に近似する。そうすればばね分布と張力分布の換算式は次式に示す弦の張力と 1 次の固有振動数の関係式より求めることができる。

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad (30)$$

式(30)を  $T$  について解き、 $f_1$  を等価質量  $m$  と節点  $i$  におけるばね分布  $k_i$  の 1 要素からなる 1 自由度系の固有振動数として、次式に示すようなばね分布  $k_i$  から張力分布  $T_i$  への換算式を得る。

$$T_i = \rho t l (2L f_1)^2 = \rho t l \frac{L^2}{\pi^2} (2\pi f_1)^2 = \rho t l \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{k_i}{m} = \frac{\rho t l L}{m} \cdot \frac{L}{\pi^2} k_i \quad (31)$$

式(7)により式(31)から  $m$  を消去すると

$$T_i = \frac{2L}{\pi^2} k_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

が得られる。式(32)で計算された張力分布を合計することで総張力が求まる。また、式(32)により得られた張力は節点ごとの値であるので次式により要素ごとの値に変換する。

$$\hat{\mathbf{T}} = \left\{ T_1 + \frac{T_2}{2} \quad \frac{T_2 + T_3}{2} \quad \dots \quad \frac{T_{n-2} + T_{n-1}}{2} \quad \frac{T_{n-1}}{2} + T_n \right\}^T \quad (33)$$

ところで、計算に使用するモード数が少ない場合や幅方向の分割数が大きい場合は行列  $\Phi_k$  のランクが不足し、式(28)の解が実際の張力分布と一致しなくなることがある。そこで、特異値分解を利用して望ましい解を求める方法について述べる。係数行列  $\Phi_k$  は

特異ベクトルを列ベクトルとする直交行列  $\mathbf{P}$  と  $\mathbf{Q}$ , 特異値を対角成分に持つ対角行列  $\mathbf{D}$  を用いて

$$\Phi_k = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T \quad (34)$$

と分解できる<sup>(7)</sup>. ただし,  $\mathbf{Q}^T$  は  $\mathbf{Q}$  の転置行列である.  $\mathbf{D}$  を特異値の大きい部分行列  $\mathbf{D}_s$  と特異値の小さい部分行列  $\mathbf{D}_n$  に分けると  $\Phi_k$  は

$$\Phi_k = [\mathbf{P}_s \quad \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s^T \\ \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \approx [\mathbf{P}_s \quad \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s^T \\ \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} = \mathbf{P}_s \mathbf{D}_s \mathbf{Q}_s^T \quad (35)$$

と近似できる. 式(35)で特異値  $\mathbf{D}_s$  には必要な信号成分, 微小な特異値  $\mathbf{D}_n$  にはノイズや計算誤差等により生じる成分が含まれると考えられる. 微小成分  $\mathbf{D}_n$  を除去した式(35)により,  $\Phi_k$  の擬似逆行列は次式のように近似される.

$$\Phi_k^\dagger = \mathbf{Q}_s \mathbf{D}_s^{-1} \mathbf{P}_s^T \quad (36)$$

式(36)で算出された  $\Phi_k^\dagger$  を式(28)に用いることで良好な結果を得ることができる.

#### 2.4. FEM 解析結果への適用

提案した張力分布同定理論を薄板の FEM 解析結果に対して適用し, 精度を検証した結果について述べる. 本論文では形状不良の代表例として中伸びと片伸び, 耳波の場合について検証する. ここでいう中伸びとは板幅方向の中央部において板のひずみによる波形状が長手方向に一樣に発生しているような形状である. また, 片伸びは板幅方向の端部においてひずみが発生しているような形状であり, ひずみが板の両端で発生している場合は耳波と呼ぶ. 図 2-4 にひずみ分布として中伸びと片伸び, 耳波をそれぞれ設定した FEM モデルを示す. 図 2-4 の FEM モデルは実モデルよりひずみ形状をわかりやすくするため  $z$  方向に 10 倍に拡大してある.

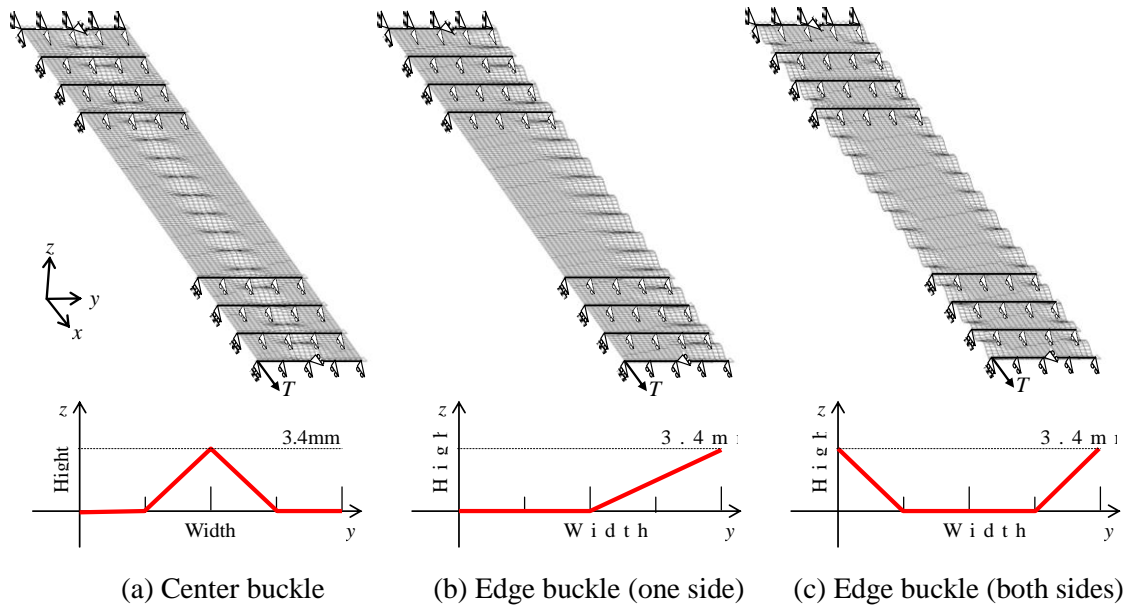


図 2-4 FEM models of various strain patterns of plate

モデルはアルミ薄板とし、寸法と物性は厚さ 0.5mm、幅 1m、全長 9m、支持ロール間隔 4.5m、密度  $2700\text{kg/m}^3$ 、ヤング率 70GPa、ポアソン比 0.3 とした。提案手法の精度検証は図 2-4 に示す 3 種類のひずみ分布と比較用の形状不良のない平坦な板モデルも含めた 4 条件で行った。各ひずみ分布の波形状は図 2-4 に示す通り振幅 3.4mm を最大値とした幅方向に直線的な分布とし、長手方向は周期 500mm の正弦波となるような形状とした。境界条件は張力を付加した板端側に  $z$  方向の拘束、 $x$  方向は巻き取りリールあるいは駆動ロールなどにより一様に引っ張られた状態を模擬するために節点間の相対変位が生じないように拘束を設定した。これにより一つの節点に張力を設定するだけで、板の総張力が設定張力と等しくなるような幅方向に一様な強制変位を与えたことに相当する解析結果が得られる。また、固定端となる反対側の板端部は  $x$  方向と  $z$  方向を拘束した単純支持とした。それと、板の途中に通板ロールを模擬した  $z$  方向拘束を 6 箇所設定した。図 2-4 中の拘束は図示するために幅方向 5 箇所ずつとなっているが実際のモデルの拘束は幅方向の全節点である。 $y$  方向の拘束については剛体モードを除去するために板端部の中央に一節点だけ加えた。また、FEM モデルのメッシュは一辺が 5mm の正方形とした。

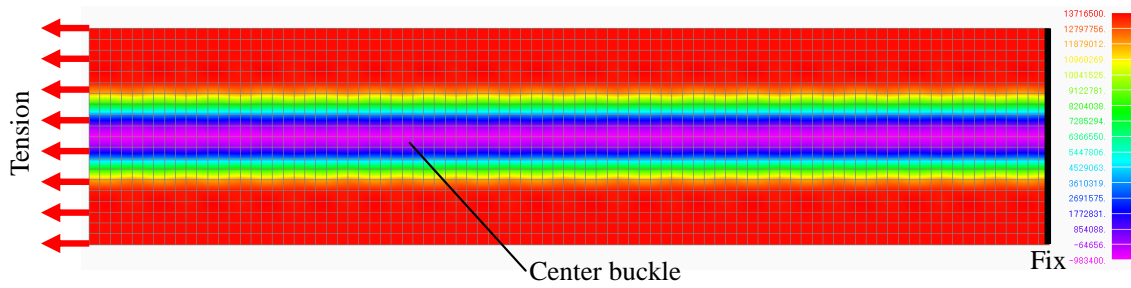
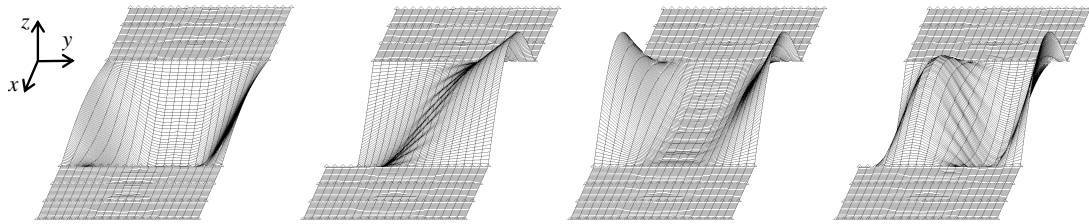


図 2-5 Stress contour map in plate in the case of Center buckle



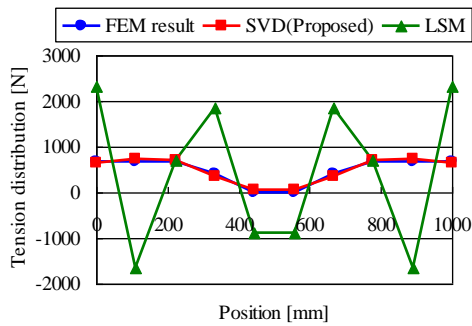
(a) mode 1 (5.79Hz) (b) mode 2 (7.85Hz) (c) mode 3 (8.46Hz) (d) mode 4 (10.8Hz)

図 2-6 Natural vibration mode of thin plate in the case of center buckle

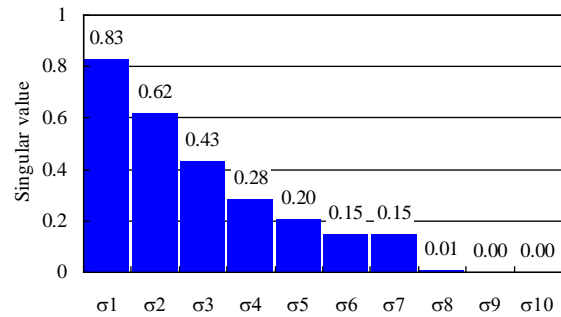
図 2-5 は張力を 4900N に設定して静解析を行った中伸び薄板の応力分布である．板幅方向中央部の応力が低下しており，ひずみ形状に対応した応力分布が生じていることがわかる．図 2-5 の状態で発生している幾何剛性を考慮して固有値解析を行った結果を図 2-6 に示す．張力同定計算には長手方向中央部における幅方向の振動モードを使用した．

図 2-7 に式(29)に示した擬似逆行列を用いた場合と式(36)に示した特異値分解を用いた場合の中伸び張力分布の同定結果を示す．同定計算には図 2-6 に示した 1 次から 4 次の幅方向振動モードを使用し，簡易モデルは 11 自由度とした．図 2-7(a)に示す通り式(29)の最小二乗法では同定結果に大きな誤差が生じているのに対し，特異値分解により絶対値の小さい特異値を除去した場合は FEM 結果と良く一致していることがわかる．図 2-7(b)は係数行列 $\Phi_k$ の特異値分解結果で 10 個の特異値のうち  $\sigma_8 \sim \sigma_{10}$  は値がほぼ 0 となっており，式(35)の特異値は  $\mathbf{D}_s = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_7)$ ， $\mathbf{D}_n = \text{diag}(\sigma_8, \dots, \sigma_{10})$ となる．式(29)の擬似逆行列で大きな同定誤差を生じているのは $\Phi_k^\dagger$ が計算される過程で特異値が大きい信号成分に対して相対的に特異値が小さい誤差成分が逆数  $\mathbf{D}_n^{-1}$ により拡大されたことが原因と考えられる．これに対し，提案手法では特異値の小さい誤差成分を分離し，擬似逆行列を計算する際に除去しているため良好な結果を得ることができる．



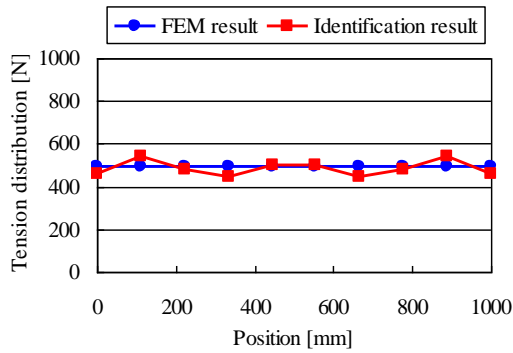


(a) Identification results

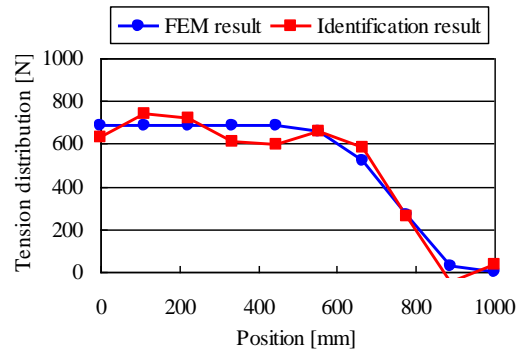


(b) SVD results

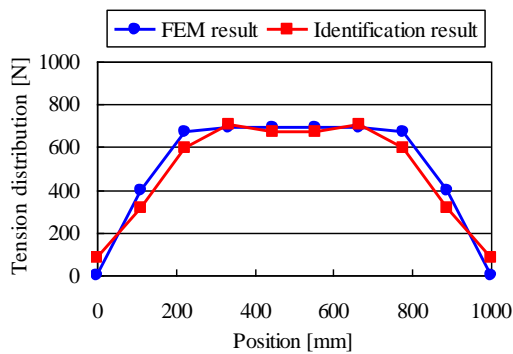
図 2-7 Comparison of least squared method with proposed SVD method



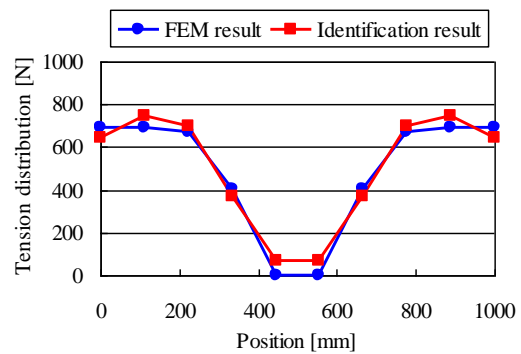
(a) Flat



(b) Edge buckle (one side)



(c) Edge buckle (both sides)



(d) Center buckle

図 2-8 Identification results of tension distribution

図 2-8 に各ひずみ分布の FEM 固有値解析結果から張力分布を同定した結果を示す。  
 図 2-8(a)はひずみのない平坦な板で張力分布は幅方向に一様となる。図 2-8(b)は片伸び  
 板の張力分布でひずみによる波形状が現れている部分の張力が下がり、図 2-8(c), (d)

はそれぞれ耳波と中伸びの張力分布でひずみに対応して板両端部と板中央部の張力が下がっている。図 2-8 より平坦な板と代表的なひずみ条件である片伸び，耳波，中伸びにおいては解析結果の張力分布と同定結果がよく一致していることがわかる。ただし，本手法において精度の良い同定を行うための制約として，採用する振動モードの節が同じ点に重ならないように注意する必要がある。これは採用した全てのモードの節が重なるような領域が生じると，その領域における張力の情報が採用したモードの形状と固有振動数に含まれていないことから張力同定精度が悪化するためである。この点については，後述する採用モードの組み合わせを変化させて張力同定を行った結果を評価するところで具体的に述べる。

図 2-9 に張力同定に用いた簡易モデルのパラメータで固有値解析を行って得られた振動モードを示す。張力分布を表すばね分布  $k_i$  は板が平坦で一様な張力分布が発生しているとして，式(32)よりばね定数を計算して設定した。図 2-10 は図 2-9 に示した振動モードを用いて剛性行列の張力成分である  $\mathbf{K}_T$  と幅方向曲げ剛性成分  $\mathbf{K}_B$  のモード剛性に対する寄与度を計算した結果である。図 2-10 より 1~4 次までの低次のモードではモード剛性に対する張力の寄与が 50%以上と大きく，逆に 6 次以上の高次のモードでは 10%以下と小さくなっていることがわかる。これは図 2-9 より明らかなように，低次のモードでは節の数が少なく曲げがほとんど作用していないのに対し，高次のモードでは多くの節と腹を持つ曲がりの多い形状となっているためである。したがって張力同定を行う場合はなるべく張力の寄与度の大きい低次の振動モードを用いるのが望ましく，特に 1~4 次モードを使用すると精度のよい同定が行えると考えられる。なお，図 2-10 に示した張力と曲げ剛性の寄与の割合は付加した張力値や板の曲げ剛性値，板のひずみ形状によって変化するが，高次になるほど張力の寄与が低くなる傾向はほぼ同じである。また，実際のモード計測では一般的に高次になるほど測定が難しくなるため，本技術には張力の寄与が大きく測定の容易な低次のモードを選択的に使用できるという利点があるといえる。

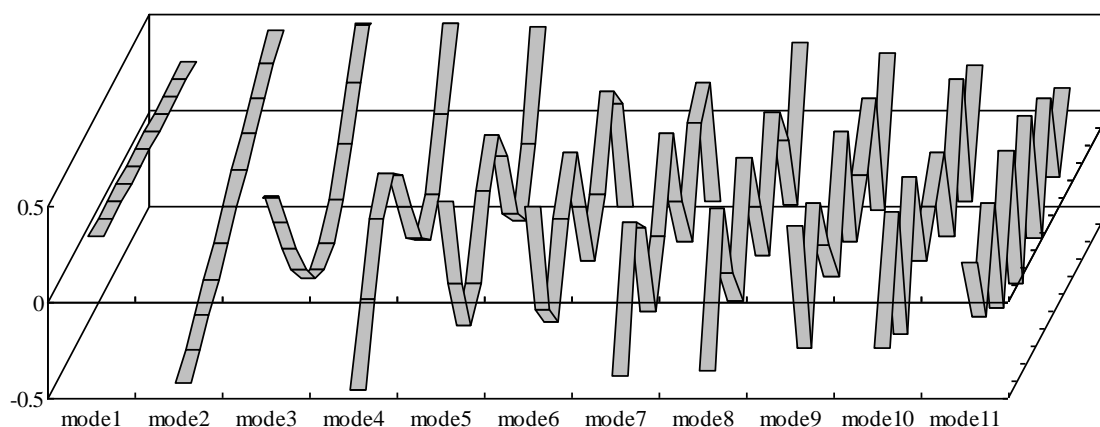


図 2-9 Mode shape of simplified dynamic link model

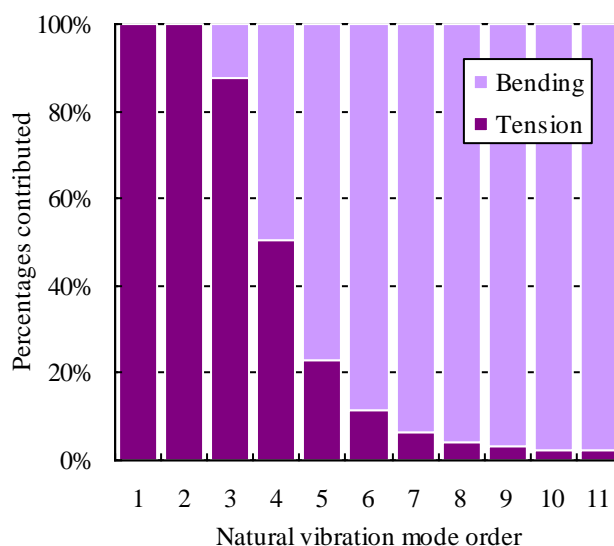
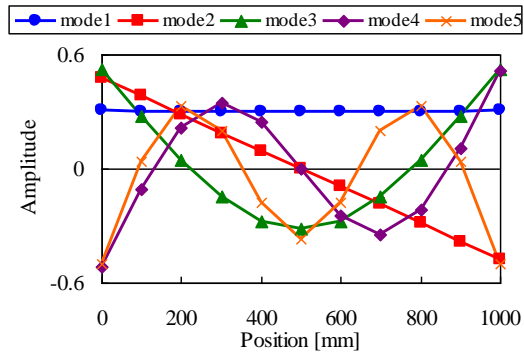


図 2-10 Contributions of modal stiffness

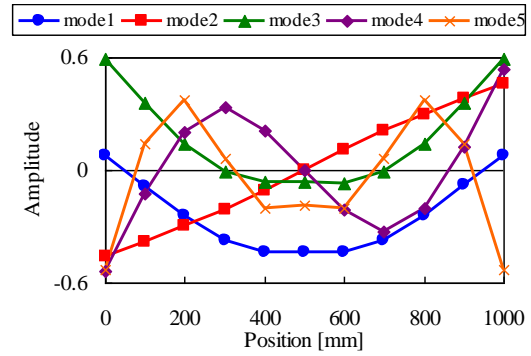
次に、同じ薄板 FEM モデルの解析結果を使用して張力同定計算に採用するモードの数と組み合わせを変えた場合の張力同定結果を図 2-11～図 2-14 に示す。図 2-11 はひずみのない平坦な薄板モデルで張力同定を行った結果である。図 2-11(a)は FEM 解析で得られた 1～5 次の板幅方向の振動モードで、図 2-11(b)は 1～2 次、1～3 次および 1～5 次モードを使用した場合の同定結果である。図 2-11(c)は 1 次～4 次モードの内、3 次モードまたは 2 次モード、1 次モードのいずれか一つが欠けた場合の同定結果である。図 2-11(b)より平坦な板では図 2-8(a)の結果も含めると、検証した範囲ではどのようなモードの組み合わせであってもほぼ同等の同定精度が得られている。また、図 2-11(c)より途中のモードが 1 つ欠けた場合であっても問題なく同定が可能であることがわかる。そ

の理由として式(26)の元となっている式(18)が振動モードと固有振動数の数によらず、組み合わせが適切であれば成り立つことによるものと考えられる。

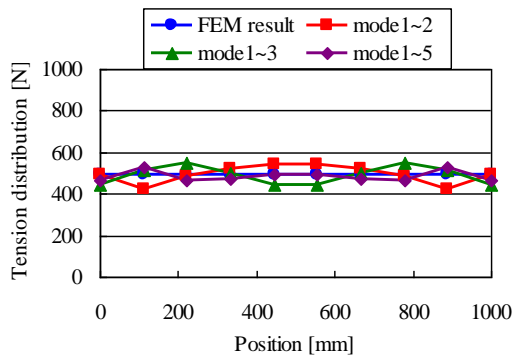
図 2-12 に同様の条件で中伸び板に対して張力同定を行った結果を示す。図 2-12(b)より中伸びの場合、採用モードを1次と2次にした場合の同定結果の分布は答えとなるFEM解析結果の分布との差がかなり大きくなっていることがわかる。これは同定しようとしている張力分布に対し固有振動数と振動モードの情報が不足していることによるものと考えられる。図 2-12(c)は1次～4次モードの内、一つのモードが欠けた場合の同定結果で、中伸びの場合も図 2-11(c)と同様に途中のモードが欠けても精度良く同定できていることがわかる。



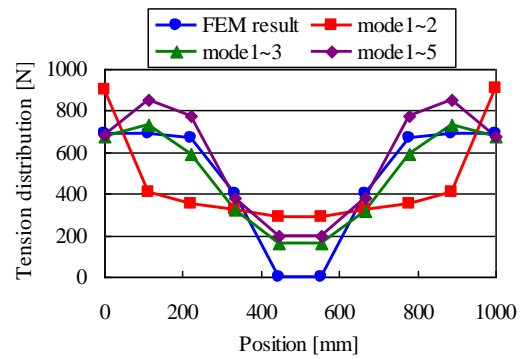
(a) Mode shape



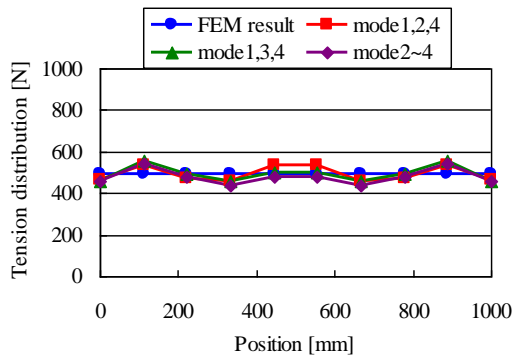
(a) Mode shape



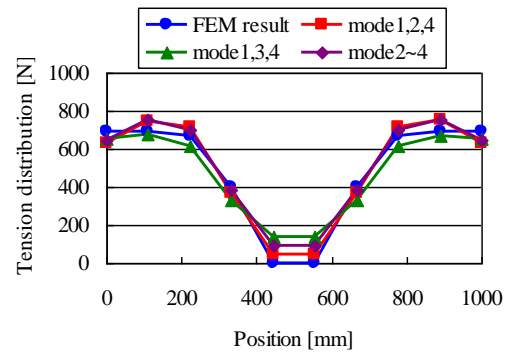
(b) Various number of the mode



(b) Various number of the mode



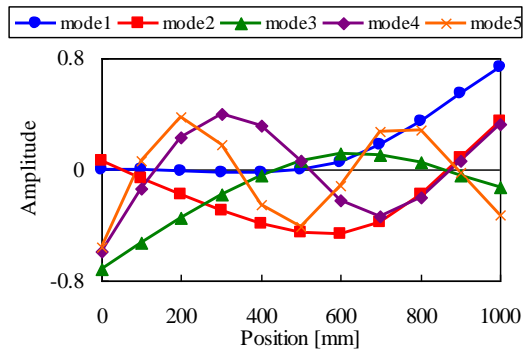
(c) Influence of lack of the mode



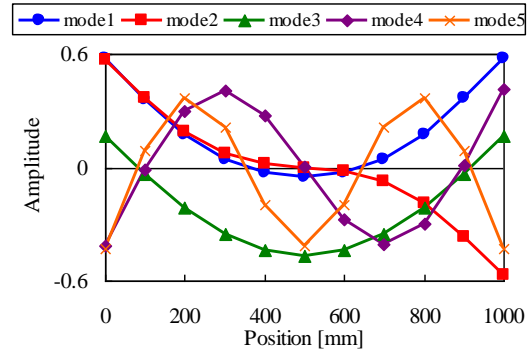
(c) Influence of lack of the mode

☒ 2-11 Identification results of flat plate

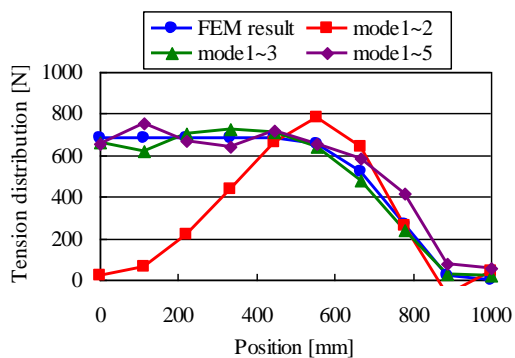
☒ 2-12 Identification results in the case of Center buckle



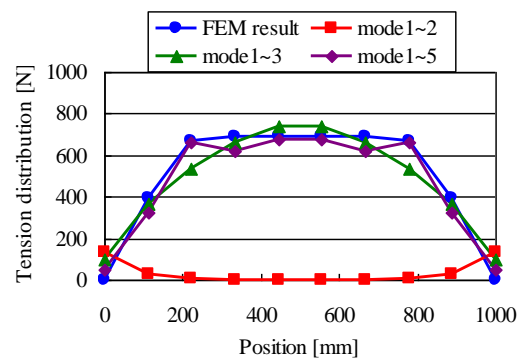
(a) Mode shape



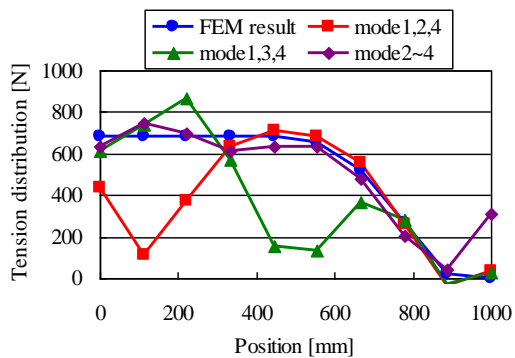
(a) Mode shape



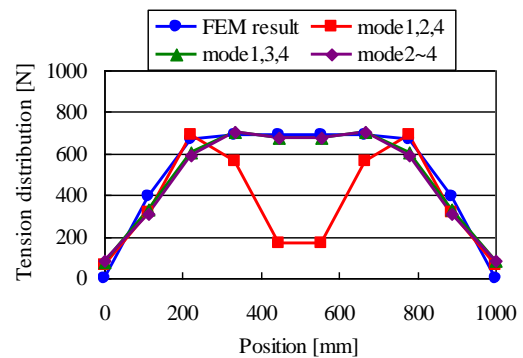
(b) Various number of the mode



(b) Various number of the mode



(c) Influence of lack of the mode



(c) Influence of lack of the mode

図 2-13 同定結果の片側縁部曲り

図 2-14 同定結果の両側縁部曲り

図 2-13 および図 2-14 は片伸びと耳波についてモード数を変えて張力同定を行った結果である。図 2-13(b)と図 2-14(b)よりどちらも図 2-12(b)の中伸びの場合と同様にモードの組み合わせを 1 次と 2 次とした場合は同定精度が悪化しており、それ以外のモードの組み合わせでは比較的精度良く同定できていることがわかる。また、図 2-13(c)と

図 2-14(c)より特定の次数のモードが欠けると同定精度が悪化することが確認される。図 2-13(c)の片伸びでは3次または2次モード、図 2-14(c)の耳波では3次モードが欠けた場合に実際の張力分布と大きく異なる波形となっている。ここで同定精度が悪化する原因として図 2-13(a)と図 2-14(a)のモード形状に着目すると、例えば図 2-13(c)に示す片伸びの mode 1,2,4 では答えである FEM 値に対して幅方向位置 0~200[mm]の範囲で張力分布が過小に同定されており、これは図 2-13(a)の1次と2次、4次モードでは節にあたる部分である。また、図 2-14(c)に示す耳波の mode 1,2,4 では400~600[mm]の範囲で張力分布が小さくなっており、この場合も図 2-14(a)で採用したモードの節に相当する部分である。つまり採用したモードの節が重なる位置では張力分布の同定精度が下がる傾向にあることがわかる。これは本手法が固有振動数と振動モードへの幾何剛性の寄与を利用して張力分布を求めているため、モードの振幅情報が小さい部分の精度が低下することによるものと考えられる。したがって張力分布を精度良く同定するためには各モードの腹と節が幅方向にまんべんなく分布していることが望ましいと考えられる。

参考までに張力分布同定計算に使用した特異値数を表 2-1 に示す。最大特異値に対して採用する特異値と採用しない特異値との適切な閾値は良く分かっていないが、表 2-1 については最大特異値の 5%以上の値を目安に採用特異値を選択し、同定結果を評価しつつ最も FEM 解析結果に近くなる特異値数を採用した。表 2-1 より特異値数は採用モード2つの場合は2~3、採用モード3つの場合は5~6、採用モード4つの場合は7、採用モード5つの場合は8~9 となっており、採用モード数の増加に対応して採用特異値数が増える傾向にあることが分かる。ただし、同じ採用モード数であってもモードの組み合わせによって採用特異値の数は若干異なる。

表 2-1 Number of singular values used for the identification of tension distribution

	flat	Edge buckle (one side)	Edge buckle (both sides)	Center buckle
mode 1,2,4	6	5	5	6
mode 1,3,4	6	5	6	6
mode 2,3,4	6	5	6	5
mode 1~2	3	3	2	3
mode 1~3	5	5	5	5
mode 1~4	7	7	7	7
mode 1~5	9	8	9	8

## 2.5. 結言

本章では、ひずみのある薄板の振動特性から幅方向の張力分布を同定する技術を開発した。本手法は薄板を長手方向に縮小した簡易モデルを作成したことで、板全面ではなく幅方向の振動モードのみが得られれば良く、少ない計測点と計算量で張力分布を同定することができる。また、簡易モデルの質量行列と剛性行列を板の寸法と物性より求めるため、鉄や銅、アルミ、その他の材料も含めた広範な薄板製品に適用することが可能である。張力分布同定理論では簡易モデルで得られた既知行列を利用することで、固有振動数と振動モードから最小二乗法により張力分布を求める手法を提案した。また、計測点と比較して同定計算に使用する振動モード数が少ない場合でも、特異値分解を利用することで張力分布の分割数を減らすことなく良好な同定結果を得られる方法を示した。提案手法を検証するため代表的なひずみ分布である片伸びと中伸び、耳波を再現した薄板の FEM モデルを作成し、張力を付加した状態での固有値解析で得られた 1 次～4 次までの固有振動数と幅方向の振動モードを用いて張力分布を同定した。その結果、FEM の静解析より得られた張力分布と提案手法による同定結果がよく一致し、本手法の妥当性を示した。さらには張力同定に用いるモードの組み合わせを変化させた場合の同定精度についての検討も行い、適切なモードの組み合わせを選択すれば途中の次数のモードが欠けても精度の良い同定結果が得られることを示した。また、本手法では採用されたモードの節が重なる部分では張力の同定精度が悪化することがわかった。



## 第3章 空気付加質量の張力同定精度への影響の評価と 同定精度の改善

### 3.1. 緒言

第2章においてひずみ分布を有する薄板の張力分布を固有振動数と振動モードより算出する方法を開発し<sup>(8)</sup>、FEM 解析により有効性を確認した。ところで本技術を実用するに当たっては板幅が1~2m、板厚1.0mm以下の薄板に適用することが想定されるため、薄板の周囲に存在する空気の付加質量の影響が同定精度に大きく影響することが考えられる。しかし前章ではその検証までには至っておらず、本章では新たに空気の付加質量をモデル化したFEM解析を行って張力同定理論の課題を明らかにした。また、薄板に作用する空気の付加質量を算出し、張力分布同定用の簡易モデルに加えることで同定精度を改善する方法を提案した。

### 3.2. 空気の付加質量を考慮した張力同定法

構造物の周囲に流体が存在する場合、構造物の振動特性は流体部の影響を受ける。とくに空気中の薄板のように流体と接する表面積が大きく板厚が薄い場合、周囲の流体の付加質量効果に対して板自体の質量が相対的に小さくなるため、空気が板の振動特性に与える影響が大きくなる。具体的には薄板の周囲に空気が存在することにより板の固有振動数は真空中よりも低くなり、板の振動モードも変化する。従って、実際に固有振動数と振動モードより張力分布を同定する場合は周囲に存在する空気の影響を考慮する必要がある。そこで本節では空気の影響を考慮する方法として仮想質量法および波動方程式の解析解による簡易計算方法の二通りの手法について説明する。

#### 3.2.1. 仮想質量法による付加質量を考慮したFEM解析

構造物の周囲に流体が存在する場合、構造物が振動すると構造部と流体部が接する面に圧力分布が発生する。接表面の単位加速度当たりの圧力分布のうち加速度と同相成分を構造物に付加される質量分布とみなせば、流体の圧力効果を質量効果としてモデル化することができる。市販のFEM解析ソフトであるNastranではVirtual mass機能により、

仮想質量法による流体の付加質量効果を考慮した解析を行うことができる。Virtual mass 機能では解析上、流体の特性は非圧縮、一様密度、表面波や粘性効果は考慮しないなどが仮定されている。

図 3-1 に空気の付加質量を考慮した Nastran の FEM 解析モデルを示す。モデルはアルミ薄板とし、寸法と物性は厚さ 0.5mm、幅 1m、全長 9m、支持ロール間隔 3m、密度 2700kg/m<sup>3</sup>、ヤング率 70GPa、ポアソン比 0.3 とした。空気の付加質量が作用するのは支持ロール間の 1m×3m の範囲のみとし、流体の密度は 1.293kg/m<sup>3</sup> とした。また、板の形状は付加質量の効果だけを評価するためにひずみのないフラットな形状とした。座標系は板長手方向に x 軸、板幅方向に y 軸、板面に垂直な方向に z 軸を設定し、境界条件は張力を付加した板端側に z 方向の拘束、x 方向は巻き取りリールあるいは駆動ロールなどにより一様に引っ張られた状態を模擬するために節点間の相対変位が生じないような拘束を設定した。これにより一つの節点に張力を設定するだけで、板の総張力が設定張力と等しくなるような幅方向に一様な強制変位を与えたことに相当する解析結果が得られる。また、固定端となる反対側の板端部は x 方向と z 方向を拘束した単純支持とした。それと、板の途中に通板ロールを模擬した z 方向拘束を 8 箇所設定した。y 方向の拘束については剛体モードを除去するために板端部の中央に一節点だけ加えた。また、FEM モデルのメッシュは一辺が 50mm の正方形とした。

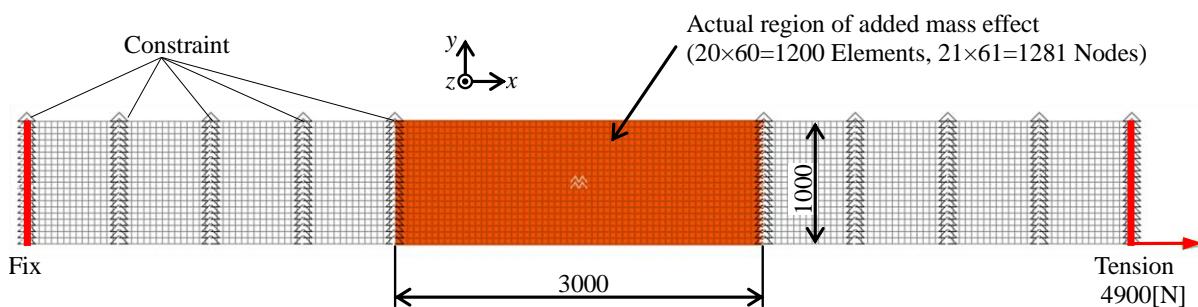


図 3-1 Added mass effect modelling of thin plate based on virtual mass method

図 3-2 に張力 4900N が作用した状態で固有値解析を行った結果を示す。図 3-2(a)は付加質量を設定していない場合の一次の振動モードで、図 3-2(b)は Virtual mass 機能を使用して空気の付加質量を考慮した場合のモードである。両者を比較すると空気の付加質量を考慮しない場合の固有振動数は 10.07Hz であり、付加質量を考慮した場合は 7.63Hz

に下がっている．また，振動モードについても付加質量を考慮すると幅方向中央部のモード振幅が大きくなるようなモードに変化していることがわかる．

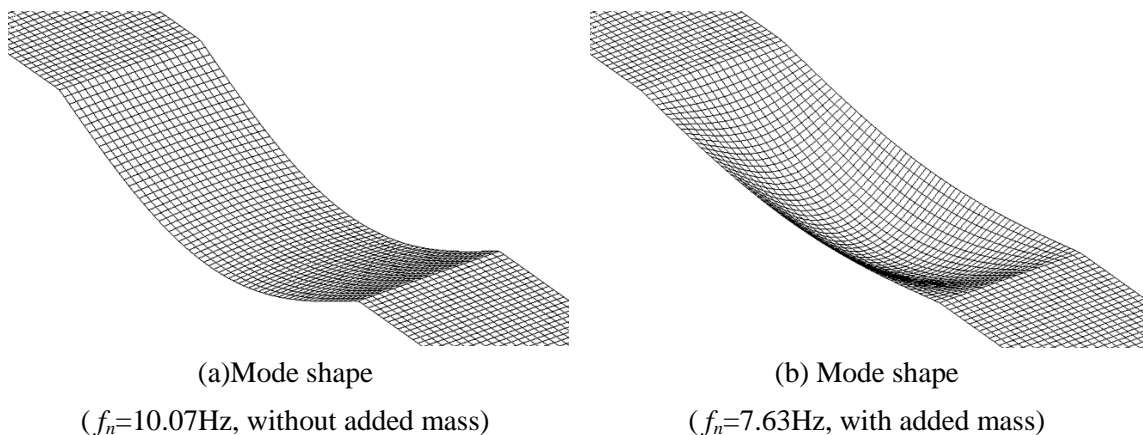


図 3-2 Comparison of 1st mode of thin plate between without added mass and with added mass

### 3.2.2. 流体力の簡易計算による付加質量算出法

構造物の平面状の付加質量を流体力から算出する方法として，平面状の流体力分布を任意の点における振動速度の寄与の重ね合わせとして算出する方法がある<sup>9)</sup>．図 3-3 に示すように振動する要素を  $s$ ，影響を受ける要素を  $i$  とすると構造物の微小面積  $A_s$  における振動による音響放射で微小面積  $A_i$  に生じる流体力  $P_i$  は  $i \neq s$  の場合は式(37)， $i = s$  の場合は式(38)で表される．ここで式中  $\rho_{air}$  は空気密度， $r_{is}$  は要素  $i$  から要素  $s$  までの距離， $\omega$  は角周波数， $c$  は空気の音速である．また，式(39)から音圧と振動速度  $v_s$  および加速度  $a_s$  との関係よりそれぞれにかかる係数を要素  $s$  における振動により要素  $i$  に作用する付加質量効果  $m_{add}$ ，付加減衰効果  $c_{add}$  とみなすことができる．

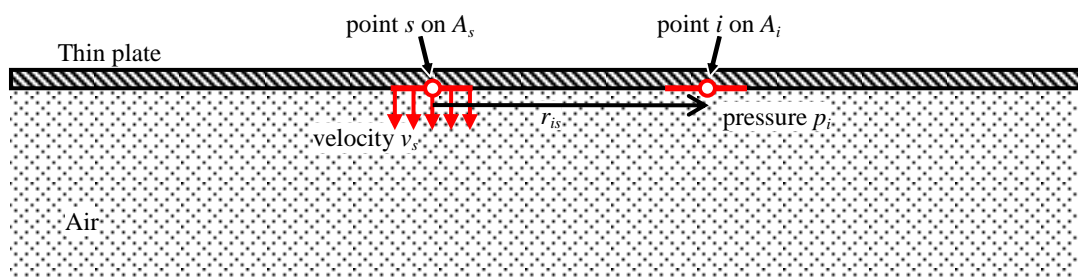


図 3-3 Acoustic radiation into semi-infinite region

$$P_i = a_s \frac{\rho_{air} A_i A_s}{2\pi r_{is}} \cos\left(\frac{\omega}{c} r_{is}\right) + v_s \frac{\omega \rho_{air} A_i A_s}{2\pi r_{is}} \sin\left(\frac{\omega}{c} r_{is}\right) \quad (37)$$

$$P_i = a_s \rho_{air} \sqrt{\frac{A_s^3}{\pi}} + v_s \frac{\omega^2 \rho_{air} A_s^2}{2c \pi} \quad (38)$$

$$P_i = m_{add} a_s + c_{add} v_s \quad (39)$$

これにより 20×60 要素毎に算出した値から、付加質量行列を算出することができる。本論文の FEM 解析では正方形の 4 節点板要素を用いて薄板をモデル化しており、要素毎に算出した値を節点の法線方向自由度に配分するため、式(40)に示す形状関数を用いた。式(41)では節点における付加質量の重ね合わせにより板片面分を計算したのち 2 倍することで板両面分の値として付加質量行列を算出した。なお、付加質量計算周波数 $\omega$ には板幅方向 1 次の固有振動数を用いた。

$$\mathbf{N} = \frac{1}{4} \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \quad (40)$$

$$\mathbf{M}_{add} = 2 \sum_n \sum_n \mathbf{N}^T m_{add} \mathbf{N} \quad (41)$$

算出された付加質量行列を Nastran に入力し、構造系の質量行列に足し合わせれば空気の影響を考慮した解析を実施することができる。なお、本計算法は構造と流体が接する面を無限大平面と仮定した音圧の解析解の式から算出しており、付加質量行列の計算量は一般的な境界要素法と比べて大幅に少なくできる利点がある。しかし、板の端部では前記の仮定が成り立たなくなり、特に板の四隅においては付加質量の計算誤差が大きくなる。本研究において解析対象となる実ラインの薄板では四隅は支持ロール部にあたり、ほとんど振動しないため付加質量の誤差はほとんど影響しないと考えられる。

### 3.2.3. 仮想質量法と流体力簡易計算法の比較

周囲に存在する空気の付加質量効果について、仮想質量法と流体力簡易計算法でそれぞれ算出した値について比較した。算出された付加質量行列の対角成分を薄板の FEM モデルの節点に対応させて図示したものを図 3-4 に示す。図 3-4 の x 軸は板長手方向の節点、y 軸は板幅方向の節点、z 軸は付加質量の大きさを示す。図 3-4(a)は仮想質量法により算出された付加質量分布であり、板の端部に近づくと付加質量の値が若干小さく

なっていることが分かる。それに対し、図 3-4(b)の簡易計算法では前述の仮定により板端付近であっても、付加質量の値が変化せず、ほぼ板全面においてフラットな分布となっていることが確認される。

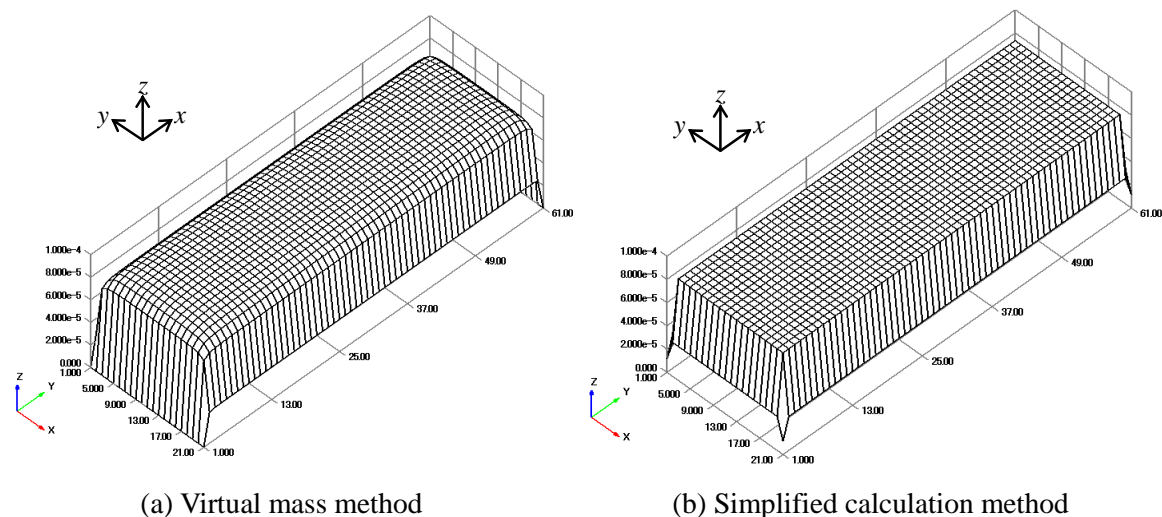


図 3-4 Calculation results of added mass distributions

表 3-1 に付加質量を考慮した場合のフラットなアルミ薄板の固有値解析結果を示す。付加質量を考慮した場合は固有振動数が低下していることがわかる。仮想質量法と流体力簡易計算法では 1 次モードの固有振動数に 1Hz 程度の差が見られるが、高次のモードほど差が小さくなり 4 次モードでは両者の振動数がほぼ同じ値となった。また、図 3-5 に板の長手方向中央部における 1 次の幅方向振動モードを示す。図 3-5 より付加質量を考慮していない場合の振動モードは幅方向にほぼ平坦になっているのに対し、仮想質量法では中央部が膨らむようなモードとなっており、簡易流体力計算法は両者の中間的なモード形状となっていることが分かる。

表 3-1 Comparison of natural frequency of thin plate

	Without added mass [Hz]	Virtual mass method [Hz]	Simplified calculation method [Hz]
mode 1	10.13	7.63	6.51
mode 2	10.13	8.78	8.41
mode 3	10.51	9.46	9.29
mode 4	12.73	11.45	11.44

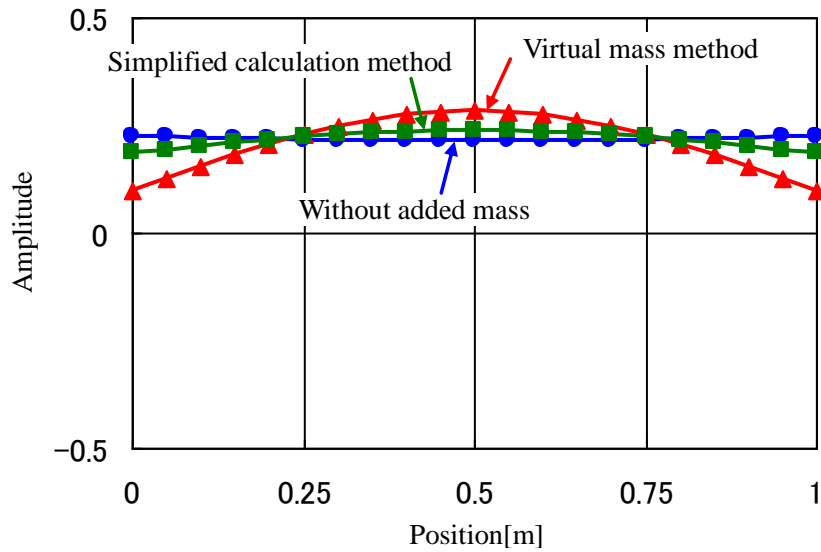


図 3-5 Comparison of width directional mode shape

### 3.2.4. 付加質量を考慮した張力同定法

算出された付加質量行列の次元は FEM モデルの節点の自由度と等しいため、張力同定を行うには簡易モデルの自由度に縮小する必要がある。自由度の縮小方法としては長手方向の振動モードを 1 次と仮定して長手方向中央部の等価分布質量を求める方法について検討した。図 3-6 は両端を単純支持された板の長手方向の質量分布を示しており、 $Z$  は縮小後に残す節点でのある振動状態における振動振幅である。図 3-6(a) に示すモデルの振動振幅  $Z$  の節点における等価質量  $m_{eq}$  は質量行列を  $\mathbf{M}$ 、振動モードを  $\psi$  とすると図 3-6(b) の縮小モデルと運動エネルギーが等しいと置くことで式(42)により表される。

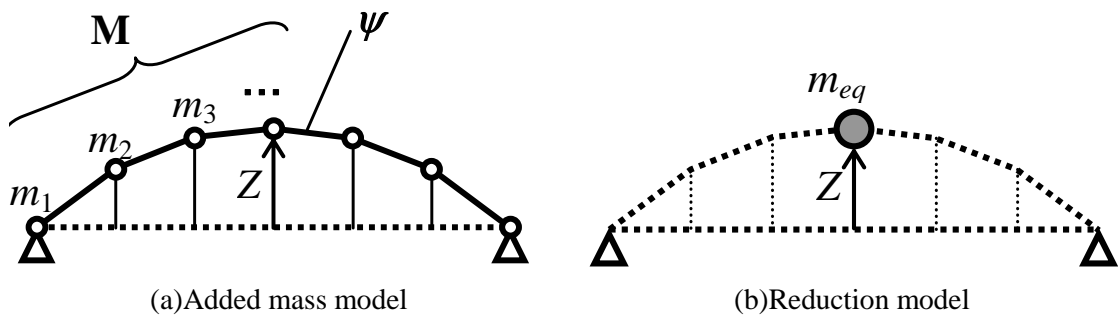


図 3-6 Reduction of degree of freedom of added mass

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \omega^2 = \frac{1}{2} m_{eq} Z^2 \omega^2 \quad (42)$$

ここで振動モードが  $Z=1$  と正規化されていれば等価質量は次式で求まる。

$$m_{eq} = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\psi} \quad (43)$$

式(43)を付加質量行列  $\mathbf{M}_{add}$  について適用し、図 3-7 に示すように等価質量行列  $\mathbf{m}_{add}$  への縮小を行う。 $\mathbf{M}_{add}$  の部分行列  $\mathbf{M}_{ij}$  ( $i, j=1, 2, \dots, n$ ) は長手方向の節点一列分の質量行列を表す。

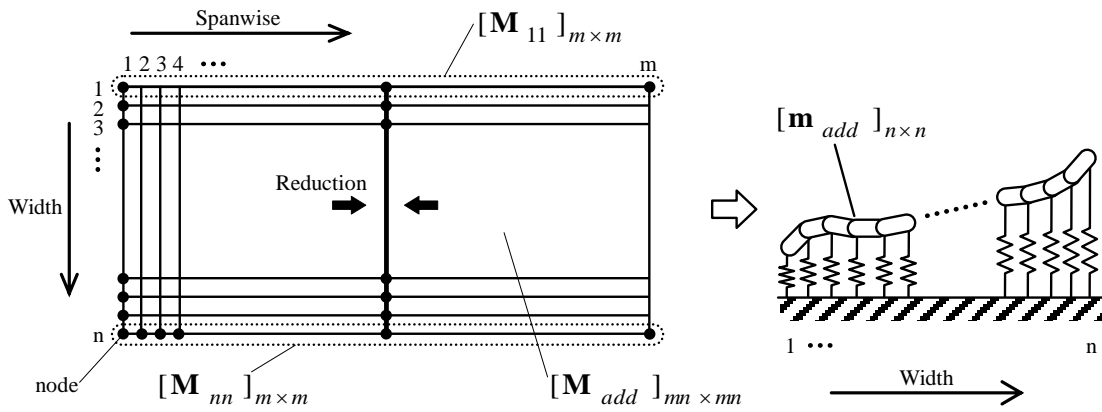


図 3-7 Reduction of added mass matrix order

$$\mathbf{M}_{add} = \begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{11}] & [\mathbf{M}_{12}] & \cdots & [\mathbf{M}_{1n}] \\ [\mathbf{M}_{21}] & [\mathbf{M}_{22}] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ [\mathbf{M}_{n1}] & \cdots & \cdots & [\mathbf{M}_{nn}] \end{bmatrix}_{mn \times mn} \quad (44)$$

本論文では付加質量を FEM モデルと同じメッシュサイズで計算後、板の長手方向の振動モードは正弦波の半波長で近似し、幅方向は張力同定簡易モデルの自由度と同じになるように付加質量行列を縮小変換した。

$$\mathbf{m}_{add} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{11} \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\psi} & \cdots & \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{1n} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{21} \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{22} \boldsymbol{\psi} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{n1} \boldsymbol{\psi} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{M}_{nn} \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (45)$$

$$\boldsymbol{\psi} = \{ \sin \theta_1 \quad \sin \theta_2 \quad \cdots \quad \sin \theta_m \}^T \quad (46)$$

$$\theta_i = (i-1) \frac{\pi}{m-1} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (47)$$

式(45)より縮小変換行列 $\boldsymbol{\Psi}$ および等価質量行列 $\mathbf{m}_{add}$ は次式で計算される.

$$\mathbf{m}_{add} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{M}_{add} \boldsymbol{\Psi} \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} & & & \mathbf{0} \\ & \boldsymbol{\psi} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (49)$$

幅方向の縮小を行う場合は図 3-8 に示すような質量を分割して隣り合う節点に配分する簡易的な縮小方法が考えられる. その場合, 縮小変換行列は節点数が奇数と偶数の場合とで式(50)に示すようになる. ただし, 式(50)は節点数を半分にする場合の変換行列である.

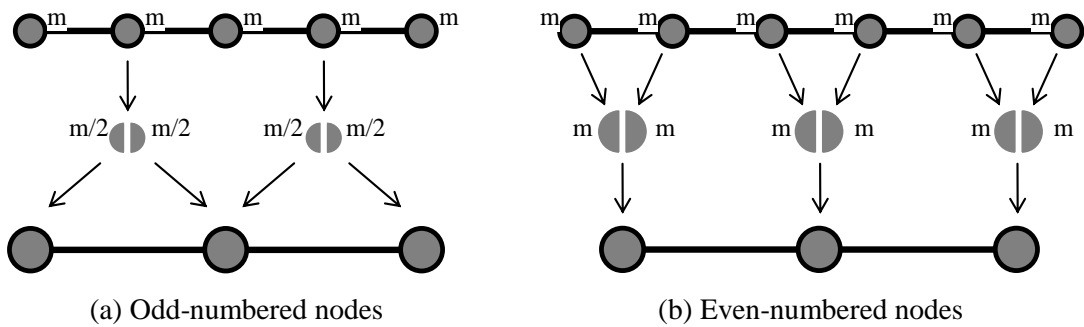


図 3-8 Reduction of added mass matrix for width directional degree of freedom



$$\Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times \frac{n+1}{2}} \quad or \quad \Psi_{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times \frac{n}{2}} \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{m}}_{add} = \Psi_{1/2}^T \mathbf{m}_{add} \Psi_{1/2} \quad (51)$$

ここで得られた付加質量行列  $\hat{\mathbf{m}}_{add}$  を用いて式(26)の質量行列を次式のように補正すると付加質量の影響を考慮した張力同定が可能となる。

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \hat{\mathbf{m}}_{add} \quad (52)$$

### 3.3. FEM 解析結果への適用

張力同定技術を FEM で検証するためのアルミ薄板モデルを作成した。薄板モデルは幅方向の応力分布を発生させる必要があるが、板のひずみ形状により応力分布を設定する場合は応力分布を変更するごとにモデルを作り直す必要がある。そこで、所望の応力分布を発生させられるような温度分布を熱荷重として設定することで、FEM モデルの幾何形状はフラットなまま任意の応力分布を設定できるようなモデル化を行った。図 3-9 に熱荷重を与えた非線形静解析結果の応力分布を示す。図 3-9(a)は板片側の温度を高く設定することで片伸びの応力分布を模擬し、図 3-9(b)は板両端部の温度を高くすることで耳波の応力分布を模擬した場合の解析結果である。図 3-9(c)は同様に中伸びとなるように熱荷重を与えた場合の解析結果で、図 3-9(d)は同じ中伸び解析結果の応力分布のカラーコンタである。静解析では薄板の線膨張係数を  $23.0 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$  とし、負荷張力による板の弾性歪を熱膨張で部分的に緩和することで応力分布を発生させた。幅方向の温度分布は  $0 \sim 8^\circ\text{C}$  の範囲で与え、板長手方向の温度分布は一樣となるように熱荷重を設定した。応力分布はフラット、片伸び、中伸び、耳波の 4 条件とし、それぞれ Virtual mass と熱荷重を設定したモデルで固有値解析を行った。

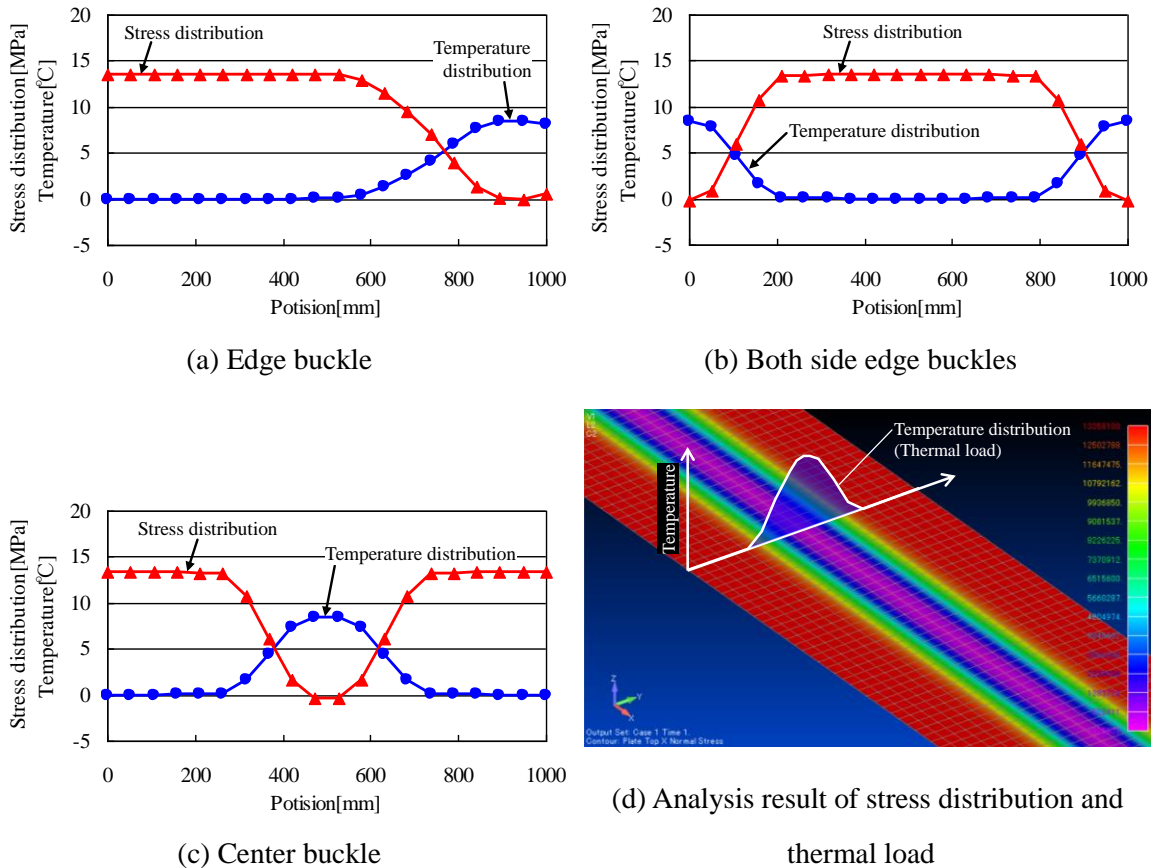


図 3-9 Nonlinear static analysis results of stress distributions and thermal loads

応力分布がフラットな場合について FEM 解析結果の固有振動数と振動モードおよび空気付加質量を考慮して張力同定した結果を図 3-10 に示す。固有値解析における空気付加質量は仮想質量法 (Virtual mass) により与え、簡易モデルに加える付加質量行列は仮想質量法の計算値を簡易モデルの自由度まで縮小した値を用いた。板寸法や付加質量の特性などの FEM 解析条件は前節で説明したモデルと同じとした。図 3-10 (a) はフラットなアルミ薄板の板幅方向 1 次～4 次モードの固有振動数で、付加質量ありの場合となしの場合を図示した。固有振動数は低次のモードほど付加質量の影響を受けており、1 次モードでは付加質量を考慮すると固有振動数が 25% 程度低下した。また、図 3-10 (b) は付加質量ありの場合の板長手方向中央部における板幅方向の振動モード、図 3-10 (c) は付加質量なし場合の振動モードである。図 3-10 (b) と図 3-10 (c) とを比較すると 1 次モードは他のモードよりも大きな差が現れており、特に付加質量の影響を受けていることが分かる。図 3-10 (d) は図 3-10 (a) と図 3-10 (b) に示した付加質量をモデル化した FEM 解析結果の固有振動数と振動モードに対し、既報の理論<sup>③</sup>で同定した結果を

Without virtual mass, 本論文で新たに提案した式(52)により簡易モデルで付加質量を考慮して張力同定を行った結果を With virtual mass として示している. 比較のため FEM の静解析で得られた応力分布も一緒に示している. 図 3-10 (d)より付加質量を考慮した場合は FEM で得られた実際の応力分布と同定値がよく一致しているのが分かる. それに対し, 付加質量を考慮しない場合は同定値が FEM 解析値を大幅に下回る結果となった. 図 3-10 (e)に図 3-10 (d)の応力分布より求めた板全体に作用する総張力値を示す. 付加質量を考慮した場合は総張力誤差が-0.4%と極めて高精度であったのに対し, 付加質量を考慮しない場合は誤差が-30%となり大幅に同定精度が悪化した. これは材質が比較的密度が低いアルミで, 薄く幅広な板形状であるため板自体の質量に対して空気の付加質量効果が大きいためである. 1 次のモーダルマスは付加質量を考慮することで 88%増加し, 2 次のモーダルマスは 39%増加した. 従って, 実際のアルミ薄板に張力同定技術を適用する場合は空気の付加質量の考慮は必須であるといえる.

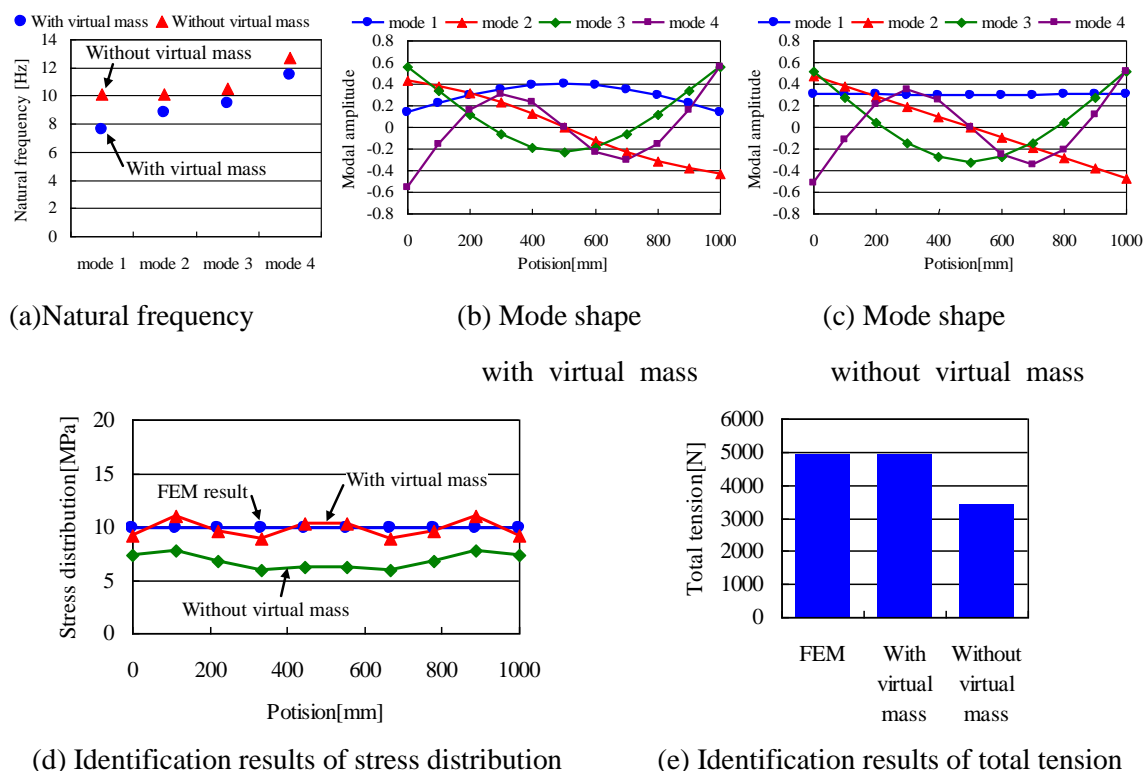


図 3-10 Modal analysis and identification results of flat thin plate FEM model

図 3-11 に片伸びの場合の固有値解析結果と張力同定結果を示す. 図 3-11 (a)より片伸びではフラットな場合と比較して, 1 次モードの固有振動数は付加質量の有無で値が

ほとんど変化していない。図 3-11 (b)と図 3-11 (c)の振動モードを比較すると 1 次モードはモード形状がほとんど変化せず付加質量の影響が小さいことが分かる。モーダルマスの付加質量による増分は 1 次が 30%，2 次が 60%程度となっており，応力分布がフラットな場合と比較してモーダルマスへの付加質量の影響度が異なる結果となった。また，図 3-11 (d)と図 3-11 (e)の張力同定結果では付加質量を考慮しないとフラットの場合と同様に誤差が大きくなり，総張力の同定精度は約 30%悪化する。

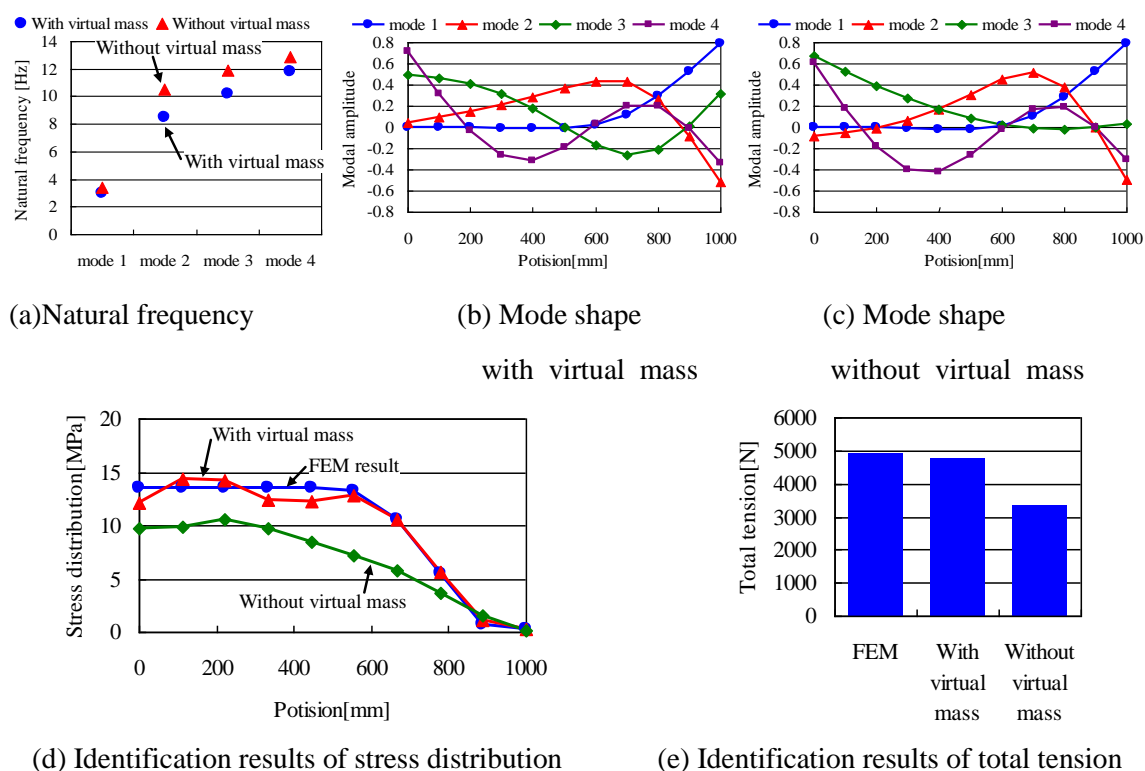
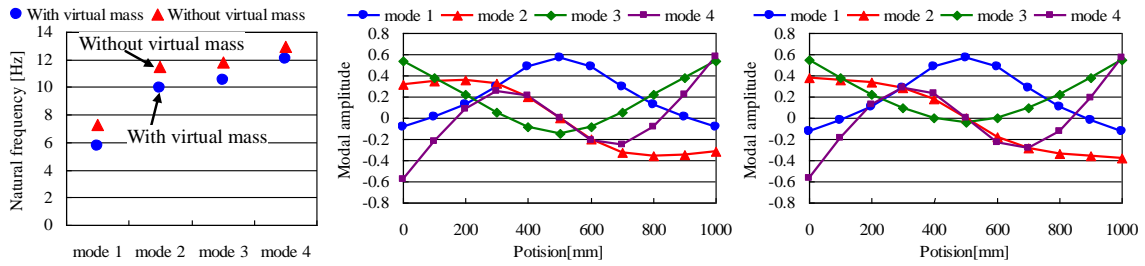


図 3-11 Modal analysis and identification results of edge buckled thin plate FEM model

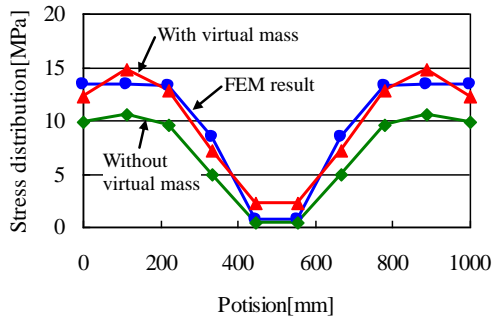
図 3-12 と図 3-13 はそれぞれ中伸びと耳波を模擬した応力分布の場合の固有値解析結果と張力同定結果で，フラットと片伸びの場合と同様に付加質量を考慮した同定技術を適用することで精度よく張力同定できている。また，付加質量を考慮しないと大きな同定誤差を生じ，総張力で 30%程度過小に同定される結果となった。このように薄板に空気の付加質量効果が作用している場合には，その分も考慮した張力同定を行わないと大きな同定誤差を生じることが分かった。空気中にある薄板の張力分布を同定する場合は予め付加質量を算出しておき式(52)に示したように簡易モデルの質量行列に加算しておけば高精度な張力同定が可能となる。



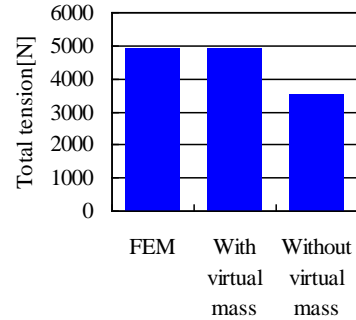
(a) Natural frequency

(b) Mode shape with virtual mass

(c) Mode shape without virtual mass

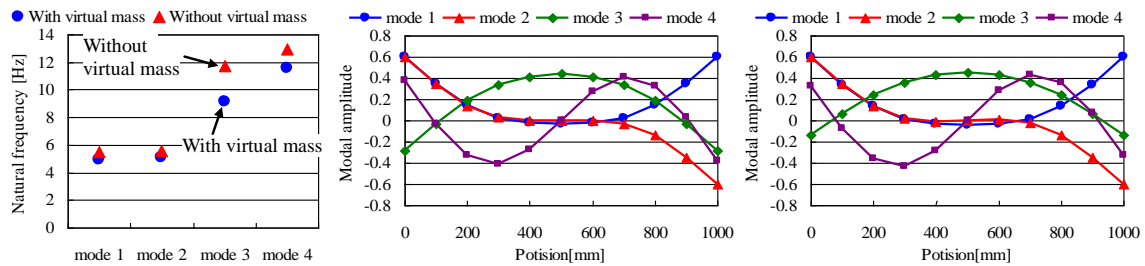


(d) Identification results of stress distribution



(e) Identification results of total tension

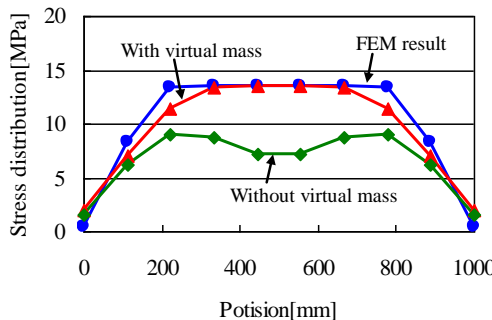
☒ 3-12 Modal analysis and identification results of center buckled thin plate FEM model



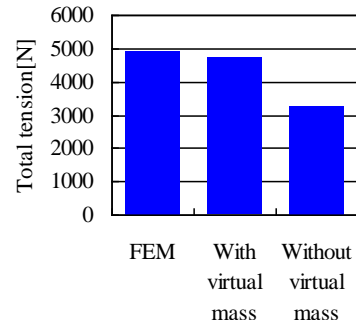
(a) Natural frequency

(b) Mode shape with virtual mass

(c) Mode shape without virtual mass



(d) Identification results of stress distribution



(e) Identification results of total tension

☒ 3-13 Modal analysis and identification results of both side edge buckled thin plate FEM model

ここまで仮定質量法による付加質量を用いた張力同定結果を示してきたが、本張力同定技術を実用する上でより簡便で高速な計算方法として解析解を用いた簡易計算法も重要である。以下に簡易計算法により算出した付加質量を用いた同定結果について述べる。図 3-14 は中伸びと耳波の張力同定を行った結果で、簡易計算法は仮定質量法よりも 10%程度同定精度が悪化しているが、応力分布の傾向が把握できる程度の同定結果は得られている。

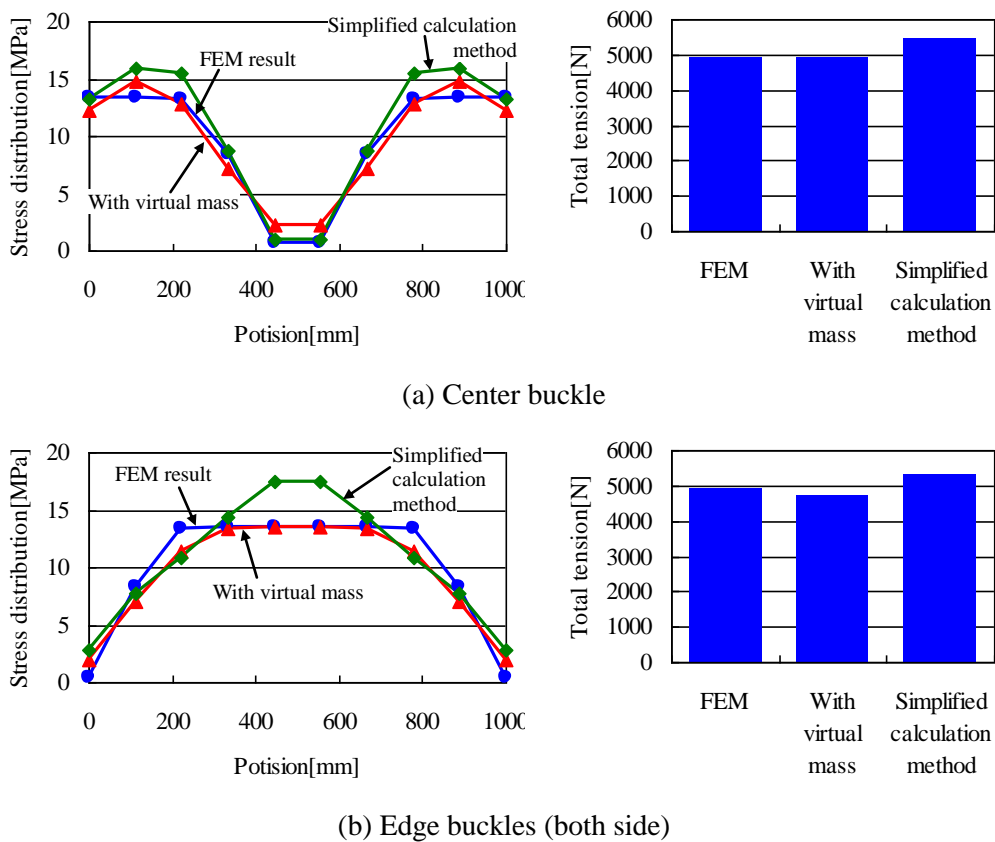


図 3-14 Comparison of identification results of tension distribution between virtual mass method with simplified calculation method

付加質量は対象とする板の幅や長さが増えるごとに再計算する必要があるため、さまざまな寸法の板に適用する場合には若干同定精度に劣るものの計算負荷が軽く高速な簡易計算法も有力な算出法であると思われる。また図 3-14 の同定結果は全て仮定質量法による FEM 固有値解析において算出された振動モードを用いており、簡易計算法による同定誤差の原因は図 3-4 に示した付加質量の見積り差によって生じたも

のと考えられる．よって仮想質量法の算出結果を正とすれば簡易計算法をそれに近づけることで同定精度の改善も可能と考えられる．

### 3.4. 結言

本章では，張力が負荷された薄板の FEM 解析において，周囲に存在する空気の付加質量効果を仮想質量法または簡易流体力計算法で考慮した固有値解析を行った．それによりアルミの薄板においては空気の付加質量が板の振動特性に大きな影響を与えることが明らかとなった．それに対し，仮想質量法または簡易計算法により求めた付加質量行列を張力分布同定法の簡易モデルの自由度に縮小して質量行列に加算することで，付加質量の影響を考慮した張力同定手法を開発した．開発手法を FEM 解析結果に適用し，付加質量を考慮することで張力分布の同定精度が大幅に改善することを確認した．

## 第4章 張力同定技術のアルミ薄板への実験適用

### 4.1. 緒言

前章までにおいて、ひずみ分布を有する薄板の張力分布を空気の付加質量を考慮したうえで固有振動数と振動モードより算出する方法を開発し<sup>(8)(10)</sup>、FEM 解析により有効性を確認した。本章では提案手法の妥当性を実験により検証するため、薄板用の張力負荷装置を製作し、実際に張力を負荷したアルミ薄板の振動特性から張力分布を同定した。板の振動特性を計測するため圧縮空気をパルス状に噴射し、励起された板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計により計測した。振動波形から実験モード解析により固有振動数と板幅方向の振動モードを求め張力分布を同定した。検証用に板表面に貼り付けたひずみゲージの測定値から換算した張力分布と同定値とを比較し、よく一致することを確認した。

### 4.2. 実験装置および実験方法

#### 4.2.1. 実験装置

本研究の実験装置の概要を図 4-1 に示す。測定対象である薄板は 2 本のロールで支持されており、薄板長手方向の板端部の片方は土台に固定されたクランプで固定し、もう片方のクランプは張力が負荷できるようにねじ機構で長手方向に可動するような構造とした。薄板は支持ロールの中央付近に設置したエアーノズルから噴射される圧縮空気により非接触で加振され、その際の板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計で計測した。



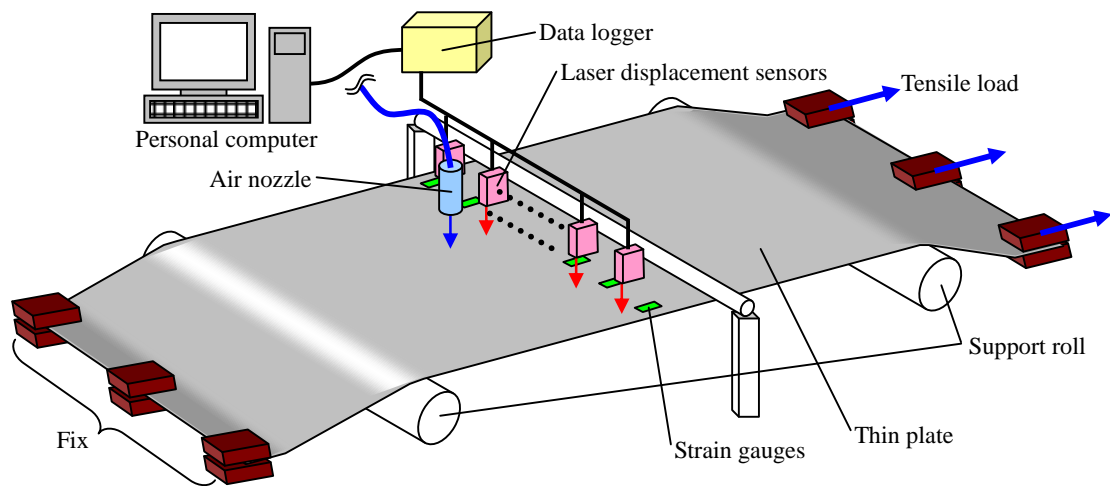


図 4-1 Overview of experimental equipment.

図 4-2 に計測システムの構成を示す。エア加振では発信器から出力された加振信号を増幅器により増幅し、電磁弁を駆動する。電磁弁には工場エアが供給されており、加振信号に従ってパルス状の圧縮空気を噴射し、加振周波数をスイープさせながら板の振動モードを励起させた。レーザ変位計からの板振動計測値はアナログ電圧信号として加振信号とともにデータロガーで計測した。ロガーで計測された振動データをパーソナルコンピュータに取り込み、伝達関数計算と偏分反復法<sup>(6)</sup>によるモード解析を行って薄板の固有振動数と幅方向の振動モードを求めた。得られた固有振動数と振動モードから板幅方向の張力分布を同定した。また、張力分布同定値の妥当性を検証するために、ひずみゲージを幅方向に複数枚貼り付け薄板で発生している応力分布を計測した。

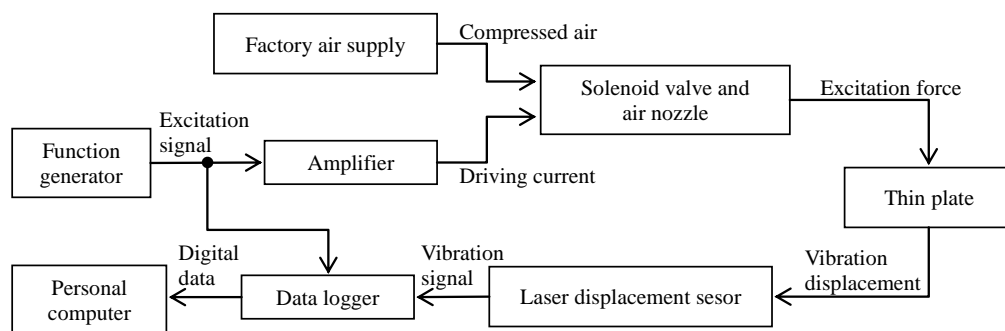


図 4-2 Measurement system configuration

#### 4.2.2. 実験条件

測定対象はアルミの薄板とし、ひずみ状態の異なる 3 種類の薄板で実験を行った。ひずみがほとんどないフラットな板と中伸びと呼ばれる板幅方向中央部が板両端側より伸びてひずんでいる状態の板、および耳波と呼ばれる板の幅方向両端部が中央部よりも伸びてひずんでいる状態の板を用いた。エアー加振での加振周波数は板の固有振動数がある 5~40 Hz の範囲とし、スイープ時間は 2 分間とした。レーザ変位計による板振動測定点は幅方向に 10 箇所とし、板の両端から 10 mm 内側の範囲で等間隔に配置した。また、ひずみゲージは幅方向に 7 箇所測定し、レーザ変位計と同様に板の両端から 10 mm 内側の範囲で等間隔に貼り付けた。

#### 4.3. 実験結果

##### 4.3.1. フラットなひずみ状態のアルミ薄板の計測結果

図 4-3 にアルミ薄板の測定条件を示す。アルミ薄板の寸法は板厚 0.3 mm、板幅 1000 mm でロール間隔を 2000 mm とし、負荷張力が 4900N となるよう可動側クランプの三点に 1633 N ずつ張力を負荷した条件で計測を行った。図 4-4 (a)はスイープ加振により各レーザ変位計で測定した板振動の伝達関数である。10 Hz から 40 Hz の間に複数のピークがみられ、板の固有振動数が存在することがわかる。なお、伝達関数の計算を行う際の入力発信器から出力される加振信号を用いた。図 4-4 (b)は伝達関数より偏分反復法によって求めた 1 次から 4 次までの板の幅方向振動モードである。求めた幅方向振動モードと固有振動数を用いて張力分布の同定を行った。なお、張力分布の同定では空気の付加質量を考慮した計算を実施した<sup>(9)(10)</sup>。付加質量を算出するための有限要素モデルの幅方向節点数を変位計の数の 2 倍である 20 節点とし、長手方向は正方形メッシュとなるよう 39 節点とした。その際の空気密度は 1.293 kg/m<sup>3</sup>、付加質量計算周波数は板の幅方向一次の固有振動数とした。

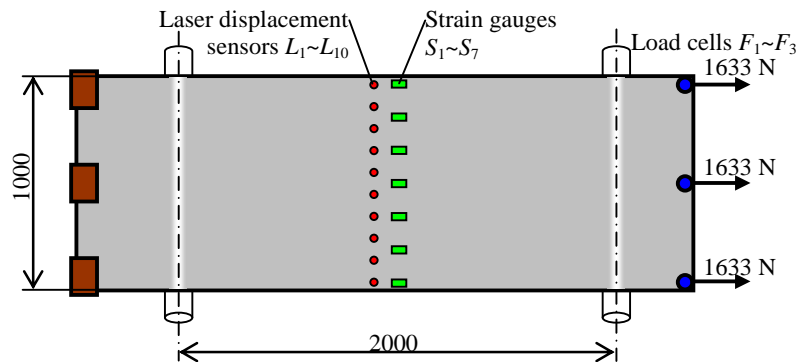


図 4-3 Measurement condition of flat aluminum thin plate.

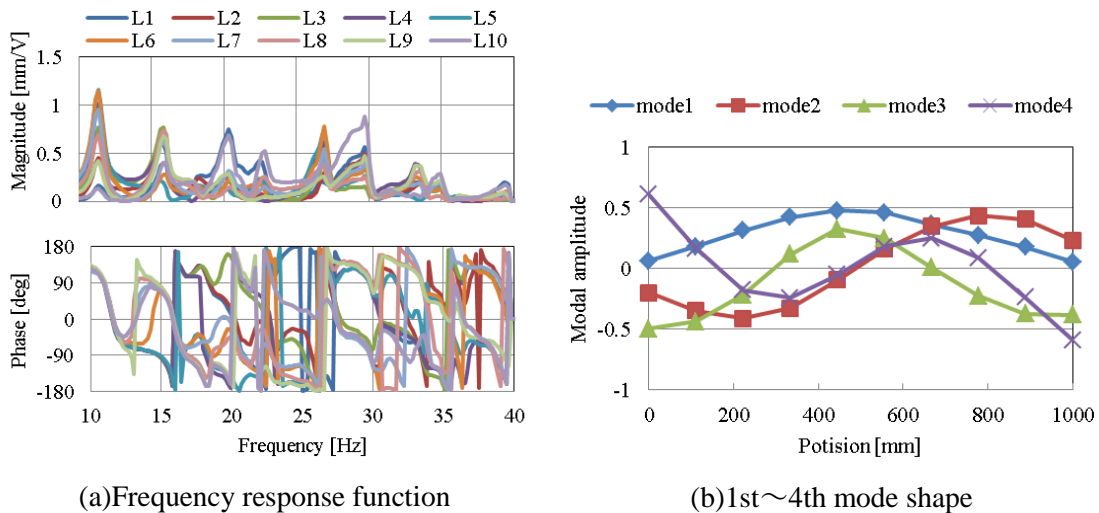


図 4-4 Measurement results of vibration characteristics of flat aluminum thin plate. (a) frequency response functions of sweep excitation, (b) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 11.3 Hz (blue), 15.8 Hz (red), 18.4 Hz (green) and 20.3 Hz (violet).

図 4-5 に図 4-4 (b)の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を示す. なお, 図 4-5 では検証用ひずみゲージの測定値にアルミのヤング率 70 GPa を乗じた値を応力分布とし, 比較のため張力分布同定結果も応力値に換算した値を示した. また, 張力分布同定値はNastranの Virtual mass機能を用いて仮想質量法により算出した付加質量を用いた同定値と既報の論文 (在原他, 2013) にて提案した簡易流体力計算法による付加質量を用いた同定値, および付加質量を考慮しないで同定した値についてそれぞれ示した. 図 4-5 (a)よりひずみゲージによる応力分布測定値と付加質量を考慮した同定結果がよく

一致していることがわかる。それに対し、空気の付加質量を考慮しない場合は算出された応力値がひずみゲージによる計測値よりも低くなり誤差が大きくなる結果となった。仮想質量法と簡易流体力計算法とでは若干後者の方が高めの値となったがほぼ同等の同定結果が得られた。図 4-5 (b)に同定した張力分布を元に局所的な張力値を幅方向に積分して算出した総張力を示す。ひずみゲージによる計測値と付加質量を考慮した同定値は付加した 4900 N に近い値となった。それに対し、付加質量を考慮しないと総張力が大幅に低く同定されてしまうことがわかる。

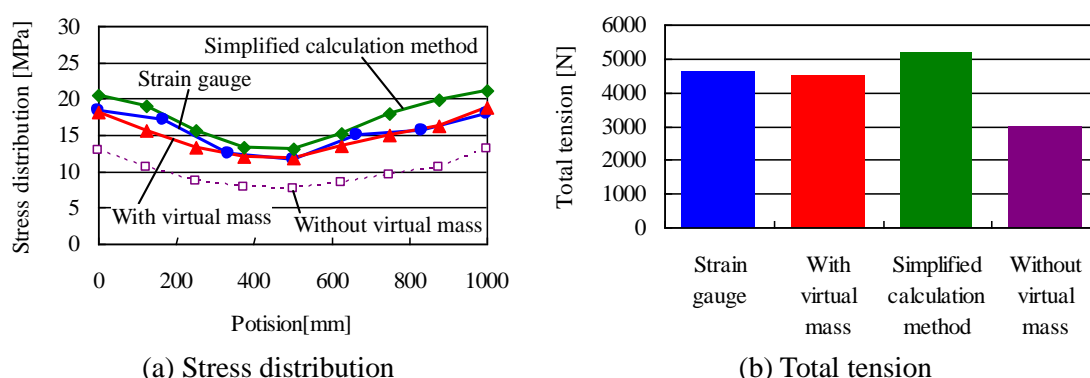


図 4-5 (a) Identification results of stress distribution and (b) total tension of flat aluminum thin plate. The comparisons of cases with and without the considering the virtual mass present results in (a) and (b). In good agreement with the measurement results identified results of considering the virtual mass. In contrast, the big difference is occurred in identification results that does not take into account the virtual mass.

#### 4.3.2. 中伸び状態のアルミ薄板の計測結果

図 4-6 に中伸び状態のアルミ薄板の測定条件, 図 4-7 に振動特性の計測結果を示す。アルミ薄板の寸法は板厚 0.24 mm, 板幅 1040 mm, ロール間隔 1100 mm である。板厚が薄く長さが短いため, サンプルが裂けないように可動側クランプの三点の張力は低めの値とし, 700 N ずつ張力を負荷した条件で計測を行った。なお, 支持ロール間距離はサンプル長さの都合から 2000 mm ではなく 1100 mm とした。付加質量を算出するための有限要素モデルの分割数は薄板の寸法に合わせて, 幅方向を 20 節点, 長手方向を 21 節点とした。

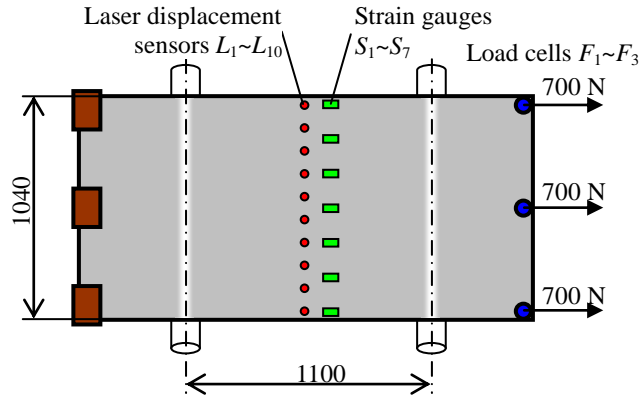
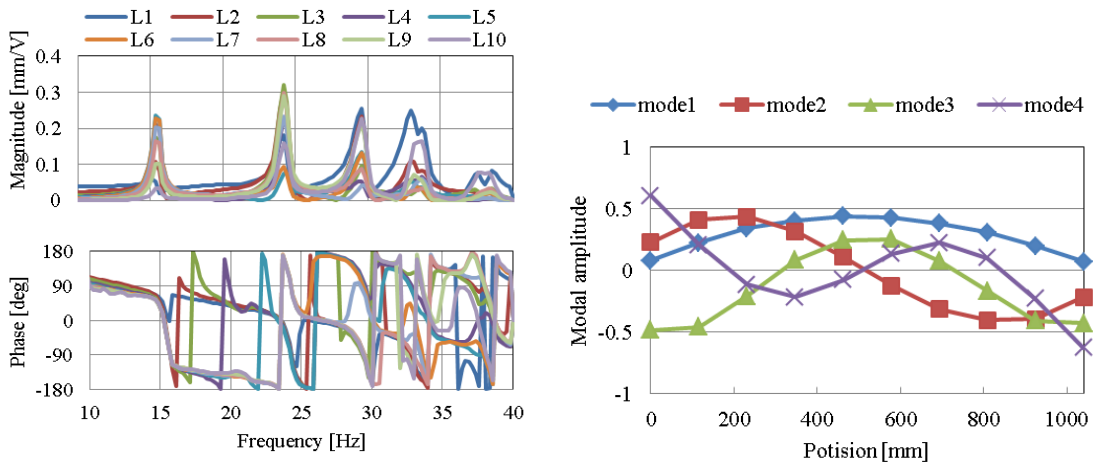


图 4-6 测量条件 of center buckled aluminum thin plate.



(a) Frequency response function

(b) 1st~4th mode shape

图 4-7 测量 results of vibration characteristics of center buckled aluminum thin plate.

(a) frequency response functions of sweep excitation, (b) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 15.7 Hz (blue), 24.5 Hz (red), 29.8 Hz (green) and 33.6 Hz (violet).

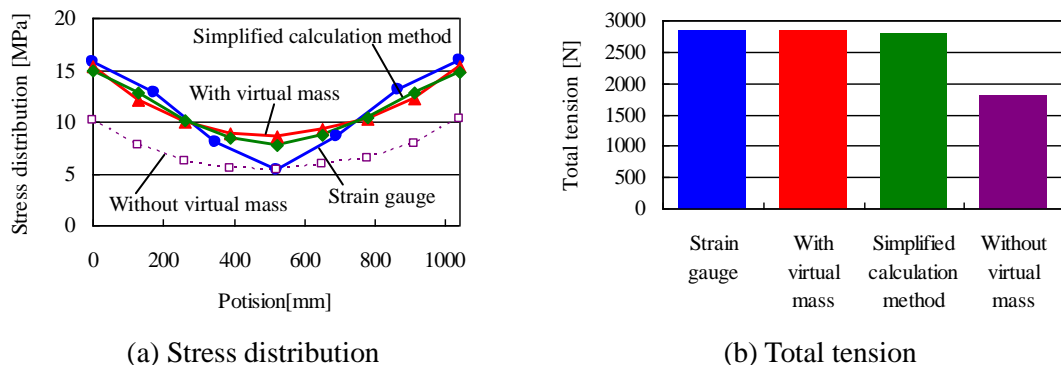
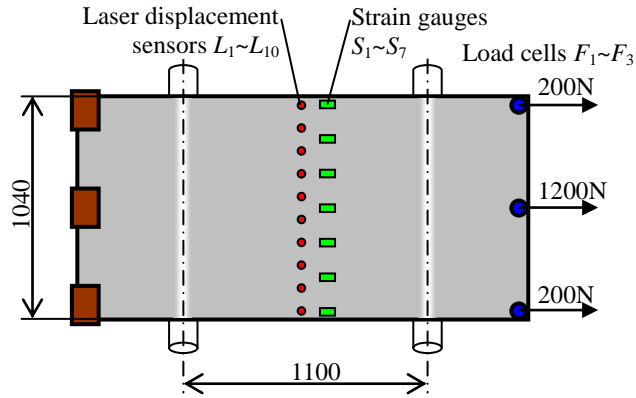


図 4-8 (a) Identification results of stress distribution and (b) total tension of center buckled aluminum thin plate. The comparisons of cases with and without the considering the virtual mass present results in (a) and (b). In good agreement with the measurement results identified results of considering the virtual mass. In contrast, the big difference is occurred in identification results that does not take into account the virtual mass.

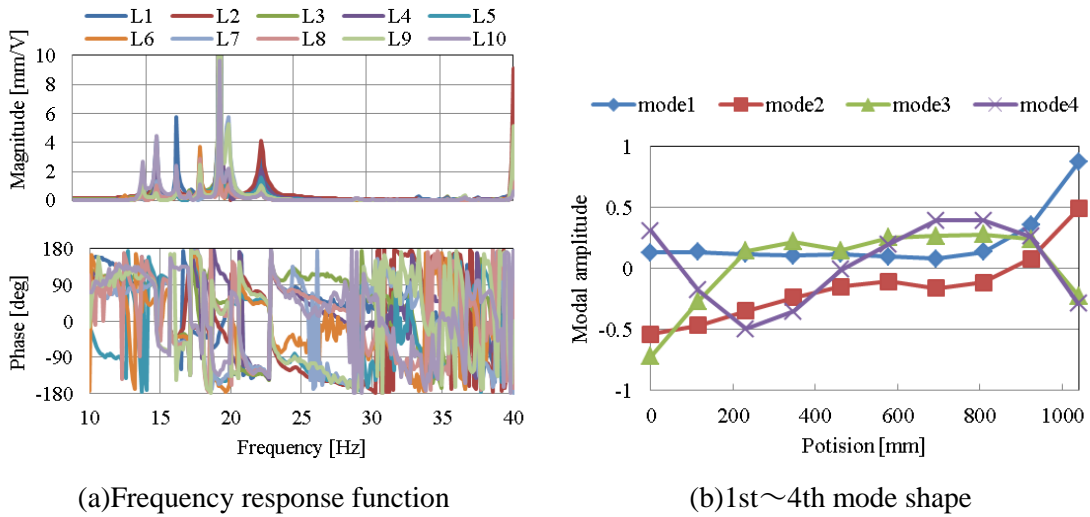
図 4-8 に図 4-7 の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を示す。図 4-8 (a)の応力分布，図 4-8 (b)の総張力からひずみゲージによる測定値と付加質量を考慮した同定結果が一致していることがわかる。空気の付加質量を考慮しないと誤差が大きくなる傾向はフラットの場合と同様である。なお，板の端点に作用させた張力の合計値は 2100 N であり，図 4-8 (b)のひずみゲージや同定結果の値と一致していない。これはクランプ部のガイドや薄板の支持ロールに摩擦が存在するためである。ロードセルの測定値は他の測定値に比べて再現性が低い傾向があり，同定値と一致しない場合もあった。

#### 4.3.3. 耳波状態のアルミ薄板の計測結果

図 4-9 に耳波状態のアルミ薄板の測定条件，図 4-10 に振動特性の測定結果を示す。アルミ薄板の寸法は板厚 0.24 mm，板幅 1040 mm で，ロール間隔を 1100 mm とした。耳波板では可動側クランプ 3 点を一様に引っ張るとエッジ側の張力が低くなり，負荷張力は 200 N，1200 N，200 N となった。また，付加質量を算出するための有限要素モデルの分割数は 2.4 節と同様とした。



☒ 4-9 Measurement condition of edge buckled aluminum thin plate.



☒ 4-10 Measurement results of vibration characteristics of edge buckled aluminum thin plate. (a) frequency response functions of sweep excitation, (b) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 14.8 Hz (blue), 15.7 Hz (red), 17.1 Hz (green) and 18.1 Hz (violet).

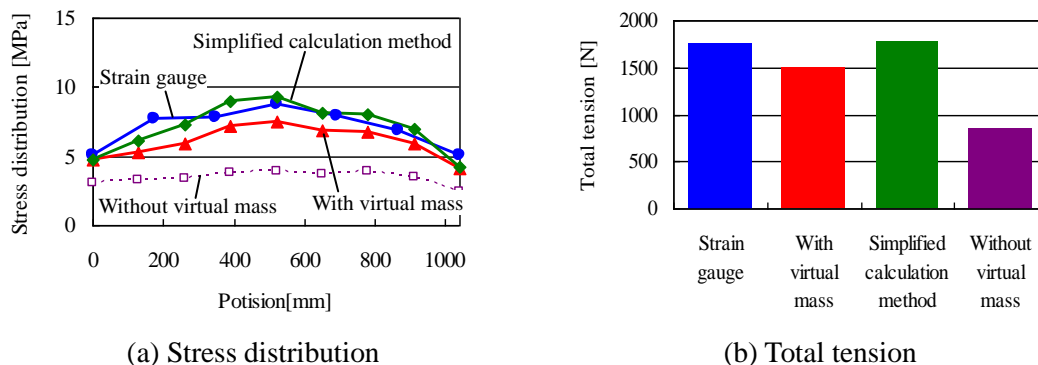


図 4-11 (a) Identification results of stress distribution and (b) total tension of edge buckled aluminum thin plate. The comparisons of cases with and without the considering the virtual mass present results in (a) and (b). In good agreement with the measurement results identified results of considering the virtual mass. In contrast, the big difference is occurred in identification results that does not take into account the virtual mass.

図 4-11 に図 4-10 の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を示す。図 4-11 (a) より耳波ひずみにより板幅方向両端部応力が下がる傾向が確認でき、ひずみゲージによる応力分布測定値と付加質量を考慮した同定結果が一致していることがわかる。図 4-11 (b)に示した総張力も付加した 1600 N とひずみゲージ測定値および付加質量を考慮した同定値とがよく一致している。また、耳波状態においても空気の付加質量を考慮しないと誤差が大きい結果となった。

#### 4.4. 結言

本章では、振動法による薄板の張力分布同定理論について実験検証を行い以下の結果を得た。薄板を支持する 2 本のロールと板長手方向両端のクランプおよびロードセルを配置した引っ張り機構を備えた実験装置を製作し、薄板に所望の張力を付加した状態で振動特性を測定できるようにした。板の固有振動数と幅方向の振動モードを測定するために板幅方向に配置したレーザ変位計による板振動計測と振動モードを励起するために圧縮空気を噴射するエア加振とによる板振動測定システムを開発し、非接触で板の振動特性を計測できるようにした。測定された薄板の固有振動数と幅方向の振動モードを用いて空気の付加質量を考慮した張力分布の同定を実施し、同定結果とひずみゲージの直接測定結果とを比較して両者が良く一致することを確認した。ひずみ状態が異なる



3種類のアلمミ薄板に対して提案手法を適用し，同定結果とひずみゲージの計測結果とが対応することを確認した．また空気の付加質量を考慮しない場合に張力分布を実際よりも過小評価してしまうことを示し本手法の有効性を示した．以上の結果より振動法による張力分布の同定手法の妥当性を示し，工学的有用性を明らかにした．

## 第5章 実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用

### 5.1. 緒言

従来の研究において振動法により板の総張力を固有振動数から直接同定する方法が提案されており, 比較的単純な理論と測定機器構成で非接触の計測が可能となっている<sup>(5)</sup>. 前章までにひずみ分布計測のため従来の振動法による張力同定法を発展させ, ひずみ分布を有する薄板の幅方向の固有振動数と振動モードより張力分布を求める方法を開発し<sup>(8)</sup>, 空気の付加質量を考慮することでさらに高精度な同定技術を実現してきた<sup>(10)(17)</sup>. 本章では薄板の振動分析のためのモード解析技術に部分空間法を採用し, 張力分布同定技術をオンラインで測定可能な技術として実用化した.

### 5.2. 部分空間法による薄板の振動解析

一般的に薄板のひずみ状態は圧延や熱処理の条件により長手方向で変化するので薄板の張力分布を全長に渡って測定できることが望ましく, ライン上に固定された位置において通板されてくる薄板を長手方向に走査するように連続的に測定する必要がある. 通板速度に応じて時々刻々と変化する張力分布を捕らえなければならないが, 一回の測定時間が長いとその間に通過してしまう板の量が増えるため長手方向の測定分解能が低下するという問題がある. そのため, なるべく短時間の振動データから板の固有振動数と振動モードを求める必要がある.

ところで構造物のモード特性を取得する方法としてシステム同定分野で発達してきた部分空間法がある. 部分空間法の一つである Eigensystem realization algorithm (ERA) 法<sup>(19)</sup>は振動の時刻歴データを Hankel 行列とよばれる行列形式にまとめ, 特異値分解を利用して数値演算処理によって対象の数式モデルを直接算出する方法である. 他のモード解析手法と比べて, 以下に示す特徴がある.

(1) 自由振動波形やインパルス応答などの比較的短時間の振動データからでも同定できる

(2) 収束計算などは行わず数値的に安定した特異値分解を用いるため, 確実に分析結果が得られる

(3) 同定対象の固有値や振動モードを算出するための初期値が不要でモード解析処理を自動化できる

オンラインの測定では短時間の振動データから逐次モード解析を行って張力分布を同定することが要求される．このような用途においては上記の特徴は大きな利点であり，本技術を実用化するうえで採用することとなった．

### 5.2.1. ERA 法による振動解析理論

本節では ERA 法による振動解析の手順について説明する．本手法は構造物の振動を離散時間状態空間モデルで表現し，次式に示す状態方程式と出力方程式で表す．

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (53)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (54)$$

式(53)および式 (54)において  $\mathbf{x}$  は状態ベクトル， $\mathbf{y}$  は出力ベクトル， $\mathbf{u}$  は入力ベクトル，行列  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  はシステムの特性行列である．括弧内の  $k$  はその状態量が  $k$  番目のサンプル値であることを示す．ERA 法は観測された出力ベクトル  $\mathbf{y}$  から特性行列を同定する方法である．特性行列を算出するために，まず出力ベクトル  $\mathbf{y}$  を次式に示す Hankel 行列形式に書きなおす．式(55)のうち  $m$  は行列の列数， $n$  は行数である．

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+m) \\ \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+m+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(k+n) & \mathbf{y}(k+n+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+m+n) \end{bmatrix} \quad (55)$$

$k=0$  および  $k=1$  における Hankel 行列をそれぞれ  $\mathbf{H}(0)$ ,  $\mathbf{H}(1)$  とし， $\mathbf{H}(0)$  を特異値分解する．

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (56)$$

ただし，式(56)の  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  は互いに直交する特異ベクトルを列ベクトルとする直交行列， $\mathbf{\Sigma}$  は特異値  $\sigma$  を対角要素にもつ対角行列である． $\mathbf{\Sigma}$  の特異値は絶対値の大きい順に並んでおり，大きな特異値を対角要素にもつ部分行列  $\mathbf{\Sigma}_s$  と小さな特異値をもつ部分行列  $\mathbf{\Sigma}_n$  に分けられる．なお，添え字  $s$  は信号成分，添え字  $n$  は雑音成分であることを表す．それぞれの部分行列で式(56)を書き直すと次式となる．

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{V}_n^T \end{bmatrix} \quad (57)$$

特性行列の同定値である  $\hat{\mathbf{A}}$  と  $\hat{\mathbf{C}}$  は  $\mathbf{U}_s$  と  $\boldsymbol{\Sigma}_s$ ,  $\mathbf{V}_s$  を用いて

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Sigma}_s^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_s^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_s \boldsymbol{\Sigma}_s^{-\frac{1}{2}} \quad (58)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{E}_p^T \mathbf{U}_s \boldsymbol{\Sigma}_s^{-\frac{1}{2}} \quad (59)$$

と計算される。ただし,

$$\mathbf{E}_p^T = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}] \quad (60)$$

である。同定対象の固有値と振動モードは  $\hat{\mathbf{A}}$  を固有値解析することで算出できる。

$$\hat{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{Z} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \quad (61)$$

式(61)の  $\mathbf{Z}$  は対角要素に行列  $\hat{\mathbf{A}}$  の固有値  $z$  をもつ対角行列,  $\boldsymbol{\Psi}$  は対応する固有ベクトルを列ベクトルとする行列である。離散系の固有値  $z$  は次式により連続時間系の固有値  $\lambda$  に変換する。なお, 添え字  $i$  は  $i$  番目の固有値であることを示す。

$$\lambda_i = \frac{\ln(z_i)}{\Delta t} \quad (62)$$

以上の計算結果より同定されたシステムの固有振動数  $f$  と減衰比  $\zeta$ , 振動モードベクトルを列ベクトルとするモード行列  $\Phi$  は次式のように求まる。

$$f_i = \frac{\text{Im}(\lambda_i)}{2\pi} \quad (63)$$

$$\zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{\sqrt{\text{Re}(\lambda_i)^2 + \text{Im}(\lambda_i)^2}} \quad (64)$$

$$\Phi = \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Psi} \quad (65)$$

## 5.2.2. 板振動解析への ERA 法の適用

前節で説明した手法に従って、実際の板の振動解析を行った結果について述べる。振動データは著者らが製作した実験装置で過去に測定した周波数応答(図 5-1 (a))を逆FFTした波形(図 5-1 (b))を使用した。図 5-2 (a)に偏分反復法<sup>(6)</sup>により求めた固有振動数と振動モード、図 5-2 (b)に ERA 法により求めた固有振動数と振動モードを示す。両者は良く一致しており、図 5-3 および表 1 に示す相互 Modal Assurance Criterion (MAC)はいずれのモードも 99%以上となった。本結果により ERA 法でも偏分反復法と同等の結果が得られることを確認した。

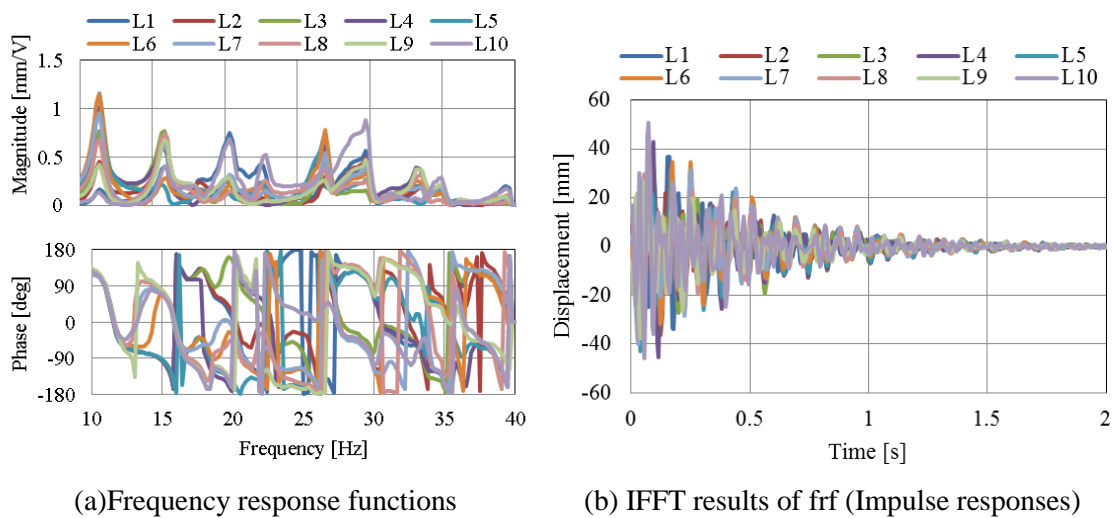


図 5-1 Measurement results of vibration characteristics of aluminum thin plate. (a) Frequency response functions of sweep excitation. (b) The impulse responses are obtained by IFFT calculation of the frf (a).

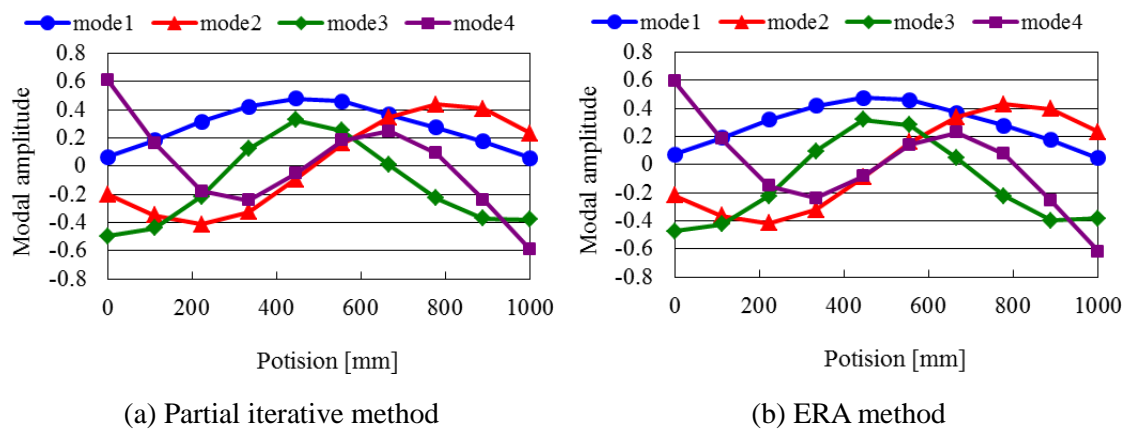


図 5-2 Modal analysis result of aluminum thin plate vibrations. (a) Identification results of the mode shape using partial iterative method. The mode shapes of up to fourth order

from the first order in the width direction of thin plate that are exist in the 11.3 Hz (blue), 15.8 Hz (red), 18.4 Hz (green) and 20.3 Hz (violet). (b) Identification results of the mode shape using ERA method. The mode shapes are exist in the 11.4 Hz (blue), 15.9 Hz (red), 18.2 Hz (green) and 20.2 Hz (violet).

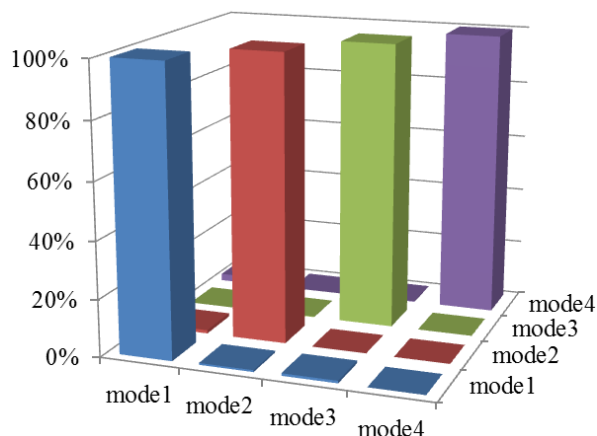


Table 1 Value of MAC

Mode 1	99.98%
Mode 2	99.95%
Mode 3	99.78%
Mode 4	99.72%

図 5-3 Relative Modal Assurance Criteria

between partial iterative method values and ERA method values.

### 5.3. 実ラインにおけるアルミ薄板の張力分布同定

#### 5.3.1. 実験装置

張力分布測定装置をアルミ薄板の製造ラインに設置し、実通板時の張力分布測定を実施した結果について述べる。張力分布を測定するためには測定装置の設置場所は振動モードを励起できるだけの支持ロールの間隔があり、適度に張力が張っている場所を選定する必要がある。目安としては支持ロールの間隔が板幅の 1~3 倍程度、総張力が 5000N 以上となる場所が望ましい。支持ロールの間隔が狭いと加振点と応答点が支持点に近いと応答が小さくなり、支持ロールの間隔が広いとロール間の板質量と空気の付加質量が増加し、加振点での等価質量が大きくなるため応答が小さくなりモードの測定が難しくなる。また、板に付加されている張力が低いと弛んだ状態となり、板自体の振動モードよりも周辺設備からの外乱振動が大きくなるため測定が困難になる。上記を考慮して製造ライン内で適切な設置場所を検討した結果、支持ロールの間隔を確保できる程度の張力が付加されているひずみ矯正装置の入側が設置に適していることが分か

った。図 5-4 に実ラインに設置した実験装置の外観を示す。測定点における支持ロール間隔は 2600mm であり，測定対象には板幅 970mm，板厚 0.25mm のアルミ薄板を用いた。薄板は支持ロールの中央付近に設置したエアーノズルから噴射される圧縮空気により非接触で加振され，その際の板振動を幅方向に配列した 10 個のレーザ変位計で計測した。レーザ変位計は幅方向に 105mm で等間隔に配列し，板幅方向中央部がラインセンタと一致しているときに最も外側のレーザスポットから板の両エッジに対して 12.5mm の余裕ができるように設置した。これはラインに入ってくる板がラインセンタからずれていたり，通板中に板が幅方向に蛇行したりすることがあるためで，レーザスポットが板から外れないようにある程度の余裕をみて設定した。加振用のエアーは工場エアーを使用し，ドライヤで水分を除去したのちレギュレータで圧力を 0.3MPaG に設定して加振力を調整した。

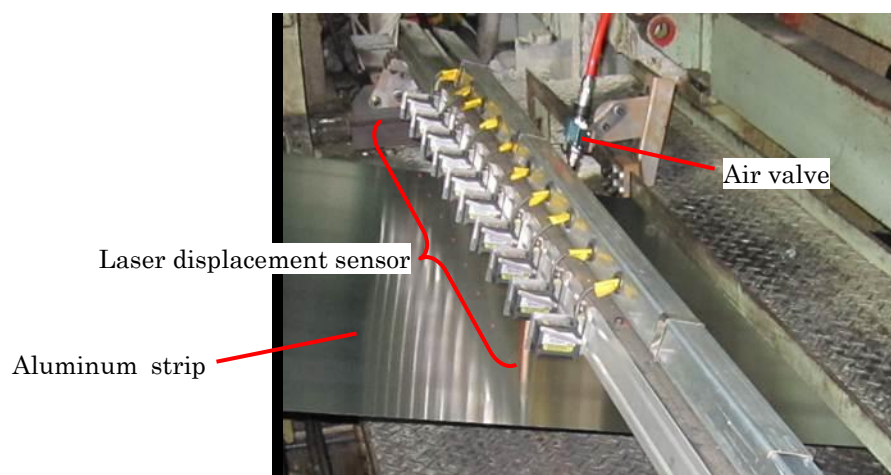


図 5-4 Appearance of the experimental equipment is applied to an actual operation line. It consists of the solenoid air valve and the laser displacement sensors are aligned in the width direction of aluminum strip.

図 5-5 に計測システムの構成を示す。エアー加振ではパーソナルコンピュータに制御された DA/AD ボードから電磁弁を ON/OFF するための矩形波を出力し，増幅器により増幅して電磁弁を駆動する。電磁弁には工場エアーが供給されており，加振信号に従ってパルス状の圧縮空気を噴射し，加振周波数をスイープさせながら板の振動モードを励起させた。レーザ変位計からの板振動計測値はアナログ電圧信号として DA/AD ボードでパーソナルコンピュータに取り込んだ。スイープ加振の周波数は 5~50Hz，スイープ時間は 4 秒，計測のサンプリング周波数は 200Hz とし，一周期の計測におけるデー

タ点数は 800 点とした。本条件により計測された振動データに対し、第 2 章で述べた ERA 法を適用した。計算手順としては、まず加振信号と振動応答信号のスイープ一周期分を DFT により周波数スペクトルに変換し、振動応答スペクトルを加振信号スペクトルで除して伝達関数を計算する。ここで加振信号スペクトルは電磁弁の ON/OFF 電圧波形であるから振幅情報に物理的な意味はなく、位相情報のみを使用し、振幅は全周波数において 1 とした。このようにして得られた 400 点の伝達関数スペクトルを逆 DFT し、図 5-1 (b)に示したようなインパルス応答を求めて Hankel 行列を作成した。なお、応答データは 4 秒であるが ERA 法には比較的振幅が大きく減衰の挙動をよく表している 0~2 秒の範囲のデータ 200 点のみを用いた。このようにモード解析を行って薄板の固有振動数と幅方向の振動モードを求め、得られた固有振動数と振動モードから板幅方向の張力分布をオンラインで同定した。図 5-6 にオンラインで張力同定を実施した際のタイムチャートを示す。最初に空気の付加質量がコイルごとに 1 回だけ計算され、その後エア一加振と振動測定が開始される。加振と測定は同時に実行され、1 周期分計測後にインパルス応答計算と ERA 法によるモード解析を行う。モード特性が得られたら張力分布を同定し、同定結果は逐次コンピュータ画面に表示することで薄板の張力分布をオンラインで評価することができる。

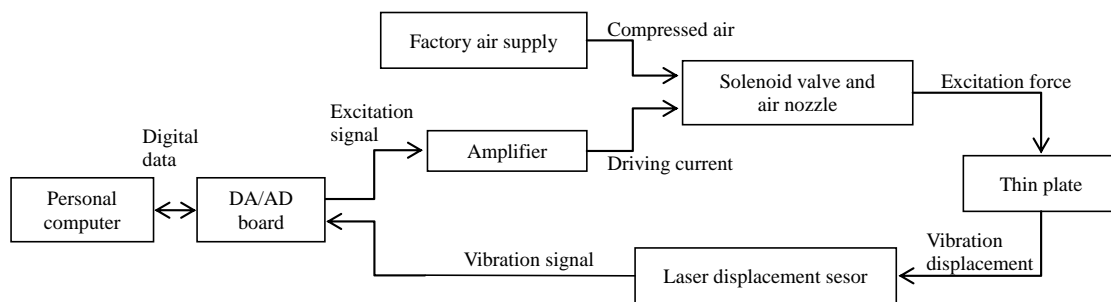


図 5-5 Measurement system configuration includes personal computer to calculate modal analysis and tension distribution, solenoid valve and laser displacement sensors. DA/AD board is used for data acquisition and the excitation signal output.



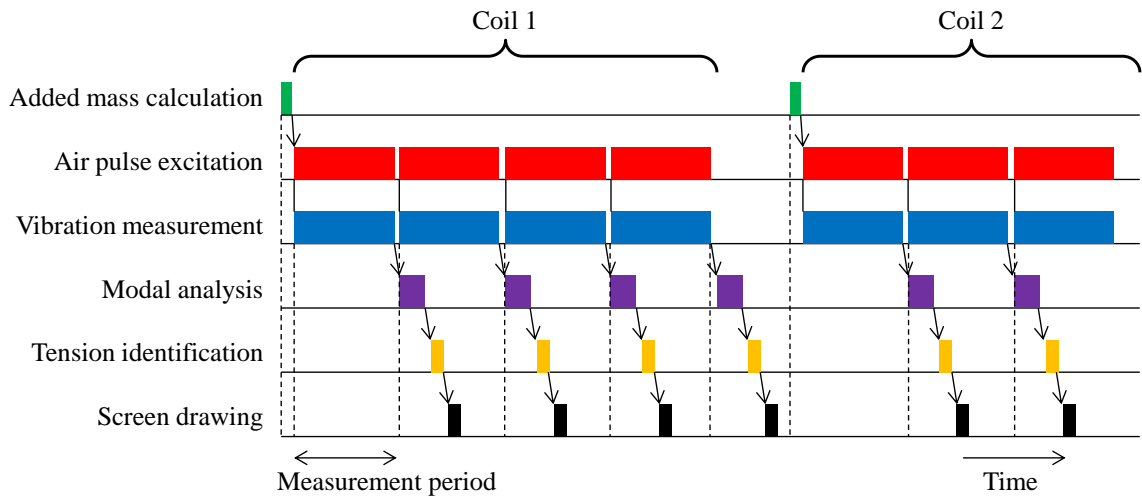


図 5-6 The time chart of online tension distribution measurement. The added mass calculation is firstly implemented only one time for each coil. Then, the air pulse excitation and the vibration measurement are carried out simultaneously. And it sequentially implements modal analysis and tension identification. Finally the identification result is drawn on the screen.

### 5.3.2. 張力分布のオンライン測定結果

実ラインにおける実験ではひずみ状態の変化を捉えられるか検証するためにテンションレベラと呼ばれるひずみ矯正装置を用いた。まず張力分布測定装置を設置したラインに矯正前の薄板を通板して張力分布を測定し、その後テンションレベラでひずみ矯正を行い同じコイルを再通板することでひずみ矯正後の張力分布を測定した。図 5-7 に張力分布の測定結果により得られた板の引張り応力分布を示す。図 5-7 (a)はひずみ矯正前のアルミ薄板で図 5-7 (b)は矯正後の薄板である。図 5-7 の幅方向の番号は隣り合うレーザ変位計間の値の番号を示しており、その番号における値はレーザ変位計 1~10 を節点とすると隣り合う 2 節点からなる要素 1~9 に作用する応力値である。図 5-7 のカラーコンタは離散値として測定された値が番号部の点となっており、点間の色はそれらを線形補間で内挿した値である。

図 5-7 (a)に示した矯正前の薄板は板幅方向右側の応力値が逆側よりも高く、大きな偏張力状態となっていることが分かる。これは圧延時に幅方向に不均一な引き伸ばしが行われたため、伸びが大きく弛む側と相対的に板長が短くなり張り勝手となる側が生じたものと推測される。また、板長手方向の張力分布の変化はあまりなく、コイル全長に渡ってほぼ同様の偏張力状態であることが分かる。それに対し、図 5-7 (b)の矯正後の

薄板は幅方向の張力分布が均一に近づき、矯正前にあった偏張力が大幅に減少していることが分かる。これはテンションレベラによってひずみのある板が引き伸ばされ、板幅方向の伸び差が緩和されたためである。伸び差がなくなることで板幅方向に均等に引っ張られた状態となり応力分布が一様となったと考えられる。図 5-7 より矯正後の方が板のひずみ形状が平坦に近く形状品質が良好であることが判断できる。なお、測定時にレーザが板から外れることがあったため、幅方向のデータ点数は矯正前と矯正後で一致していない。今回の実験装置はラインセンタを基準にレーザ変位計の位置を固定しており、板の幅方向位置がずれた際に板端側のレーザ変位計のスポットが板から外れたためである。図 5-7 の(a)と(b)において測定対象は幅 970mm の同一の板であるが、レーザ変位計の測定範囲は(a)が 10 点で 945mm、(b)は幅方向左側の 1 点がスポットから外れたため測定点は 9 点で測定範囲は 840mm である。また、長手方向の時間について図 5-7 の(a)と(b)とで異なる理由は、ライン作業上の理由により 2 回目の測定の方が若干板長さが短くなり通板速度が高くなったためである。

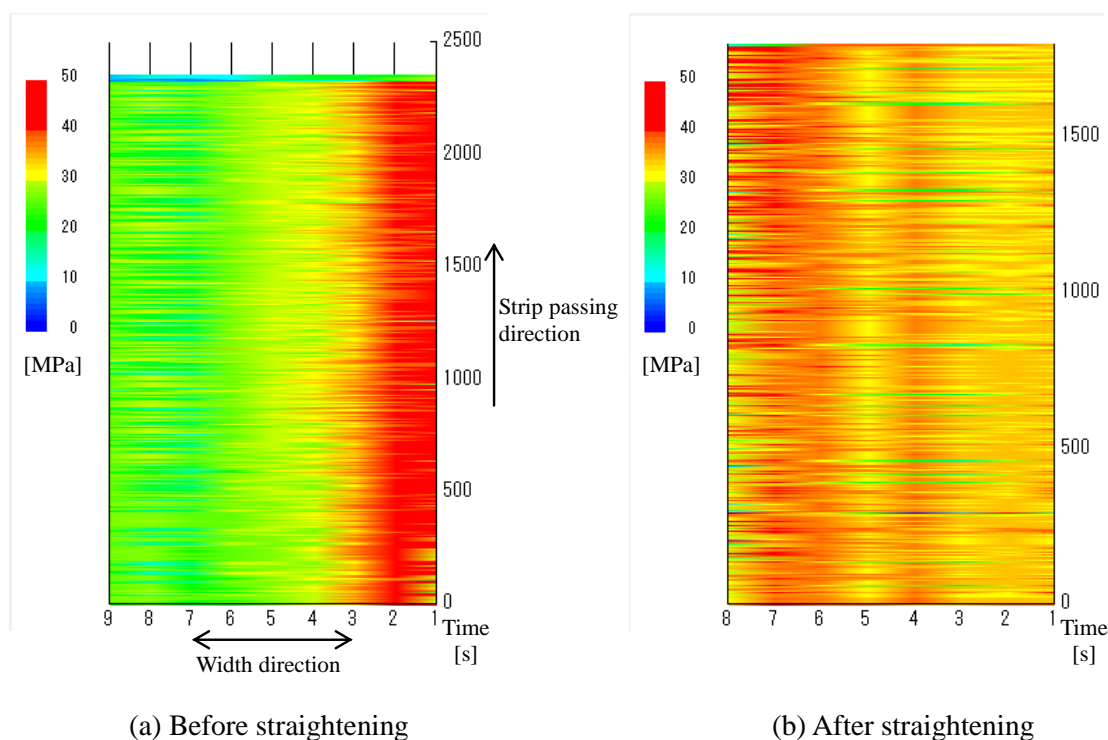


図 5-7 Measurement results of stress distributions are the value of before straightening and after straightening in the same aluminum strip. The stress distribution of after straightening is smaller than the value of before straightening.

図 5-8 は図 5-7 に示した張力分布を板長手方向にコイル全体で平均した値で矯正前後の比較を行ったものである。ここでは比較のため板幅方向は最大を 1 として正規化している。図 5-8 よりひずみ矯正前の最大応力と最小応力との差が 24MPa であったのに対し、矯正後の応力差は 6.6MPa となり 3 分の 1 以下に減少しており、ひずみ矯正ラインの効果を定量的に評価できることが分かる。これらの結果よりオンラインで薄板の張力分布状態を把握できることを確認し、オンラインでモード測定から張力同定まで可能な技術として実用化したことを示した。

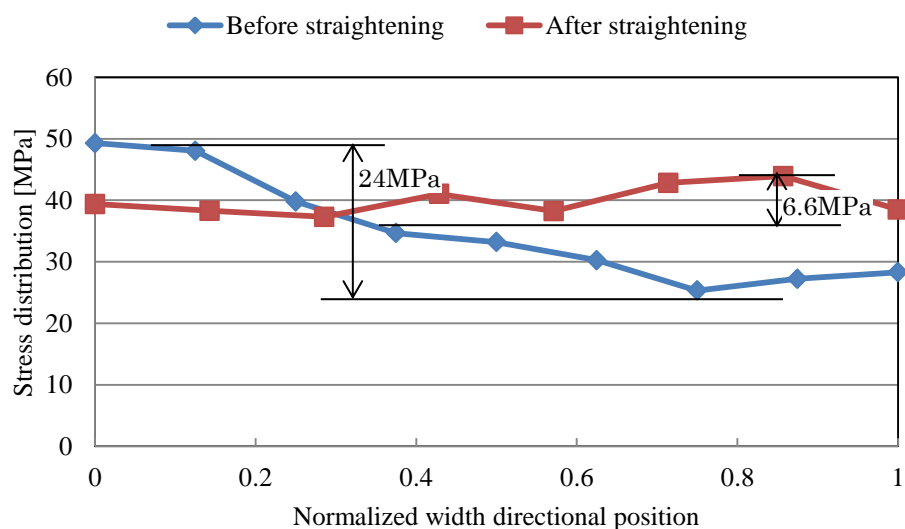


図 5-8 Comparison result of stress distributions between before straightening and after straightening.

#### 5.4. 結言

本章では、実ラインに適用可能な張力分布同定技術を開発し、アルミ薄板製造ラインにて実験検証を行い以下の結果を得た。部分空間法の一つである ERA 法を用いた板振動のモード解析技術を開発し、偏分反復法と同等の分析結果が得られることを確認した。実ラインで通板中のアルミ薄板の板幅方向にレーザ変位計を配置し、振動モードを励起するために圧縮空気を噴射するエアー加振を行って、板の固有振動数と幅方向の振動モードを計測した。また、ERA 法によりオンラインのモード解析が可能であることを示した。アルミ薄板全長での張力分布を求め、ひずみ矯正前後の張力分布状態を把握することに成功し、テンションレベラによる形状品質の向上効果を定量的に示した。以

上の結果より振動法による張力分布のオンライン同定手法の妥当性を示し, 工業的実用性を明らかにした.

## 第6章 張力分布と曲げ剛性分布の一括同定による鋼板 での同定精度改善

### 6.1. 緒言

従来の研究において張力を同定する技術として、軸力の作用した弾性固定はりについて3次までの固有振動数から軸力と固定部のばね定数とを推定する方法<sup>(12)</sup>、張力が作用したはりに貼り付けた圧電素子の電気特性から張力を同定するピエゾインピーダンス法<sup>(13)</sup>、外乱オブザーバを用いた張力推定法<sup>(14)</sup>、振動法により板の総張力を固有振動数から直接同定する方法<sup>(5)</sup>が提案されている。また、構造物の剛性値を同定する方法として絶対加速度応答から状態空間モデルに基づいて建造物の剛性値を同定する方法<sup>(15)</sup>、打撃試験による周波数応答よりサスペンションブッシュの剛性を同定する方法<sup>(16)</sup>に関する研究が実施されている。しかしながら、通板中の薄板に非接触で適用可能な張力分布を同定できる方法は確立されていないようである。著者らはこれまでの研究においてひずみ分布を有する薄板の固有振動数と振動モードより幅方向の張力分布を求める方法を開発した<sup>(8)</sup>。また、空気の付加質量を考慮することでさらに高精度な同定を可能とし<sup>(10)</sup>、実験により同定精度の確認を行ってきた<sup>(17)</sup>。しかし、対象をアルミ薄板から比較的剛性の高い鋼板へ同定技術の適用範囲を広げるうえで同定精度が悪化するという問題が明らかとなってきた。そこで、本章では鋼板への適用上の課題を調査し、同定精度を改善する新たな理論を開発した。また、開発手法をFEM解析結果および実験結果に適用し、その有効性を検証した。

### 6.2. 従来の張力同定手法の課題

従来の張力分布同定理論の課題を明らかにするため本章ではまず張力同定方法の概要を説明し、薄鋼板のFEM解析結果に適用して同定精度を検証した結果について述べる。幅方向にひずみ分布を有する薄板に対して長手方向に張力を付加した場合、ひずみの大きい部分の張力は低く、ひずみの小さい部分の張力は高くなる。薄板には張力による幾何剛性が発生するから板全体の張力分布が固有振動数と振動モードに与える影響をばね分布としてモデル化した。図 6-1 に同定計算に使用する簡易モデルを示す。簡易

モデルとは支持ロール間で長手方向のひずみ分布を一様とみなして薄板を長手方向の中央部に縮小し、幅方向の張力分布のみをばね分布として表したモデルである。張力の高低を幾何剛性の高低とみなし、ばね定数値の大小で表すことで図 6-1 の  $k_i$  ( $i=1\sim n$ ) ように絶対変位に作用するばね分布としてモデル化を行った。簡易モデルでは質量  $m$  と重心点回りの慣性モーメント  $J$  を持つ長さ  $l$  の剛体要素をピンで連結したリンクモデルで薄板を表現した。幅方向に分布した振動変位  $z$  は  $l$  に対して十分に小さいとして要素の回転変位  $\theta$  を  $z_{i+1}-z_i \doteq l\theta_i$  と近似し、節点の自由度は並進方向のみとした。よって簡易モデルでは薄板を幅方向に  $n-1$  等分割して節点を配置した場合は自由度  $n$  となる。また、薄板の長手方向の曲げ剛性は十分小さいとして無視し、幅方向の曲げ剛性  $\tau$  を要素間の回転ばねとしてモデル化した。従来の張力同定方法では簡易モデルの曲げ剛性  $\tau$  を一定値として固有振動数と振動モードから最小二乗法によりばね分布  $k_i$  ( $i=1\sim n$ ) を算出する。

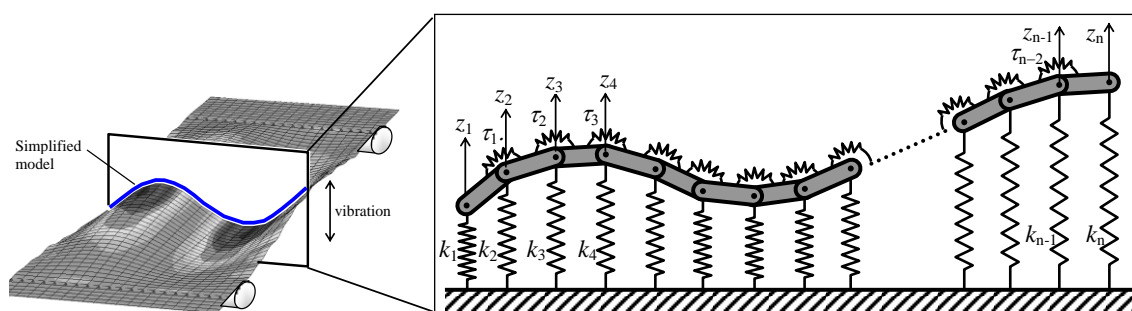


図 6-1 Simplified dynamic link model of thin plate.

本論文では代表的な形状不良として中伸びと耳波の場合について適用した。図 6-2 にひずみ分布として中伸びと耳波をそれぞれ設定した FEM モデルを示す。図 6-2 は実モデルよりひずみ形状をわかりやすくするため  $z$  方向に 10 倍に拡大してある。これらの形状は薄板の永久ひずみをモデル化したものであり初期形状を意味している。モデルの寸法と物性は厚さ 1.0mm、幅 1m、全長 9m、支持ロール間隔 4.5m、密度 7860kg/m<sup>3</sup>、ヤング率 210GPa、ポアソン比 0.3 とした。また、解析メッシュは一辺が 50mm の正方形とし、解析計算には汎用 FEM コードの Nastran を用いた。各ひずみ分布の波形状は図 6-2 に示す通り振幅 3.4mm を最大値とした幅方向に直線的な分布とし、長手方向は周期 500mm の正弦波となるような形状とした。境界条件は張力を付加した板端側に  $z$  方向の拘束、 $x$  方向は巻き取りリールあるいは駆動ロールなどにより一様に引っ張られた状態を模擬するために節点間の相対変位が生じないような拘束を設定した。これによ

り幅方向の長手方向変位分布を一様としたまま、設定された総張力で引っ張りを加えた場合の解析結果が得られる。また、固定端となる反対側の板端部は  $x$  方向と  $z$  方向を拘束した単純支持とした。さらに、板の途中に支持ロールを模擬した  $z$  方向拘束を 6 箇所設定した。図 6-2 中の拘束は図示するために幅方向 5 箇所ずつとなっているが実際のモデルは幅方向の全節点を拘束した。 $y$  方向の拘束については剛体モードを除去するために板両端の  $y$  方向中央部の節点、モデル全体で計 2 節点に設定した。

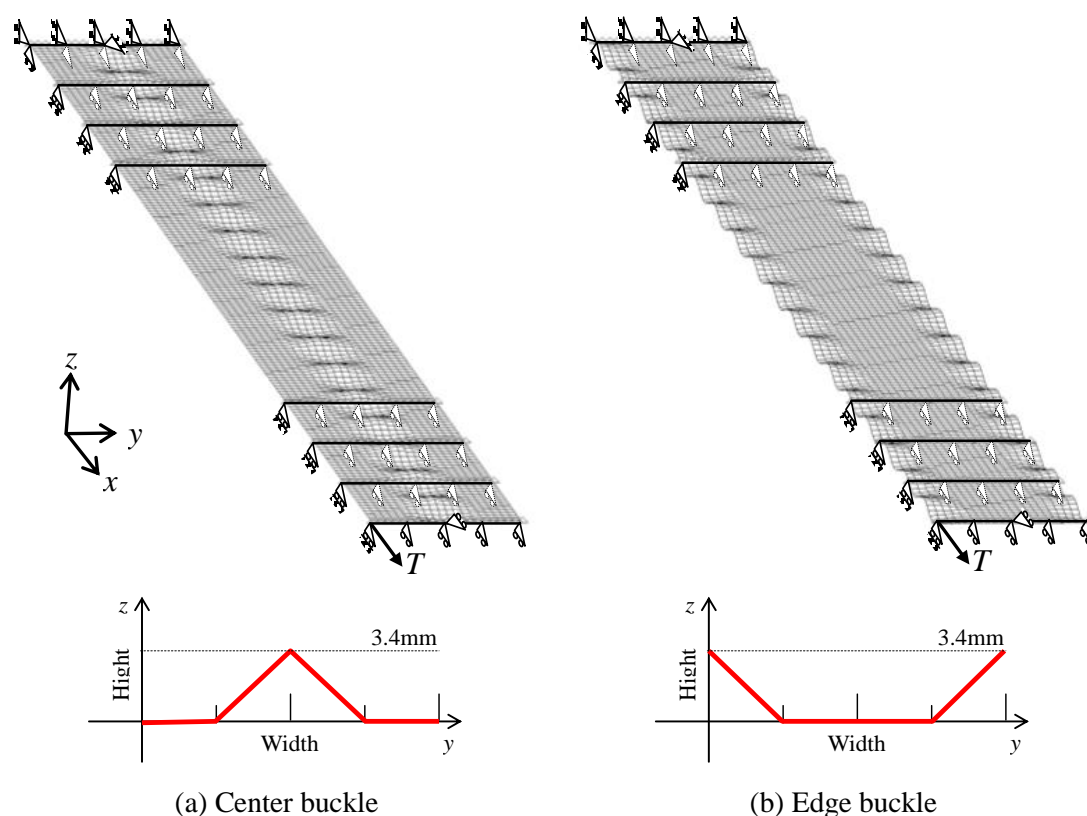


図 6-2 FEM models of various strain patterns of plate.

図 6-3 は張力を 29400N に設定して静解析を行った中伸び薄板の応力分布である。板幅方向中央部の応力が低下しており、ひずみ形状に対応した応力分布が生じていることがわかる。図 6-3 の状態で発生している幾何剛性を考慮して固有値解析を行った結果を図 6-4 に示す。図 6-4 は図 6-3 (a)に示した永久ひずみ状態の薄板に張力が負荷された場合の長手方向 1 次、幅方向 1 次から 4 次の振動モードを示している。張力同定計算には長手方向中央部における幅方向の振動モードを使用した。

図 6-5 (a)に中伸び、図 6-5 (b)に耳波の張力分布の同定結果を示す。同定計算には 1 次から 4 次の幅方向振動モードを使用し、簡易モデルは 11 自由度とした。図 6-5 に示すとおり鋼板モデルにおいては張力分布同定結果に大きな誤差が生じることがわかる。これは FEM モデルと簡易モデルの曲げ剛性値に差が存在することが原因として考えられる。従来手法の簡易モデルでは平坦形状の板を仮定し、板幅方向の曲げ剛性を寸法とヤング率から算出した値で決め打ちしている。そのため板の断面二次モーメントが変化するように曲がりやひずみ形状、板厚変動などが存在した場合、簡易モデルと FEM モデルとの間の曲げ剛性の差が張力分布同定誤差として現れる。特に同定対象にひずみの



波形状が存在すると簡易モデルの剛性と大きな差が生じる。静解析で元のひずみが張力で引き伸ばしきれずに波形状として残った結果、簡易モデルの仮定と異なる剛性値に対して固有振動数および振動モードが FEM 解析値と一致するように簡易モデルの張力分布を同定するため大きな誤差が生じたと考えられる。このように曲げ剛性値が簡易モデルの仮定と異なる場合であっても、精度の良い張力同定が実施できるように曲げ剛性分布を未知数とおき、張力分布と一括して同定することで精度を改善する技術を開発した。

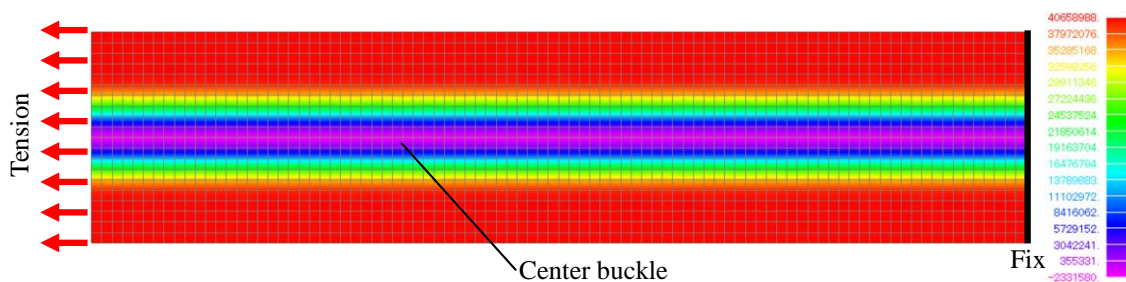
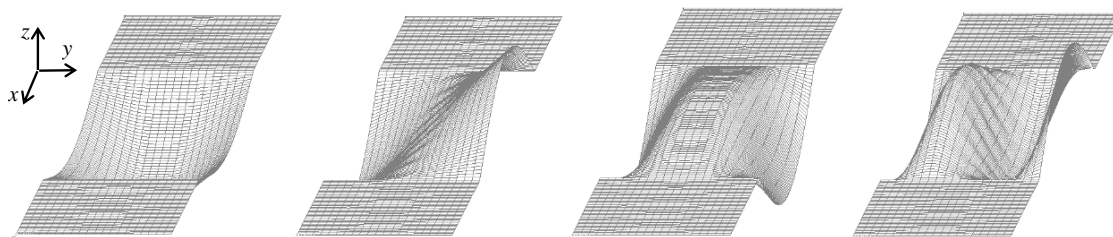
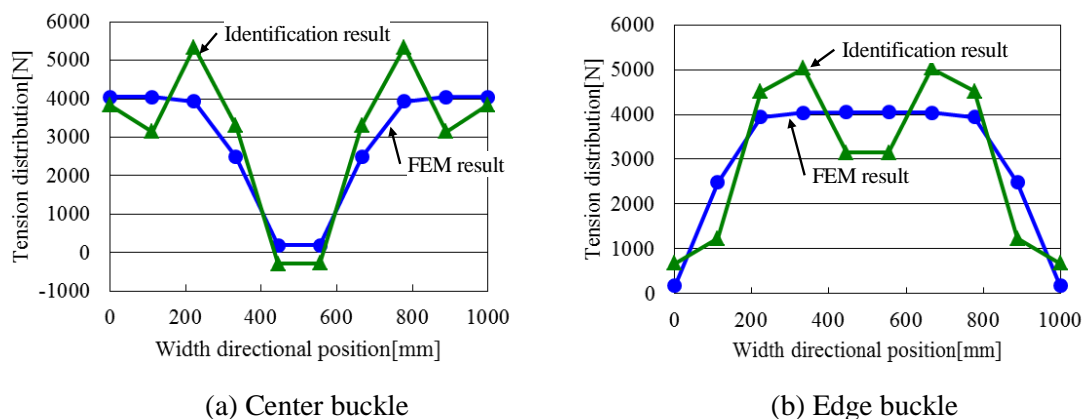


図 6-3 Stress contour map in plate in the case of Center buckle.



(a) mode 1 (6.55Hz) (b) mode 2 (7.94Hz) (c) mode 3 (10.8Hz) (d) mode 4 (17.8Hz)

図 6-4 Natural vibration mode of thin plate in the case of center buckle.



(a) Center buckle

(b) Edge buckle

図 6-5 Identification results of tension distribution.

### 6.3. 張力分布および曲げ剛性分布の一括同定理論

本章では与えられた薄板の固有振動数と幅方向の振動モードより張力分布と曲げ剛性分布を一括して求める方法について述べる．薄板の固有振動数 $\omega_i^2(i=1\sim n)$ を対角要素とする行列を $\mathbf{\Omega}^2$ ，対応するモードベクトルを列ベクトルとするモード行列を $\mathbf{\Phi}$ とおくと式(66)の関係<sup>(6)</sup>が成り立つ．

$$\mathbf{M} \mathbf{\Phi} \mathbf{\Omega}^2 = \mathbf{K} \mathbf{\Phi} \quad (66)$$

ただし

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_T \quad (67)$$

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\mathbf{\Phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (69)$$

$$\phi_i = \{\phi_{i,1} \quad \phi_{i,2} \quad \cdots \quad \phi_{i,n}\}^T \quad (70)$$

である． $\mathbf{K}_T$ は剛性マトリクス of 張力成分であり，同定対象となるばね分布 $k_i(i=1\sim n)$ を対角要素とする対角行列である．簡易モデルの運動方程式のうち，曲げ剛性マトリクス $\mathbf{K}_\tau$ を式(71)に示す．

$$\mathbf{K}_\tau = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} \tau_1 & -2\tau_1 & \tau_1 & & & & & & \\ -2\tau_1 & 4\tau_1 + \tau_2 & -2\tau_1 - 2\tau_2 & \tau_2 & & & & & \\ \tau_1 & -2\tau_1 - 2\tau_2 & \tau_1 + 4\tau_2 + \tau_3 & \ddots & & & & & \\ & \tau_2 & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \tau_{n-3} & & & & \\ & & & \ddots & \tau_{n-4} + 4\tau_{n-3} + \tau_{n-2} & -2\tau_{n-3} - 2\tau_{n-2} & \tau_{n-2} & & \\ & & & \tau_{n-3} & -2\tau_{n-3} - 2\tau_{n-2} & \tau_{n-3} + 4\tau_{n-2} & -2\tau_{n-2} & & \\ & & & & \tau_{n-2} & -2\tau_{n-2} & \tau_{n-2} & & \end{bmatrix} \quad (71)$$

式(66)の関係を利用して解析あるいは実験により得られる固有振動数と振動モードから張力ばね分布と曲げ剛性分布を計算する。使用する固有振動数と振動モードベクトルは張力同定計算を行う上ではいくつでも良く、ここでは1～ $m$ 次モード ( $m \leq n$ ) を使用する場合について述べる。

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m] \quad (72)$$

式(66)に式(68)、式(72)を代入して1～ $m$ 次モードまで使用した場合に書き直すと次式が得られる。

$$\mathbf{M} [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m] \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \vdots \\ \omega_m^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_T) [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_m] \quad (73)$$

式(73)からモード毎に独立した自由度  $n$  のベクトル方程式が得られる。

$$\omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i = \mathbf{K}_T \phi_i + \mathbf{K}_\tau \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (74)$$

式(74)の右辺第1項は次式のように既知の係数行列  $\Phi_{T,i}$  と未知のばね分布ベクトル  $\mathbf{k}$  との積にまとめることができる。

$$\mathbf{K}_T \phi_i = \begin{bmatrix} k_1 \phi_{i,1} \\ k_2 \phi_{i,2} \\ \vdots \\ k_n \phi_{i,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & & & \\ & \phi_{i,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \phi_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (75)$$

$$= \Phi_{T,i} \mathbf{k}$$

式の右辺第2項も同様に係数行列  $\Phi_{\tau,i}$  と曲げ剛性分布ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  との積にまとめることができる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_\tau \phi_i &= \frac{1}{l^2} \left\{ \begin{array}{c} (\phi_{i,1} - 2\phi_{i,2} + \phi_{i,3})\tau_1 \\ (-2\phi_{i,1} + 4\phi_{i,2} - 2\phi_{i,3})\tau_1 + (\phi_{i,2} - 2\phi_{i,3} + \phi_{i,4})\tau_2 \\ \vdots \\ (\phi_{i,n-2} - 2\phi_{i,n-1} + \phi_{i,n})\tau_{n-2} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
&= \frac{1}{l^2} \left[ \begin{array}{ccc} \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_{i,1} \\ \phi_{i,2} \\ \phi_{i,3} \end{array} \right\} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \phi_{i,n-2} \\ \phi_{i,n-1} \\ \phi_{i,n} \end{array} \right\} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{n-2} \end{array} \right\} \\
&= \Phi_{\tau,i} \tau
\end{aligned} \tag{76}$$

式(75)と式(76)を式(74)に代入してモード毎のベクトル方程式を未知数ベクトル  $\mathbf{k}$  と  $\boldsymbol{\tau}$  についてまとめると  $n \times m$  個の独立した式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{c} \omega_1^2 \mathbf{M} \phi_1 \\ \omega_2^2 \mathbf{M} \phi_2 \\ \vdots \\ \omega_m^2 \mathbf{M} \phi_m \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \Phi_{T,1} & \Phi_{\tau,1} \\ \Phi_{T,2} & \Phi_{\tau,2} \\ \vdots & \vdots \\ \Phi_{T,m} & \Phi_{\tau,m} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{array} \right\} \tag{77}$$

左辺の既知ベクトルを  $\mathbf{k}_\Phi$ 、右辺の張力ばね分布ベクトル  $\mathbf{k}$  の係数行列を  $\Phi_T$ 、曲げ剛性分布ベクトル  $\boldsymbol{\tau}$  の係数行列を  $\Phi_\tau$  とおいて

$$\mathbf{k}_\Phi = [\Phi_T \quad \Phi_\tau] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\tau} \end{array} \right\} \tag{78}$$

とする。次に振動モードと固有値の関係および振動モードの直交性を利用した定式化を行う。式(66)に左側から  $\Phi^T$  を乗じると

$$\Phi^T (\mathbf{K}_\tau + \mathbf{K}_T) \Phi = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Omega^2 \tag{79}$$

となる．式(79)の関係を利用して解析あるいは実験により得られる固有振動数と振動モードから張力ばね分布と曲げ剛性分布を計算する．式(79)に式(72)を代入し，行列の各成分に展開すると次式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \phi_1^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_1 & \cdots & \phi_1^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_m^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_1 & \cdots & \phi_m^T (\mathbf{K}_T + \mathbf{K}_\tau) \phi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \omega_1^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m \omega_m^2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

式(80)の両辺は対称行列であるから上三角成分または下三角成分についての  $m(m+1)/2$  個の独立した式が得られ，

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_1 + \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_1 \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_2 + \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_m + \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_2 + \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_3 + \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_m + \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{K}_T \phi_m + \phi_m^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \phi_1^T \mathbf{M} \phi_1 \omega_1^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \phi_2^T \mathbf{M} \phi_2 \omega_2^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{M} \phi_m \omega_m^2 \end{array} \right\} \quad (81)$$

のように求まる．また，剛性行列  $\mathbf{K}_T$  は対角行列であるから，式(81)の左辺を 1 要素について展開し，未知数  $k_i$  ( $i=1\sim n$ ) についてまとめると既知の係数行列  $\Psi_T$  と未知のばね分布ベクトル  $\mathbf{k}$  との積となる．

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_1 \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_1^T \mathbf{K}_T \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_2 \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_2^T \mathbf{K}_T \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{K}_T \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{1,1}^2 & \phi_{1,2}^2 & \cdots & \phi_{1,n}^2 \\ \phi_{1,1}\phi_{2,1} & \phi_{1,2}\phi_{2,2} & \cdots & \phi_{1,n}\phi_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \phi_{1,1}\phi_{m,1} & \phi_{1,2}\phi_{m,2} & \cdots & \phi_{1,n}\phi_{m,n} \\ \hline \phi_{2,1}^2 & \phi_{2,2}^2 & \cdots & \phi_{2,n}^2 \\ \phi_{2,1}\phi_{3,1} & \phi_{2,2}\phi_{3,2} & \cdots & \phi_{2,n}\phi_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \phi_{2,1}\phi_{m,1} & \phi_{2,2}\phi_{m,2} & \cdots & \phi_{2,n}\phi_{m,n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \phi_{m,1}^2 & \phi_{m,2}^2 & \cdots & \phi_{m,n}^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{Bmatrix} \\
& = \Psi_T k
\end{aligned} \tag{82}$$

同様に式(81)の左辺の  $\mathbf{K}_\tau$  の項を係数行列  $\Psi_\tau$  と曲げ剛性分布ベクトル  $\tau$  との積に整理する。

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_1 \\ \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_1^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_2 \\ \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_2^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \\ \hline \vdots \\ \hline \phi_m^T \mathbf{K}_\tau \phi_m \end{Bmatrix} = \frac{1}{l^2} \begin{Bmatrix} \left\{ \phi_{1,1} \right\}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{1,1} \right\} \\ \left\{ \phi_{1,2} \right\} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{1,2} \right\} \\ \left\{ \phi_{1,3} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{1,3} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \phi_{m,1} \right\}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,1} \right\} \\ \left\{ \phi_{m,2} \right\} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,2} \right\} \\ \left\{ \phi_{m,3} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,3} \right\} \\ \vdots \\ \left\{ \phi_{m,n-2} \right\}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,n-2} \right\} \\ \left\{ \phi_{m,n-1} \right\} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,n-1} \right\} \\ \left\{ \phi_{m,n} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \phi_{m,n} \right\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{n-2} \end{Bmatrix} \\
& = \Psi_\tau \tau
\end{aligned} \tag{83}$$

式(82)と式(83)を式(81)に代入し、右辺の既知ベクトルを  $k_\Psi$  とすると

$$[\Psi_T \quad \Psi_\tau] \begin{Bmatrix} k \\ \tau \end{Bmatrix} = k_\Psi \tag{84}$$

となる。最終的に式(78)と式(84)を次式のようにまとめることで未知数  $2n-2$  個に対し  $m(m+1)/2+nm$  個の式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Phi_T & \Phi_\tau \\ \Psi_T & \Psi_\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_\Phi \\ k_\Psi \end{Bmatrix} \quad (85)$$

式(85)を最小二乗法で解けばばね分布と曲げ剛性分布を求めることができる。式(85)の左辺における係数行列を  $\mathbf{A}$ 、未知ベクトルを  $\mathbf{x}$ 、右辺の既知ベクトルを  $\mathbf{b}$  とすると

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (86)$$

で表され、最小二乗法は  $\mathbf{A}$  の擬似逆行列  $\mathbf{A}^\dagger$  を用いて

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} \quad (87)$$

$$\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (88)$$

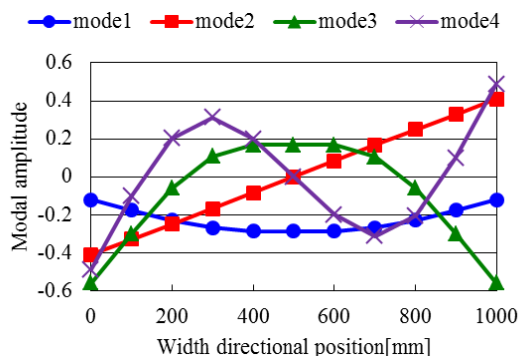
となる。また、式(87)のかわりに打ち切り特異値分解法を適用してもよい(在原他, 2012)。

#### 6.4. 提案手法の FEM 解析結果への適用

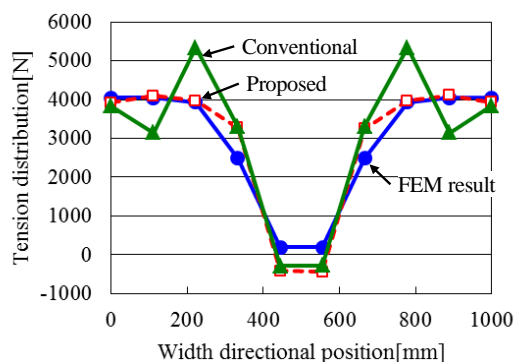
図 6-6 と図 6-7 に各ひずみ分布の FEM 固有値解析結果と張力分布を同定した結果を示す。図 6-6 は中伸びのある薄板、図 6-7 は耳波のある薄板の結果である。図 6-6 (a) は中伸び薄板の幅方向の 1 次から 4 次の振動モードで、図 6-6 (b) は振動モードと固有振動数より張力分布を同定した結果である。図 6-6 (b) の張力分布では中伸び薄板であるため板幅方向中央部の張力が下がる分布となる。同定結果は張力分布のみを同定する従来法と張力分布と曲げ剛性分布を一括同定する提案手法の二通りを示す。図 6-6 (b) の結果より提案した手法では同定結果が FEM 解析結果に近づくことが分かる。同様に図 6-7 (a) は耳波薄板の幅方向の 1 次から 4 次の振動モードで、図 6-7 (b) は張力分布の同定結果である。図 6-7 (b) においても提案手法の同定値の方が FEM 解析結果に近づいており、中伸びと耳波のどちらの同定結果も提案手法は FEM で算出された張力分布とよく一致した。これらの結果より剛性分布も含めた同定を行うことで張力分布の同定精度が大幅に改善することが明らかとなった。

なお、同様の同定計算を FEM 解析で実行する場合、3 次元の薄板モデルで張力分布と剛性分布を少しずつ変化させて非線形性静解析と固有値解析を繰り返し、固有振動数と振動モードが実測値と解析値とで一致するような張力分布を求めなければならず多大な計算コストを要する。一方、提案手法は自由度が縮小された 2 次元の簡易モデルを

使用し、その運動方程式に基づく数式計算により張力分布を直接算出できるため FEM 解析や繰り返し計算は不要である。これにより提案手法は従来法と比較して同定計算コストを大幅に低減でき、実ラインにおいて時々刻々と変化する張力分布のオンライン測定にも適用可能な技術となった。

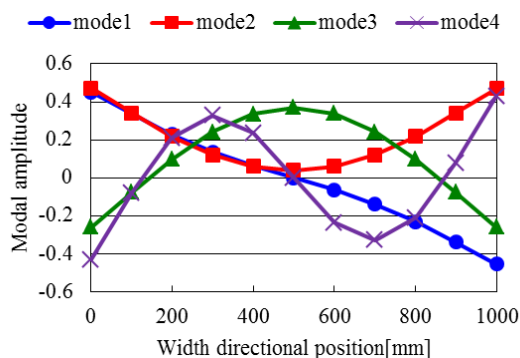


(a) Mode shape

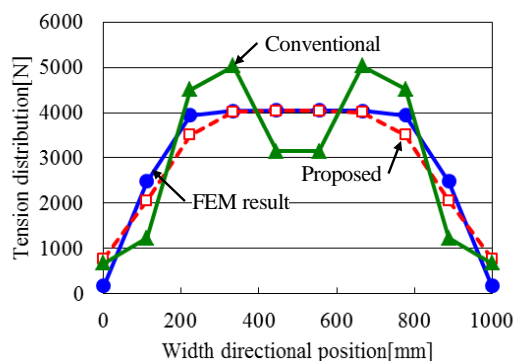


(b) Identification results of tension distribution

図 6-6 Modal analysis and identification results of center buckled thin plate FEM model. (a) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 6.55 Hz (blue), 7.94 Hz (red), 10.8 Hz (green) and 17.8 Hz (violet), (b) Identification results of center buckled tension distribution. The proposed method result well corresponded to the FEM results.



(a) Mode shape



(b) Identification results of tension distribution

図 6-7 Modal analysis and identification results of edge buckled thin plate FEM model. (a) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 4.94 Hz (blue), 5.57 Hz (red), 8.95 Hz (green) and 16.9 Hz



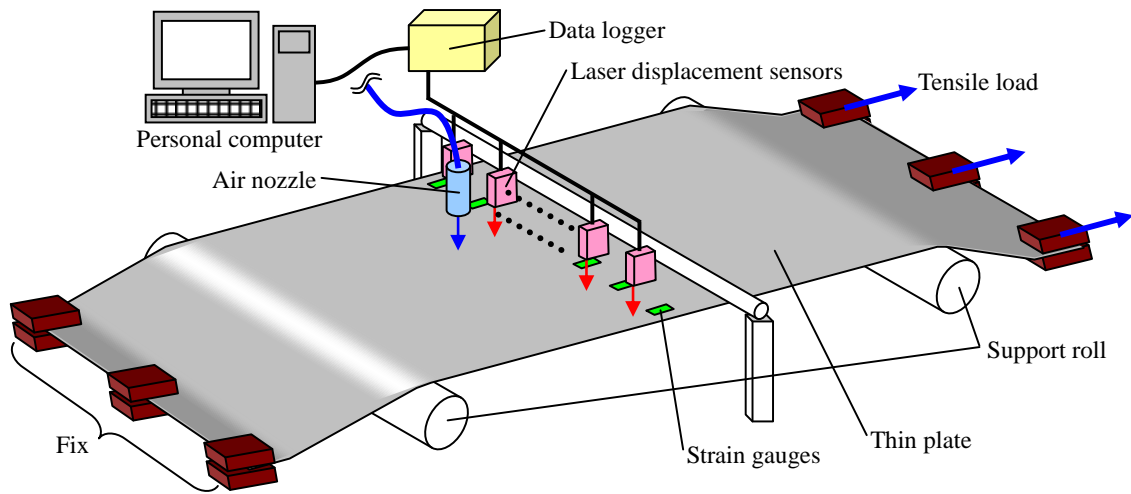
(violet) , (b) Identification results of edge buckled tension distribution. The proposed method result well corresponded to the FEM results.

## 6.5. 提案手法の実験結果への適用

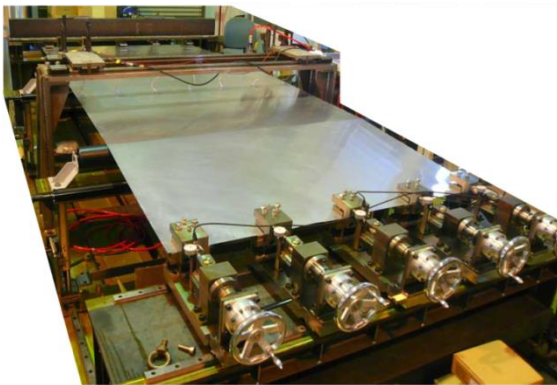
### 6.5.1. 実験装置

本研究の実験装置の概要を図 6-8 に示す. 測定対象である薄板は 2 本のロールで支持されており, 薄板長手方向の板端部の片方は土台に固定されたクランプで固定し, もう片方のクランプは張力が負荷できるようにねじ機構で長手方向に可動な構造とした. 薄板は支持ロールの中央付近に設置したエアーノズルから噴射される圧縮空気により非接触で加振され, その際の板振動を幅方向に配列した複数のレーザ変位計で計測した.

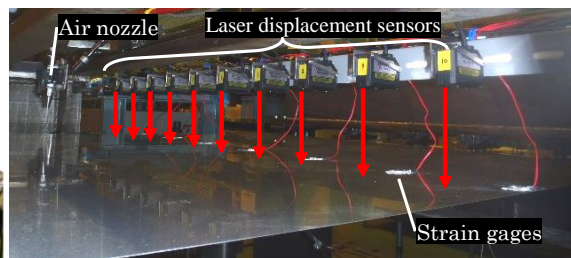
図 6-9 に計測システムの構成を示す. エアー加振では発信器から電磁弁を ON/OFF するための矩形波を出力し, 増幅器により増幅して電磁弁を駆動する. 電磁弁には工場エアーが供給されており, 加振信号に従ってパルス状の圧縮空気を噴射し, 加振周波数をスイープさせながら板の振動モードを励起させた. レーザ変位計からの板振動計測値はアナログ電圧信号として加振信号とともにデータロガーでパーソナルコンピュータに取り込んだ. スイープ加振の周波数は 5~50Hz, スイープ時間は 4 秒, 計測のサンプリング周波数は 1000Hz とした. 本条件により計測された振動データに対して 128Hz のリサンプリング処理を適用し, モード解析には ERA 法<sup>(18)</sup>を用いた. このように薄板の固有振動数と幅方向の振動モードを測定し, 得られた固有振動数と振動モードから板幅方向の張力分布を同定した. また, 張力分布同定値の妥当性を検証するために, ひずみゲージを幅方向に複数枚貼り付け薄板で発生している応力分布を計測した.



(a) Overview of test equipment



(b) Photograph of test equipment



(c) Experimental set up of laser displacement sensors

☒ 6-8 Overview and photographs of test equipment. It consists of the laser displacement sensors and the strain gauges. The laser displacement sensors are aligned in the width direction of aluminum thin plate and the strain gauges are used for stress distribution measurement. The aluminum thin plate is excited by blast air using the solenoid air valve and nozzle.

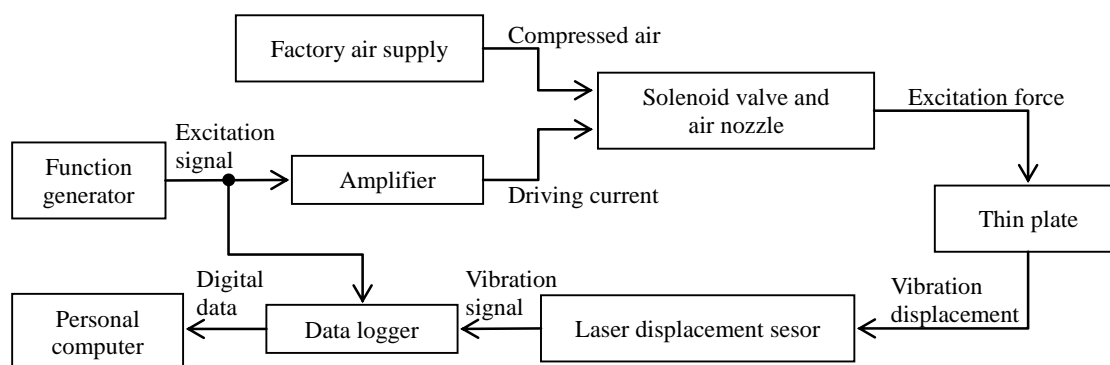


図 6-9 Measurement system configuration includes personal computer to calculate modal analysis and tension distribution, solenoid valve and laser displacement sensors. Data logger is used for data acquisition and the function generator outputs the excitation signal.

### 6.5.2. 実験条件

測定対象は既報の論文<sup>(17)</sup>で適用してきた厚さ 0.24~0.3mm よりも厚い 1.0mm のアルミ薄板を用いた。鋼板ではなくアルミ薄板としたのはサンプル質量が軽くなり実験上の取り回しが容易になるためであり、同じ材質でも厚さの変更により曲げ剛性を高くできることから検証に支障はないと判断した。レーザ変位計による板振動測定点は幅方向に 10 箇所とし、板の両端から 10 mm 内側の範囲で等間隔に配置した。また、ひずみゲージは幅方向に 7 箇所設置し、レーザ変位計と同様に板の両端から 10 mm 内側の範囲で等間隔に貼り付けた。なお、解析条件に相当する中伸びまたは耳波などの形状不良のある板を入手することが困難であったため、今回は入手可能な薄板サンプルにて実験適用を行い中伸びまたは耳波への適用については今後の課題とした。

### 6.5.3. アルミ薄板の振動特性計測結果と張力分布同定結果

図 6-10 にアルミ薄板の測定条件を示す。アルミ薄板の寸法は板厚 1.0 mm, 板幅 1000 mm でロール間隔を 2000 mm とし、負荷張力が 10kN となるよう可動側クランプに張力を負荷した条件で計測を行った。図 6-11 (a)はエアー加振時に各レーザ変位計で測定した板振動の FFT 結果である。図 6-11 (b)は ERA 法によって求めた 1 次から 3 次までの板の幅方向振動モードであり、これらの結果を用いて張力分布の同定を行った。

図 6-12 に図 6-11 (b)の計測結果を用いて張力分布を同定した結果を示す。なお、図 6-12 では検証用ひずみゲージの測定値にアルミのヤング率 70 GPa を乗じた値を応力分布とし、比較のため張力分布同定結果も応力値に換算した値を示した。また、張力分布の同定は既報の論文（在原他，2013）にて提案した簡易流体力計算法による付加質量を用いた。図 6-12 (a)よりひずみゲージによる応力分布測定値と提案手法の同定結果がよく一致していることがわかる。それに対し、従来法による同定値は分布が大きくなっており、ひずみゲージによる計測値との差が大きい結果となった。図 6-12 (b)に同定した張力分布を元に局所的な張力値を幅方向に積分して算出した総張力を示す。提案手法の同定値は付加張力であるロードセル計測値の 10k N と近い値となり、従来法よりも精度が改善した。

図 6-12 (a)において従来法と提案手法の同定結果を比較すると特に幅方向位置 0mm における応力同定値に差が生じている。その原因として従来法では張力のばね分布のみを同定しているのに対し、提案手法は曲げ剛性分布と張力ばね分布の両方を同定していることが寄与したと考えられる。従来法では平坦形状の板を仮定し簡易モデルの曲げ剛性値を寸法とヤング率から算出した値で決め打ちしているため、板の断面二次モーメントが変化するような曲がりや反り、板厚変動などが存在した場合にモデルと現物との曲げ剛性の差異が張力同定誤差として現れる。一方、提案手法は曲げ剛性も同定対象であるためモデルと現物との曲げ剛性に差異があっても張力分布の同定誤差として現れにくく精度の改善につながったと考えられる。さらに、提案手法による同定値と実測値を詳しく比較すると板端において両者にずれがみられる。図 6-12 (a)の実測値の応力は幅方向にほぼ一定値となるような分布であり、例えば FEM 解析結果の振動モードのように理想的なモード情報であれば 1 次モードのみでも同定可能である。しかし、実験では振動モードの測定精度が同定結果に影響するため、3 つのモードを使用しても実測値と同定結果の分布にずれが生じている。特に板厚 1mm の場合、板自体の質量が大きく剛性も上がり振動モードが励起されにくくなるため、同定精度を改善するためには加振力やスイープ時間、加振位置の調整などにより振動モード測定精度を改善する必要があると考えられる。

また、本実験においては加振周波数を 5~50Hz に設定し、1 次~3 次のモードを同定に使用した。加振周波数の下限 5Hz は実機において標準的な通板張力が付加されている場合に 1 次の固有振動数が 5Hz を下回ることはなく、上限の 50Hz はエア-電磁弁の応答速度による制約で設定している。板の寸法や張力に依存するが本周波数範囲により

1次から3次または4次程度までモードが測定可能である。このような機器構成上の制約および張力同定可能なモード数が得られることから実用上妥当なパラメータ設定と判断した。

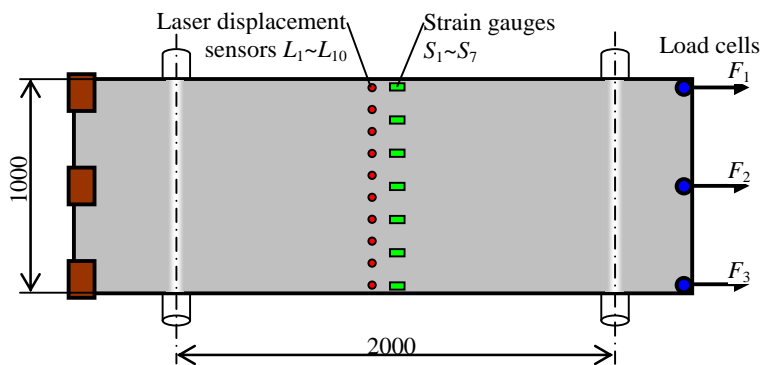
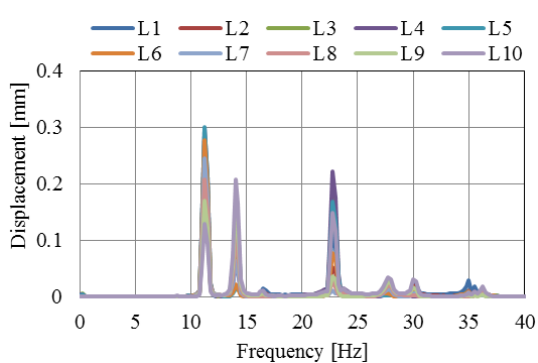
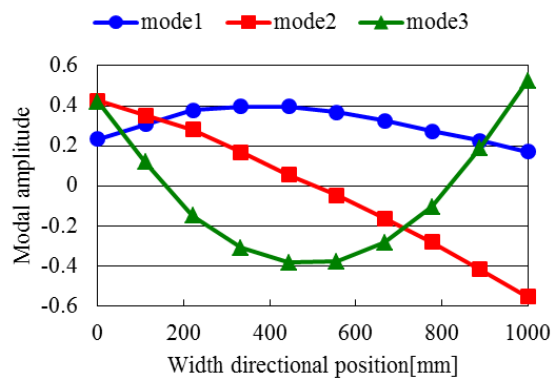


図 6-10 Measurement condition of flat aluminum thin plate.



(a) FFT result of vibration



(b) 1st~3th mode shape

図 6-11 Measurement results of vibration characteristics of aluminum thin plate. (a) FFT result of sweep excitation, (b) the mode shapes of up to fourth order from the first order in the width direction of thin plate that is exist in the 11.3 Hz (blue), 14.0 Hz (red) and 16.5 Hz (green).

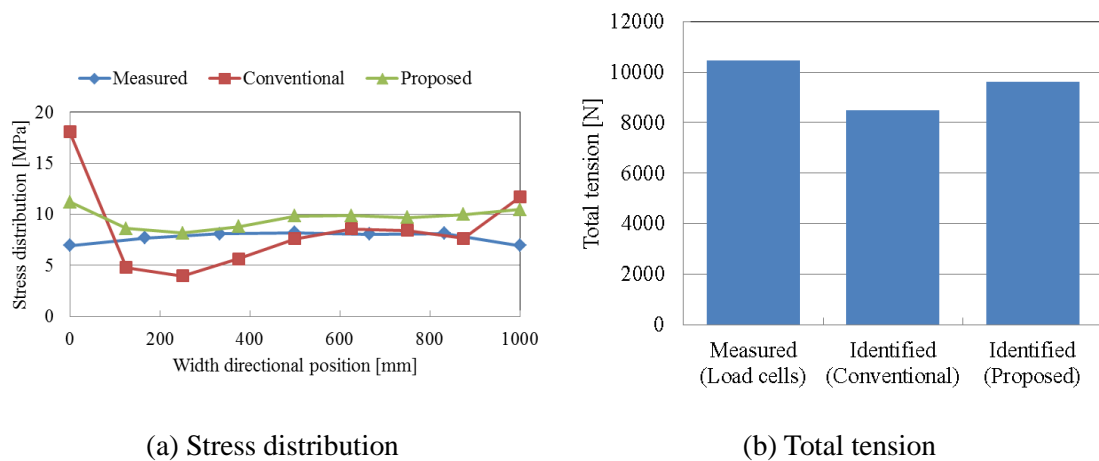
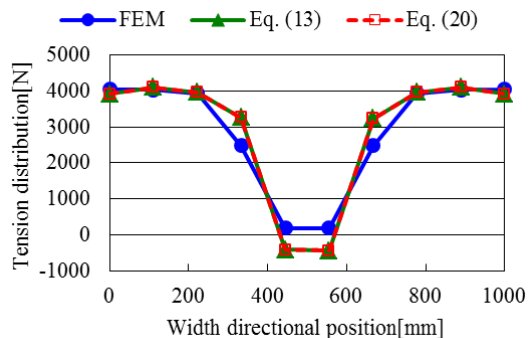
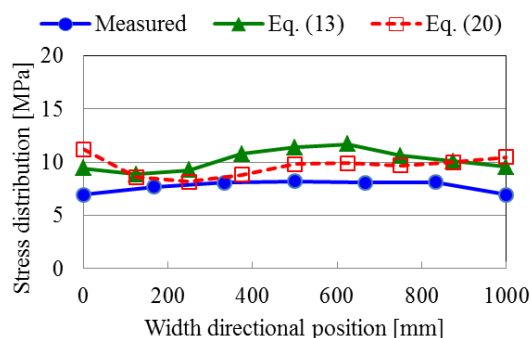


図 6-12 (a) Identification results of stress distribution and (b) total tension of aluminum thin plate. The comparisons of cases with and without the batch identification of stiffness distribution present results in (a) and (b). It comes out in good agreement with the measurement results and proposed identified results. In contrast, the big difference is occurred in conventional identification results that does not take into account the stiffness distribution.

ところで、式(20)の $\Phi$ に関する式と $\Psi$ に関する式は、固有モード行列が左側から掛かっているか否かの違いであり本質的には同じようにもみえる。そこで、提案手法である式(20)にて同定した場合と式(13)の $\Phi$ に関する式のみで同定した場合との結果を比較した。図 6-13 (a)に示すとおり FEM 解析結果に適用した場合はほぼ同じ同定結果となるのに対し、図 6-13 (b)に示すように実験結果に適用した場合は両者の同定結果に差が生じた。この理由として同定に用いた固有振動数と振動モードにほとんど計算誤差のない FEM 解析結果では $\Phi$ に関する式と $\Psi$ に関する式は本質的に同じためと考えられる。しかし、実験結果のように振動特性に測定誤差が含まれる場合、モードの直交性が確保されていない場合などにおいては $\Phi$ に関する式と $\Psi$ に関する式はそれぞれ局所項（振動モード）と全体項（固有値、直交性）に関する異なる情報を持つと考えられる。しかしながら、実際のところ図 6-13 (b)における式(13)および式(20)の結果に大きな差はなく、どちらの方が有利であるかは今後より多くの実験データで比較して考察していく必要があると思われる。なお、式(19)のみの同定では未知パラメータの数に対して式の数が少なすぎることから妥当な解が得られず結果は省略した。



(a) Identification results of simulation



(b) Identification results of experiment

図 6-13 同定結果のシミュレーション (a) と実験 (b)。実線緑色線は Eq. (13) による同定結果を示し、破線赤色線は Eq. (20) による同定結果を示す。 (a) の結果は Eq. (13) と Eq. (20) がほぼ一致しているが、 (b) の結果は両者の間にわずかな差が生じている。

## 6.6. 結言

本章では、張力分布と曲げ剛性分布を一括同定できる張力分布同定理論を開発し、鋼板の FEM 解析およびアルミ薄板の実験に適用することで以下の結果を得た。従来の張力同定理論を発展させ、固有振動数と振動モードから板幅方向の張力分布と曲げ剛性分布を未知数として一括同定できる理論を開発した。開発した同定手法を張力が付加されたひずみのある鋼板の FEM 解析結果に適用し、従来法と比較して同定精度が大幅に改善されることを示した。本同定手法を厚さ 1.0mm のアルミ薄板に実験適用し、高精度な張力同定が可能であることを実証した。以上の結果より張力分布と曲げ剛性の一括同定手法の有効性を示した。また、本研究により振動法による張力分布同定技術の適用範囲をアルミ薄板から鋼板まで広げられる展望が得られ、本技術の工業的価値を明らかにした。

## 第7章 結論

本研究は、鋼板やアルミ板などの薄板製造分野における形状品質の向上のため、振動法により薄板幅方向の張力分布を同定可能な理論を構築するとともに、本同定理論を実ラインに通板される薄板に適用してひずみ形状のオンライン測定技術を開発することを目的として実施したものである。

第2章では、幅方向にひずみ分布を有する薄板に対して長手方向に張力を付加した場合、ひずみ分布に対応した張力分布が発生することに着目した簡易モデルを考案した。本モデルにおいては薄板を幅方向に短冊状に分割したモデル化を発想することで、張力分布を板面上に作用する幾何剛性分布と見なし、集中質量と慣性モーメントおよび曲げ剛性と張力分布としてのばね分布を有する多自由度振動系としてモデル化した。そして、簡易モデルの運動方程式に基づき、簡易モデルの固有振動数と幅方向の振動モードと張力分布の関係式を導出することで、与えられた固有振動数と幅方向の振動モードより張力分布を同定する新たな理論を提案した。本同定理論の妥当性を検証するために有限要素法を用いてひずみ形状を有するアルミ薄板の解析を実施した。板表面上に形状不良を再現した波状のひずみ形状を与えた有限要素モデルを作成し、第一段階として非線形静解析によりひずみ形状が付加張力によって引き伸ばされたことで発生する張力分布を再現した。第二段階として非線形性解析で得られた張力分布が幾何剛性として寄与した条件で固有値解析を実施し、張力分布に対応した固有振動数と振動モードを算出した。本解析により得られた固有振動数と幅方向の振動モードに張力同定理論を適用して張力分布を同定し、有限要素法により得られた張力分布の解析結果と理論による同定結果とを比較した。張力分布の解析結果と同定結果は良く一致することを確認し、本手法の妥当性を検証した。

第3章では、板厚が薄く幅広な薄板の振動特性が薄板の周囲に存在する空気の付加質量の影響を大きく受けることを明らかにし、第2章で提案した理論を改良した空気付加質量を考慮した張力同定手法を提案した。薄板の振動特性に対して空気付加質量が与える影響について、有限要素法による薄板の振動解析と仮想質量法による空気付加質量のモデル化とを用いて数値解析により予測した。本解析により、空気の付加質量は薄板の見かけの質量を増加させる方向に作用し、振動特性としては固有振動数が低下するだけでなく、幅方向の振動モードも変化すること示した。また、付加質量の影響を考慮していない張力同定理論では同定精度が大幅に低下することについて明らかにした。このよ



うな課題に対して、仮想質量法により算出された付加質量分布を用いて張力同定理論を付加質量の影響を考慮した理論に発展させることで、同定精度を大幅に改善する方法を提案した。さらには、構造物の平面上に作用する流体力を簡易的に計算する手法を応用して、仮想質量法に比べて、より簡便で高速な付加質量の簡易計算法を確立し、本技術の実用化に向けた改良を加えた。

第4章では、前章までに提案した同定理論の有効性を実験的に検証するために、薄板の長手方向に張力を付加できる張力負荷装置を製作し、実際にひずみ形状を有するアルミ薄板を用いて実ラインを模擬した実験装置を構築した。本実験装置では板の振動特性を計測するため電氣的な加振信号と高速エアーマグネットを用いて、薄板に対して圧縮空気をパルス状に噴射していた振動を励起し、薄板の幅方向に配列した複数のレーザ変位計により板振動を計測する構成とした。測定した振動波形に対して実験モード解析法を適用し、張力負荷状態の薄板の固有振動数と板幅方向の振動モードを求め、実験的に得られた振動特性に提案手法を適用して張力分布を同定した。また、同定結果の妥当性を検証するために板表面にひずみゲージを貼り付け引っ張り応力を直接測定し、測定値から換算した張力分布と同定値とを比較した。これらの比較をひずみ形状が異なる3種類のアルミ薄板に対して実施し、同定結果とひずみゲージの計測結果とが対応することを確認できたことから、本技術の有効性を実験的に示した。

第5章では、実ラインにおけるオンラインでの張力分布の測定を実現するために、上記の実験技術に部分空間法的一种である Eigensystem realization algorithm (ERA)法に基づく実験モード解析技術を組み合わせ、短時間の振動データから逐次モード解析を行って張力分布を同定する技術を完成させた。実ラインに測定装置を設置するにあたって適切な支持ロール間隔と通板張力が作用する場所を選定し、レーザ変位計とエアーマグネットによる張力分布のオンライン測定方法とその実験結果について示した。実ラインでの実験では薄板のひずみ状態の変化を開発技術で捉えられるかの検証を実施した。実際の薄板製造プロセスでひずみ矯正装置として使用されるテンションレベラと呼ばれる設備を使用し、ひずみ状態を変化させた測定実験を実施した。まず、ラインに冷間圧延後の比較的状態が悪い薄板を通板して張力分布を測定して、ひずみ矯正前の張力分布を測定した。その次に、テンションレベラに通板してひずみ矯正を行い同じコイルを本研究で開発したひずみ測定装置が設置されたラインに再通板することで、ひずみ矯正後の張力分布を測定した。ひずみ矯正前と矯正後の張力分布を比較し、ひずみ矯正前の薄板は圧延時の不均一な引き伸ばしによるものと思われる大きな偏張力が発生してい

るのに対し、テンションレベラによるひずみ矯正後は板幅方向の伸び差が緩和されて偏張力が大幅に減少することを明らかにした。本実験により実ラインにおいても開発技術により薄板製品のひずみ形状を評価可能なことを実証した。

第6章では、これまでに述べた張力分布同定理論の検証が主にアルミ薄板に対して行われてきたのに対し、測定対象を鋼板まで可能になるように開発技術の適用範囲の拡大を実施した。本検討においては剛性の高い材料では張力を付加してもひずみ形状が引き伸ばしきれずに波形状として残ることを有限要素法による解析で検証し、張力分布の同定精度が大幅に低下する問題があることを示した。張力同定に用いる簡易モデルの曲げ剛性値は平坦な薄板であるという仮定であるため、仮定と異なる剛性値に対して張力分布を同定するため大きな同定誤差が生じることを明らかにした。このような問題に対し、簡易モデルの曲げ剛性の値を未知数として張力同定理論を再構築し、張力分布と曲げ剛性分布とを一括して同定する新たな理論を提案した。本理論を有限要素法による解析結果に適用し、鋼板に対する同定精度が大幅に改善することを示した。最後に、これまでに評価したアルミ薄板の4倍の板厚を有する比較的曲げ剛性の高いアルミ板を用いて張力負荷装置による実験検証を行い、本技術の有効性を示した。

以上のように、本研究では振動法を用いた張力分布同定技術により、薄板の固有振動数と幅方向の振動モードから張力分布を同定できることを明らかにし、解析および実験による有効性の検証と実ラインへの適用により本技術の実用性を示した。製鉄やアルミ・銅などの金属圧延分野において、板歪形状の詳細な把握とそれによる形状品質の向上は現在においても重要な技術課題の一つであり、本研究はその課題克服に向けての一役を担う研究になり得る。また、薄板製造分野において、振動技術により形状品質評価技術を実用化した例はほとんどなく、振動法による張力分布同定理論を確立できたことから、金属に限らず製紙や樹脂フィルムなどの帯状体への適用範囲の拡大、帯状体の張力分布と蛇行挙動の解明による通板制御技術の向上など、本分野のさらなる発展が期待される。ただし、本研究で提案した張力同定技術は測定精度の向上や測定値を製造プロセスの改善につなげるシステムの構築など、多くの課題が残されているのが実情である。開発した技術の実ラインへの適用を進め、実製品の品質向上につながる提案につなげていくことが今後の研究課題である。

## 謝辞

本研究をまとめるにあたり、終始懇切丁寧にご指導いただきました高知工科大学 井上喜雄名誉教授に感謝申し上げます。先生には研究開発のアイデアやアドバイスをいただくなど大変お世話になりました。先生の温かいご指導と激励のおかげで研究活動を進めることができました。

また、高知工科大学 岡宏一教授、高知工科大学 園部元康助教には本研究をまとめるに際して有益なご助言とご指導を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

## 参考文献

- (1) 安部可治, 長尾幸男, 浜崎芳治, 白石疆, “板圧延の理論と実際”, 日本鉄鋼協会, (1984), pp. 264-265.
- (2) 松井健一, 山本章生, 橘秀文, 熱間圧延用平坦度計の実用化, The Iron and Steel Institute of Japan (1988), pp.1817-1823.
- (3) Dr Pär Kierkegaard, Msc Anders Hedberg, Optical Strip Flatness and Shape Measurement in Hot Strip Mills
- (4) 公開特許公報, 昭 61-17320
- (5) 上田宏樹, 坂谷亨, 原田宗和, 宇津野秀夫, “振動法による非接触板張力計測技術”, 神戸製鋼技報, Vol. 56, No. 1, (2006), pp. 59-63.
- (6) 長松昭男, ”モード解析”, 倍風館, (1985), pp. 56-57.
- (7) 三澤正吉, 狼嘉彰, ”特異値分解のシステム同定への適用”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 65, No. 634(1999), pp. 2235-2242.
- (8) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, “振動法による薄板の張力分布同定技術の開発”, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 78, No. 787(2012), pp. 812-825.
- (9) 杉本理恵, 岡田徹, 井上喜雄, 加藤稔, 杉本明男, 上田宏樹, ”圧縮性流体への音響放射による付加質量および付加減衰に関する研究”, 日本機械学会 D&D'97 講演論文集, No.97-10-1(1997), pp. 89-92.
- (10) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (空気の付加質量効果を考慮した張力分布同定法), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 79, No. 803 (2013), pp.2424-2437.
- (11) 細川晴行, 高橋俊充, 上杉憲一, 田中雅人, 板形状検出装置(FI)／自動形状制御装置(AFC), 神戸製鋼技報, Vol.59, No.3 (2009), pp.61-65.
- (12) 佐藤秀紀, 谷口匡, 岩田佳雄, 弾性固定はりの固有振動数測定による軸力推定, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 53, No. 492 (1986), pp.1629-1635.
- (13) 宮下剛, 阿部雅人, 藤野陽三, ピエゾインピーダンス法による梁の張力同定, 土木学会論文集, No.710 (2002), pp.373-384.
- (14) 大嶋啓介, 河村隆, 外乱オブザーバを用いた張力推定によるメカトロガラス紡の高速化, ロボティクス・メカトロニクス講演会講演概要集 (2008), 1P1-A22, pp.1-3.
- (15) 吉元怜毅, 三田彰, 森田高市, 振動モードとセンサ特性を考慮した構造物の並列処

- 理型損傷同定, 日本建築学会構造工学論文集 B, Vol.48 (2002), pp.487-492.
- (16) 長尾豊, 望月隆史, 海老澤弘道, 渡部正広, 小山和秀, 姫野信幸, 実車状態でのサスペンションブッシュ剛性同定手法の開発, 自動車技術会学術講演会前刷集 (2013)
- (17) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布同定技術のアルミ薄板への適用実験), 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 817 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0270.
- (18) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用), 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 831 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.15-00274.
- (19) Juang, J. N. and Pappa, R. S., An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction, J. Guidance, Vol. 8, No. 5 (1985), pp.620-627.
- (20) 在原広敏, 岡田徹, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布と剛性分布の一括同定による精度向上), 日本機械学会論文集, Vol.82, No.843 (2016), DOI: 10.1299/transjsme.16-00172

## 本研究に関連した既発表論文

### 1. 学会論文

- (1) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 78, No. 787 (2012), pp.812-825.
- (2) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (空気の付加質量効果を考慮した張力分布同定法), 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 79, No. 803 (2013), pp.2424-2437.
- (3) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布同定技術のアルミ薄板への適用実験), 日本機械学会論文集, Vol. 80, No. 817 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014dr0270.
- (4) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用), 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 831 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.15-0027.
- (5) 在原広敏, 岡田徹, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布と剛性分布の一括同定による精度向上), 日本機械学会論文集, Vol.82, No.843 (2016), DOI: 10.1299/transjsme.16-00172

### 2. 講演論文および表彰など

- (1) 在原広敏, 岡田徹, 流体力が作用する案内板の振動応答に関する研究, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2009, 講演番号 550
- (2) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2011, 講演番号 96
- (3) 在原広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (空気の付加質量効果を考慮した張力分布同定法), 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2012, 講演番号 U00010

- (4) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布同定技術のアルミ薄板への適用実験), 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2013, 講演番号 U00019
- (5) 在原広敏, 岡田徹, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (実ラインにおけるアルミ薄板製品への適用), 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2014, 講演番号 U00003
- (6) 在原広敏, 岡田徹, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発 (張力分布と剛性分布の一括同定による精度向上), 日本機械学会 Dynamics and Design Conference 2015, 講演番号 U00023
- (7) 日本機械学会奨励賞, 振動法による薄板の張力分布同定技術に関する研究, 第 508 号, 2016

### 3. 学会以外の一般講演および企業技術報など

- (1) 在原 広敏, 岡田徹, 齊藤裕紀, 井上喜雄, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, JSME 関西支部専門部会第 88 期第 1 回, 2012
- (2) 在原 広敏, 薄板生産ラインでの振動法による張力・歪み同定技術, 第 344 回振動談話会, 2012
- (3) 在原 広敏, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, 振動談話会第 1 回若手研究交流会, 2014
- (4) 在原 広敏, 岡田徹, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, R&D 神戸製鋼技報, Vol. 64, No. 2 (2014), pp.74-80.
- (5) 在原 広敏, 岡田徹, 振動法による薄板の張力分布同定技術の開発, 2016 年度ロータダイナミクス研究会総会および第 148 回研究会, 2016