

2019（令和元）年度 卒業論文

制限関数を用いた流束再構築法による不連続流れの計算

2020 年 3 月 9 日

高知工科大学 システム工学群
航空宇宙工学専攻

1200089 田村 北斗

指導教員 荻野 要介

目次

第 1 章 緒論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
第 2 章 数値計算法	3
2.1 1 次元 FR 法	3
2.1.1 支配方程式	3
2.1.2 座標系	3
2.1.3 離散化	4
2.1.4 保存性の確認	6
2.2 2 次元 FR 法	7
2.2.1 支配方程式	7
2.2.2 座標系	7
2.2.3 離散化	8
2.3 新たな制限関数の提案	10
2.3.1 制限修正関数	10
2.3.2 平均制限関数	11

2.3.3 WENO 制限関数	11
第3章 計算結果と考察	13
3.1 1次元線形移流 FR コードの検証	13
3.1.1 コード検証	13
3.1.2 精度検証	14
3.2 2次元線形移流 FR コードの検証	15
3.2.1 コード検証	15
3.2.2 精度検証	16
3.3 制限関数を用いた不連続流れの数値計算	17
3.3.1 制限修正関数	17
3.3.2 平均制限関数	17
3.3.3 WENO 制限関数	18
第4章 結論	19
参考文献	21
謝辞	23

第 1 章

緒論

1.1 研究背景

航空機まわりの流体計算では、複雑形状への適合性と高い計算精度を保持しながらより低い計算コストで実行できる計算コードが必要とされる。形状適合性に優れ、複雑形状まわりの格子生成が容易な非構造格子法の中で、現在広く用いられている計算手法が有限体積法である。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。

しかし、有限体積法はセル境界面の物理量をセル外部の情報（ステンシル）から補間するため、いくつかの問題を持つ。一つは空間精度が低いことである。セル境界面の物理量の補間精度は隣接セルの品質に大きく依存する。そのため、隣接セルの品質が悪い場合、定式通りの計算精度を得ることができない。また、構造格子法のように計算格子が規則的に並んでいるわけではないため、ステンシルの選び方が自明ではない。もう一つの問題は並列化計算に適さないことである。WENO 法[1]などに代表されるように、有限体積法の高次精度化にはより多くのステンシルが必要となり、コンパクト性を失う。そのため、領域分割による並列化において通信コストが高くなり、並列化効率が下がる。従って、有限体積法を用いて航空機まわりの流体計算を行うことは複雑形状への適合性では優れるが、高次精度化や並列化効率に欠点がある。

セル内部に高次精度化のための自由度を持たせることで前述した有限体積法の問題を回避することができる。このような考え方に基づく手法の一つに不連続ガレルキン法 (Discontinuous Galerkin Method, 以下 DG 法)[2]がある。DG 法はセル内の物理量の分布とテスト関数との積のセル体積積分に部分積分を適用し、数値流束により積分境界を表す。従って、DG 法は積分型の保存則を解く。DG 法はセル内部に独立に自由度と基底関数を導入し、セル内部の物理量の分布を自由度と基底関数の線形和として表現する。そのため、セル境界面の物理量はセル内部の情報のみで決まる。一方、自由度と基底関数はセル内に独立に導入

されるため、セル境界面で物理量は不連続となり、数値流束を評価する必要がある。また、DG 法ではセル内に K 個の自由度を導入することで、 $2K - 1$ 次の空間精度を得ることができる。セル外部のステンシルを用いることのない DG 法は高次精度化を行ってもコンパクト性に長け、定式通りの空間精度を得ることができる。セル内部に自由度を導入したことによる計算量の増加はあるが、並列化計算に向く。しかし、時間積分に陰解法を用いる際、一セルあたり自由度の分だけデータ量が倍増し、巨大な逆行列計算が必要となるので、計算コストが著しく高いという欠点を持つ。

Huynh によって考案された流束再構築法[3][4] (Flux Reconstruction Method, 以下 FR 法)は、導入した自由度によるセル内部の物理量分布から、セル内部の流束分布を構築し、セル境界面での数値流束により流束分布を再構築する。再構築された流束分布は計算領域全体で連続となるため、微分可能である。従って、FR 法では微分型の保存則を解くことができる。FR 法は K 個の自由度で $2K - 2$ 次の空間精度を達成し、セル境界面の物理量をセル内部の情報のみで求めることができるため、セル外部のステンシルを用いることなく高い計算精度を得られるコンパクトな手法であると言える。また、セル内部に自由度を導入したことによる計算コストの増加はあるが、時間積分に陰解法を必要としないため、DG 法と比較し、計算精度は劣るが計算コストを削減することができる。

将来的に航空機まわりの圧縮性流動場への適用を考えると、主翼上面に形成される衝撃波面のように微分不可となる不連続面を含んだ大域解を算出する必要がある。不連続分布近傍での不連続検知と数値振動の抑制には大きく分けて、人工粘性と制限関数の二つの方法がある。Cook らが考案した人工粘性の一つである Localized Artificial Diffusivity method (LAD) [5][6]を宮路は FR 法に適用し、衝撃波関連のベンチマーク問題を解いている[7]。また、芳賀らは FR-LAD を航空宇宙工学分野の実践的な問題に適用し、非常に良好な結果を得ている[8]。

1.2 研究目的

本研究では、航空機まわりの圧縮性流体計算に向けた第一歩として、衝撃波を模擬した物理量の不連続分布によって生じる数値振動を制限関数によって抑制することに焦点を置く。線形移流方程式を計算対象として FR 法の計算コード開発とその検証を目的とする。さらに、不連続分布の移流問題を例にとり、FR 法に適した新たな制限関数を提案する。

第2章

数値計算法

2.1 1次元FR法

2.1.1 支配方程式

1次元線形移流方程式を考える.

$$u_t + f_x = 0. \quad (2.1)$$

ここで, f は流束を表し, 流束は移流速度 c と保存量 u の積として与えられる.

2.1.2 座標系

本研究ではルジャンドル多項式の直交性を利用するため, 物理座標系(x)に加えて, $I = [-1, 1]$ の閉区間である一般座標系(ξ)を考える. 一般座標系から物理座標系への変換式は,

$$x(\xi) = x_j + \frac{h_j}{2} \xi. \quad (2.2)$$

ここで x_j はセル E_j の中心座標を, h_j はセル E_j の格子幅を表している. 物理座標系から一般座標系への変換式は,

$$\xi(x) = \frac{2}{h_j} (x - x_j). \quad (2.3)$$

一般座標系での関数 $r_j(\xi)$ を物理座標系のセル E_j で分布する関数 $r_j(x)$ で表すことができ,

$$r_j(\xi) = r_j(x(\xi)) = r_j(x), \quad (2.4)$$

となるので, それぞれの座標系での空間微分は次式の関係になる.

$$\frac{dr_j(x)}{dx} = \frac{2}{h_j} \frac{dr_j(\xi)}{d\xi}. \quad (2.5)$$

2.1.3 離散化

まず、計算領域をセル E_j ($j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$)に分割し、各セル内に K 個の内点（自由度）を導入する．自由度をSolution Point(以下SP)と呼ぶ．セル E_j におけるSPの位置 $x_{j,k}$ ($k = 1, \dots, K$)での保存量を $u_{j,k}$ と表すと、式(2.1)は

$$(u_t)_{j,k} + (f_x)_{j,k} = 0, \quad (2.6)$$

となる．ここで物理座標系 E_j から一般座標系 I へ座標変換する．

$$\xi_k = \xi(x_{j,k}) = \frac{2}{h_j}(x_{j,k} - x_j), \quad (2.7)$$

$$(u_t)_{j,k} + \frac{2}{h_j}(f_\xi)_{j,k} = 0. \quad (2.8)$$

次に流束の空間微分を求める．そのためには連続な流束関数が必要である．線形移流方程式を考えているので、SPでの流束は保存量から求まる．

$$f_{j,k} = cu_{j,k}. \quad (2.9)$$

流束の $K-1$ 次近似関数をラグランジュ補間により求める．

$$f_j(\xi) = \sum_{k=1}^K f_{j,k} \phi_k(\xi), \quad (2.10)$$

$$\phi_k(\xi) = \prod_{l=1, l \neq k}^K \frac{\xi - \xi_l}{\xi_k - \xi_l}. \quad (2.11)$$

図2.1に $K=3$ の場合の上式で求めた流束関数を示す．ここで求めた流束関数はセル境界では不連続であり、不連続流束関数と呼ばれる．

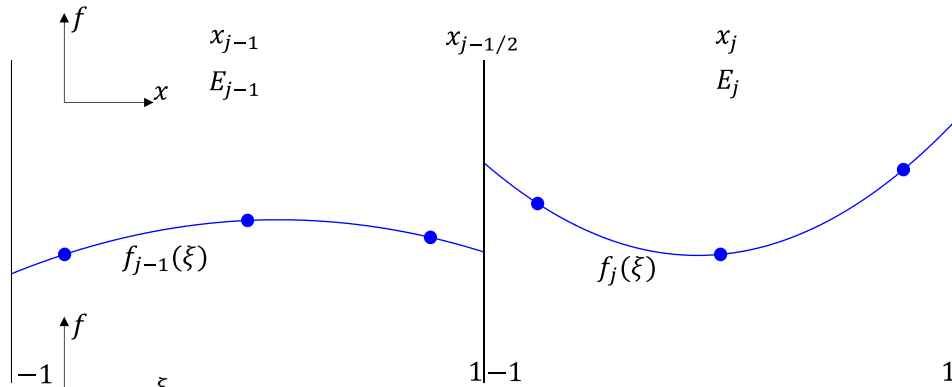


図2.1 不連続流束分布 ($K=3$)

流束関数を連続にするにはセル境界 $x_{j-1/2} (= x_j + \frac{h_j}{2} \times (-1) = x_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{2} \times 1)$ で共通の値を持つ必要がある．まず，式(2.10)と同様に保存量の $K - 1$ 次近似関数をラグランジュ補間により求める．

$$u_j(\xi) = \sum_{k=1}^K u_{j,k} \phi_k(\xi). \quad (2.12)$$

図2.2に $K = 3$ の場合の保存量関数を示す．

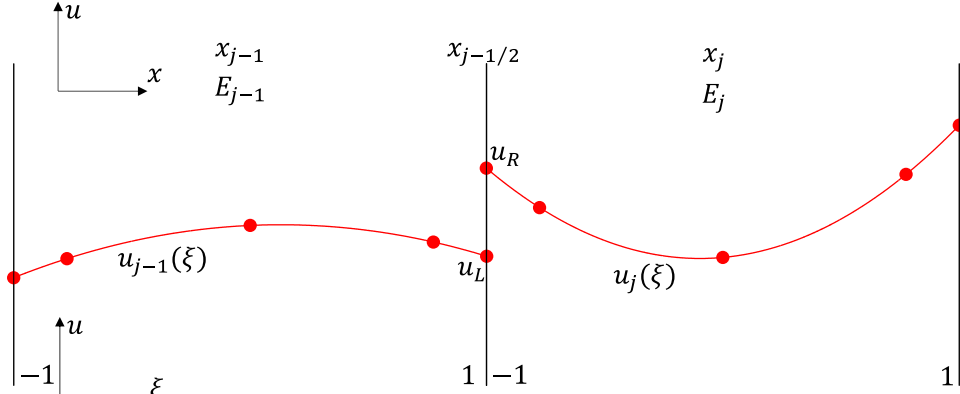


図2.2 保存量分布 ($K = 3$)

セル境界の両側の保存量関数からセル境界 $x_{j-1/2}$ での保存量を外挿する．

$$u_L = u_{j-1}(1), \quad (2.13)$$

$$u_R = u_j(-1). \quad (2.14)$$

添字 L はセル境界左側を，添字 R はセル境界右側を意味する．式(2.9)，(2.13)，(2.14)より，Roe法[9]を用いて数値流束を求めると，

$$f_{upw} = f_{j-1/2,upw} = \frac{1}{2} [f(u_L) + f(u_R)] - \frac{1}{2} |a(\tilde{u})| (u_R - u_L), \quad (2.15)$$

となる．ここで， $a(\tilde{u})$ は次式で表される．

$$a(\tilde{u}) = \begin{cases} \frac{(f(u_R) - f(u_L))}{u_R - u_L} & \text{if } u_L \neq u_R \\ a(u_L) = a(u_R) & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (2.16)$$

セル境界で f_{upw} をとるように不連続流束関数 $f_j(\xi)$ を再構築すると，

$$F_j(\xi) = f_j(\xi) + [f_{j-1/2,upw} - f_j(-1)] g_{LB}(\xi) + [f_{j+1/2,upw} - f_j(1)] g_{RB}(\xi), \quad (2.17)$$

となり，連続な関数となる．図2.3に $K = 3$ の場合の連続流束関数を示す．ここで $g_{LB}(\xi)$ と $g_{RB}(\xi)$ は修正関数と呼ばれ， $g_{LB}(-1) = 1$ ， $g_{LB}(1) = 0$ となる K 次多項式であり， $g_{RB}(\xi) = g_{LB}(-\xi)$ である．

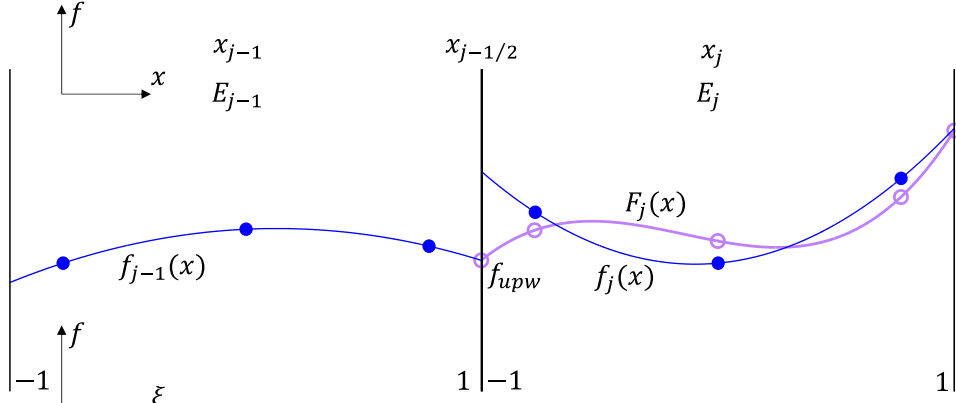


図2.3 連続流束分布 ($K = 3$)

連続流束関数 $F_j(\xi)$ は微分可能であるので,

$$(F_\xi)_{j,k} = (f_\xi)_{j,k} + [f_{j-1/2,upw} - f_j(-1)]g_{LB}'(\xi_k) + [f_{j+1/2,upw} - f_j(1)]g_{RB}'(\xi_k), \quad (2.18)$$

となる.

従って, 式(2.8)を次式のように半離散式で表すことができる.

$$\frac{du_{j,k}}{dt} = -(F_x)_{j,k}. \quad (2.19)$$

式(2.19)に対して, 時間積分を行うことで保存量を時間更新する.

本研究ではSPは $K = 3$ のガウス点を用い, 修正関数 $g_{LB}(\xi)$ には3次右ラダウ関数を用いる. また, 時間積分にはTVD3次ルンゲクッタ法[10]を用いる.

2.1.4 保存性の確認

$u_j(\xi)$ は K 個のSPにより, $K - 1$ 次関数に近似されているとする. SPでの重みを w_k とすると,

$$\int_{-1}^1 u_j(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}, \quad (2.20)$$

と表すことができる. 式(2.20)を一般座標系から物理座標系へ座標変換する.

$$\int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}. \quad (2.21)$$

となる. 式(2.21)の両辺の時間微分を取る.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^K w_k u_{j,k}. \quad (2.22)$$

多少の式変形を行う.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k \frac{du_{j,k}}{dt}. \quad (2.23)$$

式(2.19)より,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = -\frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k (F_x)_{j,k}, \quad (2.24)$$

と変形できる．連続流束関数の空間微分，つまり $K-1$ 次の $(F_x)_j$ に対しても式(2.20)と同様の変形が可能である．

$$\int_{E_j} (F_x)_j(x) dx = \frac{h_j}{2} \sum_{k=1}^K w_k (F_x)_{j,k}. \quad (2.25)$$

式(2.25)左辺を物理座標系から一般座標系へ座標変換する．

$$\int_{E_j} (F_x)_j(x) dx = \int_{-1}^1 (F_\xi)_j(\xi) d\xi. \quad (2.26)$$

式(2.18)より，

$$\int_{E_j} (F_x)_j(x) dx = f_{j+1/2,upw} - f_{j-1/2,upw}, \quad (2.27)$$

となる．式(2.23)，(2.25)，(2.27)より，

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{E_j} u_j(x) dx = f_{j-1/2,upw} - f_{j+1/2,upw} \quad (2.28)$$

よって，セル境界で流束関数が風上流束を取ることで1次元FR法は保存則を満たす．

2.2 2次元FR法

2.2.1 支配方程式

2次元線形移流方程式を考える．

$$u_t + f_x + g_y = 0. \quad (2.29)$$

ここで， f は x 方向流束， g は y 方向流束を表し，各方向の流束は各方向の移流速度 c_x ， c_y と保存量 u の積として与えられる．

2.2.2 座標系

ルジャンドル多項式の直交性を利用するため，物理座標系 (x, y) に加えて， $I \times I = I^2, I = [-1, 1]$ の閉区間である一般座標系 (ξ, η) を考える．一般座標系から物理座標系への変換式は，

$$x(\xi) = x_{i,j} + \frac{h_x}{2} \xi, \quad (2.30)$$

$$y(\eta) = y_{i,j} + \frac{h_y}{2} \eta. \quad (2.31)$$

ここで $(x_{i,j}, y_{i,j})$ はセル $E_{i,j}$ の中心座標を， h_x, h_y はセル $E_{i,j}$ の格子幅を表している．物理座標系

から一般座標系への変換式は,

$$\xi(x) = \frac{2}{h_x}(x - x_{i,j}), \quad (2.32)$$

$$\eta(y) = \frac{2}{h_y}(y - y_{i,j}). \quad (2.33)$$

一般座標系での関数 $r_{i,j}(\xi), s_{i,j}(\eta)$ を物理座標系のセル $E_{i,j}$ で分布する関数 $r_{i,j}(x), s_{i,j}(y)$ で表すことができる.

$$r_{i,j}(\xi) = r_{i,j}(x(\xi)) = r_{i,j}(x), \quad (2.34)$$

$$s_{i,j}(\eta) = s_{i,j}(y(\eta)) = s_{i,j}(y). \quad (2.35)$$

よって, それぞれの座標系での空間微分は次式の関係になる.

$$\frac{dr_{i,j}(x)}{dx} = \frac{2}{h_x} \frac{dr_{i,j}(\xi)}{d\xi}, \quad (2.36)$$

$$\frac{ds_{i,j}(y)}{dy} = \frac{2}{h_y} \frac{ds_{i,j}(\eta)}{d\eta}. \quad (2.37)$$

2.2.3 離散化

計算領域をセル $E_{i,j}(i = \dots, -1, 0, 1, \dots, j = \dots, -1, 0, 1, \dots)$ に分割し, 各セル内に各方向に K 個のSPを導入する. セル $E_{i,j}$ におけるSPの位置 $x_{i,j,k,l}$ ($k = 1, \dots, K, l = 1, \dots, K$)での保存量を $u_{i,j,k,l}$ と表すと, 式(2.29)は

$$(u_t)_{i,j,k,l} + (f_x)_{i,j,k,l} + (g_y)_{i,j,k,l} = 0, \quad (2.38)$$

となる. ここで物理座標系から一般座標系へ座標変換する.

$$(u_t)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_x}(f_\xi)_{i,j,k,l} + \frac{2}{h_y}(g_\eta)_{i,j,k,l} = 0. \quad (2.39)$$

流束の空間微分を得るため, 連続流束関数を構築する. まず, SPにおける流束を保存量から求める.

$$f_{i,j,k,l} = c_x u_{i,j,k,l}, \quad (2.40)$$

$$g_{i,j,k,l} = c_y u_{i,j,k,l}. \quad (2.41)$$

ラグランジュ補間による近似多項式の不連続流束関数を求める.

$$f_{i,j}(\xi, \eta) = \sum_{k,l=1}^K f_{i,j,k,l} \phi_k(\xi) \phi_l(\eta), \quad (2.42)$$

$$g_{i,j}(\xi, \eta) = \sum_{k,l=1}^K g_{i,j,k,l} \phi_k(\xi) \phi_l(\eta). \quad (2.43)$$

式(2.42), (2.43)と同様に保存量の近似関数をラグランジュ補間により求める.

$$u_{i,j}(\xi, \eta) = \sum_{k,l=1}^K u_{i,j,k,l} \phi_k(\xi) \phi_l(\eta). \quad (2.44)$$

ここで, $l = 2$, つまり $\eta = \eta_2$ として η 方向を固定して考える. 不連続流束関数と保存量関数は次式で表される.

$$f_{i,j}(\xi, \eta_2) = f_{i,j}(\xi) = \sum_{k=1}^K f_{i,j,k,2} \phi_k(\xi), \quad (2.45)$$

$$g_{i,j}(\xi, \eta_2) = g_{i,j}(\xi) = \sum_{k=1}^K g_{i,j,k,2} \phi_k(\xi), \quad (2.46)$$

$$u_{i,j}(\xi, \eta_2) = u_{i,j}(\xi) = \sum_{k=1}^K u_{i,j,k,2} \phi_k(\xi). \quad (2.47)$$

このように η 方向を固定すると, ξ 方向は 1 次元問題として捉えられるので, セル境界 $x_{i-1/2}$ ($=$

$x_i + \frac{h_x}{2} \times (-1) = x_{i-1} + \frac{h_x}{2} \times 1$) での保存量は,

$$u_L = u_{i-1,j}(1, \eta_2), \quad (2.48)$$

$$u_R = u_{i,j}(-1, \eta_2), \quad (2.49)$$

と外挿できる. 添字 L はセル境界左側を, 添字 R はセル境界右側を意味する. 式(2.40), (2.41), (2.48), (2.49)より, Roe法[9]を用いて数値流束を求めると,

$$f_{upw} = f_{i-1/2,j,2} = \frac{1}{2} [f(u_L) + f(u_R)] - \frac{1}{2} |a(\tilde{u})| (u_R - u_L), \quad (2.50)$$

$$a(\tilde{u}) = \begin{cases} \frac{(f(u_R) - f(u_L))}{u_R - u_L} & \text{if } u_L \neq u_R \\ a(u_L) = a(u_R) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.51)$$

$$g_{upw} = g_{i-1/2,j,2} = \frac{1}{2} [g(u_L) + g(u_R)] - \frac{1}{2} |a(\tilde{u})| (u_R - u_L), \quad (2.52)$$

$$a(\tilde{u}) = \begin{cases} \frac{(g(u_R) - g(u_L))}{u_R - u_L} & \text{if } u_L \neq u_R \\ a(u_L) = a(u_R) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.53)$$

となる. セル境界で数値流束をとるように不連続流束関数を再構築すると,

$$F_{i,j}(\xi, \eta_2) = F_{i,j}(\xi) = f_{i,j}(\xi) + [f_{upw} - f_{i,j}(-1)] g_{LB}(\xi) + [f_{j+1/2,upw} - f_j(1)] g_{RB}(\xi), \quad (2.54)$$

となり, 連続な関数となる. 同様に y 方向の連続流束関数を構築し, 空間微分を得ることで式(2.39)を次式のように半離散式で表すことができる.

$$\frac{du_{i,j,k,l}}{dt} = -(F_x)_{i,j,k,l} - (G_y)_{i,j,k,l}. \quad (2.55)$$

式(2.55)に対して, 時間積分を行うことで保存量を時間更新する.

本研究ではSPは $K = 3$ のガウス点を用い, 修正関数 $g_{LB}(\xi)$ には3次右ラダウ関数を用いる. また, 時間積分にはTVD3次ルンゲクッタ法[10]を用いる.

2.3 新たな制限関数の提案

FR法では、不連続流束関数 $f(\xi)$ とセル境界の風上流束との差倍された修正関数 $g_{LB}(\xi)$ 、 $g_{RB}(\xi)$ の線形和を取ることで連続流束関数 $F(\xi)$ を得る。しかし、連続流束関数のセル内振動は解の数値振動の原因となる。本研究では、非物理的な数値振動の抑制を目指す新たな試みとして、以下に示す3つの制限関数を考案した。得られた結果について考察し、3.3節にて議論する。

2.3.1 制限修正関数

修正関数を制限することで、連続流束関数のセル内振動を抑制することを考える。

セル境界での不連続検知にはKXRCF不連続検知[11]を用いる。次式の条件を満たすとき、 $F_j(\xi)$ に制限が必要であると判断した。

$$\frac{|f_{j-1}(1) - f_j(-1)|}{\|f_j(\xi)\|} > C_k, \quad (2.56)$$

$$\frac{|f_{j+1}(-1) - f_j(1)|}{\|f_j(\xi)\|} > C_k. \quad (2.57)$$

ここで、 C_k は定数である。

K個のSPを取るFR法では、 K 次関数の修正関数を用いる。本研究では、SPとして3個のガウス点(4次ルジャンドル多項式の根)を用いるので、修正関数 $g_{LB}(\xi)$ は3次右ラダウ関数とする。次式に示すように、 K 次右ラダウ関数 $R_R(\xi)$ は K 次ルジャンドル多項式 $P_K(\xi)$ と $K-1$ 次ルジャンドル多項式 $P_{K-1}(\xi)$ の線形和である。

$$g_{LB}(\xi) = R_R(\xi) = \frac{(-1)^K}{2} (P_K(\xi) - P_{K-1}(\xi)), \quad (2.58)$$

$$P_K(\xi) = \frac{(-1)^K}{2^K n!} \frac{d^n}{d\xi^n} (1 - \xi^2)^n. \quad (2.59)$$

滑らかな領域には、3次多項式の修正関数を用い、不連続を検知したセルには1次多項式の修正関数を用いて連続流束関数 $F(\xi)$ を構築する。図2.4に3次多項式と1次多項式の修正関数 $g_{LB}(\xi)$ を示す。

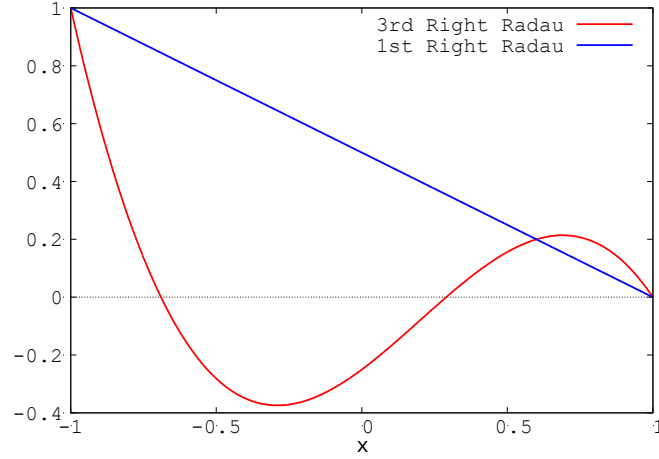


図2.4 3次右ラダウ関数(赤線)と1次右ラダウ関数(青線)

2.3.2 平均制限関数

不連続流束関数を制限することで，連続流束関数のセル内振動を抑制することを考える．平均値を用いた制限を流束関数に行う．

$$\psi = \min(1, \psi_{\min}, \psi_{\max}), \quad (2.60)$$

$$\psi_{\min} = \left| \frac{(1 + \epsilon)F_{\text{mean},\min} - F_{j,\text{mean}}}{F_{j,\min} - F_{j,\text{mean}}} \right|. \quad (2.61)$$

$$\psi_{\max} = \left| \frac{(1 + \epsilon)F_{\text{mean},\max} - F_{j,\text{mean}}}{F_{j,\max} - F_{j,\text{mean}}} \right|. \quad (2.62)$$

ここで， $F_{\text{mean},\min}$ と $F_{\text{mean},\max}$ はそれぞれ自セルと隣接セルの連続流束関数のセル平均値の最小値と最大値であり， $F_{j,\min}$ と $F_{j,\max}$ はそれぞれ自セル内の連続流束関数のSPでの最小値と最大値である． ϵ は定数であり，制限の強弱を表す． ψ を不連続流束関数に掛けることで，セル境界の連続性を失うことなく，セル内の流束関数を制限する．

2.3.3 WENO制限関数

勾配を用いた制限を流束関数に行うことで，連続流束関数のセル内振動を抑制することを考える．高次精度有限体積法として知られるWENO法はセル内の物理量の分布の連続性を微分を用いて定量的に比較し，拡張したステンシルに対して重み付け平均を取る手法である．この考えを制限関数に用いたWENO制限関数[12]がある．

まず，2.2.1節と同様にKXRCF不連続検知を行い，連続流束関数が振動を起こす可能性のあるセルを検知する．ここで，セル E_j で連続流束関数が振動を起こしていると仮定する．隣接セルと自セルの連続流束関数を用いて，各セルの連続流束関数を以下のように修正する．

$$\tilde{F}_l(x) = F_l(x) - \frac{1}{h_j} \int_{E_j} F_l(x) dx + \frac{1}{h_j} \int_{E_j} F_j(x) dx, \quad (l = j-1, j, j+1). \quad (2.63)$$

ここで、自セルでは $\tilde{F}_j(x) = F_j(x)$ となる。式(2.36)で求められた修正連続流束関数を用いて、WENO法と同様に重み付け平均を取ることで、セル E_j での制限された連続流束関数 $F_j^{new}(x)$ を得る。

$$F_j^{new}(x) = \sum_{l=j-1}^{j+1} \omega_l \tilde{F}_l(x). \quad (2.64)$$

式(2.64)より、 $\omega_{j-1} + \omega_j + \omega_{j+1} = 1$ であれば、 $F_j^{new}(x)$ が $F_j(x)$ と同じセル平均値を取ることがわかる。よって、重みは次式のように規格化して与える。

$$\omega_l = \frac{\tilde{\omega}_l}{\sum_{m=j-1}^{j+1} \tilde{\omega}_m}, \quad (l = j-1, j, j+1). \quad (2.65)$$

規格化していない重み $\tilde{\omega}_l$ は次式で表される。

$$\tilde{\omega}_l = \frac{\gamma_l}{(\varepsilon + \beta_l)^2}, \quad (l = j-1, j, j+1). \quad (2.66)$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ として分母がゼロになることを防ぐ。滑らかな領域において、 $\tilde{F}_j(\xi)$ は十分な精度を持っているので、参考文献[12]と同様に自セルの連続流束関数が散逸的にならないよう γ_l を設定する。

$$\gamma_j = 0.998, \quad \gamma_{j-1} = \gamma_{j+1} = 0.001 \quad (2.67)$$

β_l は滑らかさ係数と呼ばれ、各連続流束関数のセル E_j での滑らかさを微分を用い、定量評価する。

$$\beta_l = \sum_{s=1}^2 (h_j)^s \int_{E_j} \left(\frac{d^s}{dx^s} \tilde{F}_l(x) \right)^2 dx. \quad (2.68)$$

連続流束関数 $F_j(x)$ が振動を起こしているセル E_j では、全てのSPにおいて、連続流束関数の値 $F_j(x_{j,k})$ を隣接セルの連続流束関数との重み付け平均により得られた制限連続流束関数の値 $F_j^{new}(x_{j,k})$ に置き換える。数値振動の生じないセル E_j では、 $F_j^{new}(x_{j,k}) = F_j(x_{j,k})$ となる。

第3章

計算結果と考察

3.1 1次元線形移流 FR コードの検証

3.1.1 コード検証

計算領域は x 方向に $[0,1]$ ，格子点数は 50 点，境界条件は周期境界とした．初期条件は次式である．

$$u_{init} = \sin(2\pi x) \quad (3.1)$$

移流速度は $c = 1$ とした．図 3.1 に問題設定を示す．

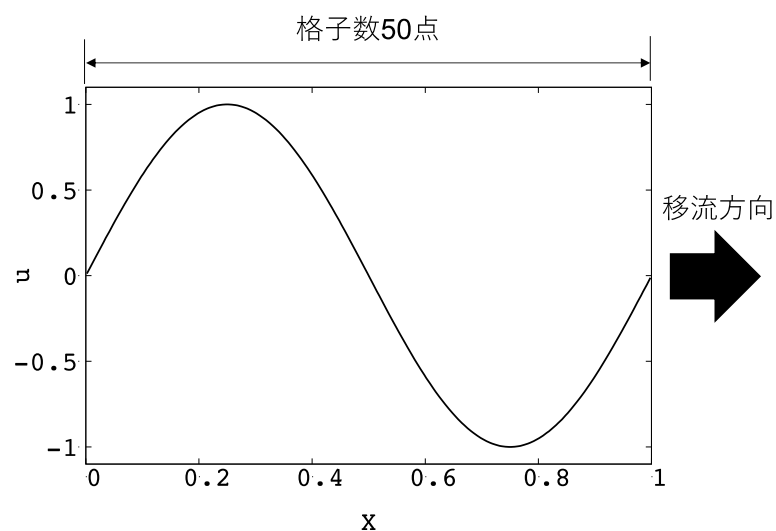


図3.1 正弦波移流問題の問題設定

図 3.2 赤線は 10,000 ステップ時の計算結果を表す。初期条件として与えた正弦波と波形が変化していないことがわかる。10,000 ステップ時の誤差を図 3.2 黒線に示す。解が発散することなく、物理量の移流を解けていることを確認した。

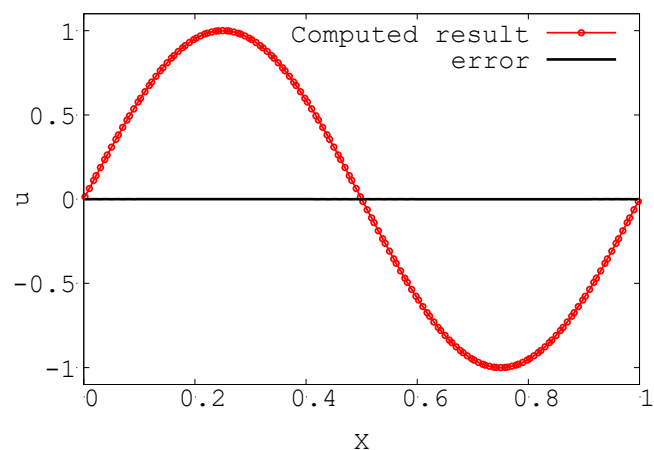


図3.2 10,000ステップ時の計算結果と誤差

3.1.2 精度検証

前項と同様の正弦波移流問題に対して、格子点数が 30 点、60 点、120 点の場合の局所誤差の対数グラフを図 3.3 に示す。3 つの値を用いた最小二乗法による近似直線の傾きから、3.95 次の計算精度を確認した。

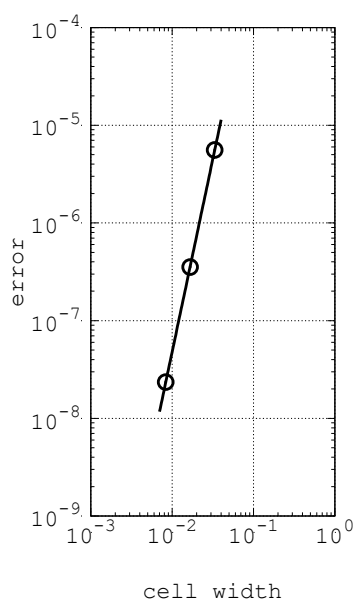


図3.3 計算精度

SP に K 個のガウス点，修正関数 $g_{LB}(\xi)$ に 3 次右ラダウ関数を用いた FR 法は， K 個の自由度を持つ DG 法におけるテスト関数を修正関数に置き換えたものであるので， $2K - 2$ 次の計算精度を持つことが示されている[1][2]．今回作成した計算コードは， $K = 3$ である．定式通りであれば 4 次の計算精度を持つことになる．

3.2 2次元線形移流 FR コードの検証

3.2.1 コード検証

計算領域は x 方向に $[0,1]$ ， y 方向に $[0,1]$ ，格子点数は各方向に 50 点で計算を行った．境界条件は周期境界とした．初期条件は次式である．

$$u_{init} = \exp[-40\{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2\}] \quad (3.2)$$

移流速度は $c = \sqrt{2}$ ，移流方向を 45° とした．問題設定と初期条件を図 3.4 に示す．

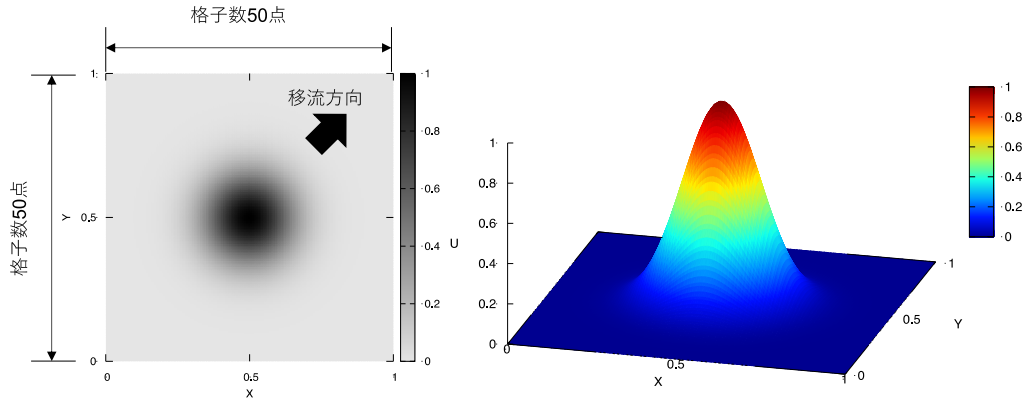


図3.4 ガウス分布移流問題の問題設定（左）と初期条件（右）

10,000 ステップ時の計算結果を図 3.5 左に， $y = 0.5$ におけるそのときの計算結果と初期条件を図 3.5 右に示す．これらの図より移流後も初期条件の波形を維持していることがわかり，解が発散することなく，物理量の移流が解けていることを確認した．

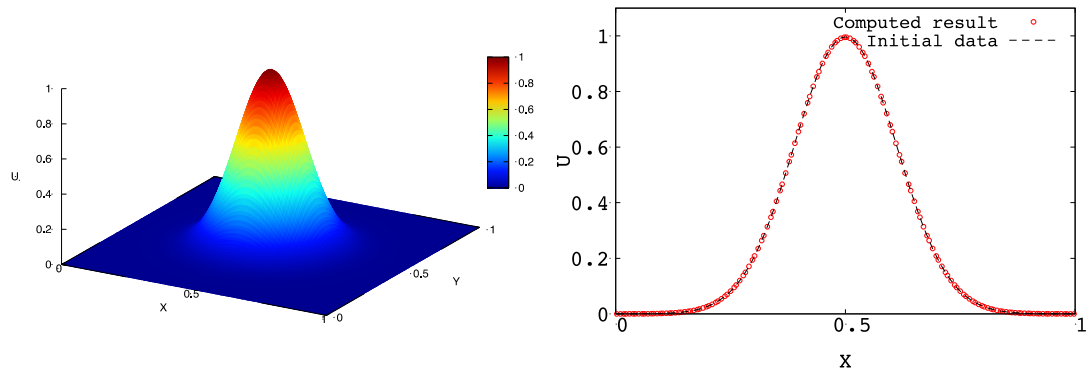


図3.5 10,000ステップ時の計算結果（左）と初期条件との差（右）

3.2.2 精度検証

計算領域は x 方向に $[0,1]$, y 方向に $[0,1]$, 格子点数は各方向に 30, 60, 100 点で計算を行った. 境界条件は周期境界とした. 初期条件は次式である.

$$u_{init} = \sin(2\pi x) \quad (3.3)$$

移流速度は $c = 1$, 移流方向を 45° とした.

誤差の対数グラフを図 3.6 に示す. 3 つの値を用いた最小二乗法による近似直線の傾きから, 3.96 次の計算精度を確認した.

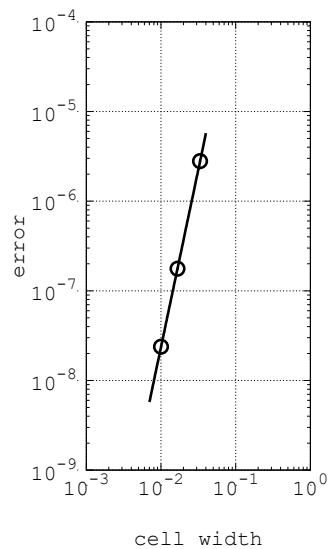


図3.6 計算精度

3.3 制限関数を用いた不連続流れの数値計算

3.3.1 制限修正関数

計算領域は x 方向に $[0,1]$ ，格子点数は 50 点，境界条件は自由流入出とした．初期条件は次式である．

$$u_{init} = \begin{cases} 1 & x \leq 0.1 \\ 0 & x > 0.1 \end{cases} \quad (3.4)$$

移流速度は $c = 1$ とした．KXRCF 不連続検知に用いる定数は $C_k = 0.001$ とした．図 3.7 左に 1 ステップ後の計算結果（赤線）と厳密解（黒破線）を示す．数値振動は生じていないが，修正関数が 1 次関数に制限されているため，不連続が階段状に表現されている．図 3.7 右に 35 ステップ後の計算結果（赤線）と厳密解（黒破線）を示す．修正関数が 1 次関数に制限されている領域が拡大し，解が散逸していることがわかる．また，FR 法はセル内に自由度を増やすことで高次精度を得る．しかし，セル内の物理量に分布を持たせることができないこの制限手法は FR 法には向かないと考えられる．

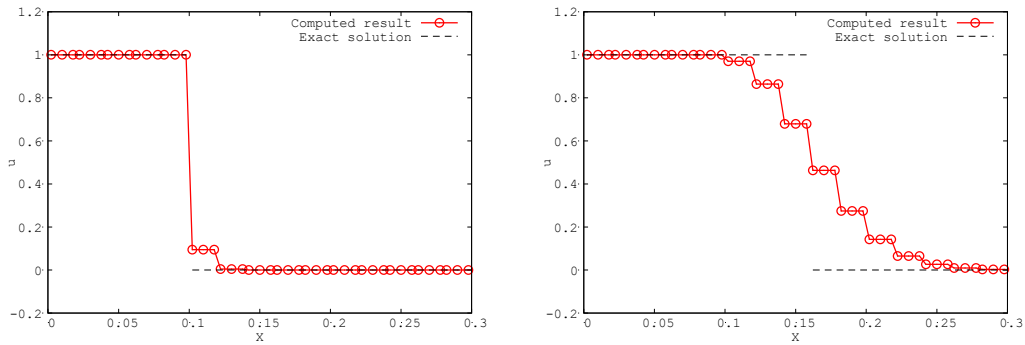


図3.7 計算結果(左：1ステップ，右：35ステップ)

3.3.2 平均制限関数

計算領域は x 方向に $[0,1]$ ，格子点数は 50 点，境界条件は自由流入出とした．初期条件は式 (3.4)である．移流速度は $c = 1$ とした．SP での最小値と最大値がセル平均値と等しい場合はそれぞれ $\psi_{min} = 1$ ， $\psi_{max} = 1$ ， $\epsilon = 0$ とした．図 3.8 左の赤線は 1 ステップ後の計算結果を，黒破線はその時の厳密解を表す．数値振動が生じていることを確認できる．図 3.8 右に平均制限関数による流束関数の制限の様子を示す．不連続を検知したセルで流束関数の分布を抑制することはできているが，セル内振動までは抑制できていないため，数値振動が発生している．

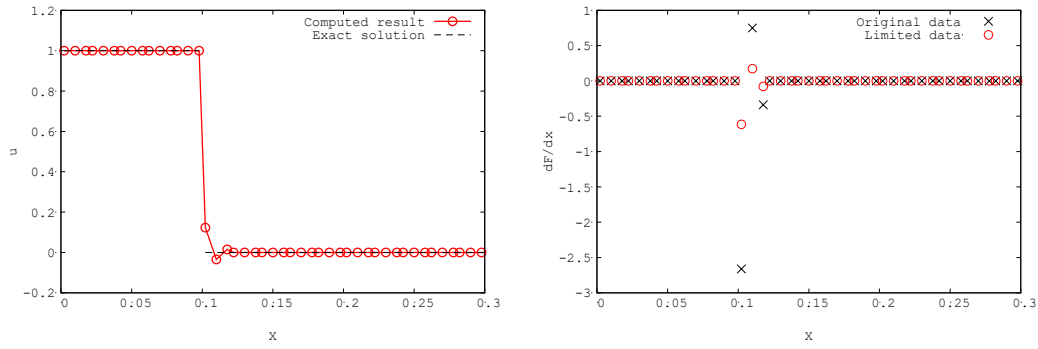


図3.8 計算結果(左)と流束関数の制限の様子(右)

3.3.3 WENO 制限関数

計算領域は x 方向に $[0,1]$ ，格子点数は 50 点，境界条件は自由流入出とした．初期条件は式 (3.4)である．移流速度は $c = 1$ とした．KXRCF 不連続検知に用いる定数は $C_k = 0.001$ とした．図 3.9 左の赤線は 1 ステップ後の計算結果を，黒破線はその時の厳密解を表す．不連続近傍で数値振動は生じていないが，制限修正関数を用いた場合と同様に不連続が階段状に表現されている．しかし，図 3.9 右に示す 35 ステップ後の計算結果では，図 3.7 右の制限修正関数を用いた場合とは異なり，不連続近傍のセル内に高精度分布が生じている．これは制限修正関数では KXRCF 不連続検知により検知されたセルでは修正関数を 1 次関数に制限するが，WENO 制限関数は KXRCF 不連続検知のよって検知された後，セル内の連続流束多項式の滑らかさによって重み付け平均され，連続流束関数を制限するためである．

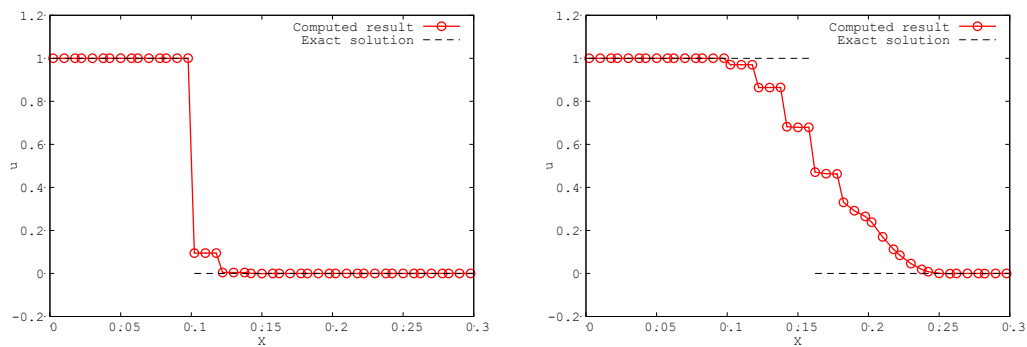


図3.9 計算結果(左：1ステップ，右：35ステップ)

第4章

結論

1次元線形移流方程式に対し、FR法の数値計算コードを作成した。一セルあたり3個の自由度を追加することで3.95次の計算精度が得られていることを確認した。同様に2次元移流方程式に対するFR法の数値計算コードを作成し、3.96次の計算精度を確認した。

航空機まわりの圧縮性流体計算に向けた第一歩として、衝撃波を模擬した物理量の不連続分布を制限関数を用いて取り扱った。修正関数の次数を制限する制限修正関数、セル平均値を用いて流束関数を制限する平均制限関数、流束関数の滑らかさにより流束関数を制限するWENO制限関数の3つの制限関数を用いて、数値振動を伴わない不連続分布の鮮明な再現を目指した。制限修正関数は数値振動を抑えることはできた。しかし、セル内の流束関数の分布が1次関数に制限されてしまうことから、SPにおける物理量が高次精度分布を持たず、解の精度が低い領域が広がってしまった。平均制限関数は流束関数を制限することはできたが、流束関数の振動を抑制することはできず、数値振動が生じた。WENO制限関数は流束関数の勾配を隣接セルの流束関数の勾配を用いて制限することにより、セル内の分布を残しつつ、数値振動を抑えることができた。FR法においては、数値振動を伴わない不連続分布を鮮明な解像するためには流束関数の勾配を制限することが重要である。

今後はオイラー方程式へFR法を適用し、航空機まわりの圧縮性流動場の高次精度解析コードの構築を目指す。

参考文献

- [1] Liu, X-D., Osher, S., and Chan, T., “Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, pp. 200-212, 1994
- [2] Cockburn, B., and Shu, C-W., “TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws 2 : General Framework”, *Mathematics of Computation*, Vol. 52, pp. 411-435, 1989
- [3] Huynh, H. T., “A Flux Reconstruction Approach to High-Order Scheme Including Discontinuous Galerkin Methods”, AIAA Paper, 2007-4079, 2007
- [4] Huynh, H. T., Wang, Z. J., and Vincent, P. E., “High-order method for computational fluid dynamics : A brief review of compact differential formulations on unstructured grids”, *Computers & Fluids*, Vol. 98, pp. 209-220, 2014
- [5] Cook, A. W., “Artificial Fluid Properties for Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Mixing”, *Physics of Fluids*, Vol. 19, 055103, 2007
- [6] Cook, A. W., and Cabot, W. H., “A high-wavenumber viscosity for high-resolution numerical methods”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, pp. 594-601, 2004
- [7] Miyaji, K., “On the Compressible Flow Simulation with Shocks by a Flux Reconstruction Approach”, AIAA paper, 2011-3057, 2011
- [8] Haga, T., and Kawai, S., “On a robust and accurate localized artificial diffusivity scheme for the high-order flux-reconstruction method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 376, pp. 534-563, 2019
- [9] Roe, P. L., “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357–372, 1981
- [10] Gottlieb, S., and Shu, C. W., “Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes”, *Mathematics of Computation*, Vol. 67, pp. 73-85, 1998
- [11] Krivodonova, L., Xin, J., Remacle, J.-F., Chevaugeon, N., and Flaherty, J. E., “Shock detection and limiting with discontinuous Galerkin method for hyperbolic conservation laws”, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 48(3), pp. 323-338, 2004
- [12] Du, J., Shu, C-W., and Zhang, M., “A simple weighted essentially non-oscillatory limiter for the correction procedure via reconstruction (CPR) framework on unstructured meshes”, *Applied Numerical Mathematics*, Vol. 90, pp. 146-167, 2015

謝辞

本研究を行うにあたり、高知工科大学 荻野要介講師には多くのご指導を賜りました。日々の研究活動を通して荻野先生の考えに触れることで私の至らなさを感じ、また、自身の成長を実感できました。特に数式の表す事象を解釈することの楽しさと重要さを知りました。ここに深く感謝の意を表します。

高知工科大学 野崎理教授には全体報告会において、異なる視点からの的確な意見を頂戴し、研究を見直し、その伝え方を考える機会をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

国立研究開発法人 宇宙航空研究開発機構 研究開発部門 第三研究ユニット 芳賀臣紀さんには高次精度数値計算法に関する様々な情報をいただき、研究の方針などに関する様々なアドバイスをいただきました。ここに深く感謝の意を表します。

超音速班の同期である、青景壮真君、秋田智也君、瀧日葵君とは様々な問題に遭いながらも日々の研究生活を楽しく過ごせました。超音速班の先輩方である、唐澤颯人さん、廣原和希さん、砂辺一行さん、豊田有里さんには研究や学生生活において多くのご助言をいただきました。心から感謝しております。

最後に、大学生活を送らせていただき、遠くから見守っていただいた家族と近くで支えてくださった今尾真理奈さんに深く感謝いたします。