

2023（令和5）年度 修士学位論文

ハイブリッド非構造格子を用いた直接流束再構築法による  
高次精度流体解析

High-order Accurate Flow Simulation using Direct Flux  
Reconstruction Method On Hybrid Unstructured Grid

2024年3月1日

高知工科大学大学院 工学研究科基盤工学専攻  
航空宇宙工学コース

1265026 岩田 雄太郎

指導教員 荻野 要介, 野崎 理

# 目次

第1章 緒言 .....	2
1.1 研究背景 .....	2
1.2 研究目的 .....	3
第2章 数値計算法 .....	4
2.1 支配方程式 .....	4
2.2 3次元DFR法 .....	4
第3章 DFR計算コード検証 .....	10
3.1 3次元線形移流問題 .....	10
3.2 3次元移流拡散問題 .....	15
3.3 平板境界層問題 .....	18
第4章 結言 .....	22
付録A ラグランジュ多項式 .....	23
付録B Raviart-Thomas空間 .....	24
参考文献 .....	26

# 第 1 章

## 緒言

### 1.1 研究背景

#### 1.1.1 航空機開発における数値流体力学

現在の航空機の設計開発ではその空力性能の評価のために数値流体力学が重要な役割を果たしている。航空機の離陸から巡行時、そして着陸までを通して求められる視点や空力性能の評価精度や流動現象の解像度は多様でありまたその用途にもよって異なる。CFD から得られる航空機まわりの流動情報や空力係数値は非常に有用で、多彩な情報源ともなる。そういった解析を実現するための手法の一つとして、複雑な航空機形状であっても非常に柔軟に適合可能な非構造計算格子と、実運用可能な演算量メモリ量に抑えた高次精度計算手法の組み合わせ理想的である。こういった手法であれば、機体の表面形状に適合するための三角形表面格子と壁面近傍の境界層流れの解像のため非常に細かい層状の四角形格子によって航空機近傍を流動に即して解くことができる。また機体と干渉したことでの誘起される様々なスケールを持つ渦運動や乱流、音波や衝撃波、膨張波を含む流れであっても非構造格子の適応と高次精度解法の組み合わせは有効である。

#### 1.1.2 高次精度計算手法

従来、非構造格子を用いた計算手法には有限体積法が用いられてきた。有限体積法は様々な格子形状に対して保存則を厳密に遵守することができ、計算コストも比較的低い。有限体積法ではセル境界面の流束をセル外部の情報(ステンシル)を用いて再構築することで高次精度化する。代表的な高次精度化手法としては ENO 法[1]や WENO 法[2]があり非構造格子にも拡張されている。このように有限体積法では様々な高次精度化手法が提案されているが問題点もある。非構造格子を用いた際、定式通りの精度を得ることが難しい点である。構造格子の場合、格子は規則的に並んでいるため高次精度化に用いるステンシルは容易に選択できる。しかし非構造格子の場合、格子は不規則なためステンシルの選び方が自明でなく定式通りの精度が得られにくい。また、外部のステンシルを用いるため並列計算時の通信コストが増加し並列化効率が低下する。これらの問題から、非構造格子でも高次精度化が容易な計算手法の開発が進められてきた。

代表的な非構造高次精度スキームが不連続ガレルキン法 (Discontinuous Galerkin method, DG 法) [3]である。DG 法はセル内に基底関数と自由度を導入し、その線形和からセル内の保存量分布を構築する。セル境界面の流束は保存量分布から求めるためコンパクトな計算手法である。しかし DG 法は計算コストが著しく増大する。これは DG 法では支配方程式を弱形式化し体積積分と面

積分を解き、さらに積分を解く際にガウス求積法を使用するためである。

2007年、流束再構築法 (Flux Reconstruction method, FR 法) [4]が提案された。FR 法ではセル内にノード点を導入し、ラグランジュ補間を用いて保存量分布を構築する。FR 法は微分型の保存則を解くため、セル境界面の流束を求めた後、修正関数を使用して隣接セルと連続な流束分布を再構築する。修正関数には任意性があり選択する修正関数によって他の非構造高次精度手法 (スペクトル差分法[5], nodal DG 法[6]) を回復することができる。このように FR 法は柔軟性が高いことから、近年盛んに研究が行われており、航空機の空力評価や音響問題へも適応され素晴らしい成果を示している[7, 8]。一方で、計算コストは DG 法と比較して低減されたが修正関数を用いるため以前として高い傾向にある。そこで、修正関数を用いずに流束分布を再構築する手法である直接流束再構築法 (Direct Flux Reconstruction method, DFR 法) [9]が提案された。DFR 法は Romero らによって六面体、四面体へ拡張された[10]が、リズムへの拡張やハイブリッド非構造格子を用いた流体計算はなされていない。我々の研究グループではこれまで、2次元構造格子対応の圧縮性 DFR 計算コードを構築し、WENO 法と同程度の精度が得られる事を確認した。

## 1.2 研究目的

本研究では DFR 法によるハイブリッド非構造格子を用いた高次精度流体計算コードの構築を目的とする。まず、既存コードの四面体、プリズム格子への拡張について示す。また、3次元移流拡散問題を対象とした計算コードの開発とその検証を行う。最後に平板境界層問題を対象に粘性計算をし、厳密解との比較を行う。

# 第 2 章

## 数値計算法

### 2.1 支配方程式

3次元線形移流拡散方程式を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (2.1)$$

流束ベクトル  $\mathbf{f}$  は移流項と拡散項の流束に分けられ次式のように表せる.

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{c}u \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f}_v = D\nabla_x u \quad (2.3)$$

ここで  $\mathbf{c}$  は移流速度ベクトル,  $D$  は拡散係数を表す. 物理座標系  $(x,y,z)$  に生成した任意の格子を参照座標系  $(r,s,t)$  に変換する. 図 2.1 に六面体の座標変換の様式図を示す. 参照座標系での線形移流方程式は次式のように与えられる.

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{1}{|J_n|} \nabla_r \cdot \hat{\mathbf{f}}_n = 0 \quad (2.4)$$

$$\hat{\mathbf{f}}_n = |J_n| J_n^{-1} \mathbf{f}_n \quad (2.5)$$

ここで,  $n$  はセルのインデックスである. 座標変換のヤコビ行列は  $\mathbf{J} = \partial(x,y,z)/\partial(r,s,t)$  と定義する. また, ^付きの変数は参照座標系で定義される変数である.

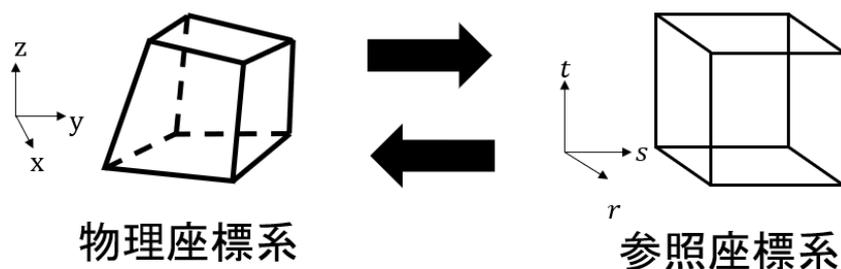


図 3.1 六面体の座標変換

### 2.2 3次元 DFR 法

#### 2.2.1 移流項の離散化

六面体を使用した際の DFR 法の手順を示す. DFR 法では参照座標系において各セル内に Solution Point (SP) と呼ばれる内点を導入する. 本研究ではガウス点を SP とする.  $n$  番セルについて参照座標系の  $i,j,k$  を各方向のお SP のインデックスとして SP 上の保存量は  $\hat{u}_{n,i,j,k}$  と書け

る. 次式のように各方向のラグランジュ多項式のテンソル積から, セル内の保存量分布を得る.

$$\hat{u}_n = \sum_{i,j,k=1}^{P+1} \hat{u}_{n,i,j,k} l_i(r) l_j(s) l_k(t) \quad (2.6)$$

$$l_i(r) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{p+1} \frac{r - r_m}{r_i - r_m} \quad (2.7)$$

ここで  $p$  は多項式の次数を示し, 各方向に  $P+1$  個の SP を用いることで  $P+1$  次の空間精度が得られる.

移流項の計算手順を示す. 説明の簡単化のため, 各 SP における流束の  $r$  方向微分のみを示す. 流束分布は隣接セルと分布を連続にする必要があるため, セル境界の流束を用いて流束分布を再構築する. 本研究では風上側の値を用いてセル境界の流束を求めた. 流束の  $r$  方向微分は次式より得られる.

$$\frac{\partial \hat{f}_{r_n}}{\partial r} = \sum_{j,k=1}^{P+1} \|\mathbf{n}_{0,j,k}\| f_{n,(0,j,k)}^I \frac{dl_0(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) + \sum_{i,j,k=1}^{P+1} \hat{f}_{n,(i,j,k)} \frac{dl_i(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) + \sum_{j,k=1}^{P+1} \|\mathbf{n}_{p+2,j,k}\| f_{n,(p+2,j,k)}^I \frac{dl_{p+2}(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) \quad (2.8)$$

$$\mathbf{n}_{i,j,k} = |\mathbf{J}_{n,i,j,k}| \mathbf{J}_{n,i,j,k}^{-T} \hat{\mathbf{n}}_{i,j,k} \quad (2.9)$$

ここで,  $f^I$  はセル境界の流束,  $\hat{\mathbf{n}}_{i,j,k}$  は参照座標系における外向き法線ベクトルを示す.  $s, t$  方向微分も同様の手順で求められる.

四面体格子は図 3.2 に示す直角二等辺三角形と正三角形からなる参照座標系に変換する. 四面体内の SP は Shunn らが導出した求積点[11]を使用する. 四面体セル内には  $(P+1)(P+2)(P+3)/6$  個の SP を持ち,  $P$  次の近似多項式から空間  $P+1$  次精度が得られる. 参照座標系内において次式のようにセル内の保存量分布  $\hat{u}_n$  を得る. [9, 10]

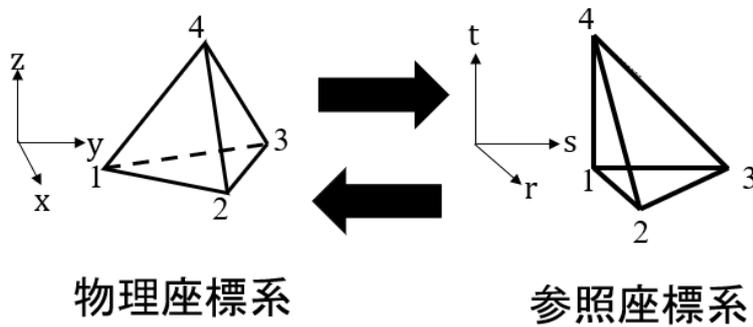


図 3.2 四面体の座標変換

$$\hat{u}_n = \sum_j^{N_{SP}} \hat{u}_{n,j} L_j(r, s, t) \quad (2.10)$$

ここで,  $j$  は SP のインデックス,  $N_{SP}$  はセル内の SP の総数,  $L_j$  は 3 次元ラグランジュ多項式で

ある。ラグランジュ多項式の導出は付録 A に示す。

次に移流項の計算手順を示す。流束分布の再構築には四角形や六面体ではラグランジュ補間を用いるが、四面体では Raviart-Thomas (RT) 基底関数ベクトル  $\boldsymbol{\psi}_k$  [12] を使用する。基底関数がベクトルであるため、四面体内の流束を 3 次元的に再構築することができる。流束分布の発散は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{f}}_n = \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r})) \quad (2.11)$$

$$f_k = \begin{cases} |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_r & k \leq N_{sp} \\ |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_s & N_s < k \leq 2N_{sp} \\ |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_t & 2N_{sp} < k \leq 3N_{sp} \\ \|n_k\| f_k^l & k > 3N_{sp} \end{cases} \quad (2.12)$$

ここで  $N_{RT}^{tet}$  は RT 基底関数ベクトルの数を表し  $(P+2)(P+3)(P+5)/6$  個持つ。  $\mathbf{e}$  は各方向の単位ベクトルである。 RT 基底関数ベクトルの発散  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\psi}_k$  の導出を示す。まず、単項基底  $\boldsymbol{\phi}_h$  を  $\boldsymbol{\psi}_k$  の線形結合として表す。単項基底の数は RT 基底関数ベクトルの数と一致する。単項基底の導出方法は付録 B に示す。

$$\boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} a_{h,k} \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

$$a_{h,k} = \boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_k \quad (2.14)$$

式(2.13)の両辺に  $\nabla_{\mathbf{r}}$  の内積を取ると、

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} a_{h,k} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

従って、

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r}) = \sum_{h=1}^{N_{RT}^{tet}} a_{h,k}^{-1} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

プリズム格子は、図 3.3 に示す直角二等辺三角形と正三角形からなる参照座標系へ変換し、保存量分布と流束分布の再構築を行う。セル内の保存量分布  $\hat{\mathbf{u}}$  は次式から得られる。

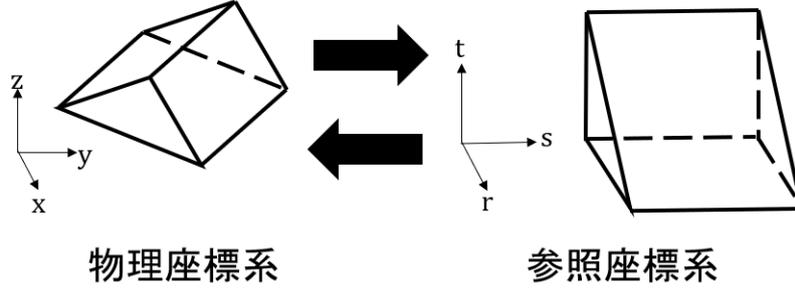


図 3.3 プリズムの座標変換

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{P+1} \sum_{j=1}^{N_{tri}} \hat{u}_{n,i,j} L_j(r,t) l_i(s) \quad (2.17)$$

ここで、 $L_j$ は2次元、 $l_i$ は1次元のラグランジュ多項式である。プリズムセル内のSPは、図3.4のように  $s$  方向に  $p+1$  個のガウス点位置に Willian らが導出した三角形の求積点[13]を  $(P+2)(P+3)/2$  個分布させる。 $N_{tri}$ は三角形の求積点の数を表す。

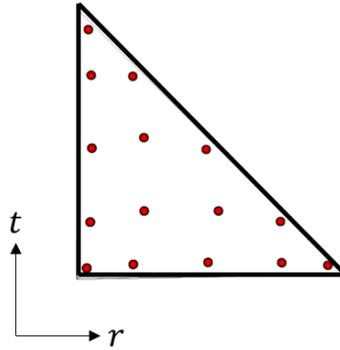


図 3.4 プリズムセルの SP の例( $P=3$ )

流束分布の再構築は、 $r,t$  方向は RT 基底関数ベクトル、 $s$  方向は式(2.8)と同様の手順より再構築する。

$$\frac{\partial \hat{f}_r}{\partial r} + \frac{\partial \hat{f}_s}{\partial t} = \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tri}} f_{i,k} \left( \frac{\partial \psi(r)_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi(t)_k}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

$$f_{i,k} = \begin{cases} |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_r & k \leq N_{tri} \\ |J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{f}_{n,j} \cdot \mathbf{e}_t & N_{tri} < k \leq 2N_{tri} \\ \|n_k\| f_k^l & k > 2N_{tri} \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \hat{f}_s}{\partial s} = \sum_{i=1}^{N_{tri}} \left\{ \|n_{i,0}\| f_{i,0}^l \frac{dl_0(s)}{ds} + \sum_{j=1}^{P+1} \hat{f}_{i,j} \frac{dl_j(s)}{ds} + \|n_{i,P+2}\| f_{i,P+2}^l \frac{dl_{P+2}(s)}{ds} \right\} \quad (2.20)$$

ここで、 $N_{RT}^{tri}$ は RT 基底関数ベクトルの数を表し  $(P+3)(P+5)$  個持つ。

## 2.2.2 拡散項の離散化

六面体での拡散項の計算手順を示す．保存量  $u$  の  $r$  方向微分の計算手順を示す．保存量分布を隣接セルと連続にする必要があるため，セル境界の保存量を用いて再構築する．なお，セル境界の保存量は次のように定義する．

$$u^l = \begin{cases} \frac{u^- + u^+}{2} & (\text{On } \partial\Omega_i) \\ u_b & (\text{On } \partial\Omega_b) \end{cases} \quad (2.21)$$

ここで， $\partial\Omega_i$  は計算領域内部のセル境界面， $\partial\Omega_b$  は境界条件に接するセル境界面を示す．また，上添え字の  $-$  と  $+$  は自セルと隣接セルの値を示し，下添え字の  $b$  は境界条件で与えられる値を示す．保存量の  $r$  方向微分は次式より得られる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} = & \sum_{j,k=1}^{P+1} \|\mathbf{n}_{0,j,k}\| \hat{u}_{n,0,j,k}^l \frac{dl_0(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) + \sum_{i,j,k=1}^{P+1} \hat{u}_{n,i,j,k} \frac{dl_i(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) \\ & + \sum_{j,k=1}^{P+1} \|\mathbf{n}_{p+2,j,k}\| \hat{u}_{n,p+2,j,k}^l \frac{dl_{p+2}(r)}{dr} l_j(s) l_k(t) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$s, t$  方向微分も同様の手順で求められる．物理座標系への変換は次式の通りである．

$$\nabla_x u_{n,i,j,k} = J_{n,i,j,k}^{-T} \nabla_r \hat{u}_{n,i,j,k} \quad (2.23)$$

ラグランジュ補間を用いてセル内の求めた保存量の勾配の分布を構築する． $r$  方向のみ示す．

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x} = \sum_{i=1}^{P+1} \frac{\partial \hat{u}_{n,i,j,k}}{\partial x} l_i(r) l_j(s) l_k(t) \quad (2.24)$$

四面体での拡散項の計算手順を示す． $x$  方向の保存量勾配はセル境界の値を用いて次式のよりに計算できる．

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{1}{|J_{n,k}|} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r})) \quad (2.25)$$

$$f_k = \begin{cases} (|J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}_{n,j}) \cdot \mathbf{e}_r & k \leq N_s \\ (|J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}_{n,j}) \cdot \mathbf{e}_s & N_s < k \leq 2N_s \\ (|J_{n,k}| J_{n,k}^{-1} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{u}_{n,j}) \cdot \mathbf{e}_t & 2N_s < k \leq 3N_s \\ \|n_k\| f_k^l & k > 3N_s \end{cases} \quad (2.26)$$

$$f_k^l = \mathbf{e}_x u_{n,k}^l \cdot \hat{\mathbf{n}}_k \quad (2.27)$$

ここで， $\mathbf{e}_x$  は  $x$  方向の単位ベクトル， $u_{n,k}^l$  はセル境界面の保存量である． $y, z$  方向は式 (25) の単位ベクトルを  $y, z$  方向にすることで計算できる．ラグランジュ補間を用いてセル内の保存量勾配分布を構築する．

$$\nabla_x \hat{u}_n = \sum_j^{N_{SP}} \nabla_x \hat{u}_{n,j} L_j(r, s, t) \quad (2.28)$$

プリズム格子の拡散項の計算手順は三角形面の保存量勾配は式 (24) ~ (26)，三角形の押し

出し方向は (21) と同様である.

セル境界面の拡散流束は BR2 法[14]を用いて求める.

$$\mathbf{f}_v = A_v \nabla_x u \quad (2.29)$$

ここで,  $A_v$  はヤコビ行列であり,

$$A_v = \frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial \nabla_x u} \quad (2.30)$$

となる. 式 (2.27) は物理座標系で定義されており, 参照座標系では以下のように定義できる.

$$\hat{\mathbf{f}}_v = \hat{A}_v \nabla_r u \quad (2.31)$$

セル境界面の粘性流束  $f^I$  は次式のように表現できる. セル間の跳びを考慮するためリフティング演算子を導入する.

$$\hat{f}_v^I = \hat{A}_v \nabla_r u^I + \eta_e \delta^I \quad (2.32)$$

ここで,  $\delta$  はリフティング演算子,  $\eta_e$  は安定化係数を表している. 安定化係数は過去の研究[26, 27]よりセル境界面の数を  $N_f$  として,  $\eta_e \geq N_f$  を満たすとき安定する. 拡散流束は次のように与えられる.

$$A_v \nabla_x u^I = \begin{cases} \frac{(A_v \nabla_x u \cdot \mathbf{n})^- - (A_v \nabla_x u \cdot \mathbf{n})^+}{2} & (\text{On } \partial\Omega_i) \\ (A_v \nabla_x u \cdot \mathbf{n})^- & (\text{On } \partial\Omega_b) \end{cases} \quad (2.33)$$

法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は,  $\mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$  であるため, 自セルと隣接セルの平均値をとる. またリフティング演算子は,

$$\hat{\delta} = \hat{A}_v^T \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} (\hat{u}^I - \hat{u}^-) \quad (2.34)$$

と与えられる. セル境界面のリフティング演算子も同様に隣接セルとの平均値をとる. SP とセル境界の拡散流束を用いて隣接セルと連続な拡散流束を再構築する. 再構築の手順は移流項と同様である.

以上より, DFR 法の半離散式は以下のようになる.

・ 六面体

$$\frac{du_{n,(i,j,k)}}{dt} + \frac{1}{|J_n|} \left( \frac{\partial \hat{f}_{r_{n,(i,j,k)}}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{f}_{s_{n,(i,j,k)}}}{\partial s} + \frac{\partial \hat{f}_{t_{n,(i,j,k)}}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.35)$$

・ 四面体

$$\frac{du_{n,i}}{dt} + \frac{1}{|J_n|} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tet}} f_k (\nabla \cdot \boldsymbol{\psi}_k(\mathbf{r}_i)) = 0 \quad (2.36)$$

・ プリズム

$$\frac{du_{n,i,j}}{dt} + \frac{1}{|J_{n,i,j}|} \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{N_{RT}^{tri}} f_{i,k} \left( \frac{\partial \psi(r_{i,j})_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi(t_{i,j})_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial \hat{f}_{s,(i,j)}}{\partial s} \quad (2.37)$$

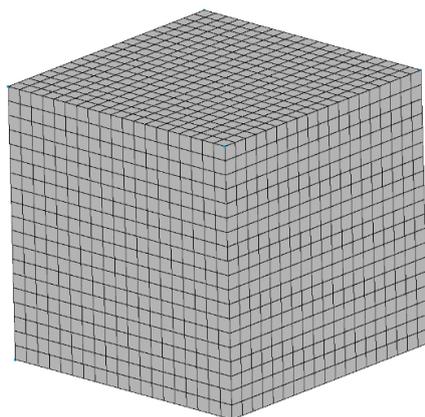
時間積分は TVD3 次精度ルンゲクッタ法[18]を用いる.

# 第 3 章

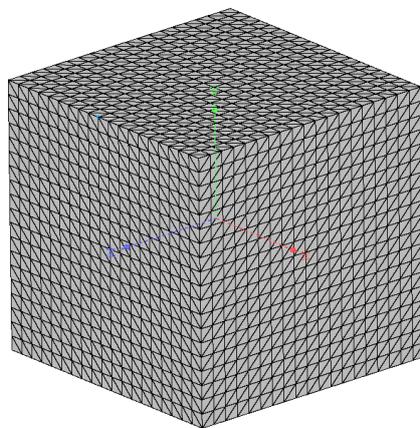
## DFR 計算コード検証

### 3.1 3次元線形移流問題

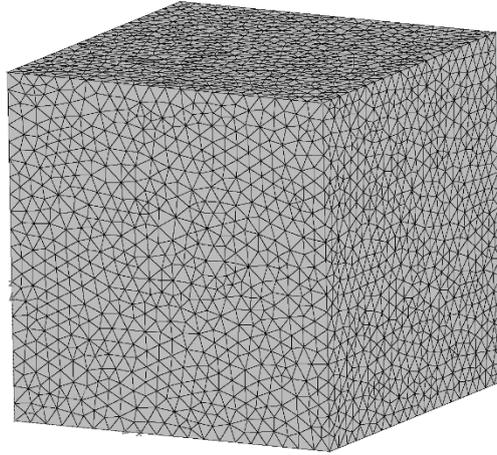
不連続面を含まない関数である正弦波を初期条件として与え, 3次元線形移流問題に対して厳密解との誤差を求めた. 計算領域は $0 \leq x, y, z \leq 1$ の立方体とする. 計算格子は計算領域を各方向に 20 分割した六面体格子とし, さらに四面体, プリズムに分割する. また, 四面体は格子を不規則に配置したものも使用する. 図 3.1 に使用した計算格子を示す. また, 格子アスペクト比 (AR) の影響を検証するため, z 方向に 1/1000 に圧縮した格子も用いる. 計算条件は表 3.1 の通りである.



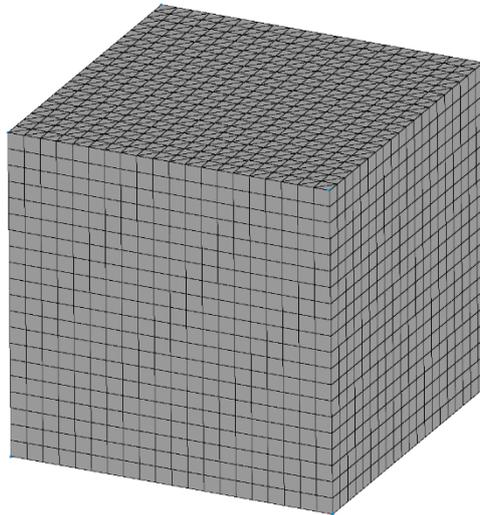
(a) 六面体



(b) 四面体 1



(c) 四面体 2



(d) プリズム

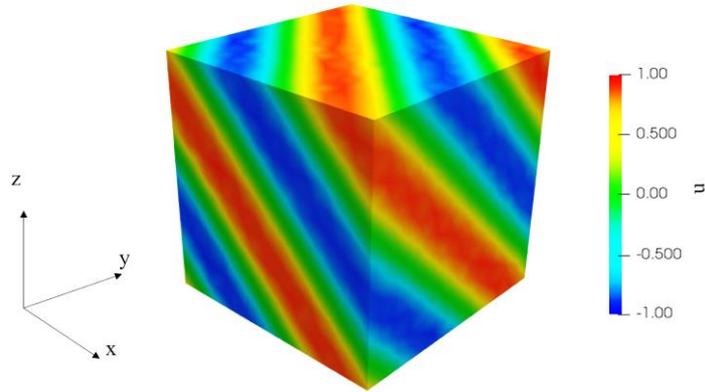
図 3.1 計算格子

表 3.1 計算条件

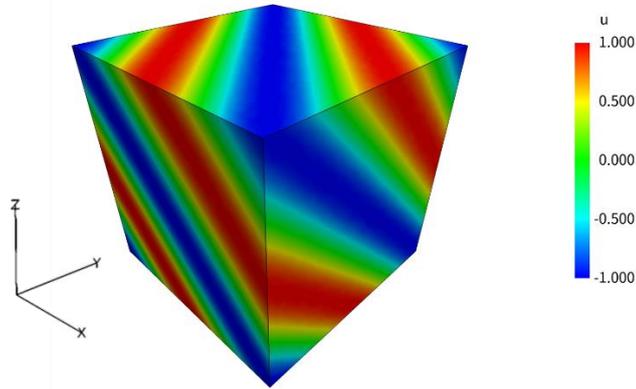
境界条件	周期境界
移流速度	$\sqrt{3}$
初期条件	$u_{init} = \sin(2\pi(x + y + z))$
クーラン数	0.1
ステップ数	1000

図 3.1 に四面体のみ、プリズムのみを使用した際の計算結果の図を示す。どの格子形状でも正

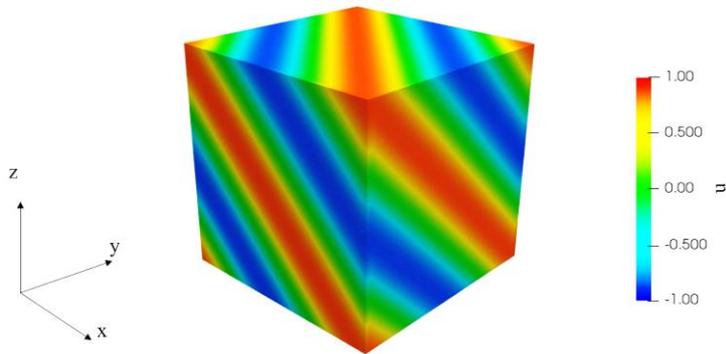
弦波の移流が発散することなく解けていることが確認できた。



(a) 四面体



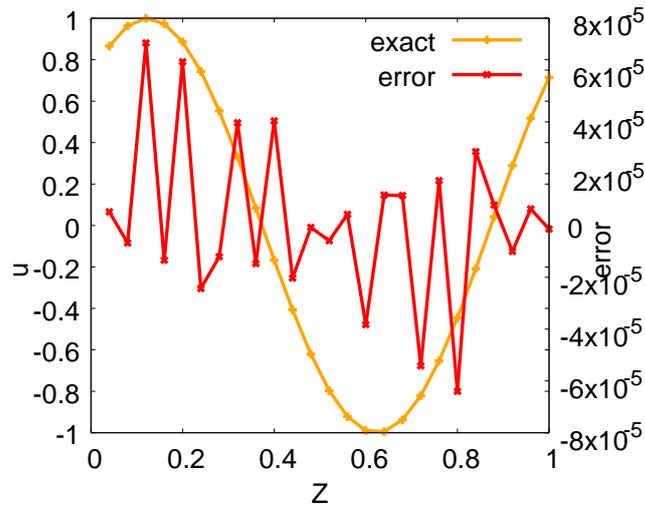
(b) 四面体 2



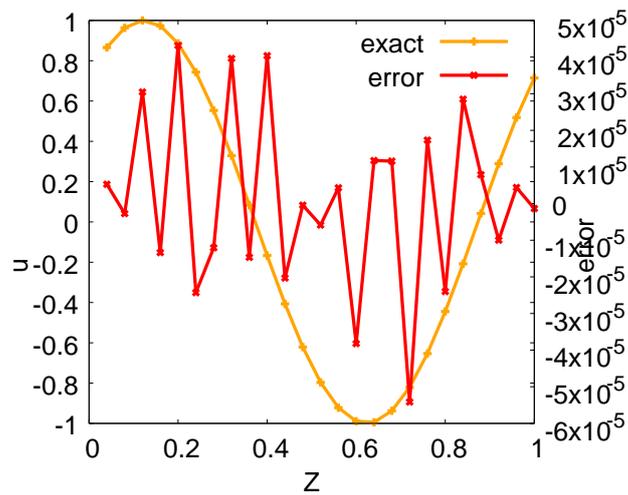
(c) プリズム

図 3.2 計算結果

上図の結果に関して、図 3.2 に厳密解との比較結果を示す。左縦軸が厳密解を右軸は数値解との局所誤差を表す。 $z$  方向中心軸  $x=y=0.5$  を横軸とした。両格子とも、誤差の大きさが-5 乗のオーダーに収まっていることが確認できた。



(a) 四面体



(b) プリズム

図 3.3 厳密解と誤差の関係

図 3.3 にアスペクト比 1 のときの自由度と誤差  $L_2$  ノルムの関係, 表 3.2 に空間精度を示す. ハイブリッド格子では,  $z < 0.5$  をプリズムそれ以外を四面体で埋めた. すべての格子形状でおよそ 4 次精度となることが確認できた. またハイブリッド格子のみ誤差が誤差の増加が見て取れる.

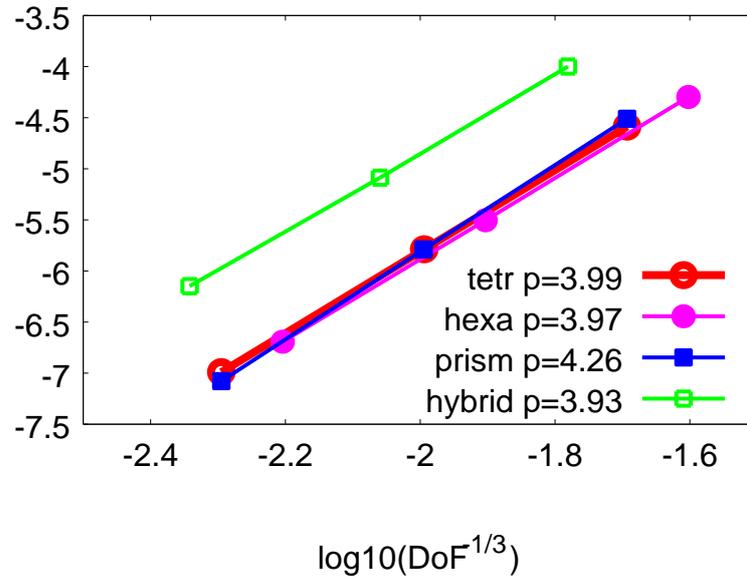


図 3.4 自由度と誤差の関係(AR=1)

表 3.2 空間精度(AR=1)

格子形状	空間精度
六面体	3.97
四面体	3.99
プリズム	4.26
ハイブリッド	3.93

格子アスペクト比 AR=1000 の際の結果を示す。まずプリズム格子の場合は空間精度，誤差ともにアスペクト比 1 と同等となった。一方，四面体格子では，誤差が大きくなっている。空間精度も所定の 4 次に達しなかった。アスペクト比 1000 での四面体の精度低下は，RT 基底関数ベクトルの性質を含め，今後検討する必要がある。実際の航空機の空力評価では高 AR 四面体格子の生成を抑制すべきと考える。

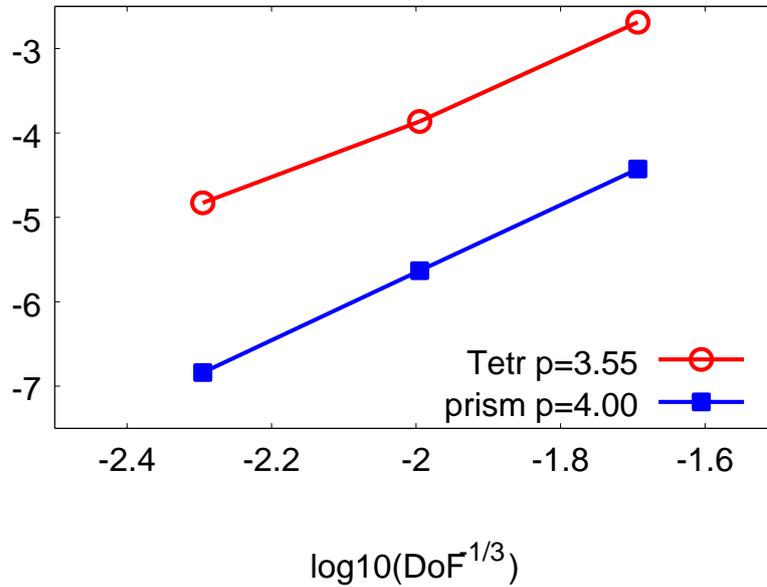


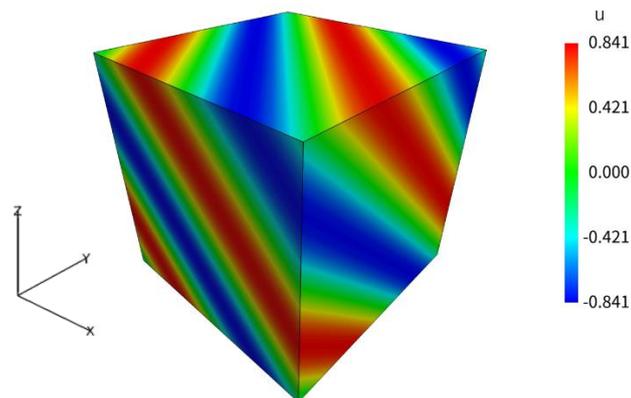
図 3.5 自由度と誤差の関係(AR=1000)

表 3.3 空間精度(AR=1000)

格子形状	空間精度
四面体	3.55
プリズム	4.00

## 3.2 3次元移流拡散問題

正弦波を初期条件として与え、3次元移流拡散問題に対して厳密解との誤差を求めた。拡散係数  $D$  は 0.01 とした。計算格子は前節の AR=1 の格子を使用し、計算条件は前節と同様である。まず、図 3.4 に四面体、プリズムを使用した際の計算結果の図を示す。どちらの格子形状でも正弦波の移流が発散することなく解けていることが確認できた。



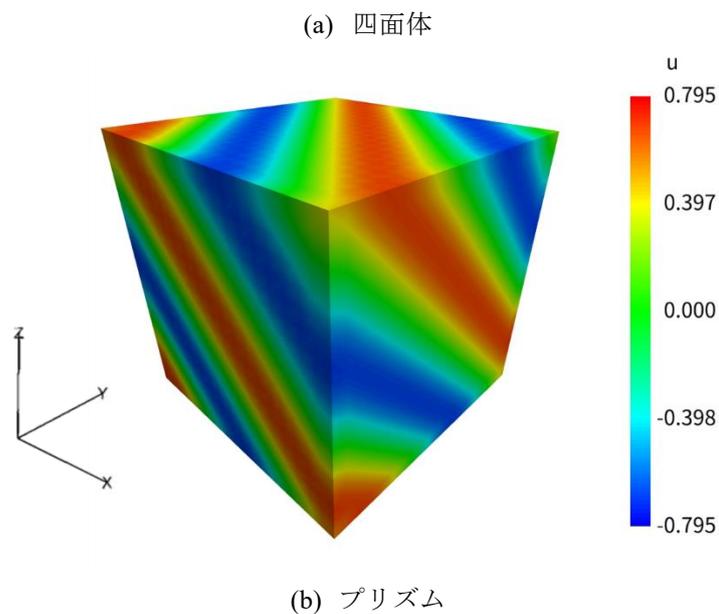
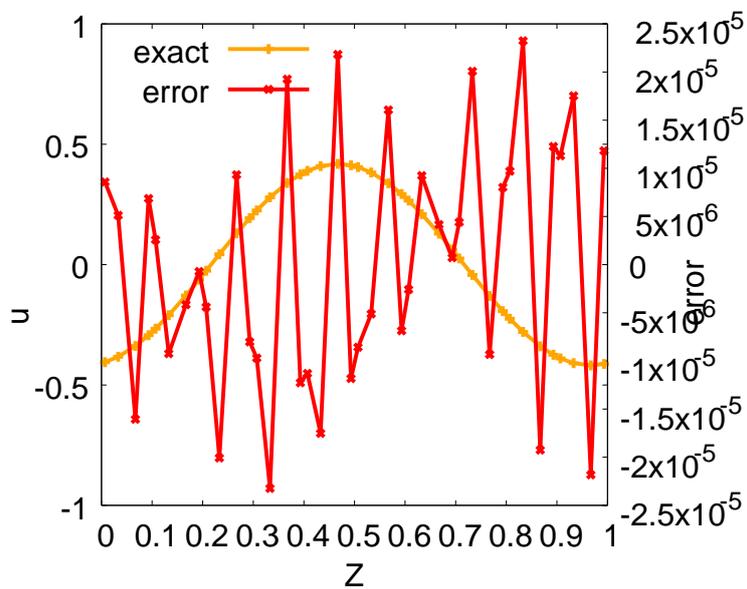
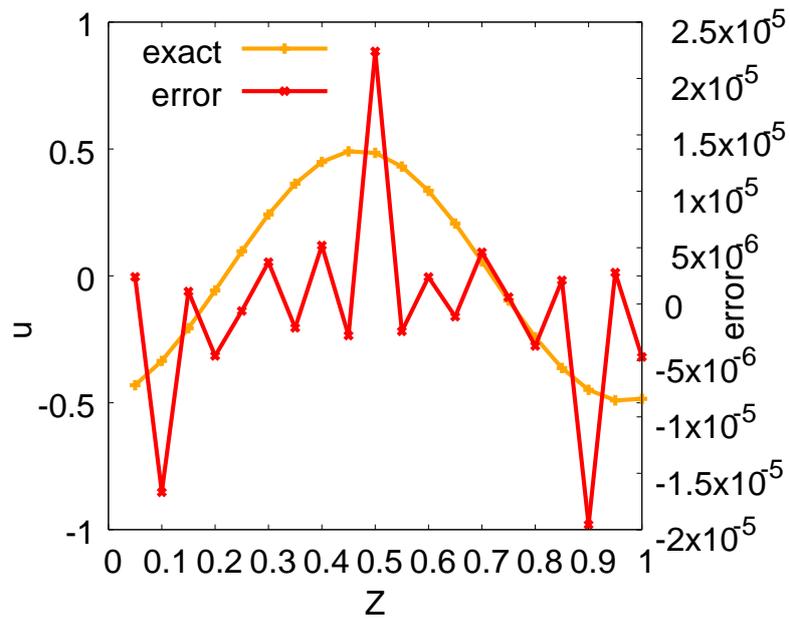


図 3.6 移流拡散問題の計算結果

上図の結果に関して，図 3.5 に厳密解との比較結果を示す．左縦軸が厳密解を右軸は数値解との局所誤差を表す． $z$  方向中心軸  $x=y=0.5$  を横軸とした．四面体，プリズムともに誤差は $10^{-5}$  乗のオーダーに収まっていることが確認できた．



(a) 四面体



(b) プリズム

図 3.7 厳密解と誤差の関係 (移流拡散問題)

図 3.6 に自由度と誤差 L2 ノルムの関係, 表 3.4 に空間精度を示す. すべての格子形状でおおよそ 4 次精度となることが確認できた.

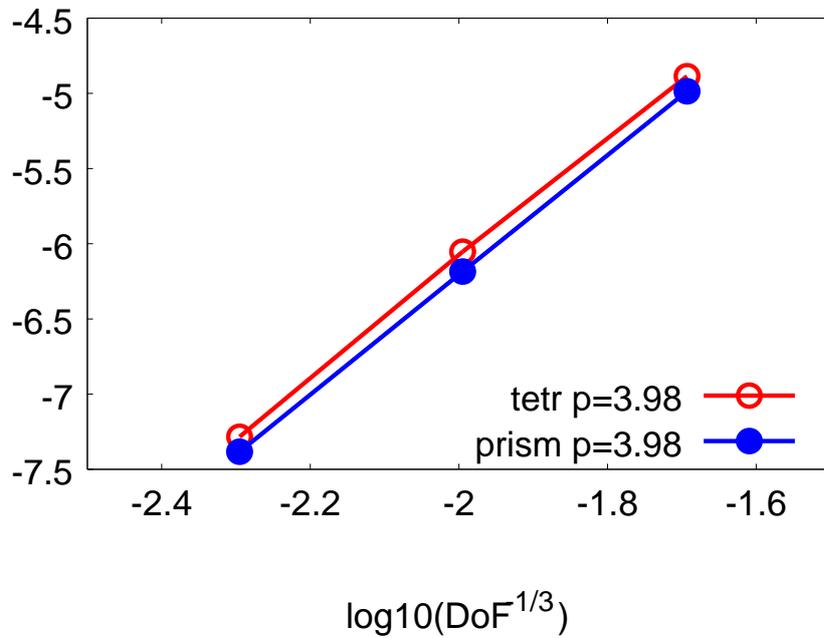


図 3.8 自由度と誤差の関係 (移流拡散問題)

表 3.4 空間精度

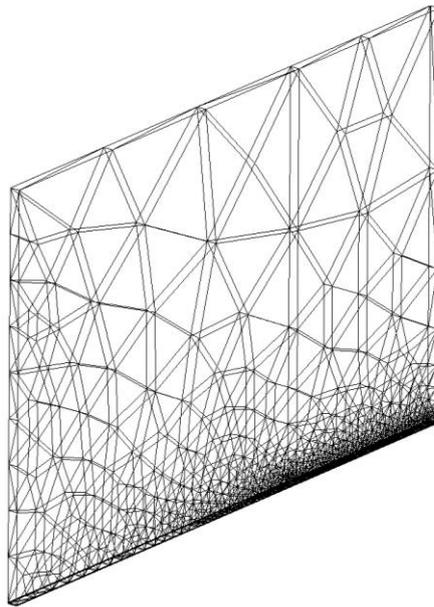
格子形状	空間精度
四面体	3.98
プリズム	3.98

### 3.3 平板境界層問題

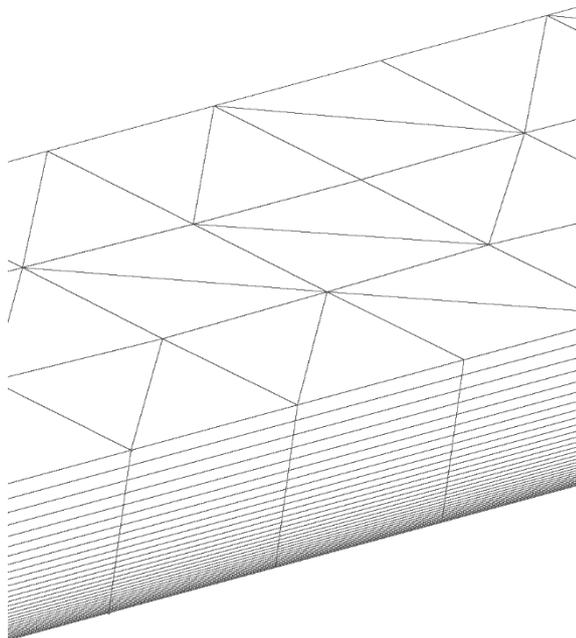
構築した移流拡散問題の DFR コードを用いて平板境界層問題に取り組む。計算条件は表 3.5 に示す通りである。計算格子は図 3.9 に示すように壁面付近にプリズム格子、それ以外に四面体格子を配置した。流入境界は  $x=-2$  の面、周期境界は  $z=0, 0.05$  の面、壁面境界は  $y=0$  における  $x \geq 0$  の面、滑りあり境界を  $y=0$  における  $x < 0$  の面、それ以外の面を流出境界とした。

表 3.5 平板境界層問題の計算条件

格子数	18262
計算領域	$-2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 0.05$
初期条件	$x$ 方向速度 : 10 $y, z$ 方向速度 : 0
最小格子幅	$10^{-4}$
クーラン数	0.01
拡張係数	0.0001
安定化係数	10



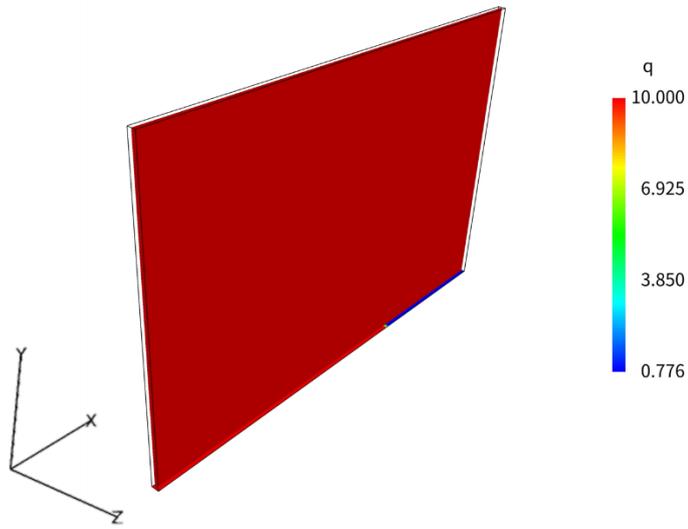
(a) 計算領域全体図



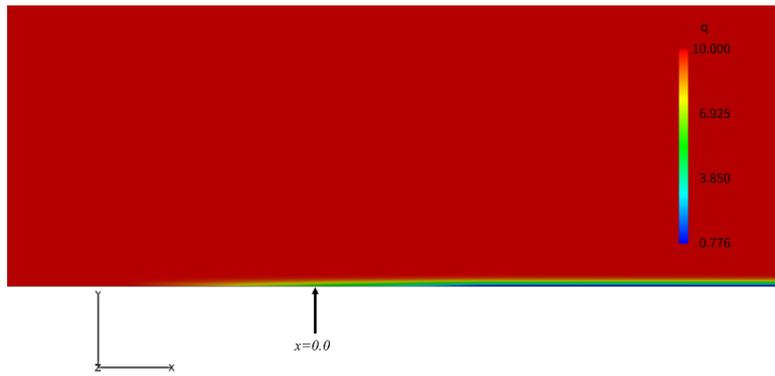
(b) 壁面近傍の拡大図

図 3.9 計算格子 (平板境界層問題)

図 3.10 に  $x=0.95\sim 1.0$  の壁面付近を拡大した図である. 速度分布の図を示す. 壁面近傍に境界層が発生していることが確認できる.



(a)全体図



(a) $x=0.0$  付近



図 3.10 平板境界層の速度分布

図 3.11 に  $x=0.3, 0.5, 0.9$  位置における  $x$  方向の速度分布とブラジウス解との比較の図を示す. 横軸は主流速度  $U$  との速度比で, 縦軸は  $\eta = y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}$  である. どの位置でもブラジウス解とおおよそ一致していることが確認できた.  $x=0.5$  と  $0.9$  では境界層が厚く成長しているため十分に格子解像できている. 一方で,  $x=0.3$  では境界層の上層 ( $\eta > 2$ ) で差異がみられる.

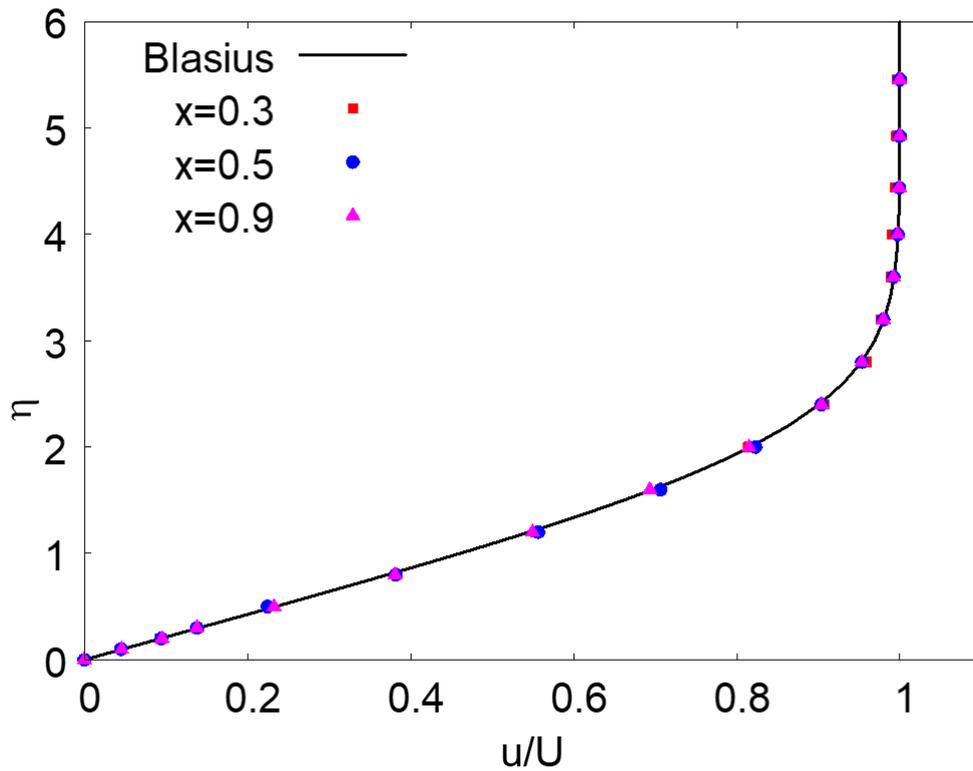


図 3.11 ブラジウス解との比較

# 第4章

## 結言

ハイブリッド非構造格子対応の4次精度DFR計算コードを構築した。線形移流問題，移流拡散問題を対象に計算コード検証し厳密解との比較，空間の精度検証を行った。線形移流問題では厳密解との誤差は十分小さく，空間精度も定式通り得られた。しかし，格子アスペクト比が1000のとき四面体では空間精度が低下した。移流拡散問題では厳密解との誤差は十分小さく，空間精度も定式通り得られた。構築したDFRコードを用いて平板境界層問題を解いた。速度分布とブラジウス解を比較したところ，どの位置でもおおよそ一致していることが確認できた。

先行研究にてDFR計算コードの圧縮性化は行っているため，Navier-Stokes方程式への拡張は粘性項の付与により可能である。また，局所人工粘性[19]を導入し数値振動抑制することで航空機まわりの圧縮粘性流れ場が可能な非構造高次精度計算コードの構築が可能である。

# 付録 A ラグランジュ多項式

三角形，四面体のラグランジュ多項式 $L_k$ はベクトル空間 $\mathcal{P}_P$ で定義される． $\mathcal{P}_P$ は次式のように定義される．

$$\mathcal{P}_P(r, s) \equiv \text{span}\{r^i s^j\} \quad 0 \leq i, j \quad i + j \leq P \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{P}_P(r, s, t) \equiv \text{span}\{r^i s^j t^k\} \quad 0 \leq i, j, k \quad i + j + k \leq P \quad (\text{A.2})$$

ここで， $P$ は多項式の次数である． $P=1$ のときラグランジュ多項式は以下のようなになる．

$$L_k(r, s) = a_0 + a_1 r + a_2 s \quad (\text{A.3})$$

$$L_k(r, s, t) = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 t \quad (\text{A.4})$$

式(A.3)が三角形，式(A.4)が四面体のラグランジュ多項式である．係数 $a$ は次式を使い求める．

$$L_k(\mathbf{r}_i) = \delta_{k,i} \quad (\text{A.5})$$

ここで， $\delta$ はクロネッカーのデルタである． $L_1(r, s, t)$ の導出を例にとると式(A.5)より，

$$\begin{bmatrix} 1 & r_1 & s_1 & t_1 \\ 1 & r_2 & s_2 & t_2 \\ 1 & r_3 & s_3 & t_4 \\ 1 & r_4 & s_4 & t_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

のような連立方程式がたてられ，これを解くことで係数 $a$ を求める．

## 付録 B Raviart-Thomas 空間

$\mathcal{P}_P$  は次数  $P$  以下の多項式からなるベクトル空間である.

$$\mathcal{P}_P(r, s) \equiv \text{span}\{r^i s^j\} \quad 0 \leq i, j \quad i + j \leq P \quad (B.1)$$

$$\mathcal{P}_P(r, s, t) \equiv \text{span}\{r^i s^j t^k\} \quad 0 \leq i, j, k \quad i + j + k \leq P \quad (B.2)$$

$\bar{\mathcal{P}}_P$  は次数  $P$  の多項式からなるベクトル空間である.

$$\bar{\mathcal{P}}_P(r, s) \equiv \text{span}\{r^i s^j\} \quad 0 \leq i, j \quad i + j = P \quad (B.3)$$

$$\bar{\mathcal{P}}_P(r, s, t) \equiv \text{span}\{r^i s^j t^k\} \quad 0 \leq i, j, k \quad i + j + k = P \quad (B.4)$$

三角形, 四面体の Raviart-Thomas 空間の単項基底は次式のように定義される.

$$\boldsymbol{\phi}_h(\mathbf{r}) \equiv \mathcal{P}_P(\mathbf{r})^{N_D} + \mathbf{r} \bar{\mathcal{P}}_P(\mathbf{r}) \quad (B.5)$$

ここで  $N_D$  は次元を示し, 三角形では  $N_D = 2$ , 四面体では  $N_D = 3$  とする.

$P=1$  の三角形の単項基底を示す.

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 \\ rs \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs \\ s^2 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

同様に四面体の単項基底を示す.

$$\boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 \\ rs \\ rt \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs \\ s^2 \\ st \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rt \\ st \\ t^2 \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

以下に本研究で使用した三角形と四面体の単項基底を示す.

三角形 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} r^3 s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 s^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^4 s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^3 s^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 s^3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs^4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^5 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ rs \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^2 s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ rs^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s^3 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ r^3 s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^2 s^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ rs^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^4 s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^3 s^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^2 s^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ rs^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ r^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ s^5 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} r^5 s \\ r^4 s^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^4 s^2 \\ r^3 s^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^3 s^3 \\ r^2 s^4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 s^4 \\ rs^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^6 \\ rs^5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs^5 \\ s^6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

四面体 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) = & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rt \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} st \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ & \begin{bmatrix} rst \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rs^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} rt^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^2 t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} st^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$



## 参考文献

- [1] C-W. Shu and S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, (1988), pp. 439-471.
- [2] X-D. Liu, S. Osher, and T. Chan, “Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 155, (1994), pp. 200-212.
- [3] B. Cockburn and C-W. Shu, “TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV: Multi-dimensional Systems”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 141, (1989), pp. 199-244.
- [4] H. T. Huynh, “A Flux reconstruction Approach to High-order Schemes Including Discontinuous Galerkin Methods”, AIAA Paper 2007-4079, (2007).
- [5] D. A. Kopriva and J. H. Kolas, “A conservative staggered-grid Chebyshev multidomain method for compressible flows”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 125, (1996), pp. 244-261.
- [6] J. S. Hesthaven and T. Warburton, “Nodal Discontinuous Galerkin Methods: algorithm, analysis, and applications”, Vol. 54. Springer Verlag New York (2008).
- [7] T. Haga, and S. Kawai, “Large-Eddy Simulation of Supersonic Jet using High-Order Flux reconstruction”, AIAA Paper2015-0831, (2015)
- [8] H. T. Huynh, “Discontinuous Galerkin via Interpolation: The Direct Flux Reconstruction Method,” AIAA Paper 2019-3064, (2019).
- [9] J. Romero, K. Asthana, and A. Jameson, “A simplified formulation of the flux reconstruction method”, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 67, (2016), pp. 351-374.
- [10] J. Romero, ”On The Development of The Direct Flux Reconstruction Scheme for High-order Fluid Flow Simulation”, Ph.D thesis, Stanford University, (2017).
- [11] L. Shunn and F. Ham, “Symmetric Quadrature Rules for Tetrahedra Based on A Cubic Close-packed Lattice Arrangement”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 236, No. (17), (2012), pp. 4348-4364.
- [12] P. A. Raviart and J. M. Thomas, “A mixed hybrid Finite element method for the second order elliptic problems”, *Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lectures Notes in Mathematics*, (1977).
- [13] D. Williams, L. Shunn, and A. Jameson, “Symmetric quadrature rules for simplexes based on sphere close packed lattice arrangements”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 266, (2014), pp. 18-38.
- [14] F. Bassi and S. Rebay, “GMRES Discontinuous Galerkin Solution of the Compressible Navier-Stokes Equation”, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 11 Discontinuous Galerkin Method, (2000), pp. 197-208.
- [15] P. Castonguay, “High-order energy stable flux reconstruction schemes for fluid flow simulations on

- unstructured grids”, PhD thesis, Stanford University, (2012).
- [16] F. D. Witherden, J. S. Park and P. E. Vincent, “An Analysis of Solution Point Coordinates for Flux Reconstruction Schemes on Tetrahedral Elements”, *Journal of Scientific Computation*, Vol. 69, (2016), pp. 905-920.
- [17] D. M. Williams and A. Jameson, “Energy Stable Flux Reconstruction Scheme for Advection-Diffusion Problem on Tetrahedra”, *Journal of Scientific Computation*, Vol. 59, (2014), pp. 721-759.
- [18] Gettlieb, S and Shu. C. W, “Total Variation Diminishing Runge-Kutta Scheme”, *Mathematics of Computation*, Vol. 67, (1998), pp. 73-85.
- [19] A. Cook and W. Cabot, “A high-wavenumber viscosity for high-resolution numerical method”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 195, (2010), pp. 594-601
- [20] A. Veilleux, G. Puigt and G. Daviller, “A stable Spectral Difference approach for computations with triangular and hybrid grid up to the 6<sup>th</sup> order of accuracy”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 449, (2022).
- [21] M. Burgot and M. Duruflé, “Approximation of H(div) with High-Order Optimal Finite Element for Pyramid, Prism, and Hexahedra”, *Communication in Computational Physics*, Vol. (5), (2013), pp. 1372-1414.
- [22] G. Sáez-Mischlich, J. Sierra-Ausín and J. Gressier, “The Spectral Difference Raviart-Thomas Method for Two and Three-Dimensional Elements and Its Connection with the Flux Reconstruction Formulation”, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 93, (2022), pp. 48-93.
- [23] S. Quaegebeur and S. Nadarajah and P. Zwanenburg, “Stability of Energy Stable Flux Reconstruction for Diffusion Problem using the Interior Penalty and Bassi and Rebay II Numerical Fluxes”, *Journal on Scientific Computing*, Vol. 41, (2019). pp. 643-667.
- [24] 浅田啓幸, “高次精度セル緩和型陰的不連続ガレルキン法の実用化に関する研究”, 東北大学大学院修士論文, (2015).
- [25] 笠石丈二, “直接流束再構築法を用いた圧縮性ナビエストークス方程式の高次精度計算”, 高知工科大学大学院修士論文, (2023)
- [26] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problem”, *SIAM J. Numer. Anal.*, (2001), pp1749-1779.
- [27] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini, “Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problem”, *Lecture Note in Computational Science and Engineering*, Vol. 11 Discontinuous Galerkin Methods, (2000), pp89-101.

# 謝辞

高知工科大学 荻野要介 講師には、研究を進めていく中で多くのご指導、ご支援を賜りました。詰った際には、ご多忙の中研究相談に時間を割いて頂きました。研究をここまで進めることができたのも、先生のご支援あってのことです。ここに深く感謝の意を表します。

高知工科大学 野崎理 教授には、全体報告会において発表の仕方やスライドの構成について多くのご指導を賜りました。ここに深く感謝の意を表します。

研究室同期の浅井友彰君、久保田佑弥君、野老山将梧君、沼野翔泰君、東谷涼平君には、研究の相談や雑談を通して楽しい研究生生活を送ることができました。

超音速班のメンバーである橋爪見奈さん、竹森和希君、堀内涼平君、安田裕貴君、窪内啓太君、西山莉名さん、結縁千晶さん、氏平佳希君には居心地の良い雰囲気を作ってくださいました。

最後に、充実した学生生活を支援してくれた両親と妹に感謝の意を表して謝辞とさせていただきます。