

2023（令和5）年度 修士学位論文

マルチスケール FEM による熱硬化 FRP の成形誘起変形  
シミュレーション

Simulation of process-induced deformation of thermosetting FRP  
by Multiscale FEM

2024年3月1日

高知工科大学大学院 工学研究科基盤工学専攻  
航空宇宙工学コース

1265037 若松 宗真

指導教員 高坂 達郎

## 目次

第1章 緒言.....	1
1.1 研究背景.....	1
1.2 FRPのマルチスケールFEM解析.....	2
1.3 研究目的.....	2
第2章 均質化法によるマルチスケール成形FEM解析.....	3
2.1 均質化法.....	3
2.2 均質化剛性の計算.....	4
2.3 樹脂の粘弾性モデル.....	6
2.4 樹脂の粘弾性構成方程式.....	7
2.5 硬化中のFRPの粘弾性構成方程式と均質化剛性.....	8
2.6 FRPの均質化熱膨張係数・均質化硬化収縮係数.....	8
第3章 解析方法.....	10
3.1 硬化後の樹脂・繊維の材料特性.....	10
3.2 FEMモデル.....	13
3.3 境界条件.....	13
3.4 均質化剛性.....	14
3.5 熱膨張係数, 硬化収縮ひずみ係数.....	14
第4章 解析結果.....	15
4.1 ミクロ応力分布.....	15
4.2 剛性行列.....	21
4.2.1 完全硬化時の剛性緩和.....	21
4.2.2 硬化度の剛性への影響.....	31
4.3 熱膨張係数.....	36
4.3.1 瞬時の温度変化によるミクロ応力分布.....	36
4.3.2 瞬時の温度変化による応力緩和.....	36
4.3.3 熱膨張係数.....	37
4.3.4 硬化度の熱膨張係数への影響.....	37
4.4 硬化収縮ひずみ係数.....	40
4.4.1 瞬時の温度変化によるミクロ応力分布.....	40
4.4.2 瞬時の温度変化による応力緩和.....	40
4.4.3 硬化収縮ひずみ.....	41
4.4.4 硬化度の硬化収縮ひずみへの影響.....	42
第5章 結言.....	44
謝辞.....	45
参考文献.....	46
付録1 樹脂の粘弾性構成方程式の差分化.....	47
付録2 硬化中の粘弾性構成方程式の差分化.....	50

# 第1章 緒言

## 1.1 研究背景

繊維強化プラスチック(Fiber Reinforced Plastic : FRP)とはエポキシ樹脂などの高分子材料を母材として、炭素繊維(Carbon)やガラス繊維(Glass)を強化材として加えた複合材料である。現在 FRP は軽量で高い強度、錆びない特性などの高性能な材料であることから航空機や自動車、建設材料など幅広い分野で用いられている。また FRP は設計の自由度が高いという特徴がある。FRP は強化繊維を母材である合成樹脂で固めた構造をしているため金型の形状の制限が少ない。加えて繊維方向や形状によって強度や弾性といった物性が異なる性質を持つため、繊維方向を強度に合わせて配置し設計することで無駄の少ない構造を設計することができる。そのため近年ではより大型で複雑な形状の FRP 製品も数多く登場してきている。これに伴いより複雑で巨大な形状の金型も登場している。しかし FRP を成形する際、脱型後に spring-in や spring-back といった意図しない変形が残留応力の影響で生じることがある。このような FRP の成形誘起変形が予測できれば成形後品質向上が期待できる。

成形誘起変形は金属や樹脂でも起こる現象である。そのため、金属や樹脂でも成形誘起変形は考慮されており、近年では成形シミュレーションソフトウェアを使用して成形後の変形を予測することが盛んにおこなわれている。金属の場合は、流動が大きいならば、温度依存の弾塑性特性や粘塑性特性が得られれば成形誘起変形の予測を行うことができる。熱可塑性樹脂の場合は、熔融温度以下では温度依存の粘塑性特性が変形予測に重要になる。熱硬化性樹脂の場合は、粘弾性特性は温度だけでなく硬化度にも依存するため、よりも多くの実験を必要とするが、一度特性を得ることができたならば、その樹脂を用いた様々な製品の成形誘起変形解析に活用できる。金属や樹脂の場合は等方性とみなしてよく、また体積弾性率は大きく変化しないため、成形シミュレーションのために取得すべき物性はせん断剛性に関するものであり、温度依存データの取得は必要であるが多くは無い。

FRP 製品の成形誘起変形シミュレーションを行うソフトウェアも既に多く開発・市販されていて、必要な物性値を取得すれば成形誘起変形の予測が可能となっている。しかし、FRP の場合は異方性であるため、3次元で9種類の物性について、温度・硬化度依存性を取得しなければならない。さらに加えて、同じ種類の繊維と樹脂を用いた場合であっても、繊維の強化形態が一方方向、織物、短繊維など異なった場合、また繊維体積含有率(Volume Fraction : Vf)が異なった場合には、FRP の物性も異なることになる。つまり使用する織物や樹脂の種類を変えたならば、成形シミュレーション用の物性値は取得し直す必要がある。実際の FRP 製品の設計では織物や Vf を用途に応じて変更することは多いため、成形シミュレーション用の物性値を取得する実験コストを考えれば、気軽に成形シミュレーションを行うことが出来ないのが現状である。

繊維と樹脂の物性が既知であれば、FRP のマクロ特性は予測できると考えるのは当然である。それを実現するのがマルチスケール解析手法であり、様々な手法が提案されてきたが、近年注目されているのが均質化法である。均質化法は周期的なマイクロ構造を持つ材料に関して、マイクロ構造からマクロ特性を予測し、マクロ応答からマイクロの応力・ひずみ分布を計算する手法である。FRP を、周期構造を持つ材料と考えれば、均質化法により FRP のマクロ特性が予測できる。この場合、必要なのは繊維と樹脂の物性とマイクロ構造だけであり、成形シミュレーションに必要となる物性値を得るための手間は、樹脂のそれと変わらなくなる。

## 1.2 FRP のマルチスケール FEM 解析

均質化法を用いた FRP のマルチスケール FEM (Finite Element Method : 有限要素法) 解析については数多くの研究者が研究を行っており, 非常に多くの研究成果が発表されている. 近年では弾塑性, 粘弾性, 粘組成, 損傷進展などの非線形問題に適用することを目指した研究も多い.

熱硬化性樹脂は粘弾性体として扱うことが出来て, 熱硬化性樹脂基 FRP も粘弾性特性を持つ. ただし, 温度だけでなく硬化度にも依存する. FRP の粘弾性特性のマルチスケール解析は, 荒井ら[3]や, 寺田ら[1, 5]によって提案され, 均質化法で FRP のマクロ特性が予測可能であることが示されている. また寺田ら[2]は, 硬化中の熱硬化性樹脂基 FRP のマクロ粘弾性特性を, 樹脂の特性から予測する手法を提案している. しかし硬化中の熱硬化性樹脂基 FRP のマルチスケール解析に関する論文はまだ多くなく, 実験的な検証も不十分であり, まだまだ発展途上であると言える.

## 1.3 研究目的

本研究では, 硬化中の樹脂の粘弾性モデルを元に, 周期境界条件を与えた代表体積要素 (RVE : Representative Volume Element) に生じる平均応力から, FRP の粘弾性剛性および熱膨張係数, 硬化収縮係数を求める手法を確立することを目的とした. 本研究では, 汎用有限要素法ソフトウェア Abaqus に硬化中の樹脂の粘弾性モデルを実装し, 一方向 FRP を対象として硬化度と温度を変えて応力緩和挙動を調べ, そこから硬化中の FRP の粘弾性特性, 硬化収縮ひずみおよび熱ひずみを求めた. そして得られた結果をもとに, マクロモデルの検討を行った.

## 第2章 均質化法によるマルチスケール成形 FEM 解析

### 2.1 均質化法

均質化法とは FRP のような一様な周期的な内部構造を持つ材料に用いることができる。周期構造の最小単位ユニットセルからマクロ特性を予測する手法であり、またマクロ応力分布やひずみ分布から、ミクロ応力分布を得ることができる。

ここでは図 2.1 のような中央に円形の介在物があるユニットセルの線形弾性体からなる 3 次元平面応力 FEM モデルを考える。このユニットセルが材料の周期的な最小単位ユニットセルのミクロ構造だと仮定する。

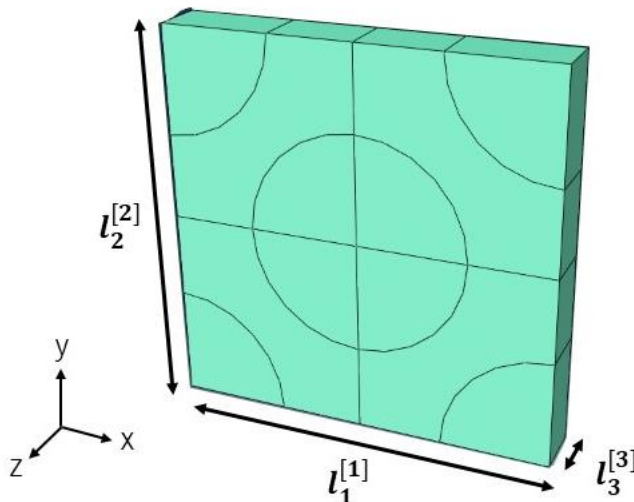


Fig2.1 Unit cell model.

仮想的な均質体のマクロ変位，応力についてその力学挙動を支配する方程式は次のようになる。

$$\partial_x^T \Sigma + \bar{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\Sigma = D^H E_M \quad (2.2)$$

ここで  $\Sigma$  はマクロ応力， $E_M$  はマクロひずみ（機械ひずみ）， $\bar{B}$  は物体力である。 $D^H$  は仮想的な均質体としての弾性係数行列，すなわちマクロ剛性行列である。上付きの添え字の H は均質化された (homogenized) を表している。均質化剛性を得られたならば，マクロ方程式は一般的な有限要素法で解くことができる。

$$D^H = \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & D_{13}^H & D_{14}^H & D_{15}^H & D_{16}^H \\ D_{21}^H & D_{22}^H & D_{23}^H & D_{24}^H & D_{25}^H & D_{26}^H \\ D_{31}^H & D_{32}^H & D_{33}^H & D_{34}^H & D_{35}^H & D_{36}^H \\ D_{41}^H & D_{42}^H & D_{43}^H & D_{44}^H & D_{45}^H & D_{46}^H \\ D_{51}^H & D_{52}^H & D_{53}^H & D_{54}^H & D_{55}^H & D_{56}^H \\ D_{61}^H & D_{62}^H & D_{63}^H & D_{64}^H & D_{65}^H & D_{66}^H \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

一方，ユニットセルでのミクロ変位は，ひずみ支配方程式は

$$\partial_y^T \sigma + \bar{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

となる．ここで $\boldsymbol{\sigma}$ はマイクロ応力， $\boldsymbol{\varepsilon}$ はマイクロひずみである． $\mathbf{D}$ は，マイクロ構造を構成するそれぞれの材料の弾性係数行列である．ユニットセルの支配方程式は，マクロひずみと境界条件を与えることにより，有限要素法で解くことができる．

周期境界条件は相対変位として与えられ，対応する面の相対変位は，例えば図 2.1 に示すユニットセルの場合は以下に式でマクロひずみと結びつけられる．

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[1]} \\ \mathbf{u}_2^{[1]} \\ \mathbf{u}_3^{[1]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-1]} \\ \mathbf{u}_2^{[-1]} \\ \mathbf{u}_3^{[-1]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1^{[1]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l_1^{[1]}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_1^{[1]}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[1]} \\ \mathbf{q}_2^{[1]} \\ \mathbf{q}_3^{[1]} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[2]} \\ \mathbf{u}_2^{[2]} \\ \mathbf{u}_3^{[2]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-2]} \\ \mathbf{u}_2^{[-2]} \\ \mathbf{u}_3^{[-2]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{l_2^{[2]}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & l_2^{[2]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_2^{[2]}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[2]} \\ \mathbf{q}_2^{[2]} \\ \mathbf{q}_3^{[2]} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[3]} \\ \mathbf{u}_2^{[3]} \\ \mathbf{u}_3^{[3]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-3]} \\ \mathbf{u}_2^{[-3]} \\ \mathbf{u}_3^{[-3]} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_3^{[3]}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_3^{[3]}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & l_3^{[3]} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[3]} \\ \mathbf{q}_2^{[3]} \\ \mathbf{q}_3^{[3]} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ここで，図 2.1 に示されるように，変位の右上の添え字[1]，[-1]はそれぞれ右と左の面を，[2]，[-2]は上と下の面を，[3]，[-3]は前と後の面を表すまた $l_1^{[1]}$ は左右の節点位置間のベクトルの x 成分， $l_2^{[2]}$ は上下の節点位置間のベクトルの y 成分， $l_3^{[3]}$ は前後の節点位置間のベクトルの z 成分であり，この式は左右の面が x 軸に平行，上下の面が y 軸に平行，前後の面が z 軸に平行の時のみ成り立つことに注意する． $\mathbf{q}$  はマクロひずみから得られる相対変位量である．式(2.6)と(2.7)と(2.8)にマクロひずみを与えて，ユニットセルに周期境界条件を与える．

## 2.2 均質化剛性の計算

均質化弾性係数を求めるにはユニットセルの有限要素解析を，例えば以下に示す単位マクロひずみを用いて行う．均質化弾性係数の算出のためにユニットセルに与えるべき単位マクロひずみパターンは以下の 6 つである．

$$\begin{aligned} \bar{E}^{(1)} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{E}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{yy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{E}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{zz} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \bar{E}^{(4)} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{yz} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \bar{E}^{(5)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \bar{E}^{(6)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

ただし $\bar{E}=1$ とする．均質化弾性係数行列を求めるにはこれらの単位ひずみをユニットセルの相対する変換の相対変位として与える．例えば $\varepsilon_{xx} = 1$ の場合(2.6), (2.7), (2.8)に適用すると,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[1]} \\ \mathbf{u}_2^{[1]} \\ \mathbf{u}_3^{[1]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-1]} \\ \mathbf{u}_2^{[-1]} \\ \mathbf{u}_3^{[-1]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1^{[1]} \varepsilon_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[1]} \\ \mathbf{q}_2^{[1]} \\ \mathbf{q}_3^{[1]} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[2]} \\ \mathbf{u}_2^{[2]} \\ \mathbf{u}_3^{[2]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-2]} \\ \mathbf{u}_2^{[-2]} \\ \mathbf{u}_3^{[-2]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[2]} \\ \mathbf{q}_2^{[2]} \\ \mathbf{q}_3^{[2]} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[3]} \\ \mathbf{u}_2^{[3]} \\ \mathbf{u}_3^{[3]} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^{[-3]} \\ \mathbf{u}_2^{[-3]} \\ \mathbf{u}_3^{[-3]} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{[3]} \\ \mathbf{q}_2^{[3]} \\ \mathbf{q}_3^{[3]} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

となる．他の単位ひずみのパターンについても同様の関係が得られる．(2.9)に示した6パターンの単位マクロひずみをそれぞれ(2.6), (2.7), (2.8)に与えて制御接点の相対変位ベクトルとユニットセル境界面間の多点拘束条件式を設定する．そしてこの条件下で合計6回の数値材料試験を実施すると, 境界面に関する3つのダミー制御接点 RP-1, RP-2, RP-3 の反力ベクトル RF1, RF2, RF3 が得られる．この反力はマクロ応力成分と以下のような関係にある．

$$\mathbf{RP-1} = \mathbf{RF1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{RF1-1} \\ \mathbf{RF1-2} \\ \mathbf{RF1-3} \end{Bmatrix} = l_2 l_3 \begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^{(1)} \\ \Sigma_{12}^{(1)} \\ \Sigma_{31}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{RP-2} = \mathbf{RF2} = \begin{Bmatrix} \mathbf{RF2-1} \\ \mathbf{RF2-2} \\ \mathbf{RF2-3} \end{Bmatrix} = l_3 l_1 \begin{Bmatrix} \Sigma_{12}^{(1)} \\ \Sigma_{22}^{(1)} \\ \Sigma_{23}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{RP-3} = \mathbf{RF3} = \begin{Bmatrix} \mathbf{RF3-1} \\ \mathbf{RF3-2} \\ \mathbf{RF3-3} \end{Bmatrix} = l_1 l_2 \begin{Bmatrix} \Sigma_{31}^{(1)} \\ \Sigma_{23}^{(1)} \\ \Sigma_{33}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

したがって、マクロ応力の成分を求めるにはこれらの反力の成分を3次元問題におけるユニットセルの境界面積で割ることで求めることができる。6パターンの単位マクロひずみを与える数値材料試験を行うと、ダミー制御接点における反力ベクトルが6つ得られる。それらの成分をすべて上げると、マクロ剛性行列  $D^H$  は

$$D^H = \begin{bmatrix} D_{11}^H & D_{12}^H & D_{13}^H & D_{14}^H & D_{15}^H & D_{16}^H \\ & D_{22}^H & D_{23}^H & D_{24}^H & D_{25}^H & D_{26}^H \\ & & D_{33}^H & D_{34}^H & D_{35}^H & D_{36}^H \\ & & & D_{44}^H & D_{45}^H & D_{46}^H \\ & & & & D_{55}^H & D_{56}^H \\ \text{sym} & & & & & D_{66}^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}^{(1)} & \Sigma_{11}^{(2)} & \Sigma_{11}^{(3)} & \Sigma_{11}^{(4)} & \Sigma_{11}^{(5)} & \Sigma_{11}^{(6)} \\ & \Sigma_{22}^{(2)} & \Sigma_{22}^{(3)} & \Sigma_{22}^{(4)} & \Sigma_{22}^{(5)} & \Sigma_{22}^{(6)} \\ & & \Sigma_{33}^{(3)} & \Sigma_{33}^{(4)} & \Sigma_{33}^{(5)} & \Sigma_{33}^{(6)} \\ & & & \Sigma_{23}^{(4)} & \Sigma_{23}^{(5)} & \Sigma_{23}^{(6)} \\ & & & & \Sigma_{31}^{(5)} & \Sigma_{31}^{(6)} \\ \text{sym} & & & & & \Sigma_{12}^{(6)} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

となる。よって3次元問題であれば6方向の単位マクロひずみをユニットセルに与えることにより、それぞれのケースでのマクロ応力成分そのものがマクロ剛性行列  $D^H$  の列ベクトルとして得られる。

### 2.3 樹脂の粘弾性モデル

本研究では、粘弾性モデルとして Maxwell モデルの拡張である Prony 級数の拡張モデルを用いる。樹脂の粘弾性特性を図 2.2 に示す一般化 Maxwell モデルを表す。図中の  $G_i$  は、ばねの剛性、 $\eta_i$  は粘性である。 $G_\infty$  は緩和現象が終了したときの弾性率であり、長期せん断弾性率と呼ばれる。

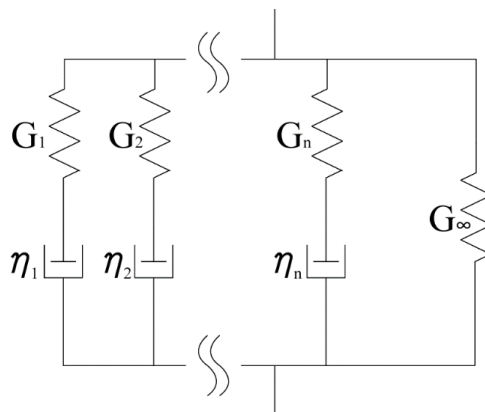


Fig2.2 Generalized Maxwell model.

このとき、緩和時間  $\tau_i$  は

$$\tau_i = \frac{1}{\eta_i} \quad (2.17)$$

で表される。

モデルに固定変位を与えると、発生した荷重はダッシュポッドにより時間とともに緩和され、最短の緩和時間を持つ要素から順に荷重を失っていく。よって剛性は時間の関数となり、以下の Prony 級数で表現される。



$$\mathbf{G}(\tilde{t}) = \mathbf{G}_\infty + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \left( \mathbf{1} - e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_i}} \right) \quad (2.18)$$

ここで、初期剛性は

$$\mathbf{G}(\mathbf{0}) = \mathbf{G}_0 = \mathbf{G}_\infty + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \quad (2.19)$$

となる。よって、各要素の無次元剛性を

$$g_i = \frac{\mathbf{G}_i}{\mathbf{G}_0} \quad (2.20)$$

と定義すると式(2.18)は、

$$\mathbf{G}(\tilde{t}) = \mathbf{G}_0 \left( \mathbf{1} - \sum_{i=1}^n g_i \left( \mathbf{1} - e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_i}} \right) \right) \quad (2.21)$$

となる。ここで時間を無限大にとると

$$\mathbf{G}(\infty) = \mathbf{G}_\infty = \mathbf{G}_0 \left( \mathbf{1} - \sum_{i=1}^n g_i \right) \quad (2.22)$$

となる。

本研究では、瞬時せん断剛性 $\mathbf{G}_0$ のみが硬化に依存するものとして、以下の式で硬化中の樹脂の粘弾性特性を表した。

$$\mathbf{G}(\tilde{t}, \lambda) = \mathbf{G}_0(\lambda) \left( \mathbf{1} - \sum_{i=1}^n g_i \left( \mathbf{1} - e^{-\frac{\tilde{t}}{\tau_i}} \right) \right) \quad (2.23)$$

## 2.4 樹脂の粘弾性構成方程式

等方性体の粘弾性構成方程式は、一般に以下の畳み込み積分の形で表される

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{2G}(t-s) \dot{\mathbf{e}} ds + \mathbf{I} \int_0^t \mathbf{K}(t-s) \dot{\boldsymbol{\phi}} ds \quad (2.24)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\mathbf{e}$ は偏差ひずみテンソル、 $G$ はせん断弾性率、 $K$ は体積弾性率、 $\mathbf{I}$ は単位テンソル、 $\boldsymbol{\phi}$ は体積ひずみである。また $\boldsymbol{\varepsilon}$ を機械ひずみとすると

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\varepsilon}_{11} + \boldsymbol{\varepsilon}_{22} + \boldsymbol{\varepsilon}_{33} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \boldsymbol{\phi} \mathbf{I} \quad (2.26)$$

である。ほとんどの樹脂の場合は体積粘弾性が無視できて、式(2.4.1)は

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathbf{2G}(t-s) \dot{\mathbf{e}} ds + \mathbf{I} \mathbf{K}_0 \boldsymbol{\phi} \quad (2.27)$$

と表すことができる。本研究ではこの式を差分化して、FORTRAN でプログラミングを行い、汎用有限要素法ソフトウェア ABAQUS のユーザーサブルーチン UMAT に組み込んだ。

粘弾性特性は温度に大きく依存するため、時間-温度換算則より、温度の影響を考慮した換算時間 $\tilde{t}$ を実時間 $t$ の代わりに用いて実際の時間計算を行う。

$$\tilde{t} = \frac{t}{A_T} \quad (2.28)$$

ここでは $A_T$ は温度シフトファクタと呼ばれる。本研究では、アレニウスの式より以下のモデルで $A_T$ を求めている。

$$\log A_T = \frac{E}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_g} \right) \quad (2.29)$$

## 2.5 硬化中の FRP の粘弾性構成方程式と均質化剛性

成形中の FRP の剛性は、過去の研究を参考に以下の Maxwell モデルの式で表されるものとした。

$$\mathbf{Q}(\tilde{t}, \lambda) = \mathbf{Q}(\lambda)_\infty - \sum_{k=1}^{N_p} \mathbf{Q}(\lambda)_k \exp \left[ \frac{\tilde{t}}{\tau_{ijk}} \right] \quad (2.30)$$

ここで $\mathbf{Q}$ は剛性行列、 $\mathbf{Q}(\lambda)_\infty$ は完全緩和時の剛性、 $\mathbf{Q}(\lambda)_k$ はプロニー級数項の剛性、 $\tau_{ijk}$ はプロニー級数項の緩和時間である。なお、 $i, j$ は剛性の指数を示す。各項の緩和時間には樹脂と同じものを用いた。

一定ひずみを瞬時に与えて保持した RVE の数値実験により、応力緩和曲線を得ることが出来る。

$$\boldsymbol{\Sigma}(\tilde{t}) = \mathbf{Q}(\tilde{t}, \lambda) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \} \quad (2.31)$$

ここで $\boldsymbol{\Sigma}$ は平均応力テンソル、 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ は定ひずみテンソルであり、単軸ひずみを与えれば各剛性係数の緩和曲線が得られる。

## 2.6 FRP の均質化熱膨張係数・均質化硬化収縮係数

機械ひずみから熱ひずみを引くことで熱ひずみの影響が得られることになるが、本研究では寺田らの成果を参考に、各プロニー級数項の要素のひずみから均等ではない熱ひずみが引かれるものとした。すなわち、一定ひずみを与えたユニットセルにおいては

$$\boldsymbol{\Sigma}(\tilde{t}) = \mathbf{Q}(\tilde{t}, \lambda) \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \} - \left\{ \mathbf{Q}(\lambda)_\infty \boldsymbol{\alpha} - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Q}(\lambda)_i \exp \left[ \frac{\tilde{t}}{\tau_{ijk}} \right] \boldsymbol{\alpha}_j \right\} \Delta T \quad (2.32)$$

よって、ゼロひずみを与えたときの応力緩和曲線から

$$\boldsymbol{\Sigma}(\infty) = -\mathbf{Q}(\lambda)_\infty \boldsymbol{\alpha}_\infty \Delta T \quad (2.33)$$

また、平均応力に同じ緩和時間のプロニー級数を当てはめることで、以下の級数を定めることができる。

$$\boldsymbol{\Sigma}(\tilde{t}) = \boldsymbol{\Sigma}(\infty) - \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{Q}(\lambda)_i \exp \left[ \frac{\tilde{t}}{\tau_{ijk}} \right] \boldsymbol{\alpha}_j \quad (2.34)$$

よって、各プロニー級数項に対応する熱膨張係数 $\alpha_j$ は、以下の式から得られる。

$$\Sigma(\lambda)_k = -Q(\lambda)_i \alpha_j \Delta T \quad (2.35)$$

また硬化収縮ひずみは熱膨張係数と同様で

$$\Sigma(\tilde{t}) = Q(\tilde{t}, \lambda)\{\varepsilon_0\} - \left\{ Q(\lambda)_\infty \beta - \sum_{i=1}^{N_p} Q(\lambda)_i \exp\left[\frac{\tilde{t}}{\tau_{ijk}}\right] \beta_k \right\} \Delta \lambda \quad (2.36)$$

という式が得られる。ゼロひずみを与えたときの応力緩和曲線から

$$\Sigma(\infty) = -Q(\lambda)_\infty \beta_\infty \Delta \lambda \quad (2.37)$$

平均応力に同じ緩和時間のプロニー級数を当てはめることで以下の級数を決めることができる。

$$\Sigma(\tilde{t}) = \Sigma(\infty) - \sum_{i=1}^{N_p} Q(\lambda)_i \exp\left[\frac{\tilde{t}}{\tau_{ijk}}\right] \quad (2.38)$$

よって、各プロニー級数に対する硬化収縮ひずみ $\beta_k$ は以下の式で得られる。

$$\Sigma(\lambda)_k = -Q(\lambda)_i \beta_k \Delta \lambda \quad (2.39)$$

### 第3章 解析方法

#### 3.1 硬化後の樹脂・繊維の材料特性

硬化収縮ひずみ  $\varepsilon_h$  はディラトメーターを用いて測定され、その結果から硬化度 70%以上で硬化収縮ひずみが硬化度に比例するモデルを用いた。

本研究で用いたエポキシ樹脂は、主剤が jER801N、硬化剤が jERCURE3080 であり 1:0.45 の混合比で混ぜて 80°Cで完全硬化させたものである。なお、レオメーターを用いた動的粘弾性測定試験では硬化させながら測定している。

本研究では、繊維としてガラス繊維を用いて検討を行った。また樹脂の高温域での粘弾性特性を測定するために、硬化後の樹脂に対して DMA(Dynamic Mechanical Analyzer)を用いて三点曲げクリープ試験を行った。与えたたわみは非常に微小であるため、曲げクリープで得られたコンプライアンスを求め、ガラス転移温度におけるクリープ曲線のマスターカーブを得た。その結果を図 3.1 に示す。この図より樹脂の緩和時間を求めることができる。

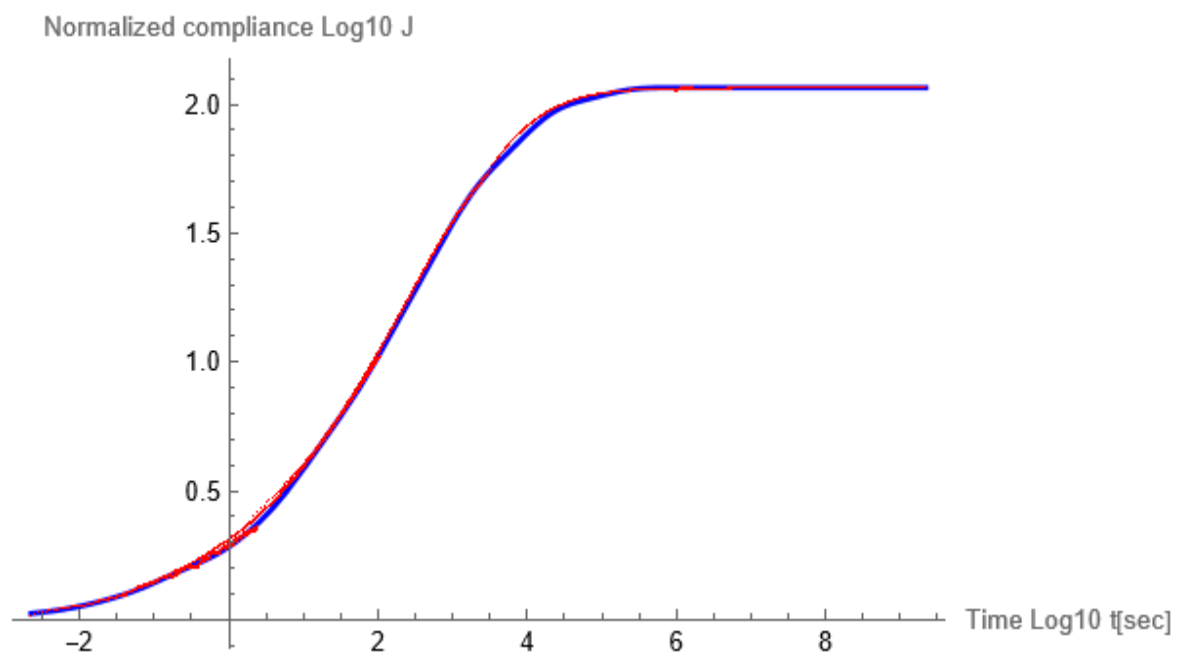


Fig.3.1 Master curve of creep compliance and the prony approximation

樹脂のプロニー級数は、三点曲げクリープ試験結果から得られた無次元コンプライアンスに 9 項のプロニー級数を非線形最小二乗法で当てはめる。その際、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & 1 + 0.0343669 (1 - e^{-1000t}) + 0.0844533 (1 - e^{-100t}) + 0.343272 (1 - e^{-10t}) + \\
 & 0.287496 (1 - e^{-t}) + 1.96791 (1 - e^{-t/10}) + 4.935 (1 - e^{-t/100}) + \\
 & 32.5277 (1 - e^{-t/1000}) + 53.4236 (1 - e^{-t/10000}) + 21.2212 (1 - e^{-t/100000})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

得られた級数にラプラス変換を行って式(3.2)のように表される。

$$\frac{115.825}{s} - \frac{21.2212}{\frac{1}{100000} + s} - \frac{53.4236}{\frac{1}{10000} + s} - \frac{32.5277}{\frac{1}{1000} + s} - \frac{4.935}{\frac{1}{100} + s} - \frac{1.96791}{\frac{1}{10} + s} - \frac{0.287496}{1 + s} - \frac{0.343272}{10 + s} - \frac{0.0844533}{100 + s} - \frac{0.0343669}{1000 + s} \quad (3.2)$$

さらに式(3.2)の逆数に $\frac{1}{s^2}$ をかけると式(3.3)のように表される。

$$\frac{1}{s^2} \left( \frac{115.825}{s} - \frac{21.2212}{\frac{1}{100000} + s} - \frac{53.4236}{\frac{1}{10000} + s} - \frac{32.5277}{\frac{1}{1000} + s} - \frac{4.935}{\frac{1}{100} + s} - \frac{1.96791}{\frac{1}{10} + s} - \frac{0.287496}{1 + s} - \frac{0.343272}{10 + s} - \frac{0.0844533}{100 + s} - \frac{0.0343669}{1000 + s} \right) \quad (3.3)$$

式(3.3)を逆ラプラス変換すると、式(3.4)のように表される。

$$\begin{aligned} & 0.00863371 + 0.0340706 e^{-1034.82t} + 0.0778242 e^{-108.459t} + 0.217884 e^{-13.1588t} + \\ & 0.139874 e^{-1.22726t} + 0.325923 e^{-0.234488t} + 0.137827 e^{-0.0266499t} + \\ & 0.0468416 e^{-0.00404504t} + 0.00946828 e^{-0.000209385t} + 0.00165381 e^{-0.0000120735t} \end{aligned} \quad (3.4)$$

式(3.4)の各項の $e$ の指数部分の逆数を取ると各プロニー級数を求めることができる。その求めたプロニー級数と繊維と樹脂の特性を表 3.1 に示す。

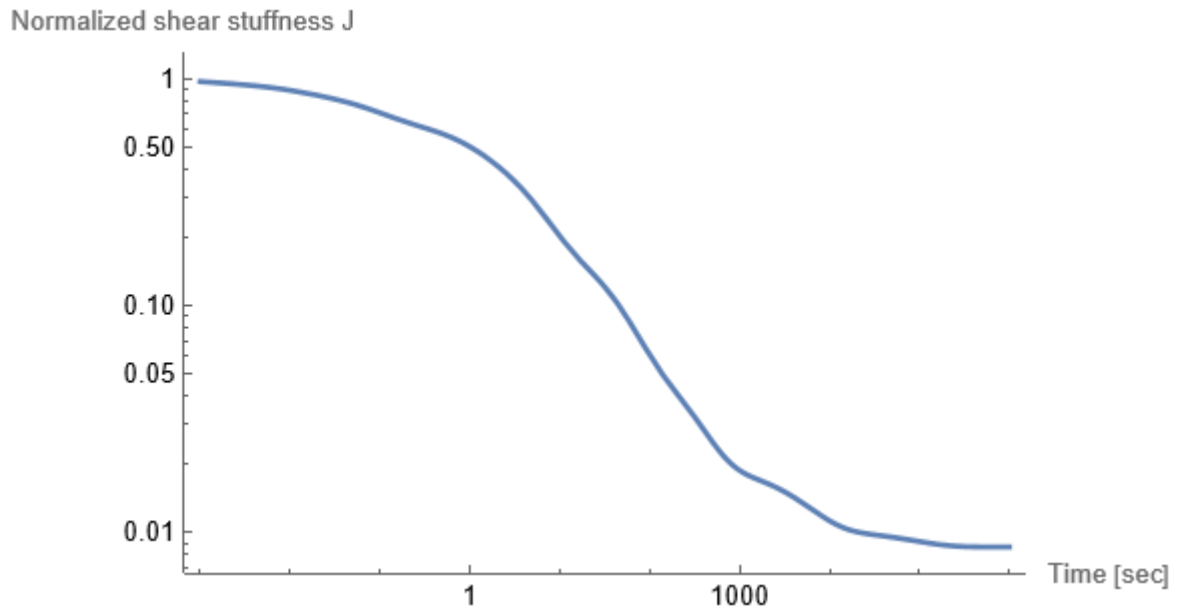


Fig.3.2 Relationship between normalized shear stiffness and time

Table.3.1 Prony parameters of epoxy resin

Parameter		Value	
Glass			
$E_0$ [GPa]		70	
$\nu$		0.3	
$\alpha_T$		$5 \times 10^{-6}$	
Epoxy Resin			
Mechanical			
$G_0$ [GPa]		0.978	
$\nu_0$		0.38	
$\alpha_T(T < 52^\circ\text{C})$		$83 \times 10^{-6}$	
$\alpha_T(T \geq 52^\circ\text{C})$		$180 \times 10^{-6}$	
$T_g$ [°C]		52	
$E_T$ [kJ/mol]		56.845	
Prony Parameters			
$g_1$	0.034070	$\tau_1$	0.00096635[sec]
$g_2$	0.077824	$\tau_2$	0.0092200[sec]
$g_3$	0.21788	$\tau_3$	0.075995[sec]
$g_4$	0.13987	$\tau_4$	0.81482 [sec]
$g_5$	0.32592	$\tau_5$	4.2646 [sec]
$g_6$	0.13783	$\tau_6$	37.524 [sec]
$g_7$	0.046842	$\tau_7$	247.22[sec]
$g_8$	0.0094683	$\tau_8$	4775.9[sec]
$g_9$	0.0016538	$\tau_9$	82826 [sec]

### 3.2 FEMモデル

本研究では、一方向 GFRP の横方向断面について三次元のマクロ剛性の計算を行う。汎用有限要素法ソフトウェア ABAQUS を用いて図 3.3 のようなユニットセルを作成した。図 3.3 はガラス繊維を四角形に配置したユニットセルである。ガラス繊維は直径  $8[\mu\text{m}]$  とした。FEM モデルは繊維の Vf を 50% にしてモデルを作成した。なお図 3.3 に示すように本研究では z 方向が繊維方向で、x-y 方向が面内等方方向である。

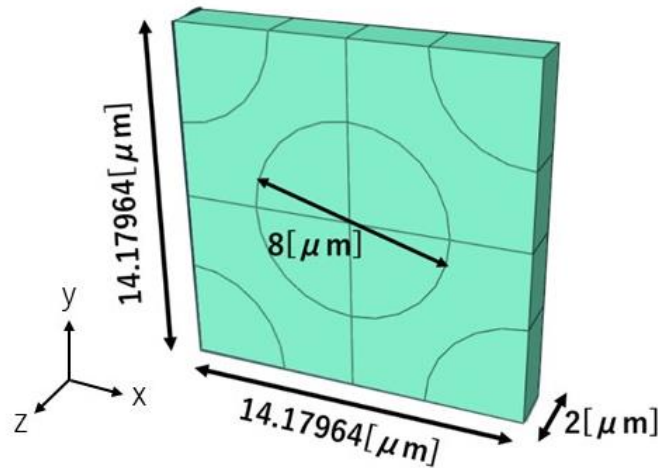


Fig.3.3 Unit cell model

### 3.3 境界条件

本研究では、汎用有限要素法ソフトウェア Abaqus を用いて有限要素解析を行った。Abaqus には標準で均質化法のユニットセルを与える周期境界条件を設定することができないので、節点間の拘束条件式として与える。また、節点間の相対変位は、周期境界状ではすべて同じ変位となるため、構造には含まれないダミーの制御節点を用意して、制御節点の強制変位を与える方法を採用した。図 3.4 に、制御節点の位置を示す。実は制御節点の位置はどこでも構わないがわかりやすくするために図の位置に参照点 (Reference Point : RP) を作成し、それを制御節点とする。

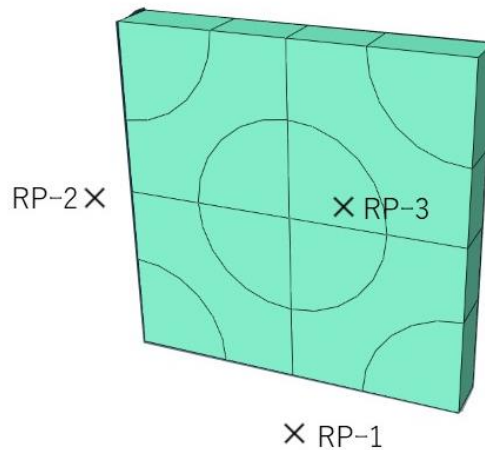


Fig.3.4 Unit cell model

まずユニットセルモデルの頂点に拘束条件式を与える。頂点の拘束条件式の与え方はそれぞれの頂点を一筆書きですべて通るように拘束条件式を与える。次にユニットセルモデルの辺上の節点に拘束条件式を与える。向かい合う辺上の節点、左右方向、上下方向、前後方向それぞれに境界条件を与える。しかしここで節点すべてに与えると頂点が最初に行った、頂点の拘束条件式を与えるものと重複してしまうため、最初の節点と最後の節点を除外するように設定しなければならない。最後にユニットセルモデルの面上の節点に拘束条件式を与える。向かい合う面上の節点を小さい順にそれぞれ左右方向、上下方向、前後方向に境界条件を与える。向かい合う面上の節点において点と点の距離公式を用いて、その距離が元々決めていた値より小さければその接点をペアとして拘束条件式を与える。この作業それぞれ python を用いて自動化した。

### 3.4 均質化剛性

本研究では、マクロひずみからマイクロモデルを計算してマクロ応力を求める。マクロひずみから RP の強制変位を計算し、Abaqus の境界条件に入力した後に Abaqus の FEM 計算を行い。その結果から RP の反力を取り出して、マクロ応力を求める。この計算はマクロひずみからマイクロ計算を行うものであるが、第 2 章で説明したように、単位ひずみを与えることによって計算されるマクロ応力から均質化剛性を得ることができる。与える単位ひずみは単軸垂直ひずみ(0.01,0,0,0,0), (0,0.01,0,0,0), (0,0,0.01,0,0)と単軸せん断ひずみ(0,0,0,0.01,0), (0,0,0,0,0.01), (0,0,0,0,0.01)であり、マクロひずみからマクロ応力を求める計算を 6 回させて均質化剛性を得る。

### 3.5 熱膨張係数, 硬化収縮ひずみ係数

マクロ熱膨張係数を求めるには、あらかじめ温度変化が 1 となるモデルを作成しておき、マクロひずみをゼロとして、マクロひずみからマクロ応力を求める計算を用いてマクロ応力を得る。そして、あらかじめ計算された均質化剛性とマクロ応力から、マクロ熱膨張係数を得ることができる。マクロ熱膨張係数  $\alpha_\infty$ ,  $\alpha_i$  は次式のように表される。

$$\alpha_\infty = Q_\infty^{-1} S_\infty \quad (3.5)$$

$$\alpha_i = Q_i^{-1} S_i \quad (3.6)$$

ここで  $Q_\infty$  は緩和剛性,  $Q_i$  はプロニー級数のバネ剛性を表す。  $S_\infty$ ,  $S_i$  はその時の応力を表す。

硬化収縮ひずみ係数は硬化度変化を ABAQUS では入力できないため、硬化度変化を温度変化で入力している。あらかじめ硬化度変化が 1 となるモデルを作成しておき、マクロひずみをゼロとして、マクロひずみからマクロ応力を求める計算を用いてマクロ応力を得る。そして、あらかじめ計算された均質化剛性とマクロ応力から、マクロ硬化収縮ひずみ係数を得ることができる。またマクロ硬化収縮ひずみ係数  $\beta_\infty$ ,  $\beta_i$  もマクロ熱膨張係数を求める時の(3.5), (3.6)と同様で

$$\beta_\infty = Q_\infty^{-1} S_\infty \quad (3.7)$$

$$\beta_i = Q_i^{-1} S_i \quad (3.8)$$

と表し、求めることができる。



## 第4章 解析結果

### 4.1 ミクロ応力分布

図 4.1~4.6 は剛性行列  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$ ,  $Q_{44}$ ,  $Q_{66}$  をそれぞれ求める際のある 3 点の時間における応力分布図を示す。時間はそれぞれ(a), (b), (c)は  $t=1.0e-07[s]$ ,  $t=10.1[s]$ ,  $t=1.01e+07[s]$ とする。

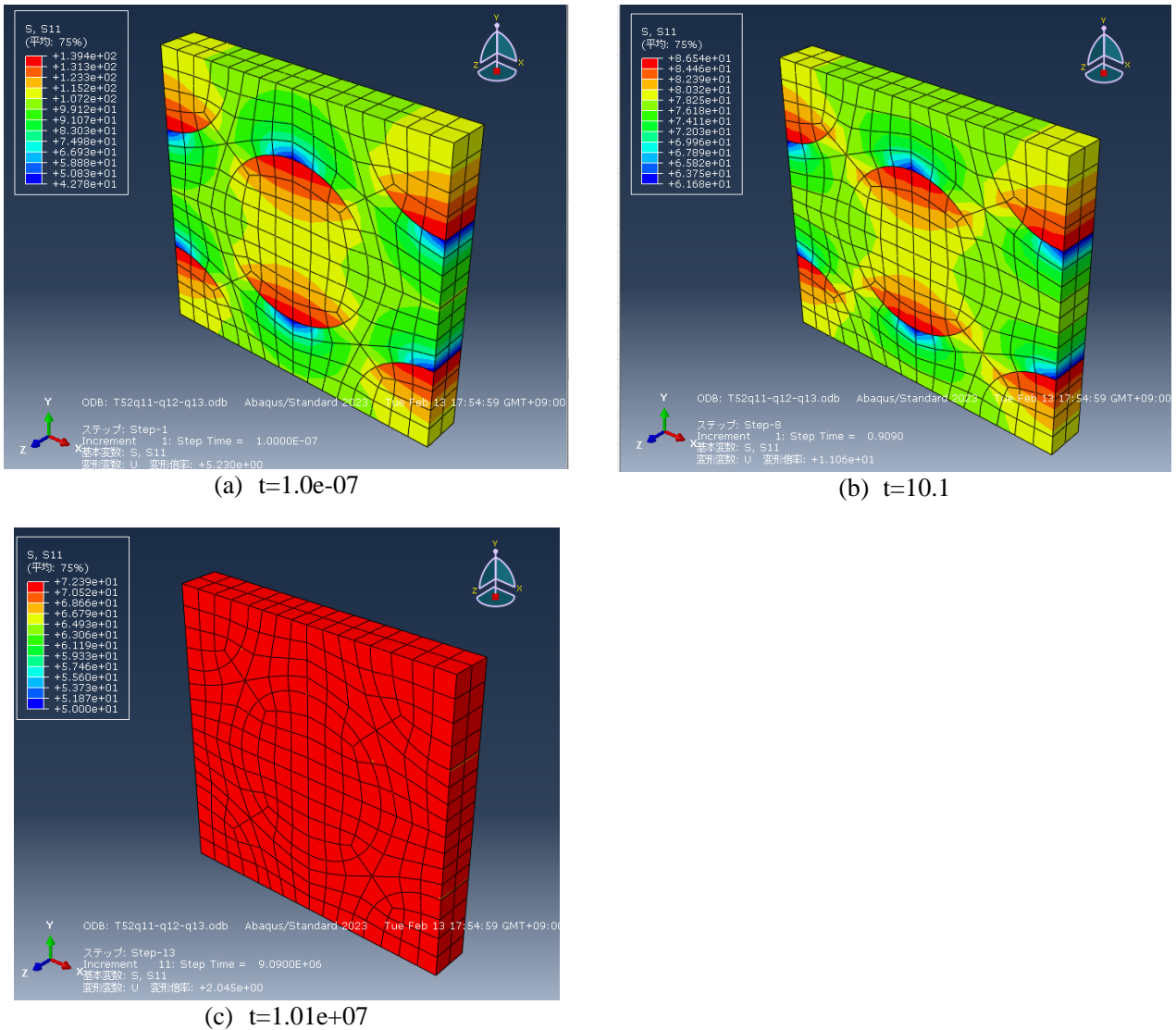
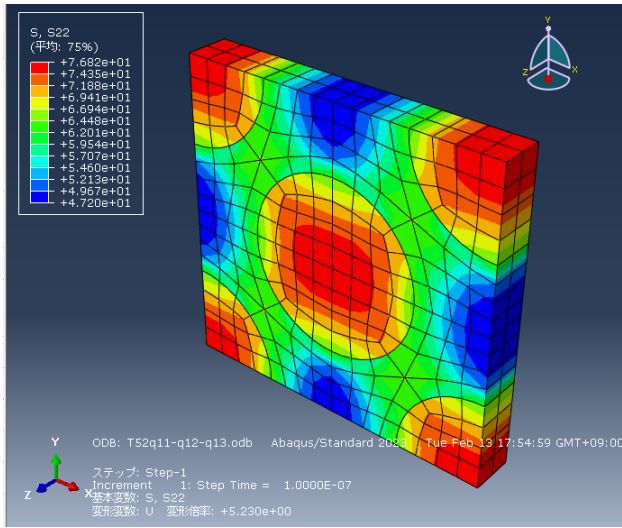
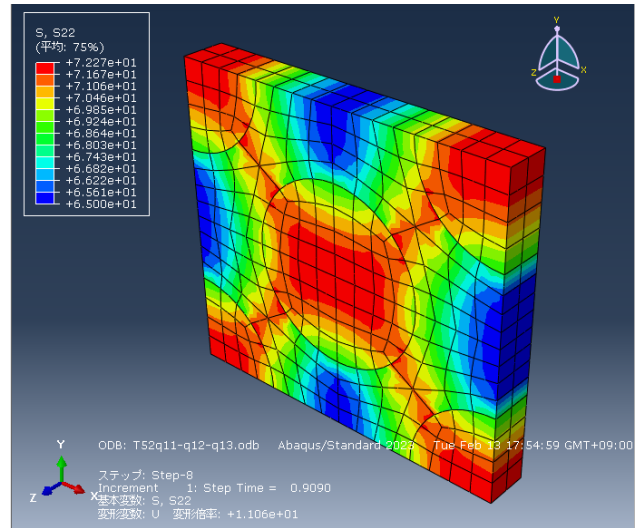


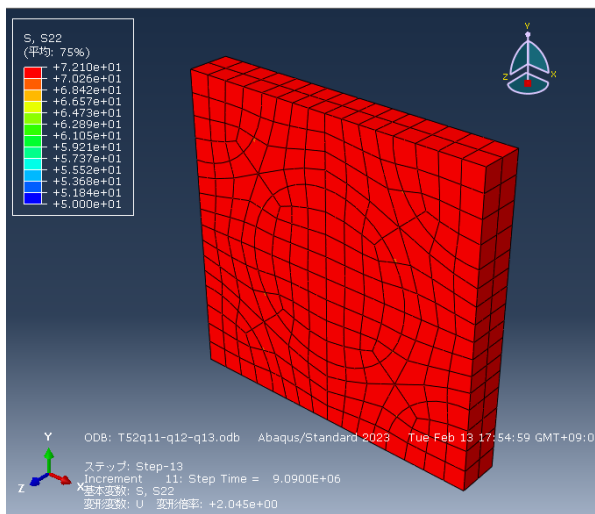
Fig.4.1 Stress of unit cell model ( $Q_{11}$ ,  $\lambda = 1.0$ )



(a)  $t=1.0e-07$

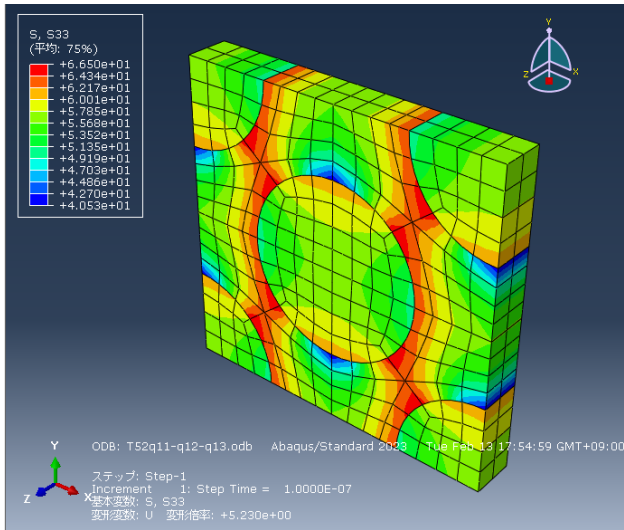


(b)  $t=10.1$

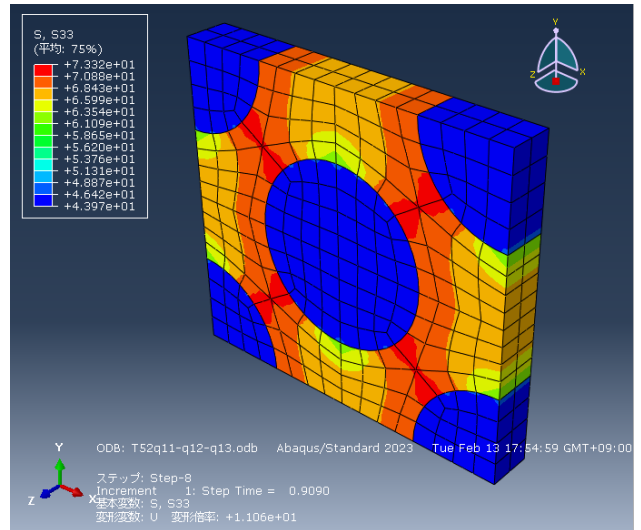


(c)  $t=1.01e+07$

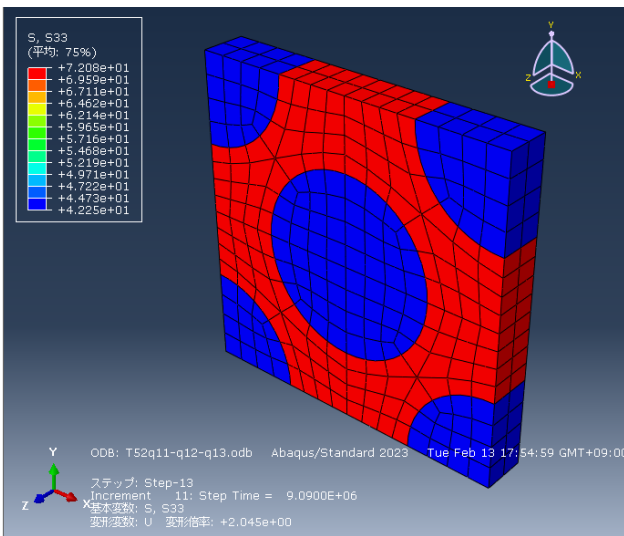
Fig.4.2 Stress of unit cell model (Q12,  $\lambda = 1.0$ )



(a)  $t=1.0e-07$

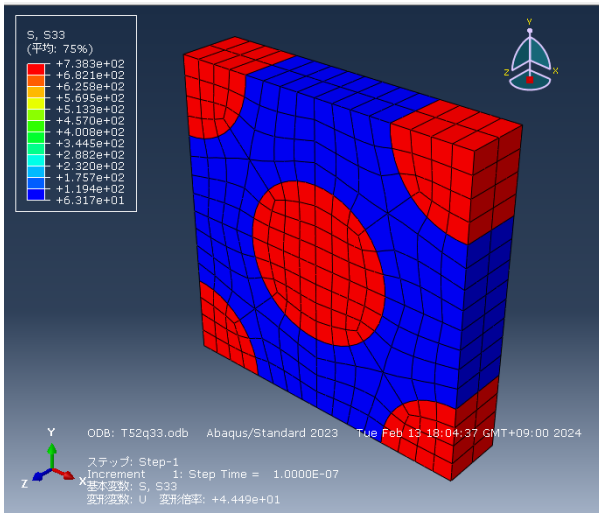


(b)  $t=10.1$

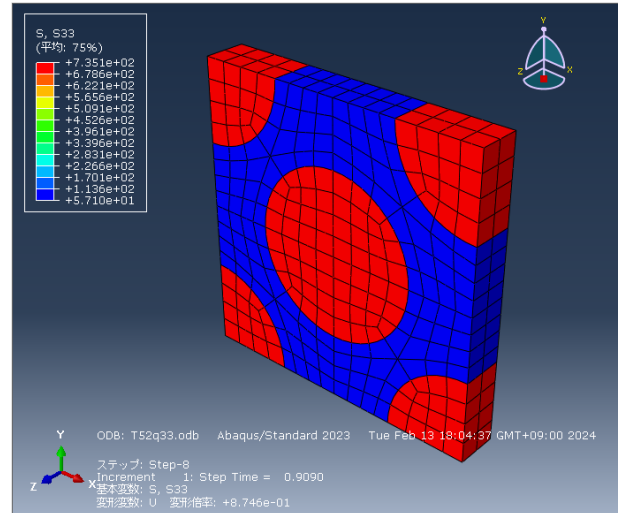


(c)  $t=1.01e+07$

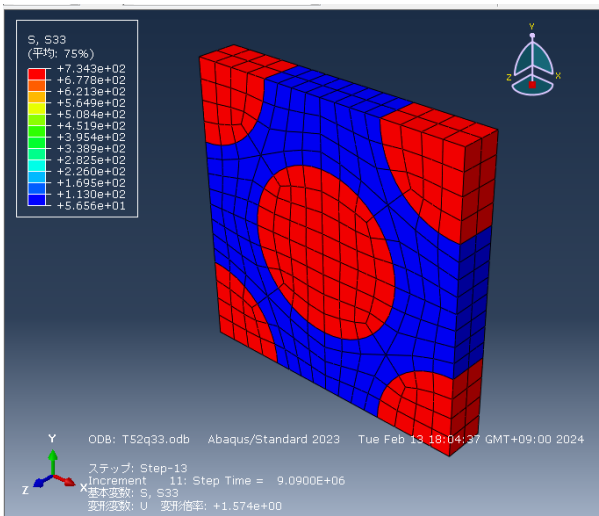
Fig.4.3 Stress of unit cell model (Q13,  $\lambda = 1.0$ )



(a)  $t=1.0e-07$

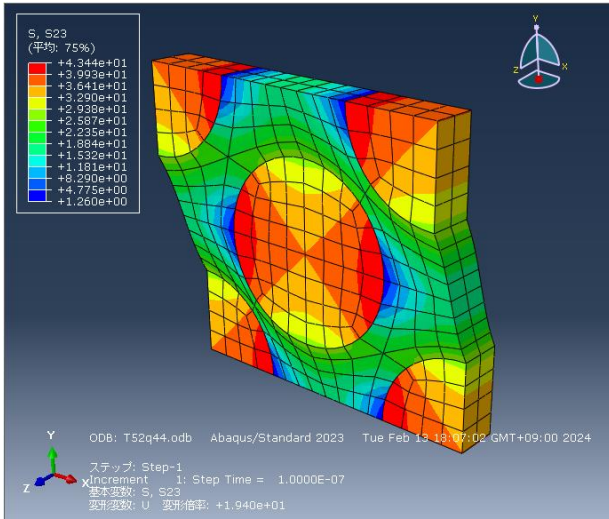


(b)  $t=10.1$

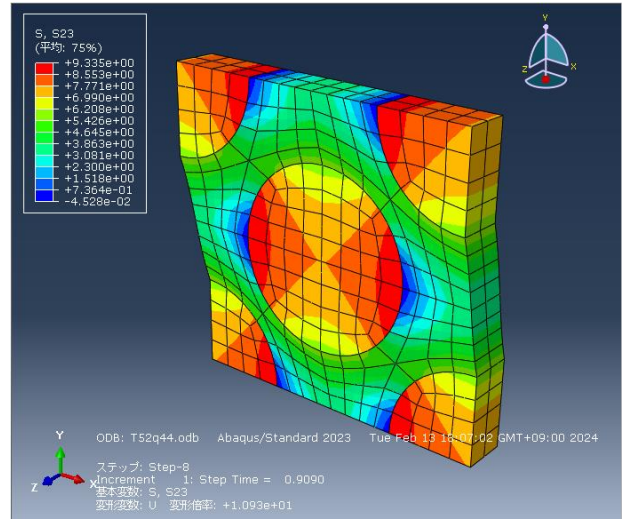


(c)  $t=1.01e+07$

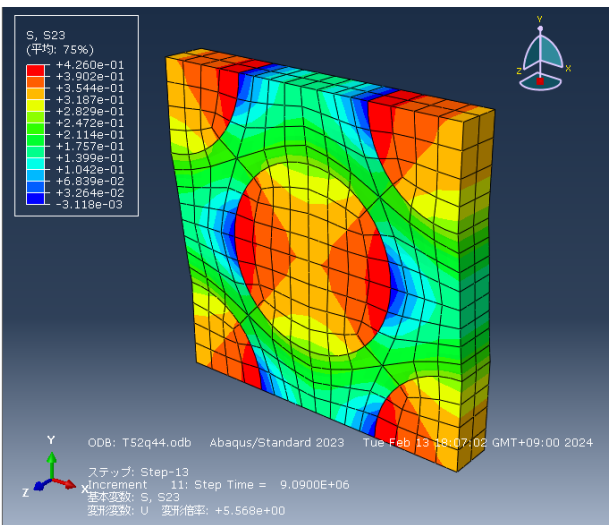
Fig.4.4 Stress of unit cell model (Q33,  $\lambda = 1.0$ )



(a)  $t=1.0e-07$

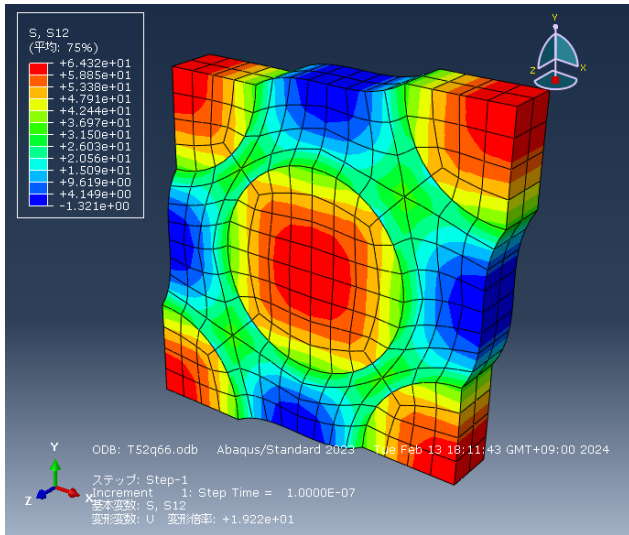


(b)  $t=10.1$

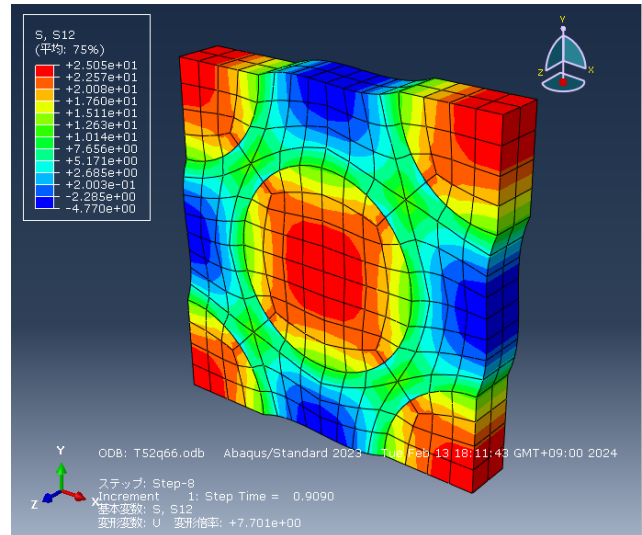


(c)  $t=1.01e+07$

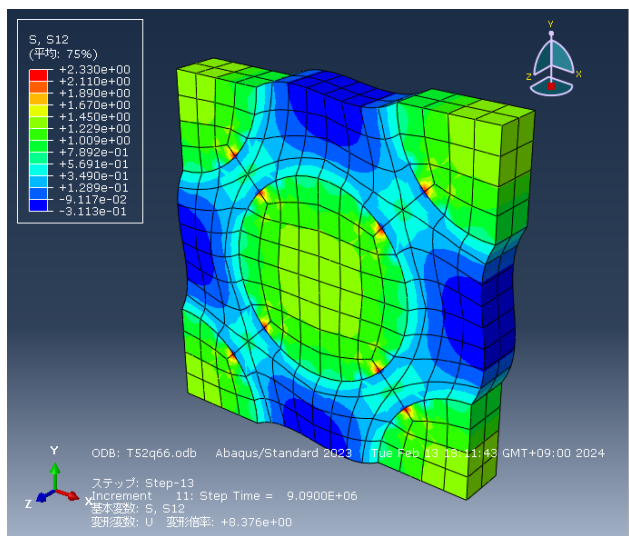
Fig.4.5 Stress of unit cell model (Q44,  $\lambda = 1.0$ )



(a)  $t=1.0e-07$



(b)  $t=10.1$



(c)  $t=1.01e+07$

Fig.4.6 Stress of unit cell model (Q66,  $\lambda = 1.0$ )

## 4.2 剛性行列

### 4.2.1 完全硬化時の剛性緩和

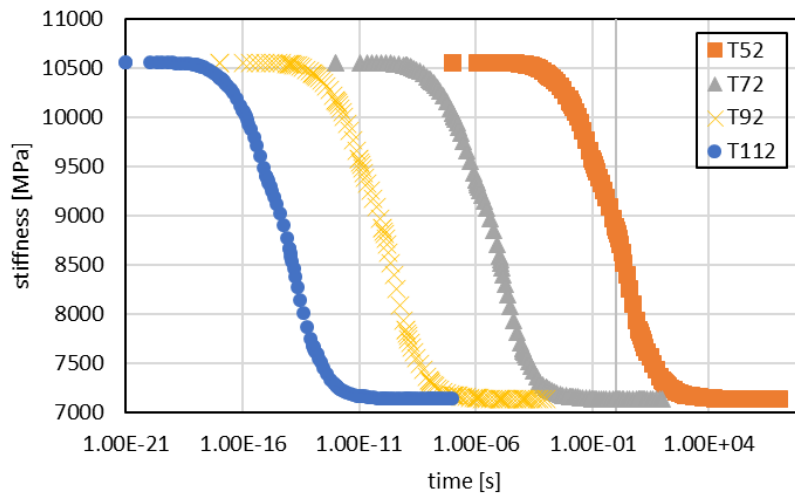
本研究では単軸ひずみを与えた場合の応力緩和曲線から、剛性緩和曲線を求めた。図 4.1(a)~(f)に、硬化度 100%の時の剛性行列 Q11, Q12, Q13, Q33, Q44, Q66 の 6 つの要素の剛性緩和曲線を示す。図 4.2, 4.3, 4.4 にそれぞれ硬化度 90%, 80%, 70%を示す。グラフの横軸は対数時間である。

図より、どの硬化度でも Q11, Q13, Q33, Q44, Q66 は時間と共に剛性が減少するが、Q12 は時間と共に剛性がやや増加していることが分かった。硬化度 100%の時の瞬時および長期剛性の値を表 4.1 に示す。それぞれの大きさを比較すると、Q33 が飛びぬけて大きい。これは 3 が繊維方向であるためである。Q13 と Q33 は、緩和による値の変化が非常に小さく、樹脂の変形が繊維に拘束されていることを示している。時間経過によって、Q11 は約 32%減少し、また Q12 は約 9%増加した。この変化は無視することはできない。一方で Q44 と Q66 は大きく減少している。具体的には Q44 の瞬時値の剛性は 2734[MPa]で緩和時の剛性は 27.48[MPa]となっており、約 98.9%減少していることが分かる。これは樹脂の残留せん断剛性が瞬時値の 0.8%程度まで大きく下がるためである。せん断剛性以外がこの影響を大きく受けない理由は樹脂の体積弾性率が温度に依存しない一定のモデルを用いているからである。

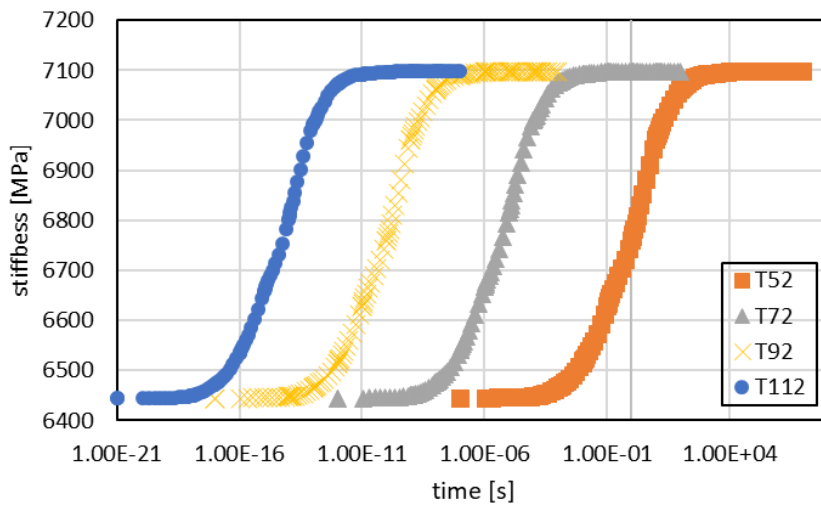
以上から、本研究で用いた一方向 GFRP の場合は、Q11 と Q13 は緩和しないものと考えてもよいことが分かる。しかし、他の要素については、剛性の時間変化をモデル化する必要があることが分かった。

Table.4.1 Instantaneous and long-term stiffness ( $\lambda = 1.0$ )

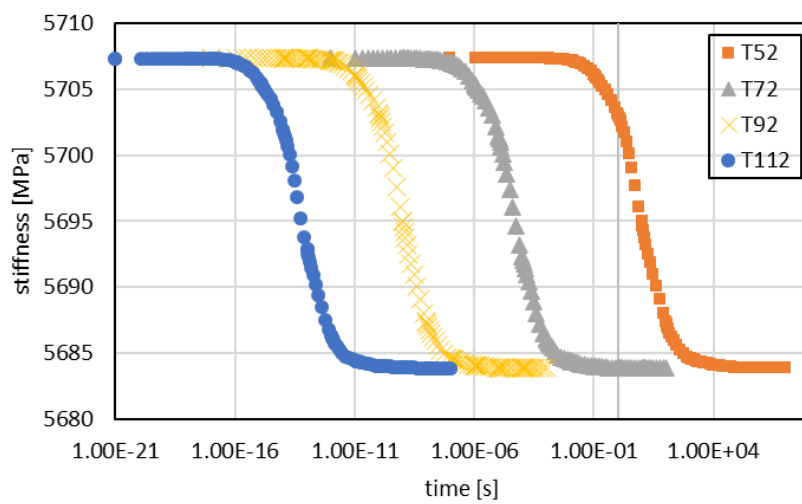
Element	Instantaneous [GPa]	Long term [GPa]
Q11	10.56	7.138
Q12	6.445	7.098
Q13	5.707	5.684
Q33	40.19	39.55
Q44	2.735	0.02748
Q66	3.491	0.06717



(a) Q11



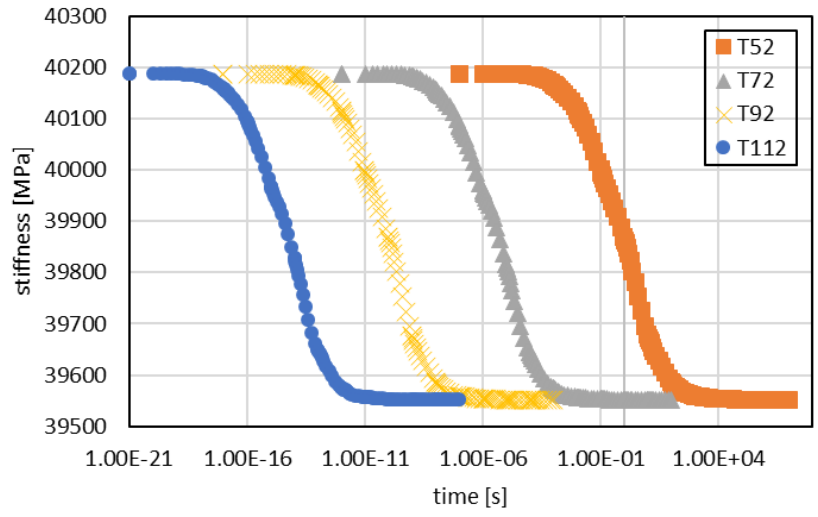
(b) Q12



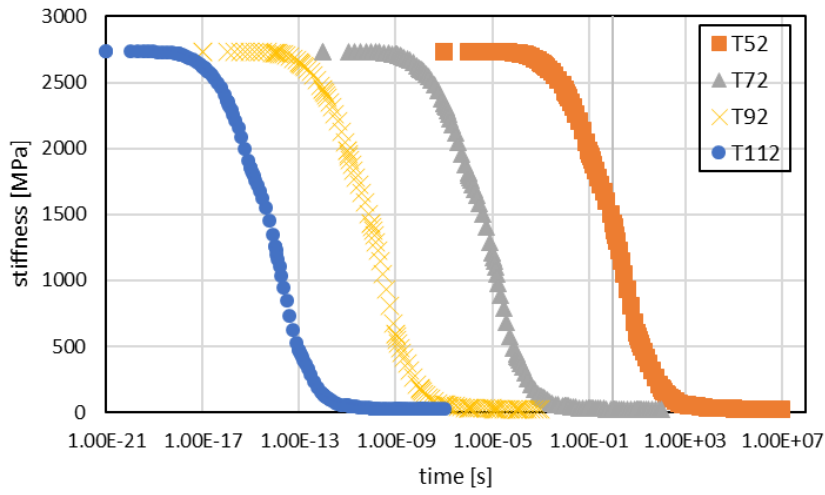
(c) Q13

Fig.4.7 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 1.0$ )

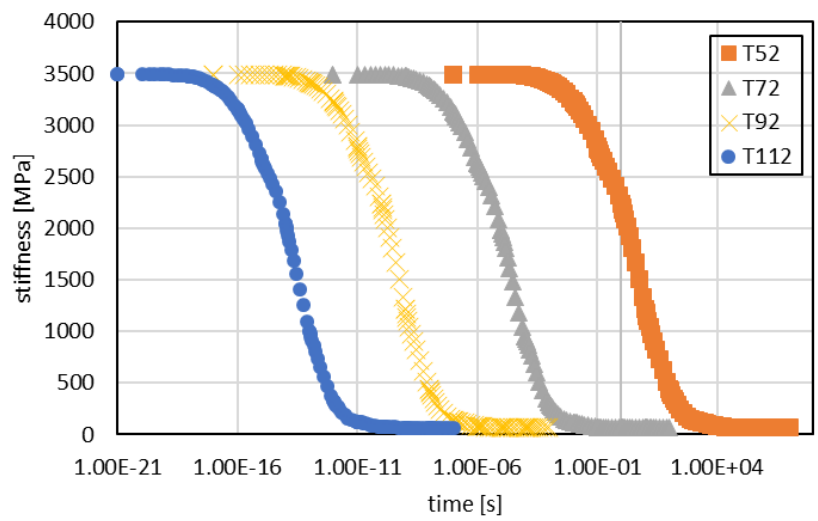




(d) Q33

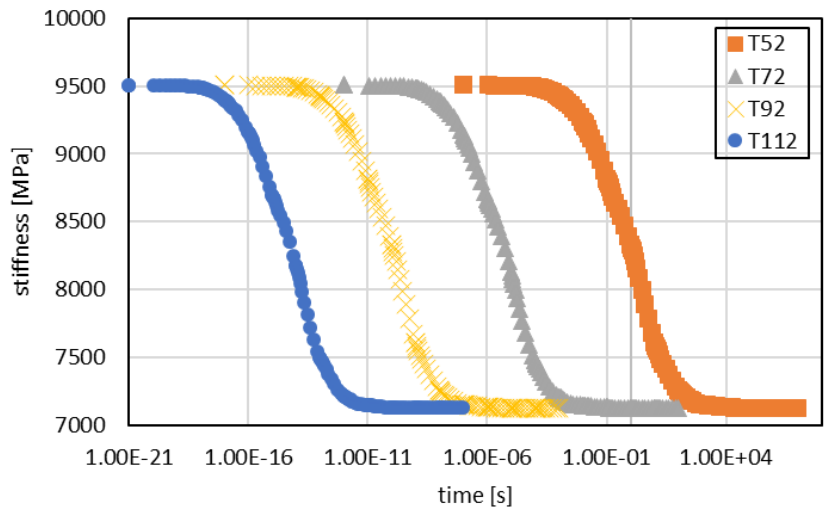


(e) Q44

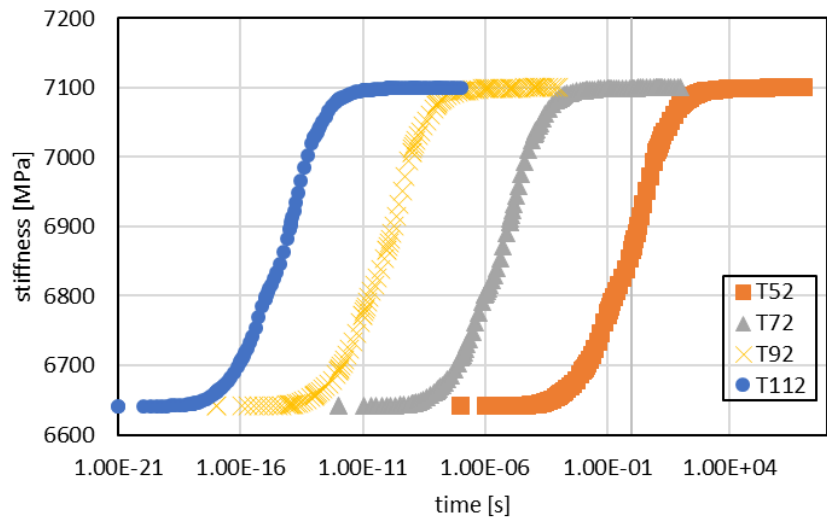


(f) Q66

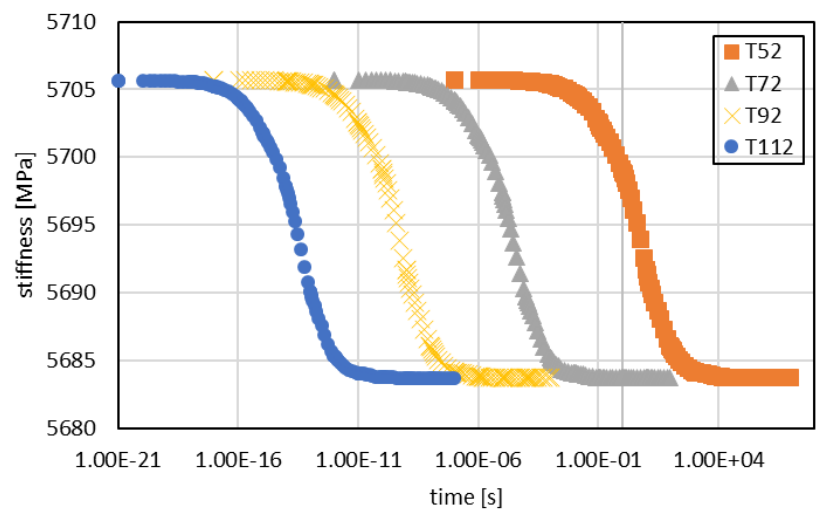
Fig.4.7 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 1.0$ )



(a) Q11

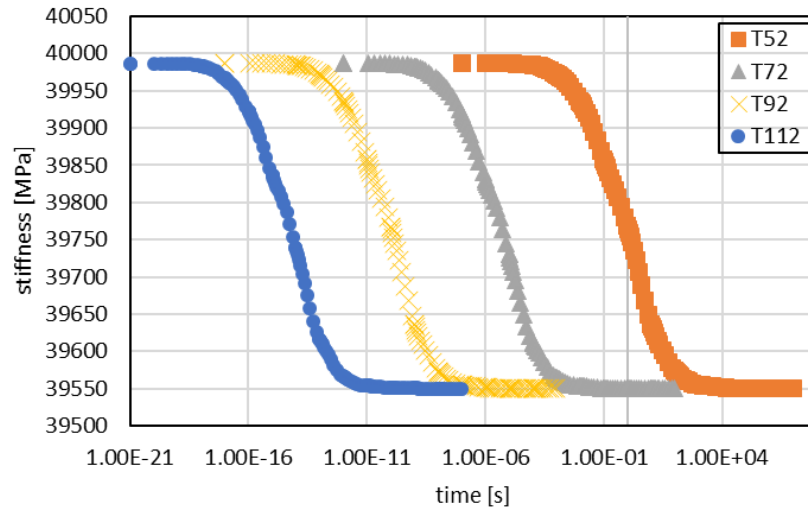


(b) Q12

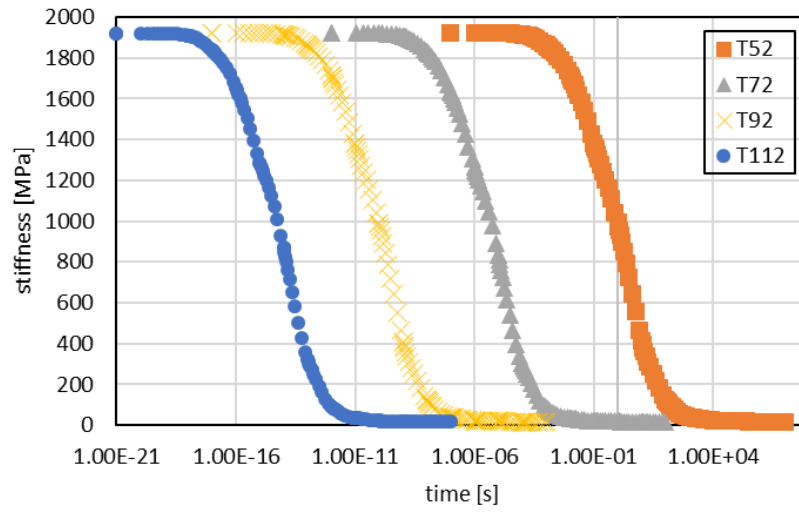


(c) Q13

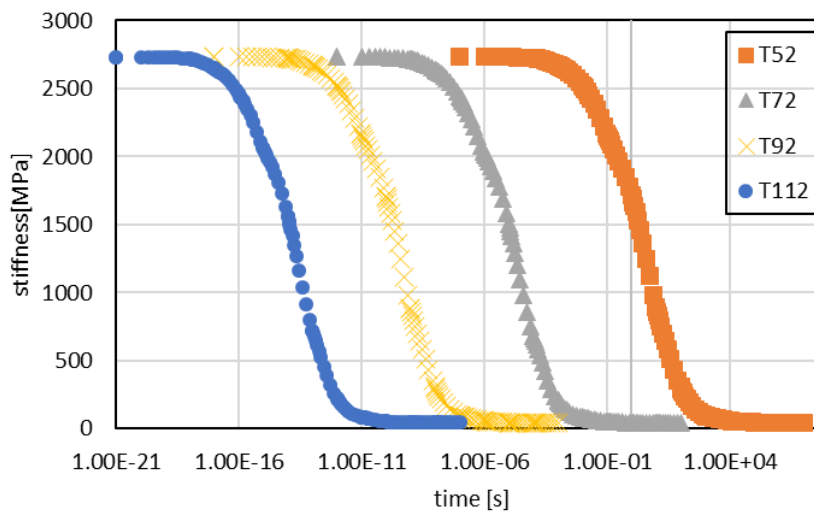
Fig.4.8 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.9$ )



(d) Q33

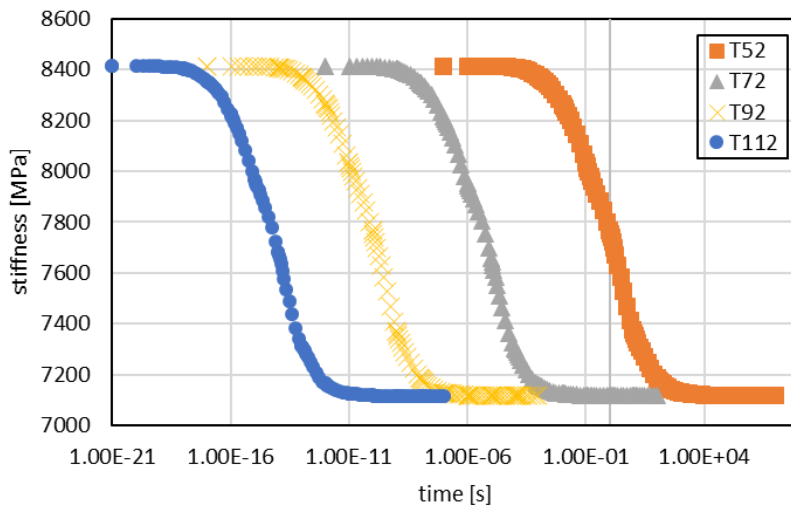


(e) Q44

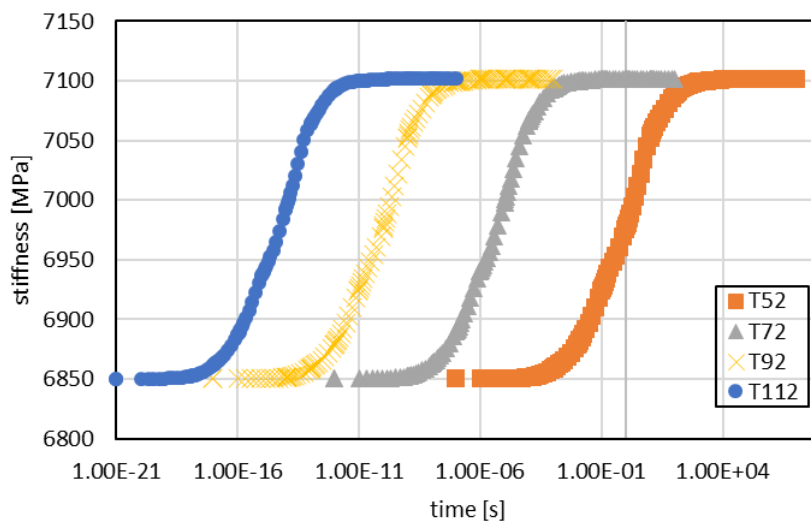


(f) Q66

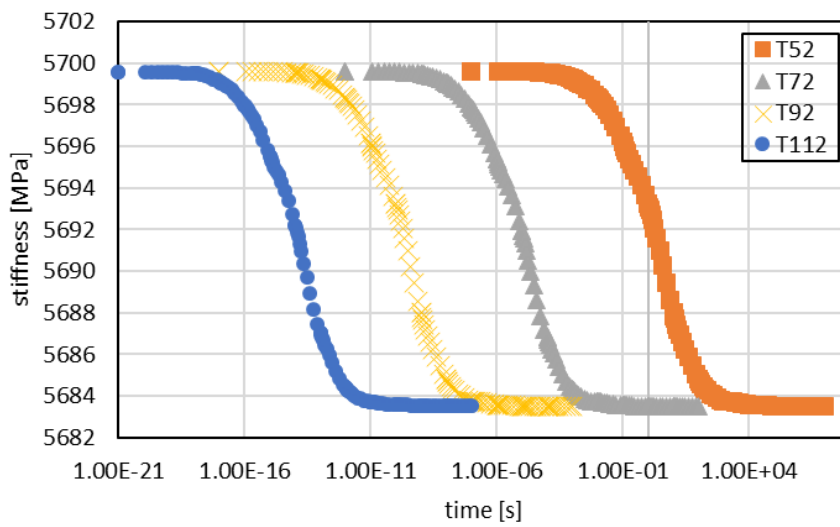
Fig.4.8 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.9$ )



(a) Q11

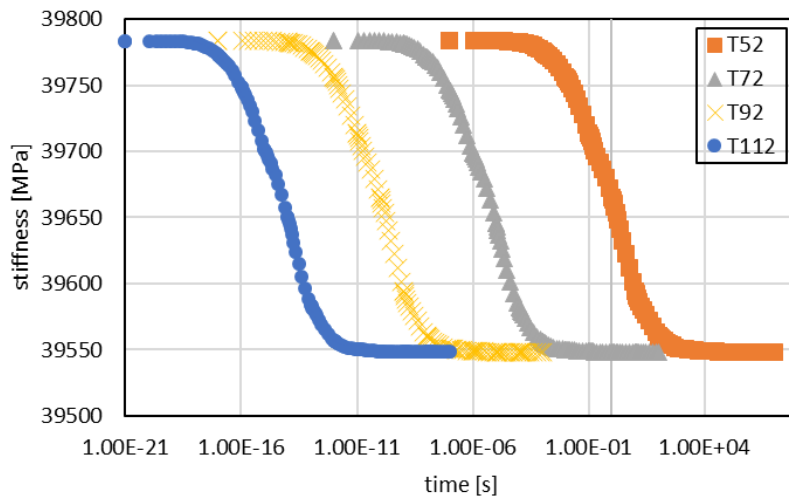


(b) Q12

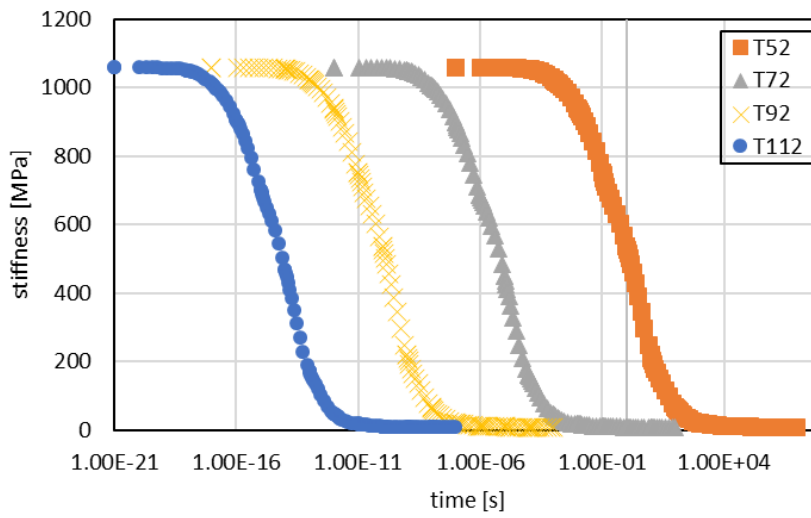


(c) Q13

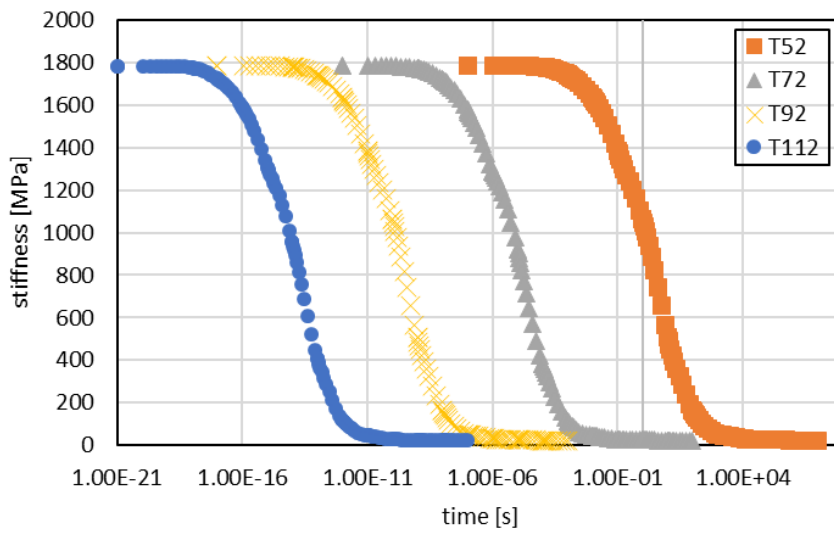
Fig.4.9 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.8$ )



(d) Q33

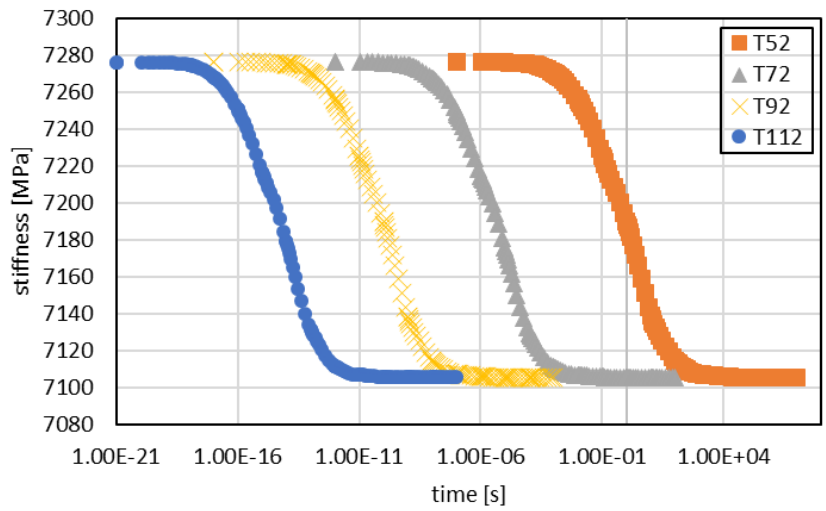


(e) Q44

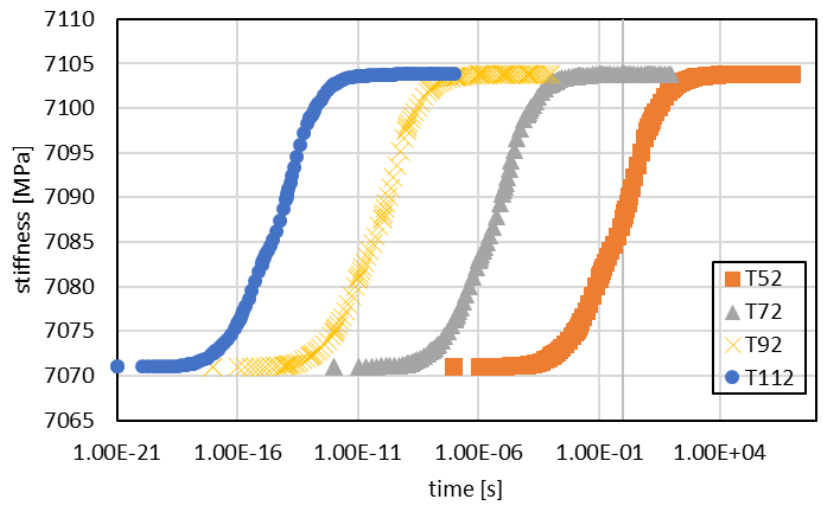


(f) Q66

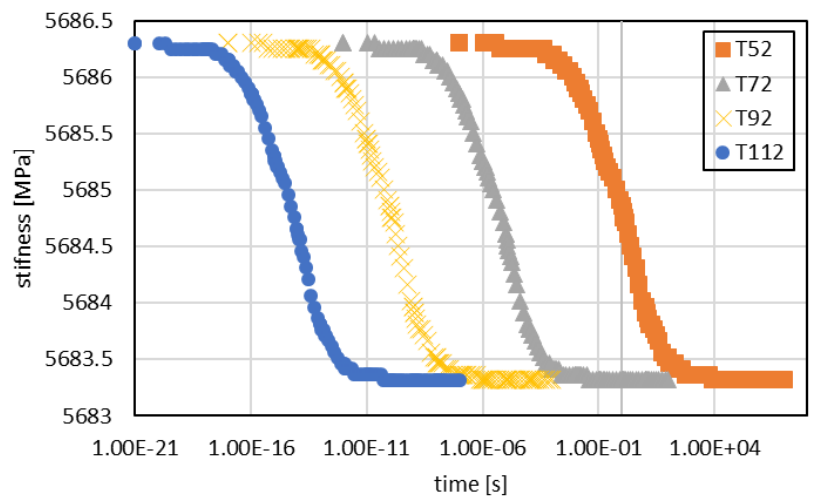
Fig.4.9 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.8$ )



(a) Q11

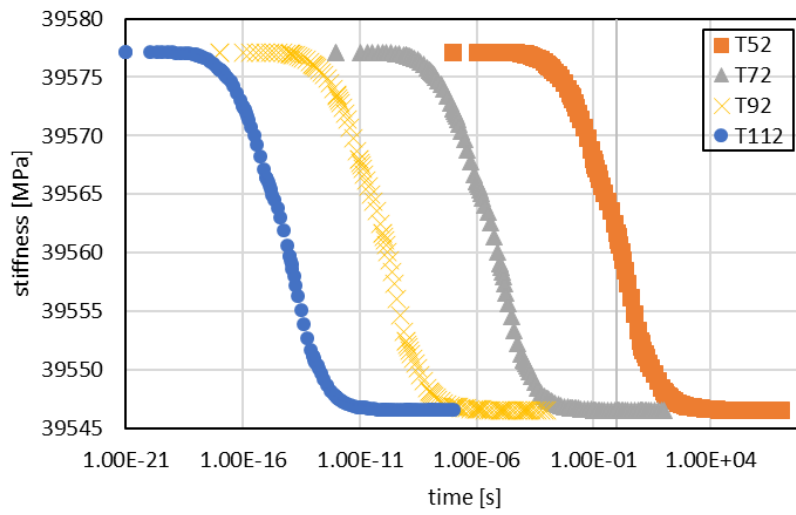


(b) Q12

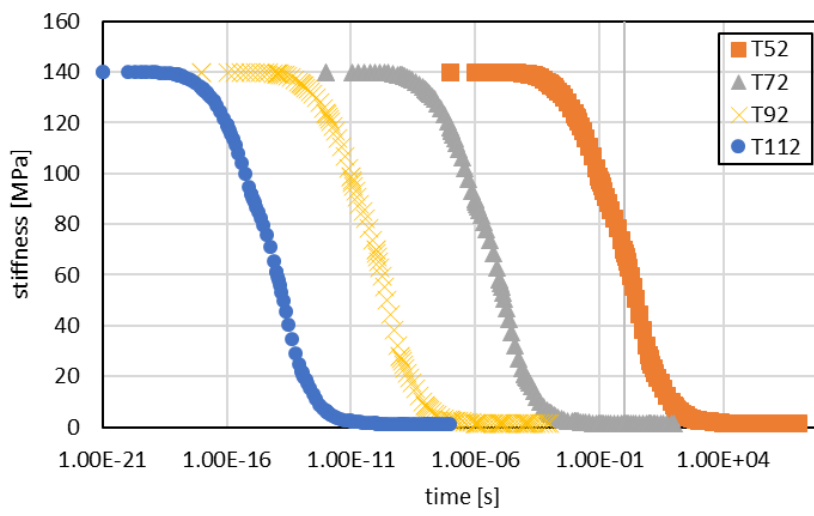


(c) Q13

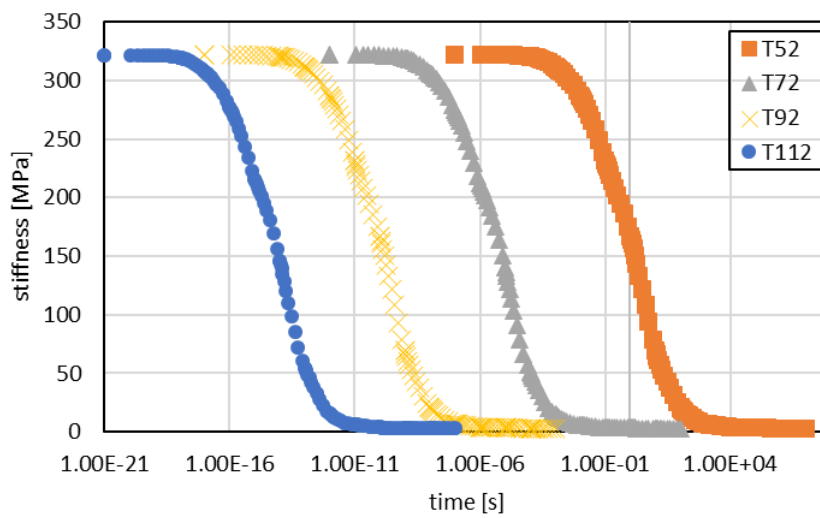
Fig.4.10 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.7$ )



(d) Q33



(e) Q44



(f) Q66

Fig.4.10 Stiffness components of FRP ( $\lambda = 0.7$ )

次に、各剛性要素の温度—時間換算シフトファクターについて検討する。樹脂のシフトファクターは、アレニウスモデルで計算しているので表4.2のようになる。これを用いて各温度のQ11の緩和曲線を52.℃にシフトしたものを図に示す。図 4.11 より、各温度の曲線が完全に一致していることが分かる。すなわち、FRPの剛性の温度—時間換算シフトファクターは、樹脂のものと完全に一致することが分かった。

Table.4.2 Temperature shift factor

T(°C)	AT	Log10AT
52	1	0
72	5.115E-06	-5.291
92	9.937E-11	-10.00
112	5.957E-15	-14.23

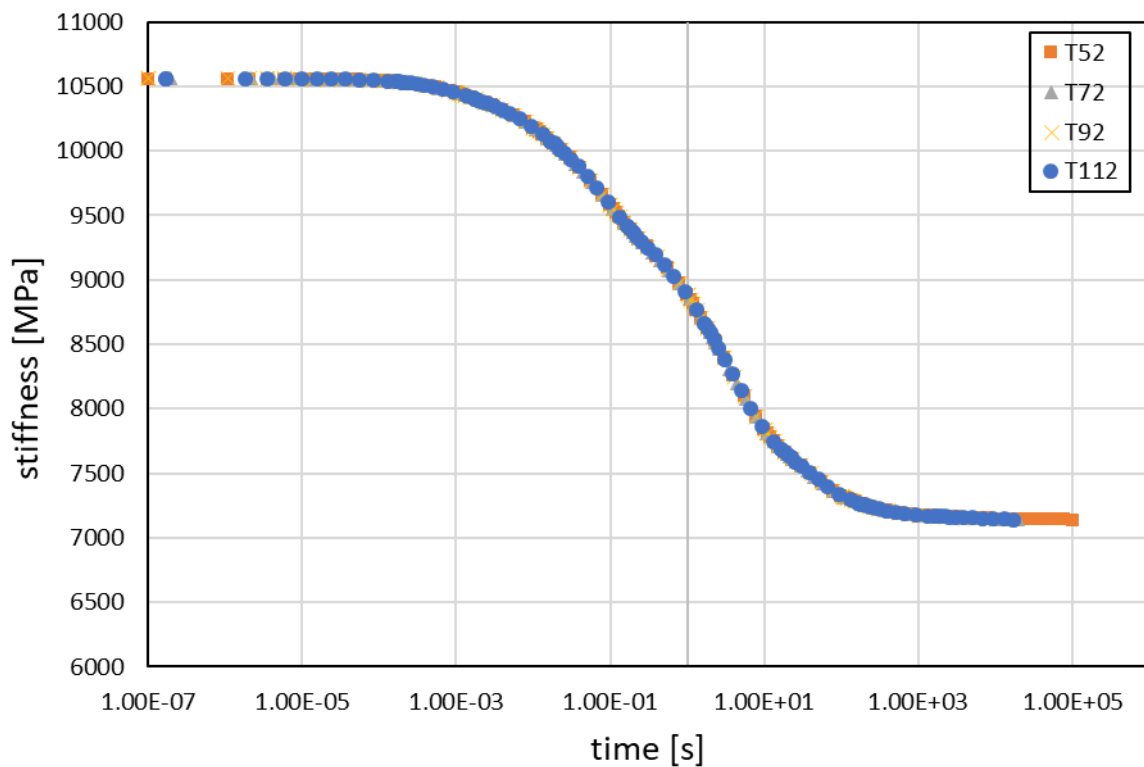


Fig.4.11 Time-shifted stiffness components of FRP by time-temperature conversion rule (Q11,  $\lambda = 1.0$ )

次に、各剛性要素の時間変化を比較する。瞬時剛性で正規化した  $T=52^{\circ}\text{C}$ の時の各剛性要素を対数時間に対してプロットしたものを図 4.12 に示す。図 4.12 より、時間に対する値の収束の振る舞いが、各剛性ごとに異なることが分かる。Q44 と Q66 の完全緩和に達する時間はほぼ同等で  $10^6$  秒程度であるが、これは樹脂の値とほぼ一致する。一方で、Q11, Q12 が完全緩和に達する時間は  $10^3$  秒であり、樹脂よりも緩和が速いように見える。この理由は、樹脂のせん断剛性が低くなると、繊維剛性と樹脂の体積剛性支配的になり、樹脂剛性の影響がほとんど現れなくなるためである。



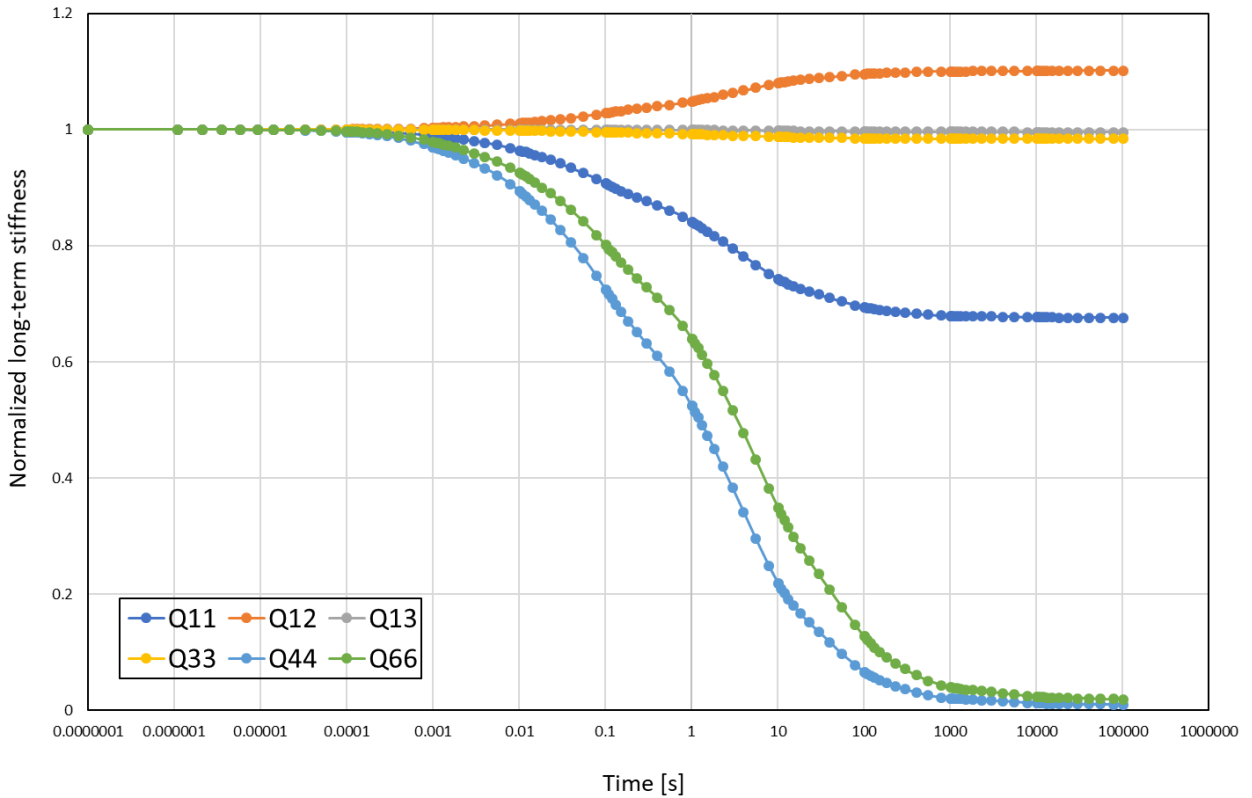


Fig.4.12 Normalized stiffness components of FRP ( $\lambda = 1.0$ )

以上から、各剛性要素はすべて異なるプロニー級数でモデル化する必要があることが分かった。ただしプロニー級数の緩和時間については、樹脂のものを用いても問題ないことも分かった。

#### 4.2.2 硬化度の剛性への影響

表 4.3 に、硬化度 100%の時の各剛性のプロニー級数の係数の値を示す。また、図 4.13 に、硬化度 1.0 で各硬化度のプロニー級数のバネ剛性を無次元化した値を示したものを示す。なお、(a)~(f)はそれぞれ Q11, Q12, Q13, Q33, Q44, Q66 の 6 つ要素を示したものである。

Q11, Q12, Q13, Q33 については、 $Q_{\infty}$ はほぼ一定であり、それ以外のプロニー級数のバネ剛性 Q1~Q9 は硬化度が上昇するにつれて比例して増加することが分かった。また、Q44, Q66 はすべてのバネ剛性が硬化度に対してほぼ線形的に増加することが分かった。

Table.4.3 Coefficient of prony for stiffness ( $\lambda = 1.0$ )

(a) Q11

$\lambda$	$Q_{\infty}$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	7106	5.829	13.35	37.40	24.01	56.19	23.86	8.097	1.682	0.1875	7186
0.8	7116	43.55	98.86	281.0	180.1	430.5	186.2	63.12	13.12	1.371	7720
0.9	7127	78.65	177.8	510.0	326.2	792.5	347.9	118.1	24.58	2.521	8220
1	7138	111.7	251.6	727.4	464.3	1143	508.4	173.1	36.02	3.667	8693

(b) Q12

$\lambda$	$Q_\infty$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	7104	-1.138	-2.558	-7.215	-4.617	-10.79	-4.578	-1.539	-0.3200	-0.0437	7071
0.8	7102	-8.436	-19.11	-54.54	-35.08	-83.62	-35.82	-12.07	-2.517	-0.2366	6850
0.9	7100	-14.89	-33.54	-97.56	-62.80	-154.4	-67.40	-22.53	-4.721	-0.4753	6641
1	7098	-20.59	-46.05	-136.4	-87.49	-222.3	-99.34	-32.89	-6.942	-0.7003	6445

(c) Q13

$\lambda$	$Q_\infty$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	5683	0.0952	0.2002	0.6379	0.4045	0.9602	0.4680	0.1229	0.0665	0.0003	5686
0.8	5684	0.3635	0.7440	2.707	1.651	5.841	3.338	1.135	0.2427	0.0449	5700
0.9	5684	0.3121	0.4218	2.775	1.498	8.314	5.941	2.155	0.4582	0.0592	5706
1	5684	0.0623	-0.2546	1.664	0.6208	9.188	8.236	3.182	0.6619	0.0728	5707

(d) Q33

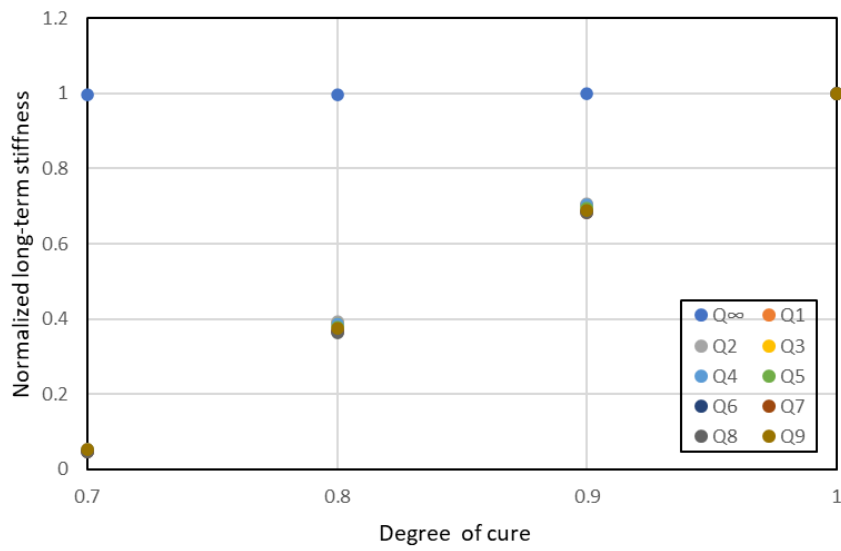
$\lambda$	$Q_\infty$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	39547	1.049	2.378	6.714	4.307	10.05	4.261	1.446	0.3085	0.0222	39577
0.8	39549	7.998	18.19	51.30	32.85	77.60	33.26	11.31	2.336	0.2212	39784
0.9	39550	14.80	33.65	94.89	60.78	143.9	62.14	21.14	4.384	0.4638	39987
1	39552	21.51	48.98	138.1	88.39	209.5	90.75	31.03	6.418	0.6574	40188

(e) Q44

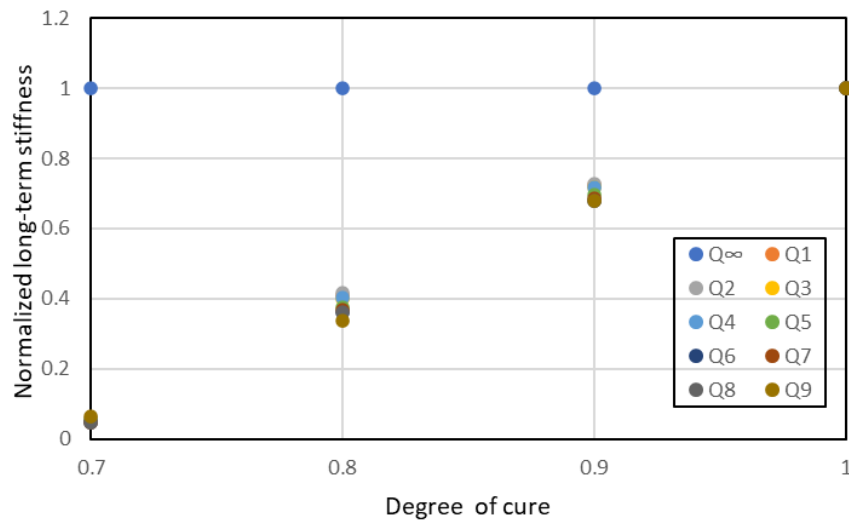
$\lambda$	$Q_\infty$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	1.284	4.749	10.83	30.42	19.53	45.69	19.41	6.564	1.370	0.1379	140.0
0.8	10.02	34.99	78.63	226.6	144.1	350.1	151.4	51.35	10.69	1.077	1059
0.9	18.75	61.93	137.2	405.1	255.2	642.7	282.7	96.26	20.02	2.013	1922
1	27.48	86.06	188.0	568.0	354.2	923.9	413.6	141.3	29.33	2.949	2735

(f) Q66

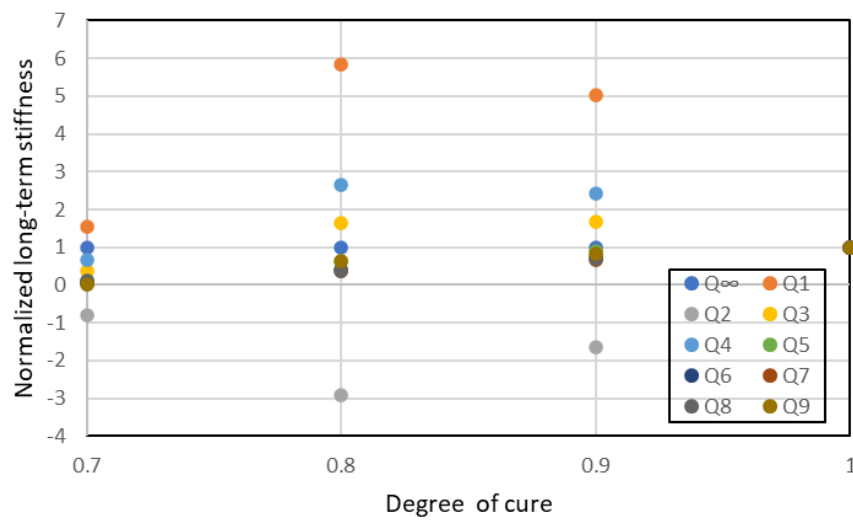
$\lambda$	$Q_\infty$	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q0
0.7	3.357	10.32	22.79	67.56	42.42	107.7	47.48	16.43	3.480	0.3534	321.8
0.8	24.97	45.89	89.04	318.4	172.8	624.7	350.2	129.3	26.19	2.649	1784
0.9	46.18	64.74	123.1	450.1	230.7	916.3	600.8	246.0	48.66	4.898	2732
1	67.17	80.12	154.7	553.1	285.5	1110	798.4	364.0	70.94	7.110	3491



(a) Q11

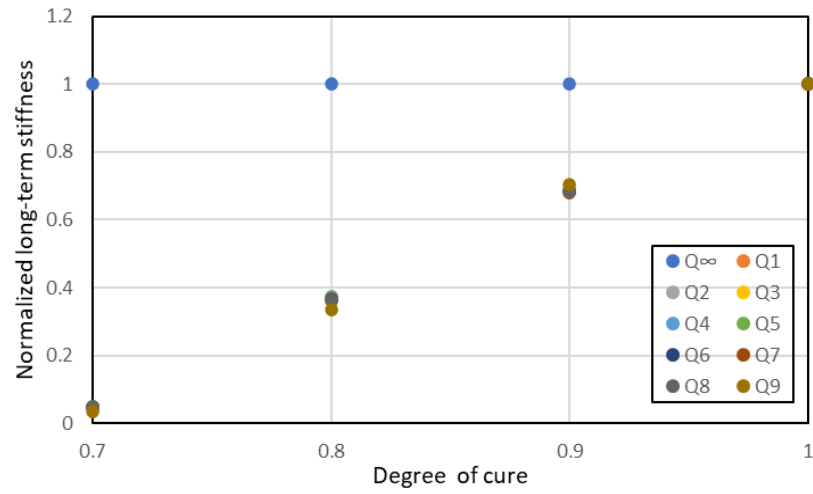


(b) Q12

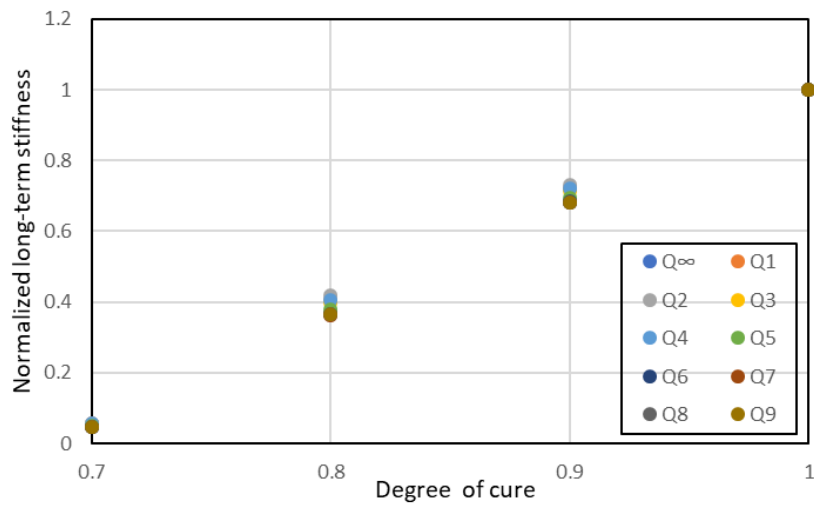


(c) Q13

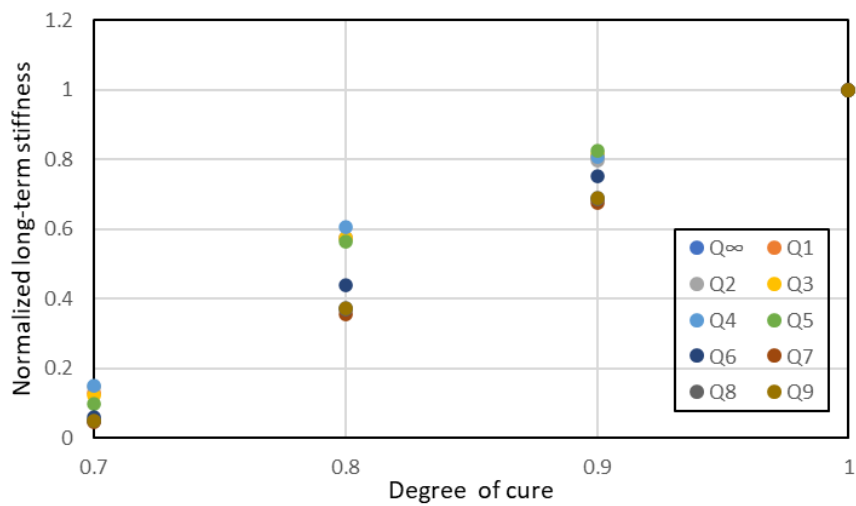
Fig.4.13 Relationship between Normalized long-term stiffness of FRP and degree of cure



(d) Q33



(e) Q44



(f) Q66

Fig.4.13 Relationship between Normalized long-term stiffness of FRP and degree of cure

図 4.14 は硬化度と完全緩和時の残留剛性の関係を示す。Q44 と Q66 は硬化度が上昇するにつれて比例して増加することが分かる。Q11, Q12, Q13, Q33 の  $Q_{\infty}$  は硬化度が変化してもほとんど変わらないことが分かる。このことから Q11, Q12, Q13, Q33 の残留剛性は硬化度に依存しないことが分かる。しかし、Q1~Q9 は硬化度に対して大きく変化することがすでに示されており、その変化は Q44, Q66 の  $Q_{\infty}$  の硬化度に対する変化とよく似ていた。

以上から、一方向 GFRP の剛性への硬化度の影響は、Q11, Q12, Q13, Q33 の  $Q_{\infty}$  の硬化度に対して一定のモデルと、Q1~Q9 および Q44, Q66 の  $Q_{\infty}$  の硬化度に対する線形の 2 種類のモデルで表すことが可能であることが示された。

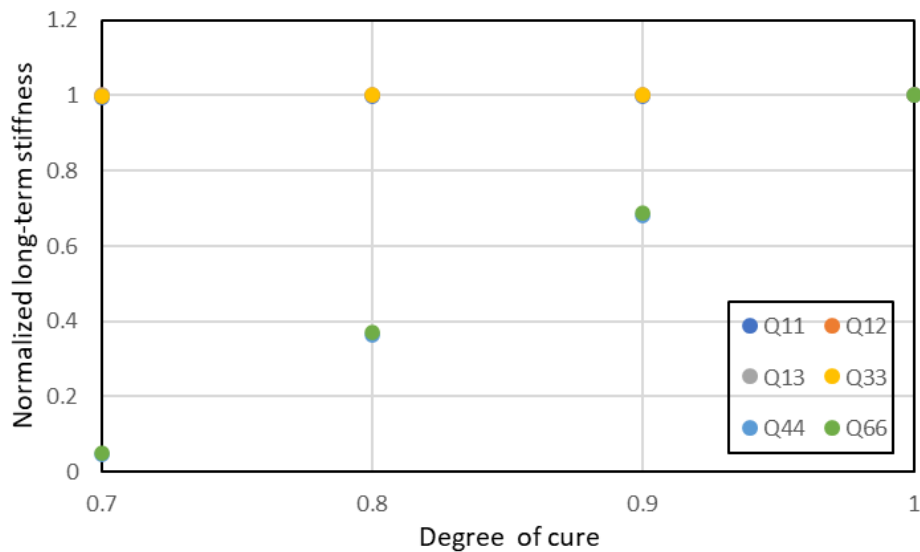


Fig.4.14 Normalized long-term stiffness components of FRP ( $Q_{\infty}$ ,  $T=52^{\circ}\text{C}$ )

### 4.3 熱膨張係数

#### 4.3.1 瞬時の温度変化によるマイクロ応力分布

図 4.15 は硬化度 100%, ひずみゼロで温度変化  $1^{\circ}\text{C}$  与えたときの S11 のマイクロ応力分布図を示す. また (a)は  $t=1.0\text{e-}07[\text{s}]$ , (b)は  $t=10.1[\text{s}]$ , (c)は  $t=1.01\text{e}+07[\text{s}]$ の時の応力分布図をそれぞれ示す. (a)は瞬時応力の分布図となり, 周期性を持っていることが分かる. しかし時間が十分に経った(c)では応力が一定になっていることが分かる. これか応力が緩和していることが, この応力分布図からも分かる.

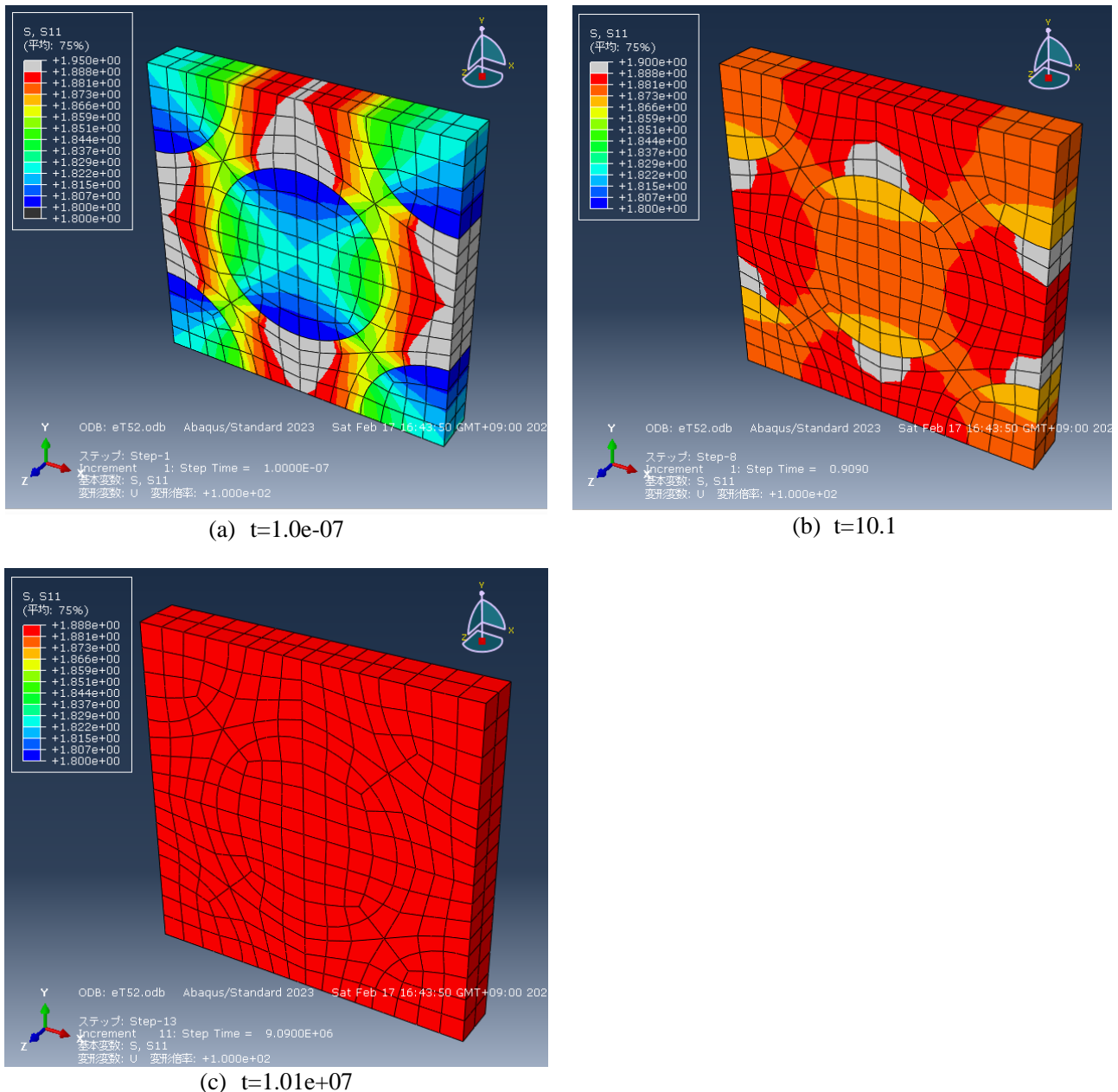


Fig.4.15 Stress of unit cell model (S11,  $\lambda = 1.0$ )

#### 4.3.2 瞬時の温度変化による応力緩和

図 4.16 は硬化度 100%, ひずみゼロで温度変化  $1^{\circ}\text{C}$  与えたときの S11 と S33 の応力緩和曲線を示す. S11 の瞬時値の応力は  $-1.945[\text{MPa}]$  で緩和時の応力は  $-1.964[\text{MPa}]$  である. 同様に S33 の瞬時値の応力は  $-1.742[\text{MPa}]$  で緩和時の応力は  $-1.746[\text{MPa}]$  となっている. これより S33 はほとんど変化していないことが分

かる. S11 は S33 に比べると変化の割合は大きいですが, それでも-1.945 に対して-0.019 程度であるので変化量は非常に小さい. よって, 瞬時の温度変化に対する応力緩和はほとんど生じないことが分かる. これは熱膨張係数がほとんど時間変化しないことを示唆している.

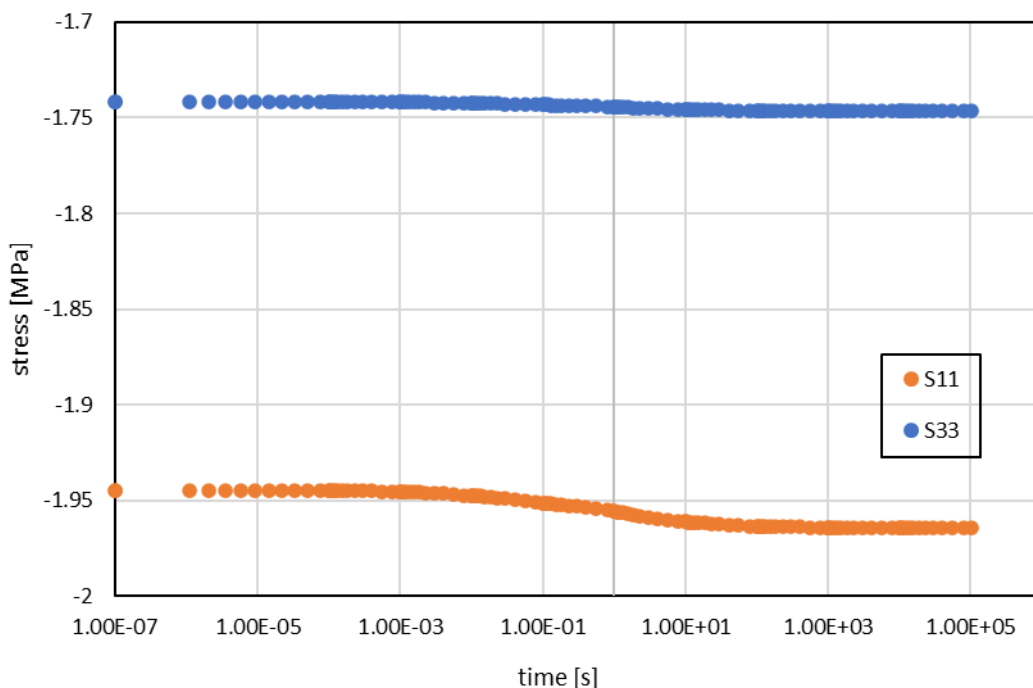


Fig.4.16 Stress components of FRP ( $\lambda = 1.0$ )

### 4.3.3 熱膨張係数

表 4.4 に, 硬化度 100%の時の熱膨張係数を示す. 熱膨張係数はプロニー級数の各項に対応するため,  $\alpha_\infty$ ,  $\alpha_1 \sim \alpha_9$  が存在する. 完全緩和時の $\alpha_\infty$ を見ると,  $\alpha_{11\infty}$ は 0.0001362,  $\alpha_{33\infty}$ は 5.004E-06 となり,  $\alpha_{33\infty}$ はほぼ繊維の熱膨張係数  $5\mu\text{°C}$ に等しいことが分かる.  $\alpha_{11}$ の $\alpha_1 \sim \alpha_9$ を見ると,  $\alpha_{11\infty}$ に比べてずっと小さいことが分かる. よって, 熱膨張係数は $\alpha_{11\infty}$ でほぼ表現できることが分かる. 一方で $\alpha_{33}$ については,  $\alpha_1 \sim \alpha_9$ と $\alpha_{33\infty}$ はほぼ同程度となることが分かる. しかし, プロニー級数の各項のバネ定数  $Q_1 \sim Q_9$ は, 長期剛性  $Q_\infty$ と比較するとずっと小さく, 熱膨張への寄与は  $Q \times \alpha$ で表されるので,  $\alpha$ がほぼ同程度ならば,  $Q \times \alpha$ は  $Q_\infty \times \alpha_\infty$ に比べてずっと小さくなる. よってこの場合も $\alpha_{33\infty}$ で表すことができる. 以上が, 前節で述べた応力緩和曲線がほぼ一定になった理由である. 以上から, 一方向 GFRP の熱膨張係数は, 時間に依存しないと仮定しても十分近似できることが分かった.

Table 4.4 Coefficient of thermal expansion ( $\lambda = 1.0$ )

	$\alpha_\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
$\alpha_{11}$	0.0001362	9.456E-06	1.131E-05	6.364E-06	1.133E-05	5.720E-06	1.276E-05	3.913E-06	5.594E-06	4.319E-06
$\alpha_{33}$	5.004E-06	9.450E-06	1.134E-05	6.367E-06	1.139E-05	5.827E-06	1.229E-05	3.993E-06	5.569E-06	-4.665E-07

### 4.3.4 硬化度の熱膨張係数への影響

図 4.17 は, 硬化度と, 瞬時に一度の温度変化を与えた場合の完全緩和時の残留応力の関係を示す. 図

より残留応力は硬化度が変わってもほとんど変わらないことが分かる。これより熱膨張係数が硬化度にほとんど依存しないことが示唆される。

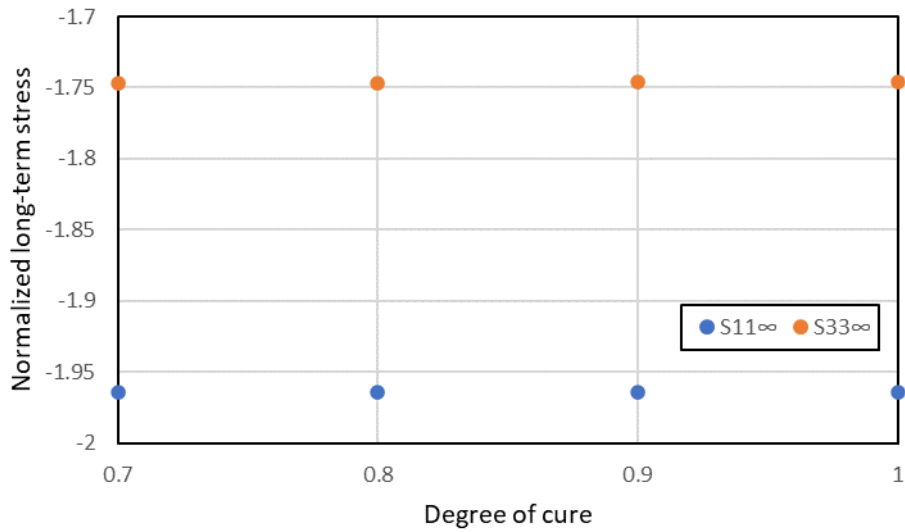
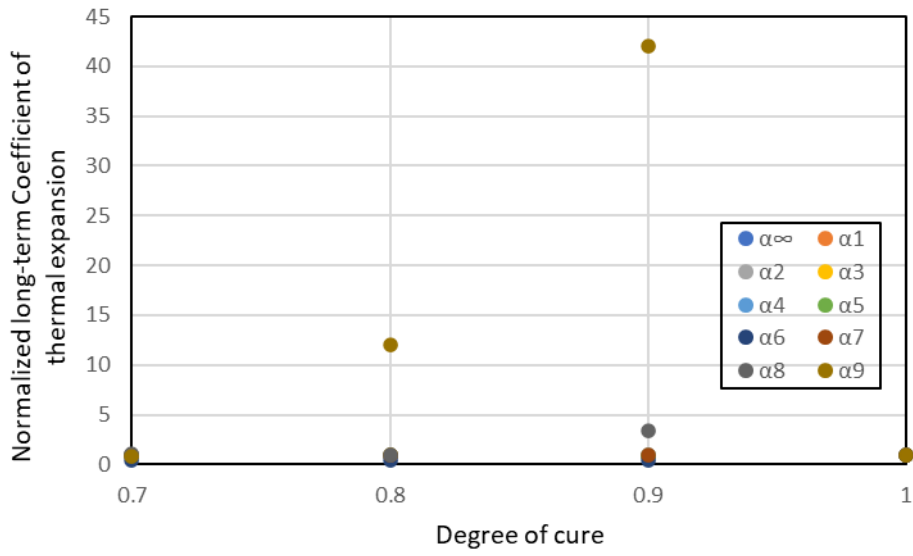


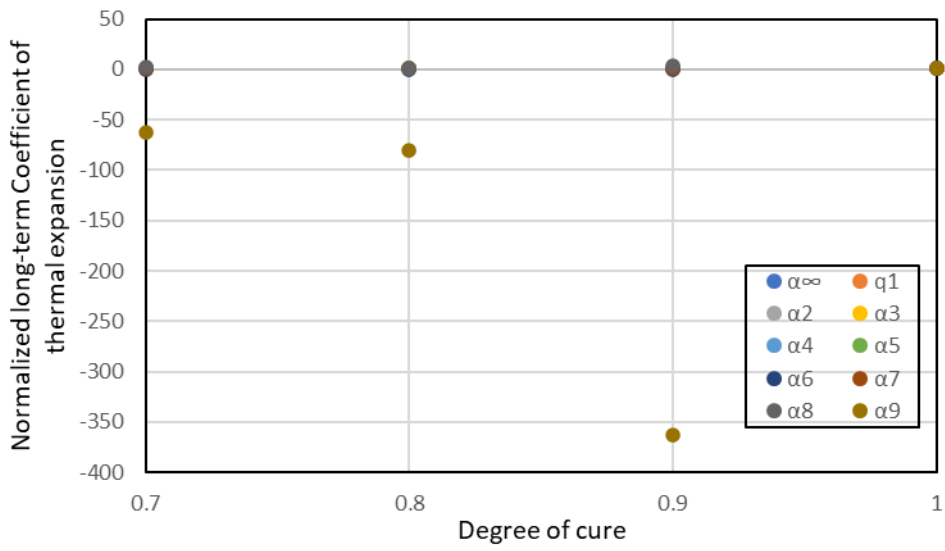
Fig.4.17 Relationship between long-term stress of FRP and degree of cure

図 4.18 に、硬化度とそれぞれの熱膨張係数 $\alpha_{\infty}$ 、 $\alpha_1 \sim \alpha_9$ を硬化度 1 で無次元化したものを示す。(a)は熱膨張係数 $\alpha_{11}$ の時、(b)は熱膨張係数 $\alpha_{33}$ を示す。それぞれ $\alpha_9$ 以外は硬化度が増加するにつれてほとんど変化していないことが分かる。 $\alpha_9$ はプロニー級数のバネ剛性が小さいのでほとんど影響しない。よって、熱膨張係数は、硬化度に依存しないことが分かった。ただしこれは、本研究で用いた母材樹脂の熱膨張係数値が、硬化度が 1 に近づくまでは硬化度にほとんど依存しないためであり、樹脂の特性には依存することに注意しておくべきではない。





(a)  $\alpha_{11}$



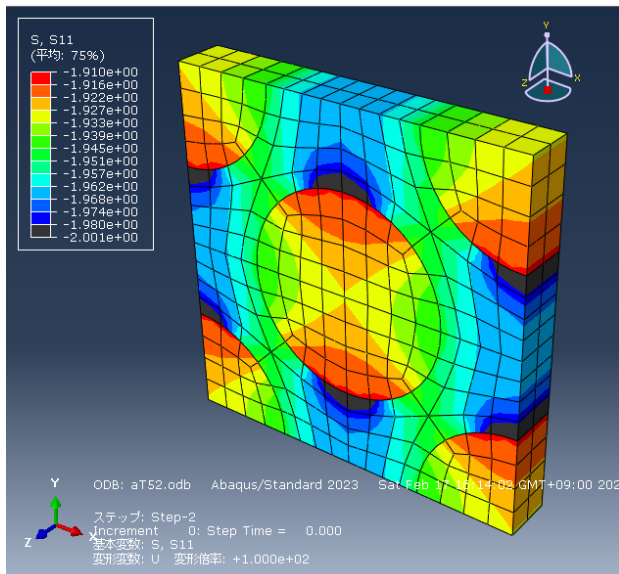
(b)  $\alpha_{33}$

Fig.4.18 Normalized long-term Coefficient of thermal expansion of FRP

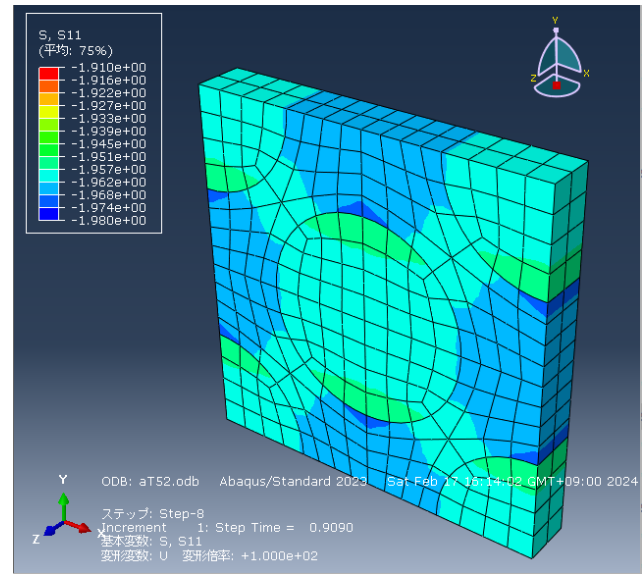
## 4.4 硬化収縮ひずみ係数

### 4.4.1 瞬時の温度変化によるマイクロ応力分布

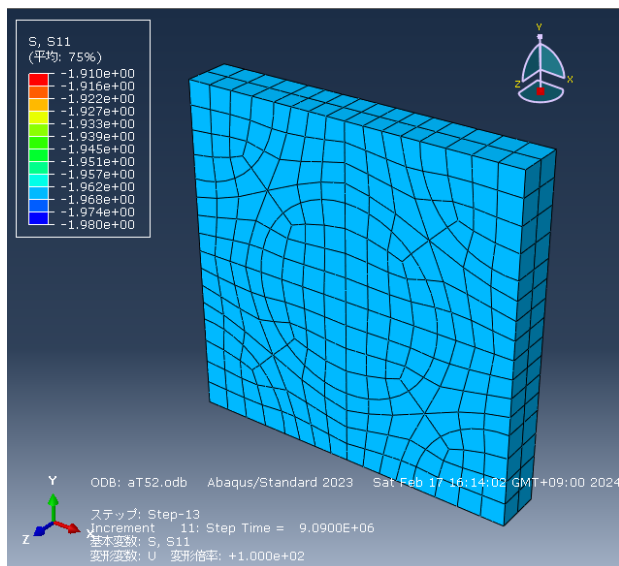
図 4.19 は硬化度 100%, 硬化ひずみ係数を求めるプロセスとして非機械的ひずみがゼロにし, 温度変化を  $1^{\circ}\text{C}$  だけ与えたときの  $S_{11}$  のマイクロ応力分布図を示す. また(a)は  $t=1.0\text{e-}07[\text{s}]$ , (b)は  $t=10.1[\text{s}]$ , (c)は  $t=1.01\text{e+}07[\text{s}]$ の時の応力分布図をそれぞれ示す. 硬化収縮係数の時も熱膨張係数の時と同様で(a)は瞬時応力の分布図となり, 周期性を持っていることが分かる. しかし時間が十分に経った(c)では応力が一定になっていることが分かる. これから硬化収縮係数を求める際も応力が緩和していることが, この応力分布図からも分かる.



(a)  $t=1.0\text{e-}07$



(b)  $t=10.1$



(c)  $t=1.01\text{e+}07$

Fig.4.19 Stress of unit cell model ( $S_{11}$ ,  $\lambda = 1.0$ )

### 4.4.2 瞬時の温度変化による応力緩和

図 4.20 は硬化度 100%, 硬化ひずみ係数を求めるプロセスとして非機械的ひずみがゼロにし, 温度変化

を 1°C だけ与えたときの応力緩和曲線を示す。S11 の瞬時値の応力は 1.852[MPa]、緩和時の応力は 1.886[MPa]を示し、S33 の瞬時値の応力は 1.500[MPa]、緩和時の応力は 1.509[MPa]となっている。これより S33 はほとんど変化していないことが分かる。S11 は S33 に比べると変化の割合は大きい、0.0034 と変化量は非常に小さい。よって、瞬時の温度変化に対する応力緩和はほとんど生じないことが分かる。これは硬化ひずみ係数がほとんど時間変化しないことを示唆している。

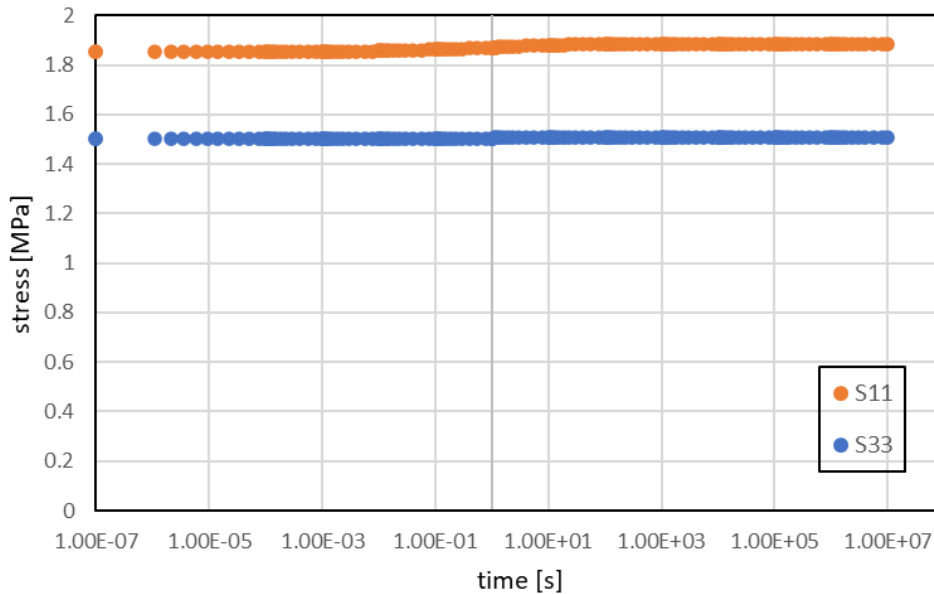


Fig.4.20 Stress components of FRP ( $\lambda = 1.0$ )

#### 4.4.3 硬化収縮ひずみ

表 4.5 に、硬化度 100%の時の硬化収縮ひずみを示す。硬化収縮ひずみはプロニー級数の各項に対応するため、 $\beta_{\infty}$ 、 $\beta_1 \sim \beta_9$  が存在する。完全緩和時の $\beta_{\infty}$ を見ると、 $\beta_{11\infty}$ は 0.01324、 $\beta_{33\infty}$ は 8.314E-06 となっており、 $\beta_{33\infty}$ は $\beta_{11\infty}$ に比べて極めて小さいことが分かる。

Table.4.5 cure strain coefficient ( $\lambda = 1.0$ )

	$\beta_{\infty}$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$
$\beta_{11}$	0.01324	1.923	0.8001	0.2569	0.3765	0.1279	0.2376	0.5160	1.871	4.867
$\beta_{33}$	8.314E-06	8.946	3.665	1.215	1.774	0.6449	1.306	2.937	10.99	29.71

#### 4.4.4 硬化度の硬化収縮ひずみへの影響

図 4.21 は、硬化度と、瞬時に一度の温度変化を与えた場合の完全緩和時の残留応力の関係を示す。図より残留応力は硬化度が変わってもほとんど変わらないことが分かる。具体的に S11 の硬化度 70%の時の残留応力は 1.8859[MPa]で硬化度 100%の時は 1.8856[MPa]となり、S33 では 1.5087[MPa]と 1.5086[MPa]となっている。これより硬化収縮ひずみが硬化度にほとんど依存しないことが示唆される。

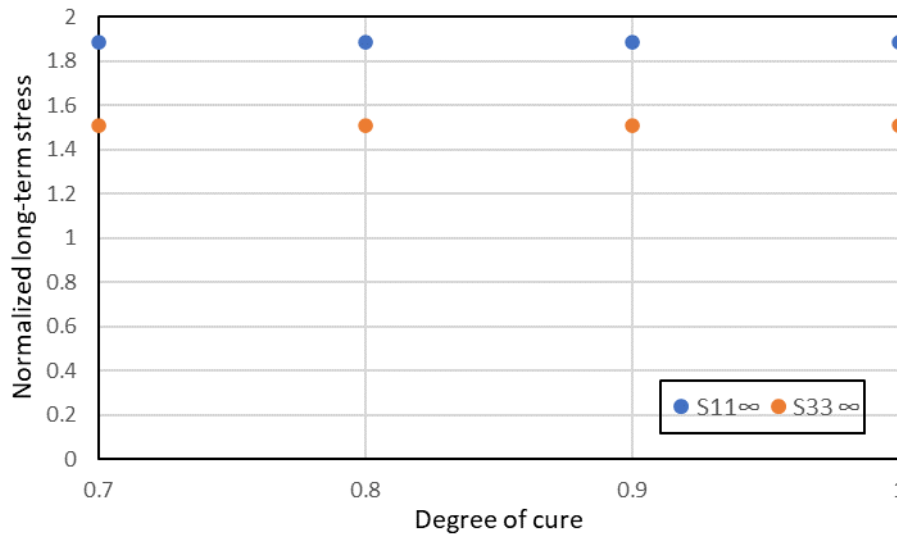
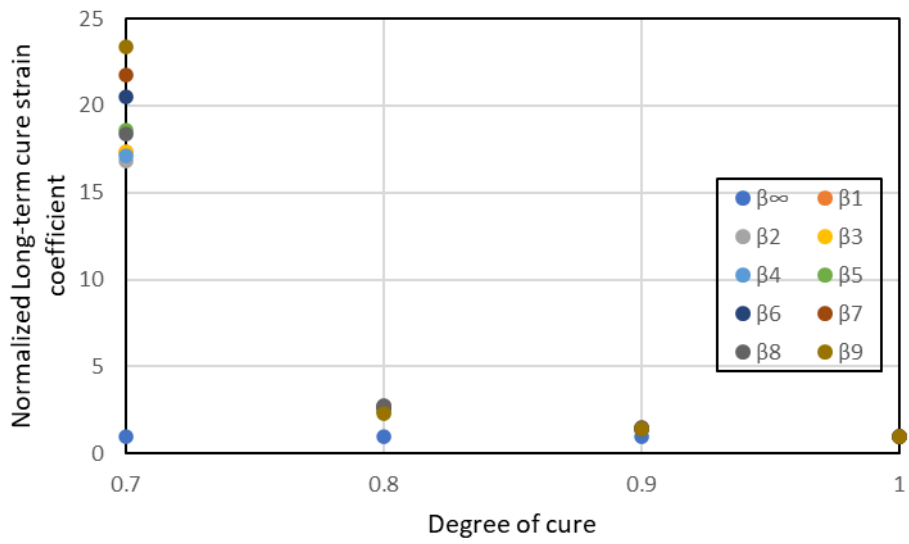
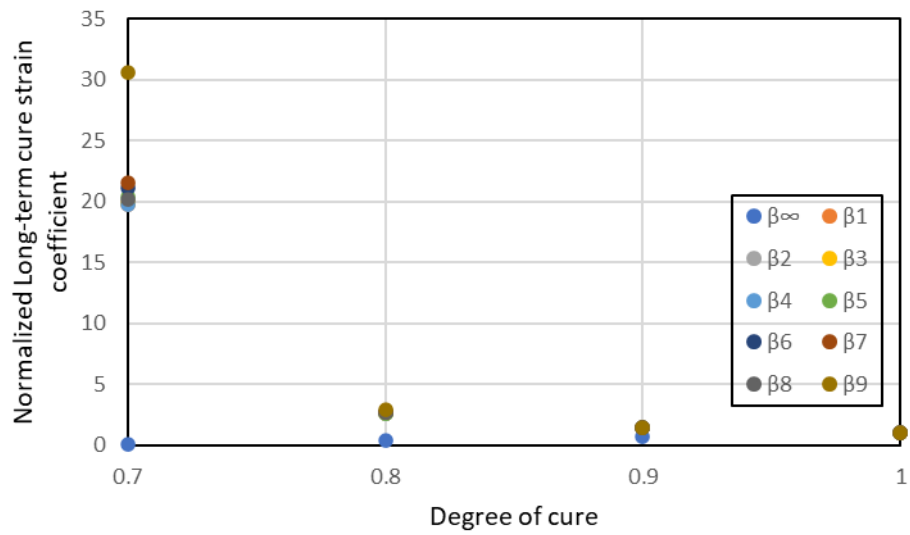


Fig.4.21 Relationship between long-term stress of FRP and degree of cure

図 4.22 に、硬化度とそれぞれの硬化収縮ひずみ $\beta_{\infty}$ ,  $\beta_1 \sim \beta_9$ を硬化度 1 で無次元化したものを示す。(a)は硬化収縮ひずみ $\beta_{11}$ の時、(b)は硬化収縮ひずみ $\beta_{33}$ を示す。(a)の $\beta_{11}$ で $\beta_{\infty}$ は硬化度が上昇してもほとんど変化しなかったことが分かる。しかし $\beta_{\infty}$ 以外の応力係数は硬化度が上昇するにつれて減少していることが分かる。(b)の $\beta_{33}$ で $\beta_{\infty}$ は硬化度が上昇するにつれて変化していることが分かる。 $\beta_{\infty}$ 以外の応力係数は硬化度が上昇するにつれて減少していることが分かる。 $\beta_{\infty}$ を注目してみると、繊維と垂直方向の $\beta_{11}$ の硬化収縮ひずみ係数はほとんど変わらず熱膨張と同様に硬化度の影響が非常に小さいことが分かる。しかし繊維方向の $\beta_{33}$ の硬化収縮ひずみは硬化度の影響を大きく受けることが分かった。



(a)  $\beta_{11}$



(b)  $\beta_{33}$

Fig.4.22 Normalized Long-term cure strain coefficient of FRP

## 第5章 結言

本研究では、ユニットセルモデルを用いて一方向 GFRP の成形中の均質化特性の計算を行った。エポキシ樹脂の特性は、先行研究の実験からモデル化された粘弾性モデルを用いた。その結果、以下の知見が得られた。

- (1) 繊維方向の剛性成分  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$  は温度・硬化度の影響をほぼ受けず、時間が経過しても剛性はあまり変化しなかった。繊維と垂直方向の剛性  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$  はせん断剛性に比べると小さいものの、温度と硬化度の影響を受けることが分かった。せん断剛性  $Q_{44}$ ,  $Q_{66}$  は樹脂剛性の変化の影響を大きく受けて、温度・硬化度で著しく変化することが明らかになった。せん断剛性以外がこの影響を大きく受けない理由は樹脂の体積弾性率が温度に依存しない一定のモデルを用いているからである。
- (2) FRP の剛性の温度—時間換算シフトファクターは、樹脂のものと完全に一致することが分かった。
- (3) FRP の粘弾性モデルのプロニー級数の緩和時間は、樹脂と同じものを用いてもよいことが分かった。
- (4) 剛性  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$  のプロニー級数の硬化度依存性については、 $Q_{\infty}$  はほぼ硬化度に依存せず、 $Q_1 \sim Q_9$  は硬化度に比例することが分かった。また、 $Q_1 \sim Q_9$  の硬化度依存性はほぼ同等となったため、1つのモデルで表すことができることが示された。
- (5) 剛性  $Q_{44}$ ,  $Q_{66}$  のプロニー級数の硬化度依存性は、全ての項が硬化度に比例することが分かった。また、それらの硬化度依存性はほぼ同等であり、さらに  $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$  の  $Q_1 \sim Q_9$  の硬化度依存性ともほぼ同等の振る舞いを示した。
- (6) 一方向 GFRP の熱膨張係数は、 $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{33}$  ともに温度・硬化度の影響をほとんど受けないことが分かった。
- (7) 一方向 GFRP 硬化収縮係数は、 $\beta_{11}$  については温度・硬化度の影響をほとんど受けないことが分かった。 $\beta_{33}$  は影響を受けるが、その値は著しく小さいため、0と考えることもよいことが分かった。

以上の結果から、一方向 GFRP の成形中の均質化特性に関して、以下のことが分かった。

- (1)  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$  は定数としてモデル化してよいが、他の剛性はプロニー級数を用いた粘弾性モデルが必要である。
- (2) 硬化度依存性については、 $Q_{11}$ ,  $Q_{12}$ ,  $Q_{13}$ ,  $Q_{33}$  の  $Q_{\infty}$  は一定で、他の項は硬化度に比例する1つのモデルで表すことができる。
- (3) 熱膨張および硬化収縮係数は、定数でよい。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、ご指導いただいた担当指導教員の高坂達郎教授に深く感謝いたします。また、多くの助言をしてくださった先端機械・航空材料工学研究室の皆様にも感謝いたします。

## 参考文献

- (1) 寺田賢二郎, 平山紀夫, 山本晃司, “数値材料試験 有限要素法によるマルチスケール解析”, 丸善出版株式会社, 2021
- (2) 斎藤理沙, 山口裕矢, 森口周二, 三原康子, 小林卓哉, 寺田賢二郎 “硬化プロセスを考慮した繊維強化プラスチックのマクロ構成則における粘弾性特性および熱変形・硬化収縮特性の同定方法”, 日本機械学会論文集 Vol85, No.870, 2019
- (3) 荒井政大, 角考平, 伏見祐介, 松田哲也, “均質化法を用いた CFRP 積層板の粘弾性構成式の評価”, 計算数理工学論文集, Vol. 8, No. 10-081128 (2008)
- (4) 高坂達郎, 逢坂勝彦, 澤田吉裕 “FBG センサを用いた樹脂ポストキュア過程のモニタリング”, 日本機械学会論文集 Vol60, No.5, pp648-653, 2011
- (5) 山本晃司, 石橋慶輝, 染宮聖人, 平山紀夫, 寺田賢二郎, “繊維強化熱可塑性樹脂の異方性粘弾性構成則における緩和特性と弾性率の温度依存性に関する数値解析的検討”, 日本機械学会論文集, Vol. 85 (2019), No. 874, 19-00058-19-00058 (2019)
- (6) 吉田淳 “エポキシ樹脂の物性に及ぼすポストキュアの影響” 大阪市立大学大学院工学研究科前期博士課程機械物理系専攻 平成 20 年度
- (7) 山崎平弥 “成形条件が FRP の成型誘起ひずみに与える影響に関する研究”, 高知工科大学大学院工学研究科基盤工学専攻知能機械システム工学コース, 平成 29 年度修士学位論文



付録1 樹脂の粘弾性構成方程式の差分化

粘弾性の構成方程式を差分化する．偏差応力テンソル  $\mathbf{S}$  と圧力  $p$  の式にそれぞれ分け，擬似時間  $\tau$  での積分に変形すると，

$$\mathbf{S}(t) = \int_0^t 2\mathbf{G}(\tau - \tau') \dot{\mathbf{e}} d\tau' = \int_0^t 2\mathbf{G}(\tau - \tau') \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (1)$$

$$p(t) = \int_0^t K(\tau - \tau') \frac{d\phi}{d\tau'} d\tau' \quad (2)$$

ここで

$$\mathbf{S}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t) - p(t) \quad (3)$$

となる．ほとんどの樹脂の場合は体積粘弾性が無視できて，式(3)は

$$p = K_0 \phi \quad (4)$$

と表すことが出来る．後で紹介するプロニー級数の式(5-4)を用いれば，式(1)は

$$\mathbf{S}(t) = 2\mathbf{G}_0 \left( \mathbf{e} - \sum_{i=1}^{N_p} g_i \mathbf{e}_i \right) \quad (5)$$

$$\mathbf{e}_i = \int_0^\tau \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau)}{\tau_i}} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (6)$$

となる．ここで， $\mathbf{e}_i$  を粘性ひずみと呼ぶ．

式(5)を差分化するため，まず式(3.1-9)を差分化する． $n+1$  回目の計算について，式(6)は

$$\mathbf{e}_i^{n+1} = \int_0^{\tau^n} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (7)$$

となる．ここで， $\tau^{n+1} = \tau^n + \Delta\tau$  を用いれば，

$$1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}} = 1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} + e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^n)}{\tau_i}} \right) \quad (8)$$

であり，またステップでは変形速度が一定，すなわち

$$\frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} = \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta\tau} \quad \text{at } \tau' = [\tau^n, \tau^{n+1}] \quad (9)$$

とすれば，式(7)は

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^{n+1} = & \left( 1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \right) \int_0^{\tau^n} \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' + e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^n)}{\tau_i}} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \\ & + \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left( 1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}} \right) d\tau' \end{aligned} \quad (10)$$

となる．第1,3.項はそれぞれ解析的に積分が出来て

$$\int_0^{\tau^n} \frac{de}{d\tau'} d\tau' = e^n \quad (11)$$

$$\int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^n)}{\tau_i}}\right) d\tau' = \left\{ \Delta\tau - \tau_i \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \right\} \frac{\Delta e}{\Delta\tau} \quad (12)$$

となる。よって、

$$e_i^{n+1} = \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) e^n + e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} e_i^n + \left\{ \Delta\tau - \tau_i \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \right\} \frac{\Delta e}{\Delta\tau} \quad (13)$$

となる。これより差分化した式は

$$\begin{aligned} \Delta e_i &= e_i^{n+1} - e_i^n = \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) e^n + \left(e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} - 1\right) e_i^n + \left\{ \Delta\tau - \tau_i \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \right\} \frac{\Delta e}{\Delta\tau} \\ &= \frac{\tau_i}{\Delta\tau} \left( \frac{\Delta\tau}{\tau_i} + e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} - 1 \right) \Delta e + \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) (e^n - e_i^n) \end{aligned} \quad (14)$$

となる、ここで、計算のため

$$\alpha_i = \frac{\tau_i}{\Delta\tau} \left( \frac{\Delta\tau}{\tau_i} + e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} - 1 \right) \quad (15)$$

$$\beta_i = \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \quad (16)$$

とすると式(14)は

$$\Delta e_i = \alpha_i \Delta e + \beta_i (e^n - e_i^n) \quad (17)$$

と表され、粘性ひずみの差分が求められた。次に、式(5)を差分化すると

$$\Delta S = 2G \left( \Delta e - \sum_{i=1}^{N_p} g_i \Delta e_i \right) \quad (18)$$

となり、式(15)、(18)から

$$\kappa = 1 - \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i g_i \quad (19)$$

とおけば、応力の差分は以下の式で求められる。

$$\Delta S = 2G_0 \left( \kappa \Delta e - \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i g_i (e^n - e_i^n) \right) \quad (20)$$

次に、応力-ひずみ関係の Jacobian を導出する。非線形 FEM では次のステップのひずみ増分を計算するために Jacobian を求めなくてはならない。

式(4)と(21)より

$$\Delta\sigma - K\Delta\phi I = 2G_0 \left( \kappa\Delta e - \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i g_i (e^n - e_i^n) \right) \quad (21)$$

であるから，垂直応力成分については

$$\{\Delta\sigma_i\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}^T \quad (22)$$

$$\{\Delta\varepsilon_i\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{12}\}^T \quad (23)$$

として

$$\frac{\partial\{\Delta\sigma_i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_i\}} = \frac{4}{3} G_0 \kappa + K \quad (i = j = 1, 2, 3) \quad (24)$$

$$\frac{\partial\{\Delta\sigma_i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_j\}} = -\frac{2}{3} G_0 \kappa + K \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (25)$$

$$\frac{\partial\{\Delta\sigma_i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_j\}} = 0 \quad (i \neq j, i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6) \quad (26)$$

また，せん断応力成分については

$$\frac{\partial\{\Delta\sigma_i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_i\}} = G_0 \kappa \quad (i = j = 4, 5, 6) \quad (27)$$

$$\frac{\partial\{\Delta\sigma_i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_j\}} = G_0 \kappa \quad (i = j = 4, 5, 6) \quad (28)$$

となる。

最後に，温度による擬似時間に関する差分化を示す。後で紹介するシフトファクターの式(5-6)より擬似時間は実時間をシフトファクター  $A_T$  で割ることにより計算される。任意の時間における  $\tau$  は以下の式で表される。

$$\tau = \int_0^t \frac{dt'}{A_T(T(t'))}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{A_T(T(t))} \quad (29)$$

と表される。本研究では

$$\tilde{t} = \frac{t}{A_T} \quad (30)$$

とした。

付録2 硬化中の粘弾性構成方程式の差分化

硬化中の樹脂剛性硬化度に依存するので、構成方程式は

$$\mathbf{G}(\mathbf{t}, \lambda) = \mathbf{G}_0(\lambda) \left( \mathbf{1} - \sum_{i=1}^n g_i \left( \mathbf{1} - e^{-\frac{t}{\tau_i}} \right) \right) \quad (31)$$

ここで

$$A_\lambda(\lambda) = \frac{\mathbf{G}_0(\lambda)}{\mathbf{G}_0(\mathbf{1})} \quad (32)$$

とすると、硬化度は時間の関数でもあるので、

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}) = 2\mathbf{G}_0 \left( \tilde{\mathbf{e}} - \sum_{i=1}^{N_p} g_i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) \quad (33)$$

となる。ここで

$$\tilde{\mathbf{e}} = \int_0^\tau A_\lambda(\lambda) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (34)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \int_0^\tau A_\lambda(\lambda) \left( \mathbf{1} - e^{-\frac{(\tau'-\tau)}{\tau_i}} \right) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' \quad (35)$$

である。

ここで、 $\tilde{\mathbf{e}}$ を疑似偏差機械ひずみ、 $\tilde{\mathbf{e}}_i$ を疑似粘性ひずみと呼ぶ。式(3.2-3)と(3.2-5)が拡張された硬化中の粘弾性構成式である。

前節と同様に、式(34)の  $n+1$  回目の計算について考えると

$$\tilde{\mathbf{e}}^{n+1} = \int_0^{\tau^n} A_\lambda(\lambda) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' + \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_\lambda(\lambda^n) \frac{d\mathbf{e}}{d\tau'} d\tau' = \tilde{\mathbf{e}}^n + \frac{\Delta\mathbf{e}}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_\lambda(\lambda) d\tau' = \tilde{\mathbf{e}}^n + h\Delta\mathbf{e} \quad (36)$$

となる、ここで  $h$  は

$$h = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_\lambda(\lambda) d\tau' \quad (37)$$

となる。第二項の積分については、本研究では積分区間内において中央値で近似する。すなわち、

$$A_\lambda^n(\lambda) = \frac{A_\lambda(\lambda^{n+1}) + A_\lambda(\lambda^n)}{2} \equiv A_{\lambda_c}^n \quad (38)$$

また、硬化度は時間で常に単調に増加するので、区間内では次の式で近似する。

$$\lambda - \lambda^n = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} (t - t^n) \quad (39)$$

ここで、実時間と疑似時間の関係を

$$\tau - \tau^n = \frac{\Delta\tau}{\Delta t}(t - t^n) \quad (40)$$

とすると

$$\alpha - \alpha^n = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}(t - t^n) \quad (41)$$

これより、それぞれの場合  $h$  は以下のようになる。

$$h = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau^{n+1}} A_{\lambda}(\lambda) d\tau' = \frac{A_{ac}^n}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau^{n+1}} d\tau' = A_{\lambda c}^n \quad (42)$$

すなわち、

$$\Delta\tilde{e} = A_{ac}^n \Delta e \quad (43)$$

となる。

次に疑似粘性ひずみの差分化を行うと、

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i^{n+1} &= \int_0^{\tau^n} A_{\lambda}(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) \frac{de}{d\tau'} d\tau' \\ &\quad + \left(A_{\lambda}(\lambda^n) + \frac{\Delta A_{\lambda}}{2}\right) \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) \frac{de}{d\tau'} d\tau' \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、前節と同様に式(8), (9)を用いれば

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i^{n+1} &= e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \int_0^{\tau^n} A_{\lambda}(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^n)}{\tau_i}}\right) \frac{de}{d\tau'} d\tau' \\ &\quad + \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \int_{\tau}^{\tau^n} A_{\lambda}(\lambda) \frac{de}{d\tau'} d\tau' + \frac{\Delta e}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_{\lambda}(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) d\tau' \\ &= e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \tilde{e}_i^n + \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \tilde{e}^n + \frac{\Delta e}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_{\lambda}(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) d\tau' \\ &= e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}} \tilde{e}_i^n + \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \tilde{e}^n + \lambda_i \Delta e \end{aligned} \quad (45)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} A_{\lambda}(\lambda) \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) d\tau' \quad (46)$$

となり、

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{\Delta\tau} A_{\lambda c}^n \int_{\tau^n}^{\tau^{n+1}} \left(1 - e^{-\frac{(\tau' - \tau^{n+1})}{\tau_i}}\right) d\tau' \\ &= \frac{A_{\lambda c}^n}{\Delta\tau} \left\{ \Delta\tau - \tau_i \left(1 - e^{-\frac{\Delta\tau}{\tau_i}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (47)$$

であるから、

$$\Delta\tilde{e}_i = \alpha_i \Delta e + \beta_i (\tilde{e}^n - \tilde{e}_i^n) \quad (48)$$

となる。

擬似体積ひずみについては硬化に伴う変化はほとんどないので

$$K(\lambda) = K_0 \quad (49)$$

と考える. よって

$$\Delta p = K_0 \quad (50)$$

となる.

式(33)を差分化すれば

$$\Delta S(t) = 2G_0 \left( \Delta \tilde{e} - \sum_{i=1}^{N_p} g_i \Delta \tilde{e}_i \right) \quad (51)$$

であるから, 式(15), (48)を用いて

$$\Delta S(t) = 2G_0 \left( \kappa \Delta \tilde{e} - \sum_{i=1}^{N_p} g_i \beta_i (\tilde{e}^n - \tilde{e}_i^n) \right) \quad (52)$$

となる. ここで

$$\kappa = 1 - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N_p} g_i \alpha_i \quad (53)$$

である.

Jacobian については,

$$\Delta \sigma - K \Delta \phi I = 2G_0 \left( \kappa h \left( \Delta \varepsilon - \frac{1}{3} \Delta \phi \right) - \sum_{i=1}^{N_p} \beta_i g_i (\tilde{e}^n - \tilde{e}_i^n) \right) \quad (54)$$

であるから, 垂直応力項は

$$\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_i\}} = \frac{4}{3} G_0 \kappa h + K \quad (i = j = 1, 2, 3) \quad (55)$$

$$\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_j\}} = -\frac{2}{3} G_0 \kappa h + K \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (56)$$

$$\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_j\}} = 0 \quad (i \neq j, i = 1, 2, 3, j = 4, 5, 6) \quad (57)$$

また, せん断項は

$$\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_j\}} = 0 \quad (i \neq j, i = 4, 5, 6, j = 1, 2, 3) \quad (58)$$

$$\frac{\partial \{\Delta \sigma_i\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_j\}} = h G_0 \kappa \quad (i = j = 4, 5, 6) \quad (59)$$

となる.