

# 修士論文

量子的な 2 光子対の伝搬に伴う Gouy 位相特異点発生  
Propagational-Dependent Gouy Phase Singularity of  
Quantum Two-Photon Pairs

---

## 報告者

学籍番号：1265045

氏名：地主 拓未

---

## 指導教員

小林 弘和 准教授

---

令和 6 年 2 月 19 日

高知工科大学大学院工学研究科  
基盤工学専攻電子・光工学コース



# 目次

<b>第 1 章</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	研究背景 . . . . .	1
1.2	本論文の構成 . . . . .	3
1.3	本論文で用いる記号 . . . . .	3
<b>第 2 章</b>	<b>高次 Gaussian ビームと Gouy 位相</b>	<b>4</b>
2.1	Hermite–Gaussian ビーム . . . . .	4
2.2	Laguerre–Gaussian ビーム . . . . .	5
<b>第 3 章</b>	<b>量子もつれ光子の生成手法</b>	<b>8</b>
3.1	自発パラメトリック下方変換 . . . . .	8
3.2	分極反転周期の非線形光学結晶と擬似位相整合条件 . . . . .	12
<b>第 4 章</b>	<b>自発パラメトリック下方変換により生成された光子対の 2 光子伝搬距離操作</b>	<b>13</b>
4.1	ブラ・ケットベクトル . . . . .	13
4.2	量子もつれ状態と定式化 . . . . .	14
4.3	Laguerre–Gaussian ビームをポンプ光とした光子対の 2 光子波動関数 . . . . .	14
4.4	光軸上での 2 光子波動関数と位相特異点 . . . . .	15
4.5	光軸上で位相特異点となるときの伝搬距離における波動関数 . . . . .	18
4.6	2 次元 Hermite–Gaussian ビームをポンプ光とした光子対の 2 光子波動関数 . . . . .	18
<b>第 5 章</b>	<b>高次動径モードを有する Laguerre–Gaussian ビームの生成実験</b>	<b>20</b>
5.1	Laguerre–Gaussian ビームの生成手法 . . . . .	20
5.2	Laguerre–Gaussian ビームの生成実験 . . . . .	21
5.3	Laguerre–Gaussian ビームの生成実験結果 . . . . .	22
5.4	Laguerre–Gaussian ビームの生成実験の考察 . . . . .	23
<b>第 6 章</b>	<b>光子計数器の動作確認</b>	<b>24</b>
6.1	光子計数の手法 . . . . .	24

6.1.1	光子検出器および光子計数器による光子計数 . . . . .	24
6.1.2	光子検出器に入射される光子数の換算 . . . . .	25
6.2	光子計数器の動作確認の実験系 . . . . .	25
6.3	光子計数器動作確認の実験結果 . . . . .	26
6.4	光子計数器動作確認の実験結果の考察 . . . . .	26
<b>第 7 章</b>	<b>光子計数器による 2 光子対の検出実験</b>	<b>28</b>
7.1	2 光子対の検出実験の実験原理 . . . . .	28
7.1.1	バンドパスフィルタによる換算 2 光子計数 . . . . .	28
7.1.2	各素子による光子計数減衰の補正 . . . . .	29
7.1.3	生成される 2 光子対の温度依存性 . . . . .	29
7.2	2 光子対の検出実験の実験系 . . . . .	30
7.3	2 光子対検出の実験結果 . . . . .	31
7.4	2 光子対検出の実験結果についての考察 . . . . .	32
<b>第 8 章</b>	<b>まとめ</b>	<b>34</b>
	<b>謝辞</b>	<b>35</b>
	<b>参考文献</b>	<b>36</b>
<b>付録 A</b>	<b>高次 Gaussian ビーム</b>	<b>40</b>
A.1	3 次元空間における近軸 Helmholtz 方程式 . . . . .	40
A.2	Laguerre–Gaussian ビームの諸性質 . . . . .	41
A.3	量子的な 2 次元調和振動子の Hamiltonian と LG ビーム . . . . .	43
A.4	昇降演算子による LG ビームの Fourier 変換 . . . . .	46
A.5	LG ビームの伝搬とユニタリ演算子 . . . . .	47
A.6	Hermite–Gaussian モードの状態ベクトルと Fourier 変換 . . . . .	47
A.6.1	Hermite–Gaussian モードの状態ベクトル . . . . .	48
A.6.2	Hermite–Gaussian ビームの Fourier 変換 . . . . .	48
<b>付録 B</b>	<b>擬似位相整合による自発パラメトリック下方変換</b>	<b>50</b>
B.1	擬似位相整合条件での自発パラメトリック下方変換による 2 光子対生成 . . . . .	50
B.1.1	2 次非線形相互作用による Hamiltonian の記述 . . . . .	50
B.1.2	自発パラメトリック下方変換による 2 光子状態ベクトル . . . . .	53
B.1.3	単色の 2 光子状態ベクトル . . . . .	54
B.1.4	単色で波数が縮退した 2 光子状態ベクトル . . . . .	55
B.2	生成された 2 光子対の伝搬 . . . . .	55
B.3	3 次元空間における 2 光子対の伝搬距離に対する 2 光子状態ベクトル . . . . .	55

B.4	2次元空間における2光子対の伝搬距離に対する2光子状態ベクトル . . . . .	56
<b>付録 C</b>	<b>横空間における2光子波動関数の導出</b>	<b>57</b>
C.1	光子対の波数がほぼ等しいときの2光子波動関数 . . . . .	57
C.1.1	光子対の波数が縮退しているときの2光子波動関数の導出 . . . . .	57
C.2	横空間上での2光子波動関数 . . . . .	60
C.3	ポンプ光を2次元平面での分布とする光子対の波数がほぼ等しいときの2光子波動関数 . . . . .	61
<b>付録 D</b>	<b>ポンプ光がLaguerre–Gaussianビームのときの正規化係数 <math>\tilde{N}_{l,p}</math></b>	<b>62</b>
D.1	シグナル光子とアイドラ光子の角周波数が異なる場合 . . . . .	62
D.2	シグナル光子とアイドラ光子の角周波数が縮退している場合 . . . . .	64
<b>付録 E</b>	<b>光軸上の2光子波動関数と位相特異点発生</b>	<b>65</b>
E.1	光子対の波数がほぼ等しいときの光軸上の2光子波動関数 . . . . .	65
E.1.1	光子対の波数がほぼ等しいときの光軸上の2光子波動関数の導出 . . . . .	65
E.1.2	光子対の波数がほぼ等しいときの高次LGビームの項による位相特異点発生 . . . . .	66
E.2	光軸上の2光子波動関数 . . . . .	69
E.2.1	光軸上の2光子波動関数の導出 . . . . .	69
E.2.2	高次LGビームの項による位相特異点発生 . . . . .	69
<b>付録 F</b>	<b>位相特異点上での横空間2光子波動関数</b>	<b>71</b>
F.1	位相特異点上での横空間2光子波動関数 . . . . .	71
F.2	2光子目の断面座標について積分したときの波動関数 . . . . .	72
<b>付録 G</b>	<b>Gouy位相和による1次位相特異点の発生</b>	<b>74</b>
G.1	LGモードによる2光子波動関数の展開 . . . . .	74
G.2	セパラブル状態のときのゼロ点 . . . . .	76
G.3	Gouy位相和による1次特異点発生 . . . . .	76
G.4	1次位相特異点発生時の最小Gouy位相和 . . . . .	78
G.5	SPDCで生成した2光子対による1次位相特異点発生 . . . . .	79



# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

量子技術分野では量子コンピューティングや量子鍵配送, 量子暗号, 量子通信など様々な応用があり [1, 2], これら量子技術においては量子特有の性質である量子もつれが不可欠である. 光子を用いた量子もつれは, 偏光もつれや空間モードによるもつれがある [3, 4]. とくに空間モードによるもつれは, 1 光子から原理的には可算無限個の量子ビットを与えることができるため, 高次元の量子ビットを扱う際に極めて重要である.

量子状態には, 上述のような粒子性のみならず, 波動関数を用いた波動性に着目した現象もあり, 量子系の基礎研究や量子技術において重要な役割を果たす. 古典的な波動現象において広く認識されている現象で, Gouy 位相と呼ばれる伝搬に伴う位相シフトが知られている (図 1.1). Gouy 位相は, 焦点をもつ一般的な波動の収束波が焦点近傍で平面波に対する位相シフトとして現れ, 古典的には光波や音響波などで, 量子状態においても物質波や相対論的粒子などで確認されている [5–11]. Gouy 位相は, 横空間波数の閉じ込めや, 幾何光学と物理光学の関係, 幾何的な位相差などで多岐にわたる直観的説明が研究されている [12–17]. この Gouy 位相は, 光波の伝搬方向に直交する横空間の次元数に比例して増加することが良く知られているが [12], 高次 Gaussian ビームの空間モードを用いても Gouy 位相は増加する. とくに良く用いられる空間モードは, Laguerre–Gaussian (LG) モードと呼ばれる空間モードである (図 1.1) [18].

量子もつれした光子においても Gouy 位相は重要な役割を果たすが, 自発パラメトリック下方変換 (Spontaneous Parametric Down-Conversion; SPDC) によって生成した type-I 2 光子対の Gouy 位相 [19, 20] や, 2 重スリットを介した 2 光子対の Gouy 位相 [21, 22], NOON 状態の 2 光子対の Gouy 位相 [23], SPDC で生成した 2 光子対の相対 Gouy 位相による空間自由度とスペクトル自由度のデカップリング [24], Gouy 位相による 4 光波混合の非線形過程での LG モード交換 [25] のように, 量子もつれした光子対の Gouy 位相に着目した研究は数少ない.

本研究では, 高次の LG モードを有するポンプ光から SPDC によって生成した 2 光子対

を、それぞれ独立に伝搬距離操作し、その性質を明らかにすることと実証することを目的とする。本研究により、2光子対をある伝搬距離だけ伝搬させると位相特異点が発生することを初めて発見した (図 1.2)。

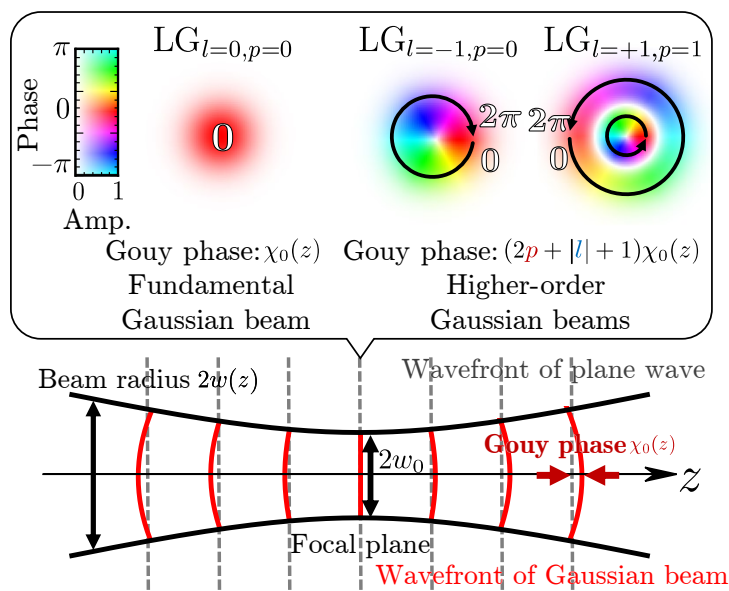


図 1.1 空間モードを有するビームの横断面の分布 (上側) とビーム径  $w(z)$  のビームの伝搬による位相変化 (下側) を表わした図. 左上のカラーバーは位相を色相で表わし, 振幅を明度で表わしている. ビームの波面 (赤色) は集光面では平面波 (灰色) と一致し, ビームが伝搬するにしたがって球面波に漸近する. 伝搬に伴いビームの波面は光軸上で平面波とずれが生じ, そのずれが Gouy 位相として現れる.

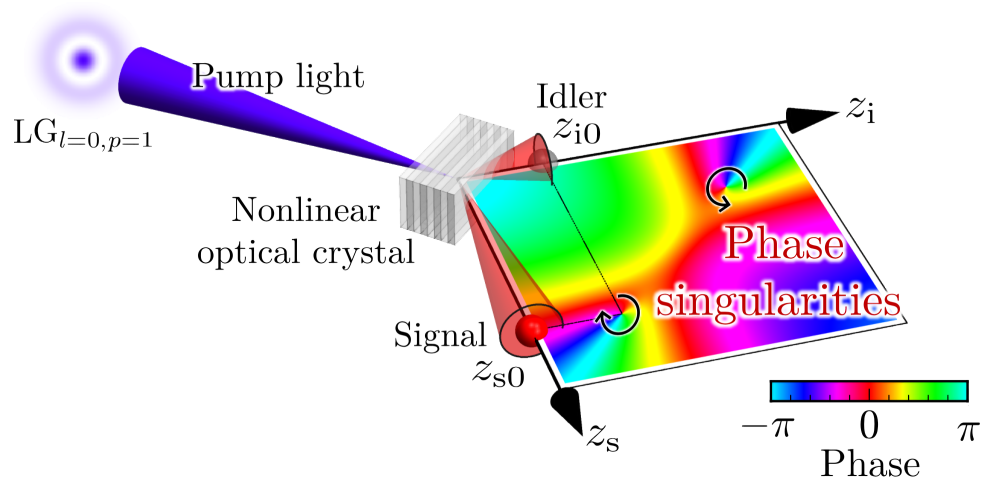


図 1.2 ポンプ光を LG モードとして SPDC により生成した 2 光子の光軸上における波動関数の位相を示した図. この図の伝搬距離でシグナル光子を検出すると, アイドラ光子は光軸上では検出されない.



## 1.2 本論文の構成

本論文の目的は、量子的な 2 光子対の伝搬に対する性質を明らかにし、実証することである。そこで、本論文では量子的な 2 光子対の伝搬に対する性質の理論に少し触れるが、現在の 2 光子対の生成・計測の進捗について述べる。

第 1 章は序論であり、量子的な 2 光子対の伝搬に関する研究の動向について述べた。第 2 章では、高次 Gaussian ビームとの関係および複素振幅分布と、光波の伝搬に伴う重要な位相シフトである Gouy 位相について述べる。第 3 章では、量子的な 2 光子対を述べる上で重要な量子もつれ光子の生成手法について述べる。第 4 章では、第 2 章および第 3 章で述べた高次 Gaussian ビームと量子的な 2 光子対の生成手法を用いて 2 光子波動関数を導入し、その性質について述べる。以降のまとめを除いた章は全て実験に関して記述する。第 5 章では、高次 Gaussian ビームの 1 種である LG ビームの生成実験について述べる。第 6 章では、2 光子対を測定するために光子計数器の動作確認の実験について述べる。第 7 章では、生成した 2 光子対の光子計数器による検出実験について述べる。

## 1.3 本論文で用いる記号

表 1.1 に、本論文で用いる記号を示した。

表 1.1 本論文で用いる記号

記号の名称	記号	備考
直積	$\otimes$	
1 次元 Euclid 空間	$\mathbb{R}$	
2 次元 Euclid 空間	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$
複素数空間	$\mathbb{C}$	
Hilbert 空間	$\mathcal{H}$	
2 次元 Hilbert 空間	$\mathcal{H}^2$	$\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$
整数全体の集合	$\mathbb{Z}$	
非負整数全体の集合	$\mathbb{Z}_0^+$	
ケットベクトル	$ \square\rangle$	Hilbert 空間の元
ブラベクトル	$\langle\square $	Hilbert 空間の双対空間の元

## 第 2 章

# 高次 Gaussian ビームと Gouy 位相

本章では、モード番号依存する Gouy 位相を与える 2.1 節で 2 次元平面での高次 Gaussian ビームである Hermite–Gaussian (HG) ビームの複素振幅分布を導入し、2.2 節で 3 次元空間での円筒座標系で対称性の高い高次 Gaussian ビームである LG ビームを導入する。

### 2.1 Hermite–Gaussian ビーム

2 次元平面  $(x, z)^\top$  上の有限径の殆ど平行に伝搬するビームは、近軸 Helmholtz 方程式

$$i \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

に従って伝搬する (付録 A)。ただし、 $(\square)^\top$  は転置である。また、複素振幅分布  $u(x, z)$  は、電場のスカラー分布  $E(x, z)$  に対して

$$E(x, z) = E_0 u(x, z) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \int_{\mathbb{R}} dx |u(x, z)|^2 = 1 \quad (2.2)$$

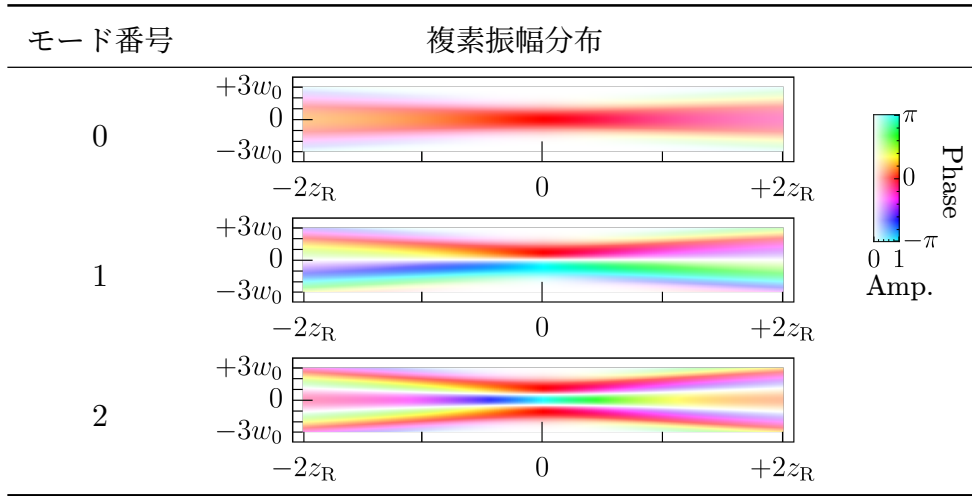
の関係にあり、正規化されている。ただし、複素係数  $E_0$  は電場の振幅を与える定数であり、 $\omega := ck$  は角周波数を表わす。

HG ビームは式 (2.1) を満たす固有解であり、

$$u_n^{\text{HG}}(x, z) := C_n^{\text{HG}} \frac{1}{\sqrt{w(z)}} H_n \left[ \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] \exp \left[ -\frac{x^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i \left[ k \frac{x^2}{2R(z)} - \chi_n(z) \right] \right\} \quad (2.3)$$

で与えられる [26]。以降、モード番号  $n$  HG ビームを  $\text{HG}_n$  と表記する。式 (2.3) で用いた正規化定数  $C_n^{\text{HG}}$  と Hermite 多項式  $H_n(\nu)$ 、伝搬距離  $z$  でのビーム径  $w(z)$ 、伝搬距離  $z$  における位相の曲率半径  $R(z)$ 、Gouy 位相  $\chi_n(z)$  は次のように定義した：

表 2.1 2次元平面での HG ビームの複素振幅. 横断面上でモード番号  $n$  と同数のゼロ点がある. また, モード番号の増加に伴いビームの広がりが増加している.



$$C_n^{\text{HG}} := \sqrt{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{n! 2^n}}, \quad H_n(\nu) := m! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{n!(n-2m)!} (2\nu)^{n-2m}, \quad (2.4a)$$

$$w(z) := w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad R(z) := z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right]. \quad (2.4b)$$

$$\chi_n(z) := (n+1)\chi_0(z), \quad \chi_0(z) := \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (2.4c)$$

ただし, 横断面上のビーム径  $w_0$  は基本 Gaussian ビーム  $\text{HG}_{n=0}$  の光軸上での振幅が動径方向に  $1/e^2$  減衰した半径とし,  $[a]$  は実数  $a$  の床関数とした. HG ビームの Gouy 位相 (2.4c) から,  $\text{HG}_0$  の Gouy 位相とモード番号  $n$  が単に比例する. ただし  $z_R$  は Rayleigh 長と呼ばれる定数で, 焦点面でのビーム径  $w_0$  が  $\sqrt{2}$  倍になるまでの距離を表わす:

$$z_R := \frac{1}{2} k w_0^2. \quad (2.5)$$

式 (2.3) によって与えられるモード番号  $n$  は, 各ビーム横断面において  $n$  個のゼロ点を有し, モード番号の増加に伴い横断面での分布は広がっている (表 2.1).

## 2.2 Laguerre–Gaussian ビーム

3次元空間  $(x, y, z)^\top$  上では, 式 (2.1) に対して単に横座標  $y$  を追加することで与えられる (付録 A):

$$i \frac{\partial u(\mathbf{r}, z)}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \Delta_\perp u(\mathbf{r}, z). \quad (2.6)$$

ただし,  $\Delta_{\perp} := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  は光波の横方向  $\mathbf{r} := (x, y)^{\top}$  に対する横方向 Laplacian である. 3次元の電場のスカラー分布  $E(\mathbf{r}, z)$  および複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  も同様に

$$E(\mathbf{r}, z) = E_0 u(\mathbf{r}, z) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} |u(\mathbf{r}, z)|^2 = 1. \quad (2.7)$$

の関係にある.

式 (2.6) の横断面では 2次元平面での伝搬と異なり, 角運動量を定義できる. また, 式 (2.6) は方位角方向に対して対称であるため, 横断面で直交座標の代わりに動径  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ , 方位角  $\theta := \tan^{-1}(y/x)$  を用いた円筒座標系  $(r, \theta, z)$  を用いるのが最も都合が良い. このとき式 (2.6) を満たす高次 Gaussian ビームは次の式で与えられる [18]:

$$u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}, z) = \frac{C_{l,p}^{\text{LG}}}{w(z)} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} L_p^{|l|} \left[ \frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i \left[ k \frac{r^2}{2R(z)} + l\theta - \chi_{l,p}(z) \right] \right\}. \quad (2.8)$$

式 (2.8) によって与えられるモード番号は, 方位角モード  $l$  と動径モード  $p$  と呼ばれる. 方位角モード  $l$  は整数全体を取り得るモード番号であり, 方位角方向に  $2l\pi$  の位相変化を与える. 一方, 動径モード  $p$  は非負整数全体を取り得るモード番号であり, 振幅変化による  $p+1$  重リングを与え, さらに隣り合うリングが逆位相となる (表 2.2). 以降, モード番号  $(l, p)$  の LG ビームを  $\text{LG}_{l,p}$  と表記する. また, 式 (2.8) で用いた正規化定数  $C_{l,p}^{\text{LG}}$  や, Laguerre 陪多項式<sup>\*1</sup>  $L_p^{|l|}(\nu)$ , Gouy 位相  $\chi_{l,p}(z)$  を次のように定義した:

$$C_{l,p}^{\text{LG}} := \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{p!}{(p+|l|)!}}, \quad L_p^{|l|}(\nu) := \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n}{n!} \binom{p+|l|}{p-n} \nu^n, \quad (2.9)$$

$$\chi_{l,p}(z) := (N+1)\chi_0(z), \quad \chi_0(z) := \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right), \quad N := 2p + |l|. \quad (2.10)$$

式 (2.10) での Gouy 位相  $\chi_0(z)$  は, ビーム伝搬に対する横断面の次元に比例するので, 式 (2.4c) の 2 倍であり, Gouy 位相はビーム断面の大きさを表わすモード番号  $N$  に比例する<sup>\*2</sup>.

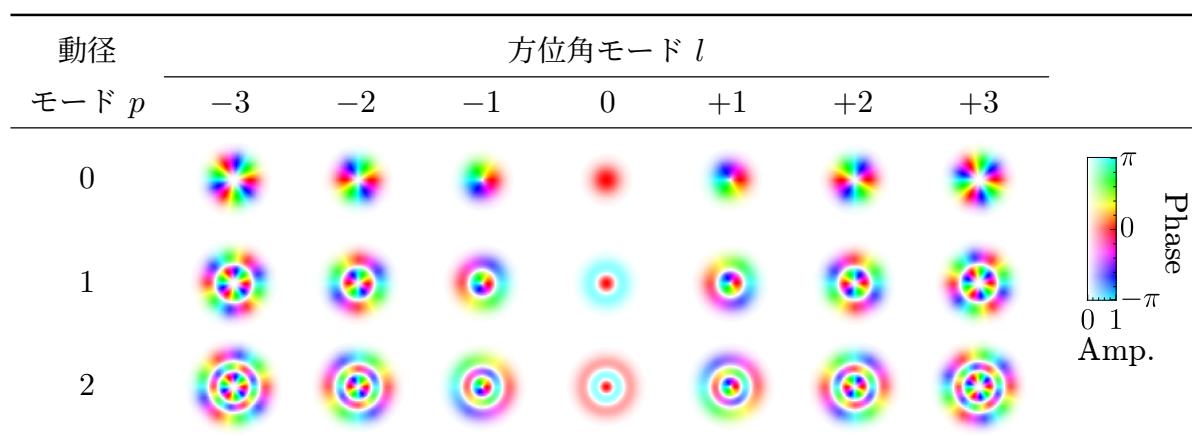
<sup>\*1</sup> Laguerre 陪多項式の定義には他にも流儀があり, 本論文での定義は Sonine 多項式とも呼ばれる定義である.

<sup>\*2</sup> モード番号  $N$  はビームの広がり幅の 2 乗  $\sigma_{l,p}^2(z)$  が

$$\sigma_{l,p}^2(z) := 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \|\mathbf{r}\|^2 |u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}, z)|^2 = (N+1)w^2(z)$$

となるため, ビーム断面の大きさを示すモード番号と表現した [27].

表 2.2 集光面  $z = 0$  での LG ビームの複素振幅. 方位角モード  $l$  の増加に伴い方位角方向の位相変化が増加し, 動径モード  $p$  の増加に伴い振幅変化によるリング数が増加する. また, モード番号の増加に伴いビームの広がりが増加している.



## 第 3 章

# 量子もつれ光子の生成手法

本章では量子もつれ光子の生成手法について述べる。本章では、3.1 節で量子もつれした光子の生成手法の 1 種である SPDC について述べた後、3.2 節で分極反転周期をもつ非線形光学結晶を用いたときの SPDC について述べる。

### 3.1 自発パラメトリック下方変換

量子もつれした光子を生成する代表的な手法として、SPDC がある [28, 29]。SPDC は 2 次非線形光学効果の 1 種であり、高エネルギーのポンプ光を 2 次非線形電気感受率が高い非線形光学結晶に入射すると、低エネルギーの 2 光子対が自発的にほとんど同時かつ同位置に生成される変換過程である (図 3.1)。このため、生成された 2 光子対は時間的、空間的に強い相関を有する。慣習的に、生成された光子対はそれぞれシグナル光子、アイドラ光子と呼ばれる。

SPDC により生成した 2 光子対は、互いに独立した波動関数に分解できない性質をもつ。つまり、2 光子対の波動関数は互いに相関した波動関数となり、古典力学による説明ができない。これは、古典電磁気学では 2 次非線形光学効果は周波数の異なる電場または周波数が等しい電場を与えることによって、和周波と差周波の電場または第 2 高調波の電場を生成するためである。したがって、逆過程である単一の周波数をもつ電場から 2 種類の電場を与え

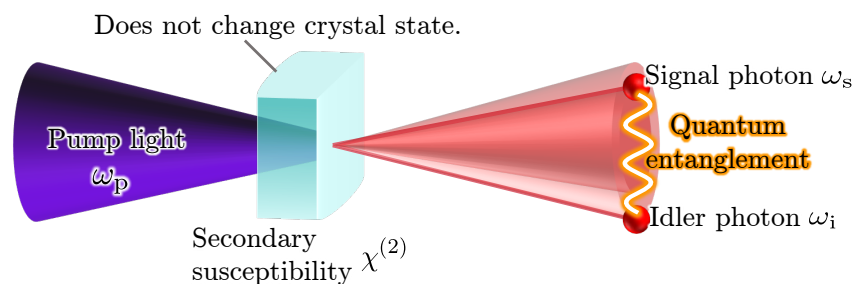


図 3.1 SPDC による光子対生成の変換過程。強いパワーの入射光を非線形光学結晶に入射することで、低いパワーの光子対が生成される。

る SPDC は古典力学では説明できない。

ポンプ光によって生成される 2 光子対は、物理量が保存される条件下にあるときに生成される。ポンプ光の角周波数  $\omega_p$  によって生成される光子対に対してはそれぞれ、シグナル光子の角周波数を  $\omega_s$ 、アイドラ光子の角周波数を  $\omega_i$  とするとエネルギー保存則

$$\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i \quad (3.1)$$

を満たすように光子対は生成される。

周波数幅  $\Delta\omega_p$  の時間相関の無い中心角周波数  $\omega_p/2$  のコヒーレントな 2 光子と (図 3.2), 時間相関のある SPDC で生成された 2 光子対の周波数領域での確率密度 (図 3.3) を初期時刻を  $t_0$  として比較する。周波数領域の分布を逆 Fourier 変換することで時間領域の分布になるため、周波数領域と時間領域は互いに相補的な関係にある。このため、時間相関の無いコヒーレントな 2 光子の確率密度が周波数領域で  $\Delta\omega_p$  の広がりをもつとき、逆 Fourier 変換によって時間領域でのコヒーレンス時間  $\Delta T$  が決まる (図 3.2)。ただし、Fourier 解析から  $\Delta\omega_p$  と  $\Delta T$  は逆数の関係にある。他方で、時間相関のある 2 光子対の確率密度は、エネルギー保存則 (3.1) によって  $\omega_s + \omega_i$  軸にポンプ光の揺らぎ  $\Delta\omega_p$  の広がりをもち、後に述べる位相整合条件 (3.4) によって  $\omega_s - \omega_i$  軸に  $\delta\omega$  の周波数幅をもつ (図 3.3)。通常、結晶長は 2 光子対の波長よりも長いため、逆 Fourier 変換により生成される光子対の時間差  $\tau$  はコヒーレンス時間  $\Delta T$  に比べて短くなる。したがって、SPDC によって生成された 2 光子対は殆ど同時刻に生成されるといえる (図 3.3, 図 3.4)。

また、実験ではポンプ光に有限の周波数幅が存在することと結晶長が有限のため、このときの時間相関幅の典型的な条件では 100 fs 程度である [28, 30]。

一方、ポンプ光の波数ベクトル  $\vec{k}_p := (\mathbf{k}_p, k_{pz}(\omega_p))^T$  によって生成される光子対に対してはそれぞれ、シグナル光子の波数ベクトルを  $\vec{k}_s := (\mathbf{k}_s, k_{sz}(\omega_s))^T$ 、アイドラ光子の波数ベクトルを  $\vec{k}_i := (\mathbf{k}_i, k_{iz}(\omega_i))^T$  とすると運動量保存則は

$$\hbar\mathbf{k}_p = \hbar\mathbf{k}_s + \hbar\mathbf{k}_i, \quad \hbar k_{pz}(\omega_p) = \hbar k_{sz}(\omega_s) + \hbar k_{iz}(\omega_i) \quad (3.2)$$

で与えられる。ただし、 $\mathbf{k}_j := (k_{jx}, k_{jy})^T$  ( $j = p, s, i$ ) は伝搬方向に対して垂直な横方向の波数 (横波数) である。一方、 $k_{jz}(\omega_j)$  は縦波数といい、周波数依存性がある。

ビーム径  $w_0$  の空間相関の 2 光子と (図 3.2), 空間相関のある SPDC で生成された 2 光子対の横波数空間での確率密度 (図 3.3) を横断面を  $x$  および  $k_x$  方向に限定して  $y, k_y$  方向は 0 として比較する。周波数と同様に、横波数空間の分布を逆 Fourier 変換することで横断面の分布になるため、横波数空間と横断面は互いに相補的な関係にある。このため、空間相関の無いコヒーレントな 2 光子の確率密度は、横波数空間で互いに独立なビーム径の逆数  $w_0^{-1}$  となり、逆 Fourier 変換により横断面では幅  $2w_0$  のガウス分布になる (図 3.5)。他方で、空間相関のある 2 光子対の確率密度は、横断面での運動量保存則 (3.2) とポンプ光のビーム径  $w_0$  による横波数の広がり  $w_0^{-1}$  によって  $k_{sx} + k_{ix}$  軸に幅  $w_+^{-1} := w_0^{-1}/\sqrt{2}$  の空間相関が現れ、後に述べる位相整合条件によって  $k_{sx} + k_{ix}$  軸に幅  $w_-^{-1}$  の空間相関が現れ

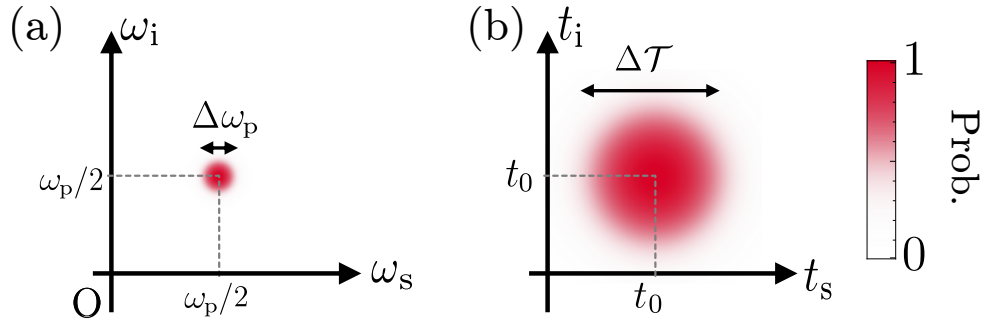


図 3.2 時間相関の無いコヒーレントな 2 光子の確率密度. (a) 中心周波数が  $\omega_p/2$  で周波数幅は  $\Delta\omega_p$  である. (b) 初期時刻が  $t_0$  で、コヒーレンス時間は  $\Delta\mathcal{T}$  である. 一方の光子の検出時刻  $t_s$  に他方の光子が検出される確率密度分布は依存しない.

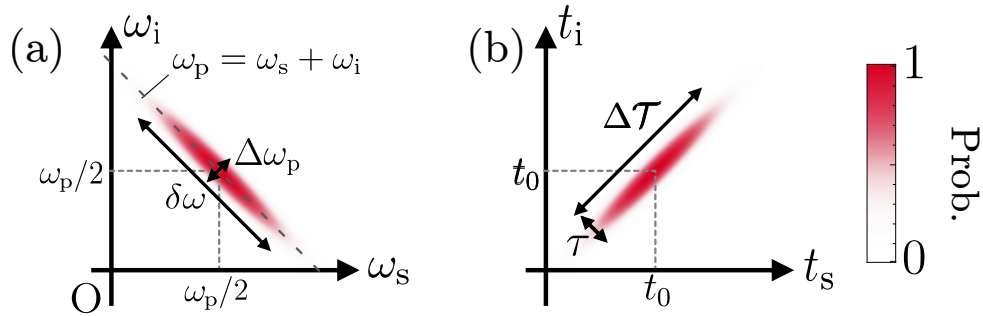


図 3.3 SPDC で生成された 2 光子対の確率密度. (a) 中心周波数が  $\omega_p/2$  で周波数幅は  $\Delta\omega_p$  であり、さらにエネルギー保存則 (3.1) を満たす. (b) 初期時刻が  $t_0$  で、コヒーレンス時間は  $\Delta\mathcal{T}$  であり、時間差  $\tau$  の時間相関をもつ. このとき、時刻  $t_s$  で光子を検出すると、他方の光子は時刻  $t_i \simeq t_s$  で検出されるため、時間差  $\tau$  が十分短ければ殆ど同時に検出される.

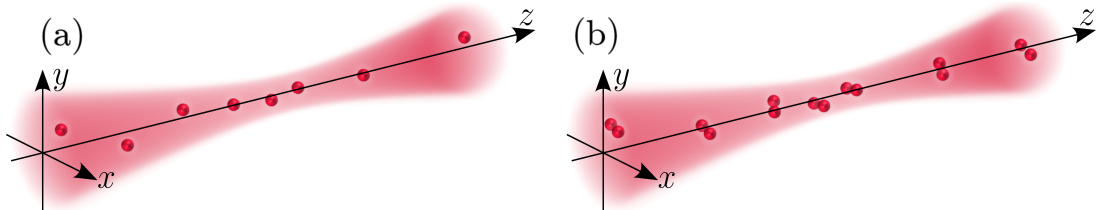


図 3.4 ビーム中の光子を表わした概念図. 光子はビーム中心に近づくにつれ増加する. (a) 各光子に相関が無いコヒーレント光での光子の分布. (b) 2 光子対のビームでの光子の分布. 同位置・同時刻に 2 つの光子が現れ、ペアとなっている.

る. 周波数空間と同様に通常、結晶長はビーム径よりも長いため、逆 Fourier 変換により生成される光子対の  $x$  方向の距離  $w_-$  はビーム径  $w_0$  に比べて短くなる. したがって、SPDC によって生成された 2 光子対は殆ど同位置に生成されるといえる (図 3.6, 図 3.4).

最後に、位相整合条件について述べる. シグナル光子とアイドラ光子の縦波数  $k_{jz}(\omega_j)$  ( $j = s, i$ ) による運動量保存則は、古典光学と殆ど波面が  $z$  方向である条件 (付録 A)

$$k_{jz}(\omega_j) = \sqrt{k_j^2(\omega_j) - \|\mathbf{k}_j\|^2} \simeq k_j(\omega_j) - \frac{\|\mathbf{k}_j\|^2}{2k_j(\omega_j)} \quad (j = p, s, i) \quad (3.3)$$



によって

$$\begin{cases} k_j(\omega_j) = \frac{n(\omega_j)\omega_j}{c}, & k_j^2(\omega_j) = \|\mathbf{k}_j\|^2 + k_{jz}^2(\omega_j), \quad (\because \text{古典光学}, j = \text{p,s,i}) \\ k_{pz}(\omega_p) = k_{sz}(\omega_s) + k_{iz}(\omega_i) & (\because z \text{方向の運動量保存則}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_p(\omega_p) \simeq k_s(\omega_s) + k_i(\omega_i), & (\text{位相整合条件}) \\ \frac{\|\mathbf{k}_p\|^2}{2k_p(\omega_p)} \simeq \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s(\omega_s)} + \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i(\omega_i)} \end{cases} \quad (3.4)$$

の連立方程式を満たす必要がある．ここで， $n(\omega_j)$  は屈折率である．式 (3.4) の第 1 式は，前述の周波数領域での  $\omega_s - \omega_i$  軸への制限として現れる．結晶内の各位置でこの式に整合するにつれ位相が揃い，効率よく光子対を生成することができる．このため，式 (3.4) の第 1 式は位相整合条件とも呼ばれる．一方，式 (3.4) の第 2 式は光子対の周波数が横波数に掛ける  $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  軸への制限といえる．

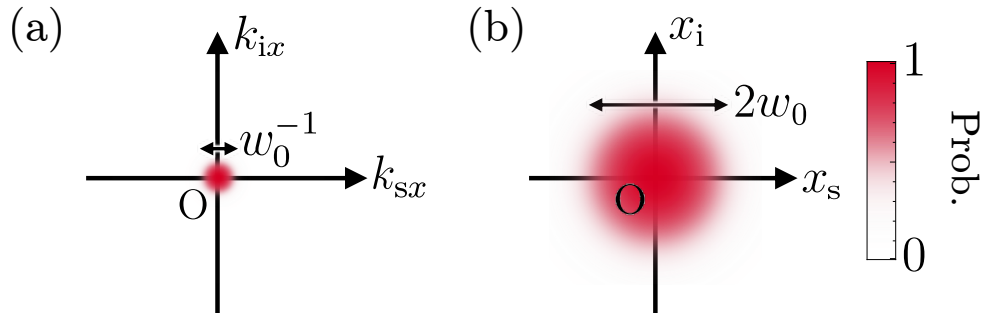


図 3.5 時間相関の無いコヒーレントな 2 光子の確率密度．(a) 光子が存在する確率密度は横波数空間ではビーム径  $w_0$  の逆数だけ広がる．(b) 光子が存在する確率密度は横空間ではビーム径  $w_0$  により  $2w_0$  だけ広がる．他方の光子が検出される確率密度分布は依存しない．

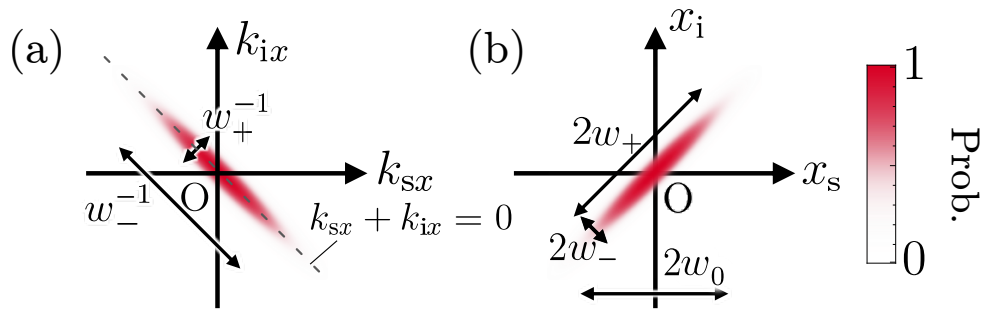


図 3.6 SPDC で生成された 2 光子対の確率密度．(a) 光子が存在する確率密度は横波数空間ではビーム径  $w_0$  の逆数だけ広がる．位相整合条件により  $k_{sx} + k_{ix} = 0$  が成立する．(b) 一方の光子が  $x_s$  で検出されると， $w_-$  が十分小さければ，他方の光子は  $x_i \simeq x_s$  で検出される．

### 3.2 分極反転周期の非線形光学結晶と擬似位相整合条件

SPDC により光子対を生成するには、式 (3.1) および式 (3.2) を満たす必要があるが、式 (3.2) は非線形光学結晶の屈折率が波長依存性をもつため、ポンプ光と光子対の波長を考慮し整合する非線形光学結晶を用いる必要がある。波長依存性を考慮して位相整合を行なう良く知られた手法として、複屈折を利用する方法がある。直交する直線偏光に対して複屈折をもつ結晶は 2 種の屈折率があるため、ポンプ光を入射すると、屈折率の差を利用して式 (3.2) を満たすことができる。しかし、複屈折を利用する方法の場合、ポンプ光の波長と整合する偏光方向の 2 次非線形電気感受率  $\chi^{(2)}$  が小さくなることもあるため、光子対の生成効率とポンプ光の波長を照らし合わせる必要がある。

他方で擬似位相整合 (Quasi-Phase-Matching; QPM) と呼ばれる手法がある。QPM は光波の強め合いと弱め合いの周期性を利用し、弱め合うときには 2 次非線形電気感受率を反転した  $[-\chi^{(2)}]$  にすることで強め合うようにして光波の電場を増幅させる手法である (図 3.7)。このため、2 次非線形電気感受率が最大になる偏光方向を利用することが可能となるので、複屈折による位相整合よりも扱いやすい特長がある。QPM では、分極反転周期  $\Lambda$  により生じる分極反転波数  $k_c := 2\pi/\Lambda$  から、式 (3.2) の縦波数は次のように修正される：

$$\hbar k_{pz} = \hbar k_{sz} + \hbar k_{iz} + m\hbar k_c. \quad (m \text{ は任意の整数}) \quad (3.5)$$

前項から、縦波数の保存則は位相整合条件となるので、次の式になる：

$$\hbar k_p = \hbar k_s + \hbar k_i + m\hbar k_c. \quad (m \text{ は任意の整数}) \quad (3.6)$$

式 (3.6) は、分極反転波数の整数倍  $m$  を選ぶ自由度があるため、通常の位相整合条件よりも自由度が高く、分極反転周期  $\Lambda$  を位相整合条件 (3.4) からずれた波数に取れば任意のポンプ光の波長に対して最適化ができる。

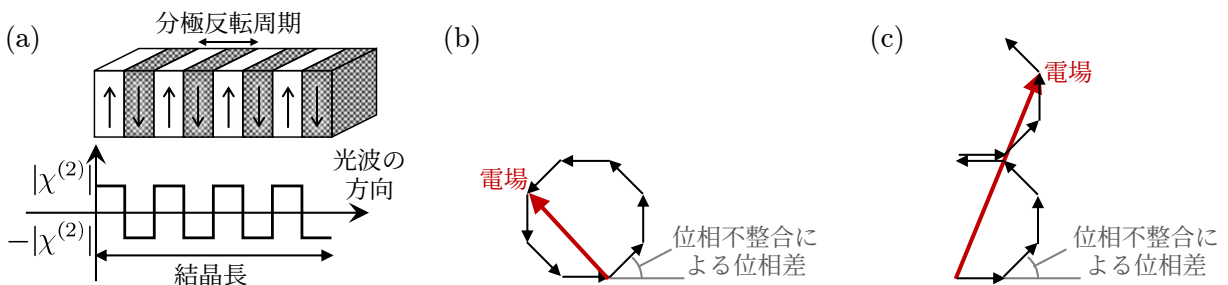


図 3.7 擬似位相整合による電場の増幅. (a) 分極反転周期をもつ非線形光学結晶 (b) 波数が位相整合条件を満たさないため光波は強め合いと弱め合いにより電場の位相が一周して 0 に近くなる. (c) 電場の位相整合とのずれによる位相差が  $\pi$  になる距離から  $2\pi$  になる距離の間で、非線形光学結晶の  $\chi^{(2)}$  を反転させることで電場の位相も反転し、電場が増幅される。

## 第 4 章

# 自発パラメトリック下方変換により生成された光子対の 2 光子伝搬距離操作

本章では、SPDC により生成した光子対の 2 光子伝搬距離操作について述べる。本章の帰結として、動径モードを有する高次 Gaussian ビームをポンプ光として 2 光子対を生成し、独立した伝搬距離操作を行なうと、ある伝搬距離で位相特異点が発生することが示される。4.3 節では、SPDC で生成した 2 光子波動関数を導入して各伝搬距離で 2 光子波動関数を表示する。4.4 節では、4.3 節を解析し、光軸上で伝搬する 2 光子波動関数が位相特異点を有することを述べる。

### 4.1 ブラ・ケットベクトル

量子力学では、ケットベクトル  $|\square\rangle$  とブラベクトル  $\langle\square|$  と呼ばれる表記を用いてベクトルを表現することが多く、ベクトル中の記号  $\square$  には任意の記号をおける利点がある。ケットベクトル  $|\square\rangle$  は、複素数を要素に持つ有限または無限次元のベクトルで Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  と呼ばれる線形空間に属するベクトルである。一方、ブラベクトル  $\langle\square|$  は、ケットベクトルとの内積が複素数となる ( $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$ ) ベクトルとして定義され、ケットベクトルの Hermite 共役 (転置して複素共役を取る) の関係にある： $\langle\square| = |\square\rangle^\dagger = (|\square\rangle^\top)^*$ 。ただし、 $(\square)^\dagger$  は Hermite 共役、 $(\square)^*$  は複素共役とした。

本論文では、ブラ・ケットベクトルによる表記を用いる際は常に  $L^2$  ノルムが 1 とする：

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

## 4.2 量子もつれ状態と定式化

量子もつれとは、2つの量子以上からなる複合系において古典力学では説明できない相関を指し、量子毎の部分系のみで完全に分離することができない状態を指す。具体的に定式化すると、2つの量子 A, B で構成される量子系が量子もつれしているとは、 $n (> 1)$  個の状態  $|\phi_k^{(i)}\rangle$  ( $i \in \{A, B\}$ ) で重ね合わされた

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |\phi_k^{(A)}\rangle |\phi_k^{(B)}\rangle \quad (4.1)$$

のことをいう。一方、ある状態  $|\phi^{(A)}\rangle, |\phi^{(B)}\rangle$  で2つの系が表わせるときは

$$|\psi\rangle = |\phi^{(A)}\rangle |\phi^{(B)}\rangle \quad (4.2)$$

で与えられ、この状態は無相関であることを意味し量子もつれしていない。ただし、式(4.1)と式(4.2)で表わされる場合は、古典的な相関が無いときに成り立つ。古典的な相関が存在する場合での量子もつれは、状態ベクトルでなく、密度行列と呼ばれる量を用いる必要がある。

## 4.3 Laguerre–Gaussian ビームをポンプ光とした光子対の2光子波動関数

2光子波動関数の初期状態  $|\psi(0)\rangle$  が真空状態

$$|\psi(0)\rangle = |\text{vac}\rangle_{s,i}$$

であると仮定する。この真空状態に対して単色のポンプ光を照射すると、SPDCにより低確率で2光子が生成され、光子対が現れたときの2光子状態ベクトルを  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  とする。簡単のために、結晶を透過した光子対をレンズにより自由空間中で集光させることで、結晶内での状態ベクトル  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  をレンズの焦点でも同じ状態  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  にする<sup>\*1</sup> (図4.1)。

生成された光子対は、伝搬に伴い式(A.31)によって状態変化する。したがって、焦点位置を基準とした伝搬距離  $\mathbf{z} = (z_s, z_i)^T$  での2光子状態ベクトルは  $|\psi(\mathbf{z})\rangle := \hat{U}_s^E(z_s) \hat{U}_i^E(z_i) |\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  と記述される。このとき、2光子が光子検出器により横断面  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  でそれぞれ検出されるとき確率振幅分布、すなわち2光子波動関数  $\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) := \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i | \psi(\mathbf{z}) \rangle$  は次の式で記述される (付録C)：

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_+) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}). \quad (4.3)$$

<sup>\*1</sup> 一般的に、レンズによって集光した光子対の波動関数の広がりにはレンズの焦点距離に依存する。しかし、波動関数の広がりには振幅と位相分布について相似な広がりであるため、波動関数の形状は変わらない。

ただし, 2 光子波動関数に付与した添字  $(l, p)$  は, ポンプ光の LG モードを明示的に表わすために用いた. また,  $\text{LG}_{0,0}$  の項での Rayleigh 長は  $z_{\text{Rp-}}/2$ ,  $\text{LG}_{l,p}$  の項での Rayleigh 長はポンプ光の Rayleigh 長  $z_{\text{Rp}}$  である. また, ポンプ光分布に依存する有効横座標  $\mathbf{r}_{\text{eff}}$ , 有効伝搬距離  $z_{\text{eff}}$  を定義し, 各変数にある横座標  $\mathbf{r}_{\pm}$  および  $q$  パラメータと Rayleigh 長を次のように定義した:

$$N_{l,p} := \frac{1}{\sqrt{2\pi w_-}} \tilde{N}_{l,p}, \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} := \mathbf{r}_+ - \frac{z_-}{q_+(z_+)} \mathbf{r}_-, \quad z_{\text{eff}} := z_+ - \frac{z_-^2}{q_+(z_+)}, \quad (4.4b)$$

$$\mathbf{r}_{\pm} := \frac{\mathbf{r}_s \pm \mathbf{r}_i}{2}, \quad q_+(z_+) := \frac{q_s(z_s) + q_i(z_i)}{2} = z_+ - i \frac{z_{\text{Rp-}}}{2}, \quad (4.4c)$$

$$z_{\pm} := \frac{z_s \pm z_i}{2}, \quad z_{\text{Rp}} := \frac{1}{2} k_{p0} w_0^2, \quad z_{\text{Rp-}} := \frac{1}{2} k_{p0} w_-^2, \quad k_{p0} := \frac{k_p}{n}, \quad w_- := \sqrt{\frac{2\alpha L}{k_p}}. \quad (4.4d)$$

横断面が  $(x_s, y_s = 0, x_i, y_i = 0)$  での各伝搬距離  $z$  における 2 光子波動関数を与えるポンプ光の LG モードを  $\text{LG}_{l=0,p=0}, \text{LG}_{+1,0}, \text{LG}_{0,1}$  とし, 図 4.1 に示した. ただし, 伝搬距離  $z = (\pm \bar{z}_{\text{Rs}}, \mp \bar{z}_{\text{Ri}})$  で与えられた Rayleigh 長は次節で与える. 伝搬距離は  $z_j = 0, \pm 0.5z_{\text{Rj}}, \pm z_{\text{Rj}}, \pm 1.5z_{\text{Rj}}$  ( $j = \text{s,i}$ ) とし, 表示する横断面の領域を  $7\sqrt{N+1}w_0$  ( $N := 2p + |l|$ ) とした. 図 4.1 で用いた各量の設定は表 4.1 とし, 非線形光学結晶は, 5 mol% MgO 添加 LiNbO<sub>3</sub> 結晶 (5 mol% Magnesium-doped Periodically Poled Lithium Niobate; MgO:PPLN) とし, 用いた Sellmeier 方程式は単位を  $\mu\text{m}, ^\circ\text{C}$  とし, 全ての光子が常光線  $o$  とすると

$$n_o^2 = a_1 + b_1 f(T) + \frac{a_2 + b_2 f(T)}{\lambda^2 - [a_3 + b_3 f(T)]^2} + \frac{a_4 + b_4 f(T)}{\lambda^2 - [a_4 + b_4 f(T)]^2} - a_6 \lambda^2, \quad (4.5)$$

$$f(T) = (T - 24.5^\circ\text{C})(T + 570.82) \quad (4.6)$$

と与えられる [31]. ただし, 各係数は表 4.2 および表 4.3 である.

## 4.4 光軸上での 2 光子波動関数と位相特異点

図 4.2 から伝搬距離  $z = (\pm \bar{z}_{\text{Rs}}, \mp \bar{z}_{\text{Ri}})$  で光軸上に位相特異点が現れた. 本論文の目的は, 量子的な 2 光子対の独立した伝搬距離操作である. このため, 光軸上に現れる位相特異点は重要であり, 本節では 2 光子波動関数を光軸上  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  に限定し, 光軸上を伝搬さ

表 4.1 図 4.2 を表示するために用いた各量の設定値.

各量	ビーム径 $w_0$	結晶長 $L$	分極反転周期 $\Lambda$	温度 $T$	分極反転の次数 $m$
設定値	50 $\mu\text{m}$	15 mm	6.9 $\mu\text{m}$	20 $^\circ\text{C}$	1

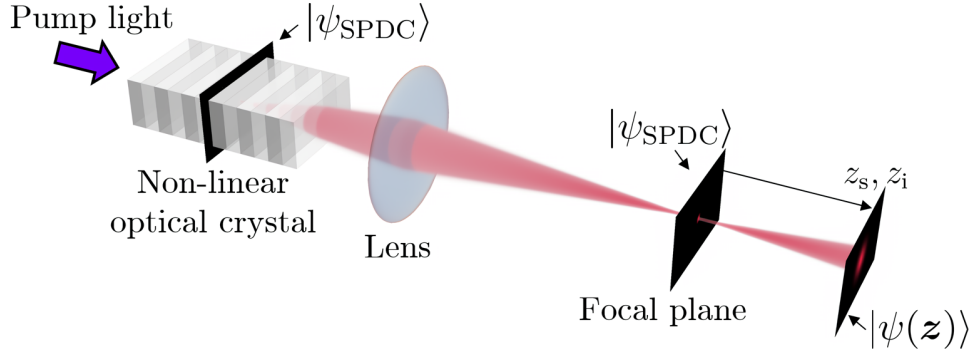


図 4.1 状態ベクトル  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle, |\psi(\mathbf{z})\rangle$  を表わした概念図. 状態ベクトル  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  は非線形光学結晶中心での状態を表わす. 結晶から伝搬した光子対の状態は, レンズを用いると再び集光して状態  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  となる. 式 (B.17) はレンズで集光した自由空間での状態ベクトル  $|\psi(\mathbf{z})\rangle$  である.

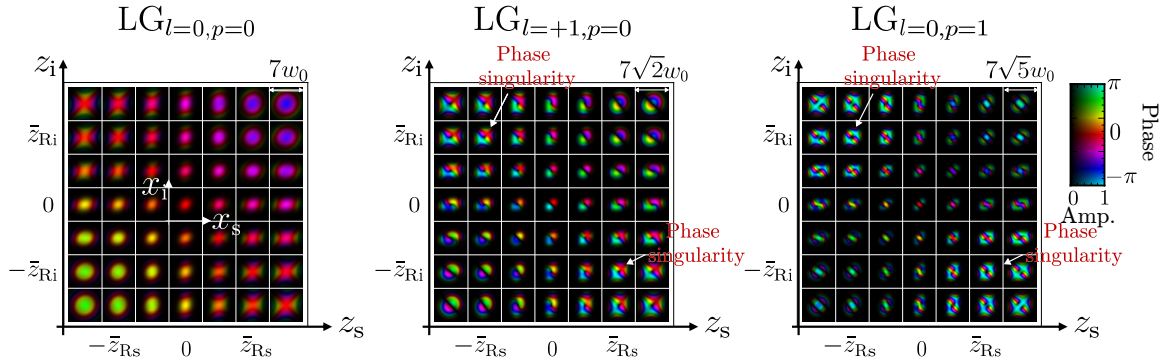


図 4.2 各セルが横断面  $(x_s, y_s = 0, x_i, y_i = 0)$  の座標で, さらに離散的に伝搬距離  $z$  を変えたときの 2 光子波動関数. それぞれ, LG モードは  $\text{LG}_{l=0,p=0}, \text{LG}_{l+1,0}, \text{LG}_{l=0,p=1}$  である.  $\text{LG}_{0,0}$  では, 位相特異点が表示した全ての伝搬距離で現れなかった. しかし,  $\text{LG}_{+1,0}$  では  $z = (\pm \bar{z}_{R_s}, \mp \bar{z}_{R_i})$  近傍で 1 次位相特異点が現れた. また,  $\text{LG}_{+1,0}$  では  $z_s - z_i$  軸上で 2 次位相特異点が,  $z = (\pm \bar{z}_{R_s}, \mp \bar{z}_{R_i})$  で現れた. さらに,  $z = (\pm \bar{z}_{R_s}, \mp \bar{z}_{R_i})$  近傍では 1 次位相特異点が 2 つ異なる位置に現れた.

せて位相特異点が見れることを突き止める. このとき, 光軸上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(\mathbf{z})$  は次の式になる (付録 E) :

$$\begin{aligned} \psi_{l,p}(\mathbf{z}) &:= \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s = \mathbf{0}, \mathbf{r}_i = \mathbf{0}; \mathbf{z}) \\ &= N_{l,p}^z \frac{1}{z_+ - iz_{R_p} - 2} \frac{1}{(z_{\text{eff}} - iz_{R_p})^{|l|+1}} \left[ \frac{z_{\text{eff}} + iz_{R_p}}{z_{\text{eff}} - iz_{R_p}} \right]^p. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ただし, 定数  $N_{l,p}^z$  は次の式で与えられる :

$$N_{l,p}^z := N_{l,p} C_{0,0}^{\text{LG}} C_{l,p}^{\text{LG}} \frac{z_{R+}}{i\sqrt{2z_{R+}/k_p}} \left( \frac{\sqrt{2}z_{R_p}}{iw_0} \right)^{|l|} \frac{z_{R_p}}{iw_0} L_p^{|l|}(0).$$

式 (4.7) から, ポンプ光が高次 LG ビームの場合は,  $1/(z_{\text{eff}} - iz_{R_p})$  による振幅位相変化が  $p + |l|$  乗となり, とくに動径モード  $p$  が高次のときは新たに  $(z_{\text{eff}} + iz_{R_p})^p$  による振幅

表 4.2 常光線 o での MgO:PPLN の Sellmeier 方程式の係数.

パラメータ	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$
各値	5.653	0.1185	0.2091	89.61	10.85	$1.97 \times 10^{-2}$

表 4.3 常光線 o での MgO:PPLN の Sellmeier 方程式の係数.

パラメータ	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
各値	$7.941 \times 10^{-7}$	$3.134 \times 10^{-8}$	$-4.641 \times 10^{-9}$	$-2.188 \times 10^{-6}$

位相変化が付与される. さらに, ポンプ光を高次動径モード  $p$  を含む多重リングのビームとすると  $p$  次位相特異点が現れる. このときの位相特異点  $z = z_0$  は,

$$z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}} = 0 \quad (4.8)$$

の解として現れ, 相乗平均による Rayleigh 長の位置に現れる:

$$z_0 = \pm \begin{pmatrix} \bar{z}_{\text{Rs}} \\ -\bar{z}_{\text{Ri}} \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

式 (4.9) から, 図 4.2 の位相特異点の位置とも整合している. ただし, 相乗平均による Rayleigh 長  $\bar{z}_{\text{R}j}$  ( $j = \text{s}, \text{i}$ ) は次の式で与えられる:

$$w_+ := \sqrt{2}w_0 \quad (4.10a)$$

$$\bar{w} := \sqrt{w_+ w_-}, \quad \bar{z}_{\text{R}j} := \frac{1}{2}k_{j0}\bar{w}^2, \quad k_j := n_j k_{j0}. \quad (j = \text{s}, \text{i}) \quad (4.10b)$$

$$z_{\text{R}j+} := \frac{1}{2}k_{j0}w_+^2 \quad (j = \text{p}, \text{s}, \text{i}) \quad (4.10c)$$

$$\bar{z}_{\text{R}j} = \sqrt{z_{\text{R}j+} z_{\text{R}j-}}. \quad (j = \text{s}, \text{i}) \quad (4.10d)$$

$w_+$  はビーム径により決定される有効ビーム径である. また, Rayleigh 長  $\bar{z}_{\text{R}j}$  は, ビーム径による Rayleigh 長を与えることにより, ビーム径  $w_{\pm}$  による Rayleigh 長の相乗平均としても与えられる. ポンプ光の LG モードを  $\text{LG}_{l=0,p=0}, \text{LG}_{+1,0}, \text{LG}_{0,1}$  としたときの, 光軸上における伝搬距離  $z$  での 2 光子波動関数 (4.7) を図 4.3 に示した. ただし,  $l \neq 0$  では光軸上の振幅は常に 0 であるため, 2 光子の横断面での大きさ  $w_0, w_-$  に対して十分無視できる程度に微量ずらした. 図 4.3 から図 4.2 とは異なり,  $\text{LG}_{0,0}, \text{LG}_{+1,0}$  では位相特異点が表示した全ての伝搬距離で現れなかった. 一方,  $\text{LG}_{+1,0}$  では  $z_s - z_i$  軸上で 1 次位相特異点  $z = (\pm \bar{z}_{\text{Rs}}, \mp \bar{z}_{\text{Ri}})$  で現れた.

光軸上で位相特異点が現れる本結果は, シグナル光子とアイドラ光子の高次モードによる Gouy 位相和のテンソル積の重ね合わせにより説明ができることを付録 G で議論した.

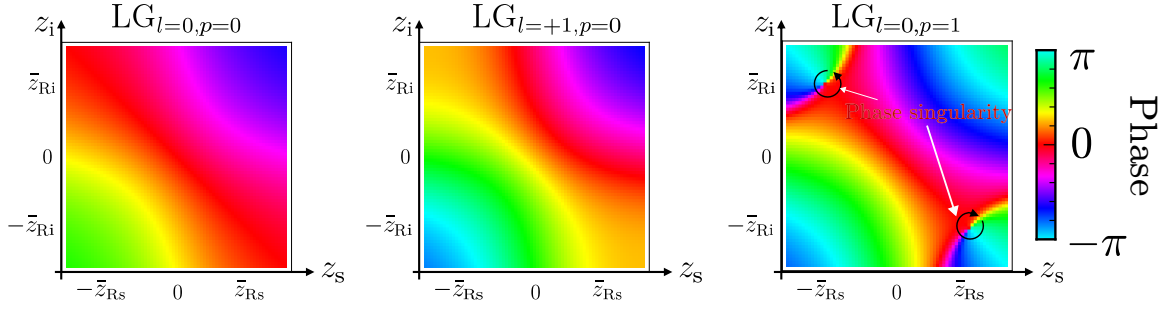


図 4.3 光軸上における伝搬距離  $z$  での 2 光子波動関数. それぞれポンプ光の LG モードは  $LG_{l=0,p=0}$ ,  $LG_{+1,0}$ ,  $LG_{0,1}$  である. ただし,  $l \neq 0$  では光軸上の振幅は常に 0 であるため, 2 光子の横断面での大きさ  $w_0, w_-$  に対して十分無視できる程度に微量ずらした. 図 4.2 とは異なり,  $LG_{0,0}, LG_{+1,0}$  では位相特異点が表示した全ての伝搬距離で現れなかった. 一方,  $LG_{+1,0}$  では  $z_s - z_i$  軸上で 1 次位相特異点,  $z = (\pm \bar{z}_{Rs}, \mp \bar{z}_{Ri})$  で現れた.

## 4.5 光軸上で位相特異点となるときの伝搬距離における波動関数

前節では光軸上の 2 光子波動関数を求め, ある伝搬距離  $z = z_0$  では位相特異点となることを示した. 本節では, 前節の位相特異点  $z = z_0$  における横断面上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z_0)$  を示す.

まず, 式 (4.8) によって位相特異点  $z_0$  は与えられるので, 式 (4.3) は次のようになる:

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z_0) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_{+0}) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, -iz_{\text{Rp}}). \quad (4.11)$$

ただし  $z_{+0}$  は位相特異点での伝搬距離で, 縮退した波数  $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$  のときは  $z_{+0} = 0$  である (付録 E).

よって, 式 (4.11) は

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z_0) = N_{l,p} \sqrt{\frac{N!}{p!(p+|l|)!}} \exp\left(\frac{r_{\text{eff}}^2}{w_+^2}\right) u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_{+0}) u_{N,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, 0). \quad (4.12)$$

式 (4.12) から, 光軸上で位相特異点となる伝搬距離  $z = z_0$  では横断面方向で  $N$  次の位相特異点を持ち得るといえる. 実際, 図 4.2 から, 3 つの LG モード  $LG_{l=0,p=0}, LG_{+1,0}, LG_{0,1}$  について成立している.

## 4.6 2次元 Hermite–Gaussian ビームをポンプ光とした光子対の 2 光子波動関数

SPDC によって生成される 2 光子対の状態ベクトル  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  は, 各波横波数  $(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  で  $k_x, k_y$  方向についてポンプ光の複素振幅分布  $\tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i)$  であれば, 式全体として各方向に



対して直積になる (付録 C). よって, 一方の横断面を除いた2次元平面  $(x, z)$  でのポンプ光による SPDC も考えることができる. 前節では3次元空間において高次 Gaussian ビームをポンプ光としたときに, 位相特異点が現れたため, 2次元においても2次元高次 Gaussian ビームをポンプ光として, 各光子独立に伝搬距離操作をしても位相特異点が現れると期待される.

そこで, 2次元平面上でポンプ光を  $HG_n$  とする. このとき, 2次元ポンプ光によって与えられる2光子波動関数  $\psi(x_s, x_i; z)$  は次のように与えられる (付録 C):

$$\psi_n(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z) = N_n u_0^{\text{HG}}(x_-, z_+) u_n^{\text{HG}}(x_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}). \quad (4.13)$$

ただし, 光子対に課す波数の条件は4.3節と同じであり, 正規化定数  $N_n$  を除いて全てのパラメータは4.3節と等しい. よって, 光軸上に現れる位相特異点の条件もまた, 式(4.7)と同様に位相特異点が現れる (図4.4, 図4.5). したがって光軸上で現れる位相特異点発生は, 3次元空間での SPDC を考えずとも2次元平面での SPDC で十分議論できるといえる.

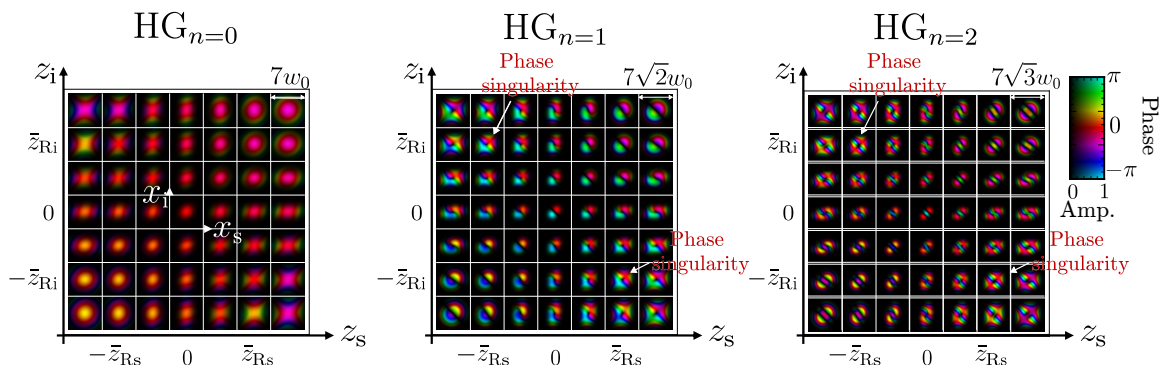


図4.4 各セルが横断面  $(x_s, x_i)$  の座標で, さらに離散的に伝搬距離  $z$  を変えたときの2光子波動関数. それぞれ, HG モードは  $HG_{n=0}, HG_1, HG_2$  である.

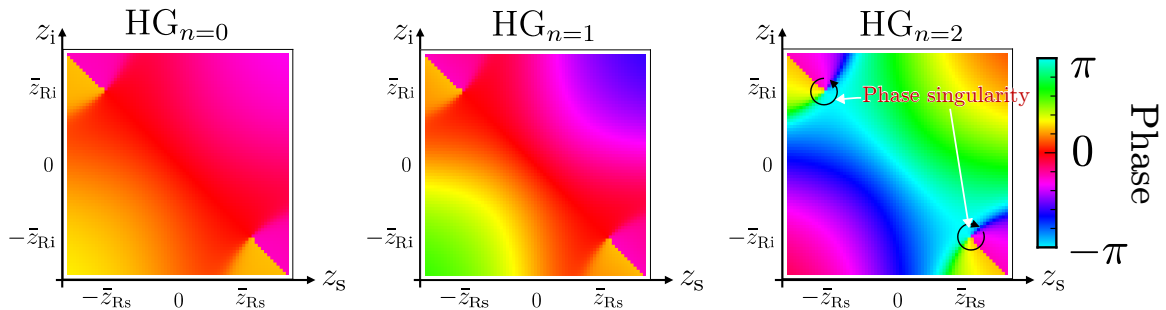


図4.5 光軸上における伝搬距離  $z$  での2光子波動関数. それぞれポンプ光の LG モードは  $HG_{n=0}, HG_1, HG_2$  である. ただし,  $l \neq 0$  では光軸上の振幅は常に0であるため, 2光子の横断面での大きさ  $w_0, w_-$  に対して十分無視できる程度に微量ずらした. 図4.2とは異なり,  $HG_0, HG_1$  では位相特異点が現れる箇所に近傍で離散的な位相シフトがあった.

## 第 5 章

# 高次動径モードを有する Laguerre–Gaussian ビームの生成実験

本章では、高次動径モードを有する LG ビームの生成手法および生成実験について述べる。5.1 節で LG ビームの生成手法について述べた後、5.2 節で LG ビームの生成実験、5.3 節で生成実験の結果および考察を述べる。

### 5.1 Laguerre–Gaussian ビームの生成手法

高次動径モードを有する LG ビームは、空間光位相変調器 (Spatial Light Modulator; SLM) によって生成することができる。SLM は、格子状に配列された各液晶分子に対して入射した光を、ある偏光方向のみ各ピクセル毎に位相変調して反射する光学素子である。入射光を  $LG_{0,0}$  の基本 Gaussian ビームとした場合、任意の LG モード  $LG_{l,p}$  に変調するには、位相変調のみでなく振幅変調も同時に行なう必要がある。

本論文では、SLM の位相変調により所望の複素振幅分布を得るためのホログラムを

$$h(\mathbf{r}) := \left[ 1 - \frac{\text{sinc}^{-1}(a(\mathbf{r}))}{\pi} \right] \left[ \phi(\mathbf{r}) + \frac{2\pi x}{\Lambda} \right] \quad (5.1)$$

として使用した [32]。ただし、関数  $\text{sinc}(x) := \sin(x)/x$  は sinc 関数、振幅比  $a(\mathbf{r})$  と位相差  $\phi(\mathbf{r})$  は入射光の複素振幅分布  $u_{\text{in}}(\mathbf{r})$  と所望の光の複素振幅分布  $u_{\text{gen}}(\mathbf{r})$  によって

$$a(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})} := \frac{1}{a_{\text{max}}} \frac{u_{\text{gen}}(\mathbf{r})}{u_{\text{in}}(\mathbf{r})}, \quad a_{\text{max}} := \max_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{u_{\text{gen}}(\mathbf{r})}{u_{\text{in}}(\mathbf{r})} \right|$$

と定義される実関数であり、 $\Lambda$  はブレードグレーティング型回折格子の周期で、回折格子の波数は  $x$  方向を向いているとした。式 (5.1) の 1 つ目の括弧は 0 から 1 まで調節できる振幅変調を意味し、振幅比  $a(\mathbf{r})$  の増加に伴い回折光の振幅は単調増加する。2 つ目の括弧は位相変調を表わし、所望の位相変調から余分な入射光の位相を減算した位相変調と無変調の光から分離するための平面波項の和で記述される。

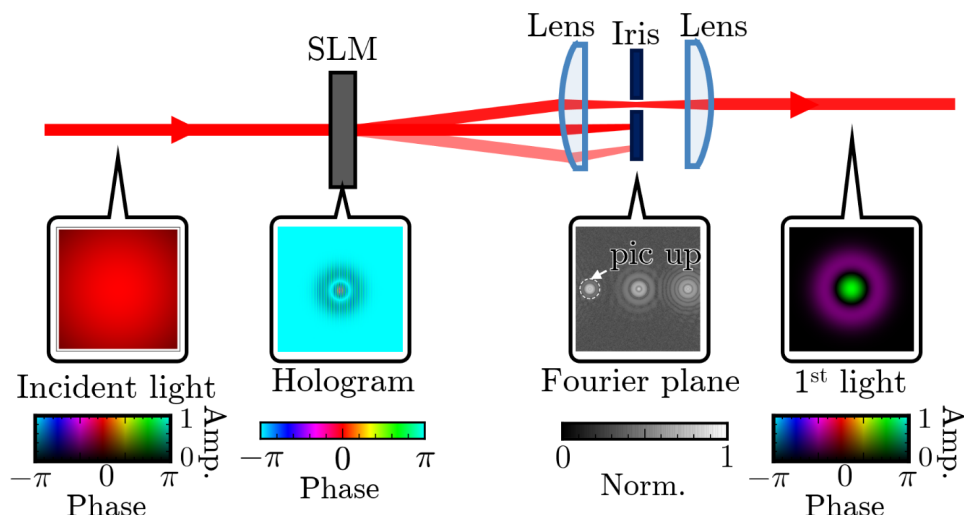


図 5.1 1 次光の生成と抽出を表わした図. 入射光を SLM で生成したホログラムで位相変調し, レンズで集光させる. SLM で強く位相変調した箇所は Bragg 回折条件の 1 次方向に伝搬し, 位相変調が弱い箇所では 0 次光になり, それ以外は高次光として 1 次光の整数倍の角度で伝搬する. 整数倍の角度差がある各光波は集光位置がずれ, 絞りをを用いることで所望の 1 次光のみを抜き出して通過させることができる.

式 (5.1) による位相変調により, Bragg の回折条件による角度で伝搬する 1 次光が振幅・位相変調された所望の光波として変調され, 式 (5.1) での振幅比が小さい箇所は殆ど変調されず 0 次光や 1 次光の整数倍の角度で高次光として伝搬される. 伝搬の角度が異なる光波として伝搬することにより, レンズで集光すると集光点位置が各角度毎に離散的に離れ, 所望の 1 次光のみを絞りやピンホールで抽出し通過させることができる (図 5.1).

## 5.2 Laguerre–Gaussian ビームの生成実験

LG ビームの生成実験の実験系を図 5.2 に示す. 光源は He-Ne レーザ (波長  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ) とし, 光源直後の 1/2 波長板 (Half WavePlate; HWP) によって偏光ビームスプリッタ (Polarizing Beam Splitter; PBS) を通過する光強度を最大にした後, 再度 HWP によって SLM (SLM-200, santec corp.) で位相変調可能な垂直偏光  $|V\rangle$  のみを抽出し, ビームエキスパンダ (Beam Expander; BE) でビーム径を  $w_0 = 3.85 \text{ mm}$  に拡大してビームスプリッタ (Beam Splitter; BS) を介して SLM に照射した. 本実験で用いた SLM は, ピクセルサイズが  $8 \mu\text{m}$  で大きさ  $15.36 \text{ mm} \times 9.6 \text{ mm}$ , 10 bit 諧調可能な液晶ディスプレイをもつ. また, SLM 上に投影するホログラムは SLM 校正 [33] を加味した式 (5.1) であり, ブレードグレーティング回折格子の周期は  $\Lambda = 48 \mu\text{m}$  とし, 所望の複素振幅分布は  $\text{LG}_{0,p}$  (ビーム径  $w_1 = 0.398 \text{ mm}$ ,  $p = 0, 1, 3, 5$ ) とした. SLM からの反射光は, BS で反射した後にレンズ 1 (焦点距離  $f_1 = 50 \text{ mm}$ ) とレンズ 2 (焦点距離  $f_2 = 200 \text{ mm}$ ) で  $4f$  系を組み, ビーム径を  $f_2/f_1 = 4$  倍拡大させた. さらに直後にレンズ 3 (焦点距離  $f_3 = 50 \text{ mm}$ ) とレンズ 4 (焦点

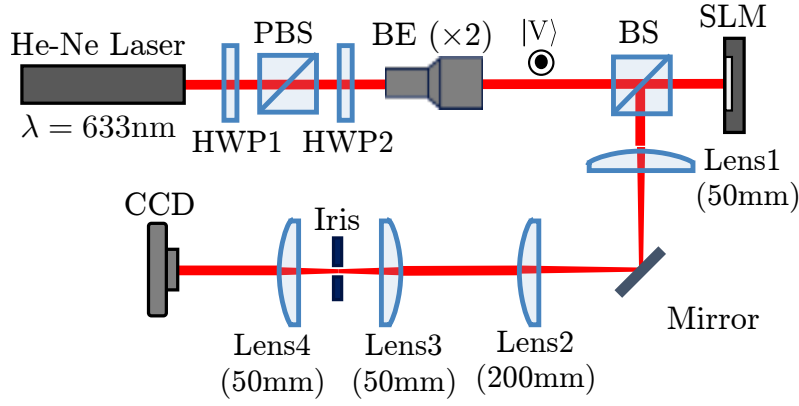


図 5.2 高次動径モードを有する LG ビーム生成の実験系.

距離  $f_4 = 50 \text{ mm}$ ) で再度  $4f$  系を組み, 2つのレンズ間に所望の 1 次光のみを抽出するための絞り (最大開口  $\phi 12.0 \text{ mm}$ ) を設置した. 絞りを通過した所望の複素振幅分布をもつ光は, レンズ 4 を通過した後に CCD カメラ (BC106-VIS, Thorlabs Inc.) によって受光した. 本研究で使用した CCD の受光面の大きさは  $8.77 \text{ mm} \times 6.6 \text{ mm}$  ( $1360 \text{ pixel} \times 1024 \text{ pixel}$ ) である.

### 5.3 Laguerre–Gaussian ビームの生成実験結果

LG ビームの生成実験の結果を図 5.3 に示す. 図 5.3 から, 全ての動径モードで  $p+1$  重の多重リングのビーム断面を撮像された. また, 図 5.3 の画像を半径  $\sigma = 10 \text{ pixel}$  の Gaussian フィルタでノイズ除去し, パラメータを  $(a, b, w_1, \mathbf{r}_0)$  とする光強度分布

$$I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r}) := a \left[ L_p^0 \left( \frac{2\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2}{w_1^2} \right) \right]^2 \exp \left( -\frac{2\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2}{w_1^2} \right) + b \quad (5.2)$$

でフィッティングした. ただし,  $a$  は振幅,  $b$  は定数成分のノイズ,  $w_1$  はビーム径,  $\mathbf{r}_0$  はビームの光軸位置とした. とくに式 (5.2) で得られたビーム径  $w_1$  を表 5.1 に示した. 表 5.1 から, ビーム径は動径モードに依らず  $0.78 \text{ mm}$  程度であった. 図 5.3 の光強度分布  $I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r})$  と式 (5.2) でフィッティングした光強度分布  $I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r})$  により Pearson の相関係数

$$\text{CC}_p := \frac{\sum_{\mathbf{r}} [I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r}) - \langle I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r}) \rangle] [I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r}) - \langle I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r}) \rangle]}{\sqrt{\left\{ \sum_{\mathbf{r}} [I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r}) - \langle I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r}) \rangle]^2 \right\} \left\{ \sum_{\mathbf{r}'} [I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r}') - \langle I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r}') \rangle]^2 \right\}}} \times 100\%, \quad (5.3)$$

$$\langle I_p^i(\mathbf{r}) \rangle := \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} I_p^i(\mathbf{r}), \quad (N \text{ は画像の総ピクセル数, } i = \text{exp, fit.}) \quad (5.4)$$

で  $I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r})$  と  $I_p^{\text{fit}}(\mathbf{r})$  の類似度を評価した (表 5.2). 表 5.2 から, 全ての動径モードで 90% 以上一致したが, 動径モードの増加に伴い相関係数は減衰した.

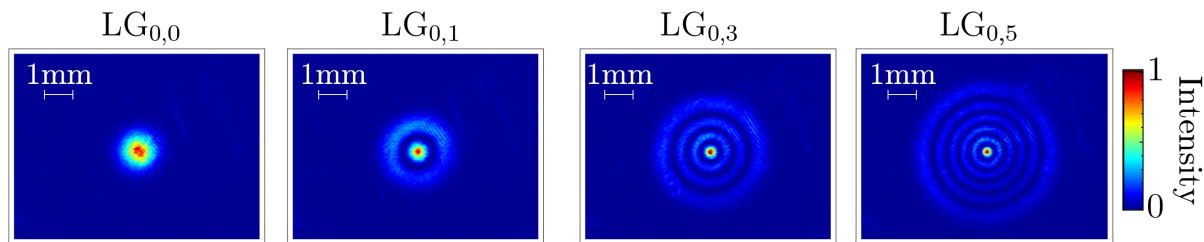


図 5.3 高次動径モードを有する LG ビーム生成の実験結果.

表 5.1 式 (5.2) により得られたビーム径.

動径モード $p$	0	1	3	5
ビーム径 $w_1$ (mm)	0.790	0.773	0.770	0.769

表 5.2 CCD で撮像した画像と式 (5.2) により得られた画像との相関係数. 動径モードが増加するに従い相関係数は減衰した.

動径モード $p$	0	1	3	5
相関係数 $CC_p$ (%)	99.2	96.8	94.8	92.9

## 5.4 Laguerre–Gaussian ビームの生成実験の考察

まず, 表 5.1 でビーム径が  $w_1 = 0.78$  mm であったことについて考察する. 所望のビーム径は, 図 5.2 のレンズ 1,2 の  $4f$  系によるビームの拡大に注意すると  $(f_2/f_1)w_1 = 1.59$  mm となるはずだが, 実際に撮像されたビーム径は 0.78 mm と小さかった. これは図 5.2 のレンズ 1 が, 図中でビームが左下へ向かうようにずれて鏡で反射することで光路長が短くなり, 実際のビーム径よりも小さくなったと考えられる. または, 2 つ目はレンズ 4 が焦点距離 50 mm よりも絞りに近づいて設置されることにより, ビーム径が小さくなったと考えられる.

次に, Pearson の相関係数  $CC_p$  が動径モード  $p$  の増加に伴い単調に低下したことについて考察する. 動径モードが増加すると, ビームの横断面の広がり幅 [27]

$$\sigma_p^2 := 2 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2 I_p^{\text{exp}}(\mathbf{r}) \quad (5.5)$$

が広がることで, SLM に表示する式 (5.1) の振幅変調項  $[1 - \text{sinc}^{-1}(a(\mathbf{r}))/\pi]$  が大きい領域が広がることで, SLM で掛ける電圧と位相の線形性からの誤差範囲が広がったことによるといえる.

## 第 6 章

# 光子計数器の動作確認

本章では、光子計数器の動作確認について述べる。6.1 節では光子計数の手法を述べ、6.2 節では光子計数器の動作確認を行なうための実験系、6.3 節では実験結果を示し、6.4 節では実験結果の考察を述べる。

### 6.1 光子計数の手法

本節では、コヒーレント光の光子を計数する手法について述べる。6.1.1 項では、光子検出器および光子計数器による光子計数の手法について述べ、6.1.2 項では、6.1.1 項での光子検出器に入射される光子の換算方法について述べる。

#### 6.1.1 光子検出器および光子計数器による光子計数

本研究では、光子検出器によって受光した光子を検出して 1 つのパルス波を出力し、光子計数器によって光子検出器によるパルス波の計数を指定の時間で計数する手法を用いた (図 6.1)。とくに、光子検出器として光電効果により光子を電子に変換させるアバランシェフォトダイオード (Avalanche PhotoDiode; APD) を、光子計数器として同時計数器を本研究では使用した。

APD は受光した光子を全て光電子に変換することができず、受光面に入射された光子に対する光電流のパルス数の比である量子効率  $\eta$  と、光子を受光した後に再度受光可能となるまでの無反応の期間であるデッドタイムにより光子計数へ送られる信号は制限される。使用した APD (PDM, Micro Photon Devices S.r.l.) では、633 nm の光子に対する量子効率は 40% であり、デッドタイムは 77 ns である。また、デッドタイムの逆数が単位時間あたりの計数の飽和数であり、本実験で使用した APD では 12 Mcounts/s 程度となる。

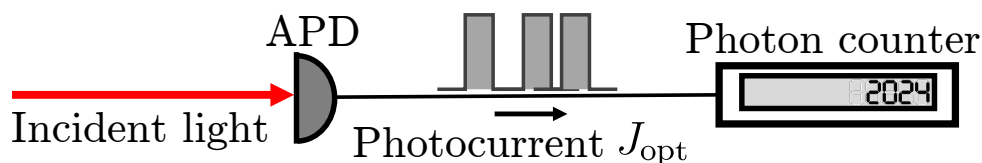


図 6.1 光子計数の概念図. APD で受光した入射光の光子をパルス状の光電流  $J_{\text{opt}}$  に変換し, パルス波を光子検出器で受光する.

### 6.1.2 光子検出器に入射される光子数の換算

光子検出器に入射される光子数  $n_{\text{in}}$  は, APD 受光面手前の入射光のパワーを  $P_{\text{in}}$ , APD 受光面手前の迷光によるパワーを  $P_{\text{env}}$ , 光子計数器での計数時間を  $t_{\text{PC}}$  とすると

$$n_{\text{in}} = \frac{(P_{\text{in}} + P_{\text{env}}) \times t_{\text{PC}}}{\hbar\omega} \quad (6.1)$$

となる. ただし, 図 6.2 の実験系から  $P_{\text{in}}, P_{\text{env}}$  は

$$P_{\text{in}} = \frac{D^2}{\pi w_0^2/2} \left[ \frac{4n_g}{(1+n_g)^2} \right]^2 A_a \gamma_{\text{BS}} P_{\text{in}}^{\text{PM}}, \quad P_{\text{env}} = \frac{D^2}{\pi r_{\text{PM}}^2} \frac{4n_g}{(1+n_g)^2} P_{\text{env}}^{\text{PM}} \quad (6.2)$$

とした. ただし, BS 反射光に対する BS 透過光の比を  $\gamma_{\text{BS}}$  とし, 減衰器による減衰比を  $A_a$ , 実験で使用する APD 受光面を覆うガラス (屈折率  $n_g = 1.5$ ) を透過するときの透過率を  $[4n_g/(1+n_g)^2]^2$  とし [34], ビーム径  $w_0$  およびパワーメータの受光面の半径  $r_{\text{PM}}$  による大きさに対する APD 受光面の大きさを  $D^2$  とし, APD 入射前に設置した BS による反射光のパワーを  $P_{\text{in}}^{\text{PM}}$ , APD 手前でパワーメータで計測したパワーを  $P_{\text{env}}^{\text{PM}}$  とした.

## 6.2 光子計数器の動作確認の実験系

光子計数器の動作確認の実験系を図 6.2 に示す. 光源を He-Ne レーザとし, HWP の角度  $\theta$  を変化させることで PBS を通過する光を変え, APD で受光する光子数を調節した. また, APD に入射するパワーをさらに減衰させるために減衰器 (10 dB, 40 dB) を設置した. このとき, 減衰器を通過する光はパワーメータで計測可能な最小の値に近くなるため, 減衰器透過前に BS を設置して反射光をパワーメータで計測することにより大きいパワーで計測

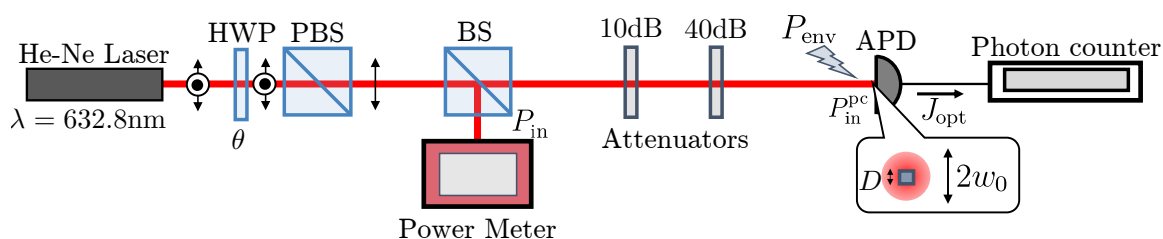


図 6.2 光子計数器の動作確認の実験系.

できるようにした。減衰器を透過した入射光は APD で受光され、パルス波の光電流  $J_{\text{opt}}$  として電気信号に変換し、光子計数器 (SR400-Gated photon counter, Stanford Research Systems) で  $t_{\text{PC}} = 1\text{ s}$  間計数した。また、APD 手前での迷光による計数を得るためにパワーメータでパワーを計測した。

さらに、式 (6.2) で用いる定数を得るために、 $\gamma_{\text{BS}}$  は BS から反射した光と透過した光をパワーメータで計測した後 2 つの値を除算した。同様に、BS から透過した光と 10 dB の減衰器を透過した光をパワーメータで計測した後 2 つの値を除算した。最後に、40 dB の減衰率を計算するために 10 dB を外し、BS から透過した光と減衰器を透過した光をパワーメータで計測した後 2 つの値を除算した。

### 6.3 光子計数器動作確認の実験結果

光子計数器動作確認の実験結果を図 6.3 に示す。 $n_{\text{in}}$  は表 6.1 から得られた値を式 (6.2) および式 (6.1) に代入して換算した。また、図 6.3 での青色の点は APD に入射された光子数  $n_{\text{in}}$  に対して得られた計数  $n_{\text{PC}}$  であり、赤色の実線は最小二乗法によるフィッティングである。フィッティングした一次関数の傾きが量子効率  $\eta$  にあたる：

$$\eta = \frac{dn_{\text{PC}}}{dn_{\text{in}}} \times 100\% = 31\%. \quad (6.3)$$

式 (6.3) から、公称値の量子効率  $\eta = 40\%$  に対して 9%pt 程度の損失があった。また、実験結果から殆ど入射光の光子数に対して得られた計数は線形に増加した。

### 6.4 光子計数器動作確認の実験結果の考察

まず、図 6.3 で量子効率が公称値に対して 9%pt の損失があったことについて考察する。

図 6.2 の実験系では、He-Ne レーザから照射された光を APD で受光させる際に目視でビームの中心を APD の受光面に合わせたが、APD の受光面はビームに対して十分に小さく、APD の受光面に入らなかった光子数が損失となり、APD の損失が公称値よりもあったといえる。また、使用した APD が経年劣化のため、受光した光子が光電流として変換されにくくなったと考えられる。

次に、APD に入射された光子数と光子計数器での計数が殆ど線形に増加したことについて考察する。APD の特性上、再度受光可能になるデッドタイムの逆数 17 Mcounts/s よりも光子数が多い場合は、飽和した光子数だけ損失となり線形に増加しなくなる。しかし、図

表 6.1 式 (6.2) での各値

パラメータ	$P_{\text{env}}^{\text{PM}}$	$\gamma_{\text{BS}}$	$A_{\text{a}}$	$D$	$w_0$	$r_{\text{PM}}$
実測値	1.4 nW	0.86	$1.0 \times 10^{-5}$	50 $\mu\text{m}$	$3.85 \times 10^{-3}$ mm	4 mm



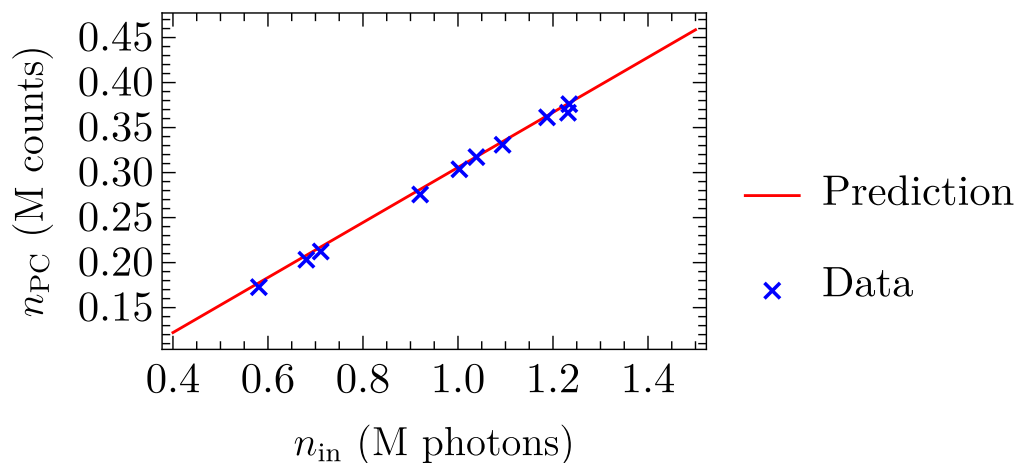


図 6.3 光子計数器の動作確認の実験結果. 青色の点は APD に入射された光子数  $n_{in}$  に対して得られた計数  $n_{PC}$  であり, 赤色の実線は最小二乗法によるフィッティングである.

6.3 から, 最も入射光子数が多い場合でもデッドタイムの逆数よりも 1 桁小さいため飽和による損失が無く線形に増加したといえる.

以上の結果と考察から, 光子計数器は APD に入射された光子数を計数する計数器として動作したといえる.

## 第 7 章

# 光子計数器による 2 光子対の検出 実験

本章では、光子計数器を用いた 2 光子対の検出実験について述べる。7.1 節で 2 光子対検出のための原理、7.2 節では 2 光子対検出の実験系、7.3 節では 2 光子対検出の実験結果について述べ、7.4 節では 7.3 節の考察を行なった。

### 7.1 2 光子対の検出実験の実験原理

本節では、7.1.1 項でバンドパスフィルタ (Band-Pass Filter; BPF) によって 2 光子対の計数を換算する手法、7.1.2 項で各素子の透過率と量子効率を考慮した補正について述べる。その後、7.1.3 項で 2 光子対の温度依存性の視点についても述べる。

#### 7.1.1 バンドパスフィルタによる換算 2 光子計数

ポンプ光 (中心波長  $\lambda_p = 405 \text{ nm}$ ) とポンプ光により生成された 2 光子対 (中心波長  $2\lambda_p = 810 \text{ nm}$ ) による光子がノイズ成分の計数  $\delta N$  よりも十分大きいと仮定すると、2 光子対の検出を光子計数器で計測するためには、測定には 2 種類の異なる条件下で計数した結果が必要である。本章での実験では、中心波長  $810 \text{ nm}$  の BPF を 1 枚設置したときと 2 枚設置した状態で計数することにより異なる 2 種類の条件を与える。また、BPF による条件とは異なる視点として、非線形光学結晶の屈折率の温度依存性による生成される 2 光子対の波長シフトを得るために、非線形光学結晶の温度を調節した。中心波長  $\lambda_p, 2\lambda_p$  の光子のみが十分大きい信号とする仮定により、光子計数器での計数  $N_i(T)$  ( $i$ : BPF の枚数,  $T$ : 非線形光学結晶の温度) は

$$\begin{cases} N_1(T) = \alpha_{405} N_{405}(T) + \alpha_{810} N_{810}(T), \\ N_2(T) = \alpha_{405}^2 N_{405}(T) + \alpha_{810}^2 N_{810}(T) \end{cases} \quad (7.1)$$

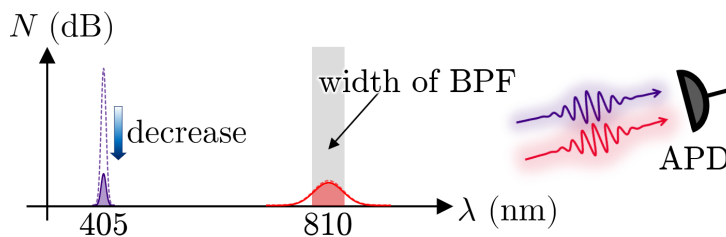


図 7.1 BPF を設置することによる光子の計数の減衰を表わした概念図. BPF により, 波長 405 nm のポンプ光を大幅に減衰させ, BPF の幅にある中心波長 810 nm の 2 光子対は殆ど通過し, APD で受光する光子に含まれる 2 光子対の割合を増やす.

の関係を満たすはずである. ただし,  $\alpha_{405}, \alpha_{810}$  はそれぞれ中心波長  $\lambda_p, 2\lambda_p$  の光子の BPF 透過率であり,  $N_{405}(T), N_{810}(T)$  はそれぞれ中心波長  $\lambda_p, 2\lambda_p$  の光子数とした. 図 7.1 に BPF を設置したときの中心波長  $\lambda_p, 2\lambda_p$  の光子の計数を表わした概念図を示した. ポンプ光と 2 光子対の中心波長は十分に離れているため, BPF の影響は殆ど独立な作用をする. BPF を透過させることで, ポンプ光は BPF により殆ど透過せず, 2 光子対は BPF の透過幅内にある光子のみが殆ど透過する. さらに, BPF を 2 枚設置することで, 再度中心波長  $\lambda_p$  の光子は殆ど透過しなくなる. したがって, 中心波長  $2\lambda_p = 810$  nm の BPF を設置することで, APD で受光して光子計数器で計数するときの式 (7.1) は, 顕著に値が変わると予想される.

### 7.1.2 各素子による光子計数減衰の補正

7.2 節で用いる非線形光学結晶透過以降の各素子による光子数の減衰を補正する. 図 7.3 により,  $\alpha_{\lambda}^{\text{SDM}} (\lambda = 405, 810)$  をショートパスダイクロイックミラー (Shortpass Dichroic Mirror; SDM) の透過率,  $\eta_{\lambda}$  を APD の量子効率として次の式のように補正すれば良い:

$$N_{\lambda}(T) \rightarrow \alpha_{\lambda}^{\text{SDM}} \eta_{\lambda} N_{\lambda}(T). \quad (\lambda = 405, 810) \quad (7.2)$$

ただし, レンズを透過する際の損失と APD 受光面を覆うガラスによる損失は他の係数に比べて小さい損失として無視した.

### 7.1.3 生成される 2 光子対の温度依存性

7.1.1 項で温度  $T$  を変数とした理由について述べる. 非線形光学結晶の温度を適切に設定することで, 2 光子対は縮退した波長  $2\lambda_p$  で生成される確率が最も高い単峰な確率分布になり, このとき最も BPF を通過する 2 光子対が多くなる (図 7.2). しかし, 冷却や加熱により非線形光学結晶の温度が上述の温度からずれると, 非線形光学結晶の屈折率が縮退した波長で QPM を満たさず, 縮退した波長よりも短い波長と長い波長に 2 光子対が分かれて双峰の確率分布で生成される. 縮退した波長から離れるにしたがって双峰の確率分布が最大となる波長は互いに離れ, BPF を透過する領域が小さくなり APD に入射される 2 光子対の数

は減少する。したがって、非線形光学結晶の温度を変化させると光子計数器による計数は、上に凸な結果を得ることになる。

## 7.2 2 光子対の検出実験の実験系

2 光子対検出の実験系を図 7.1 に示す。レーザダイオード (Laser Diode; LD) 読取電流を 85.0 mA に設定した波長  $\lambda_p = 405 \text{ nm}$  の LD (LP405-SF10-405 nm, Thorlabs Inc.) から発振されたポンプ光を出力端にコリメートレンズをもつシングルモードファイバ (Single-Mode Fiber; SMF) で伝搬し、自由空間上に照射した。SMF から出力した光の偏光  $|J_{LD}\rangle$  を HWP1 と QWP (Quarter WavePlate; QWP) および PBS を用いることで、ポンプ光を水平偏光  $|H\rangle$  となるように調節し、HWP2 でポンプ光を垂直偏光  $|V\rangle$  にした。非線形光学結晶中にポンプ光を収めるためにレンズ 1 (焦点距離  $f_1 = 100 \text{ mm}$ ) でポンプ光を結晶中心が焦点となるように入射し、レンズ 2 (焦点距離  $f_2 = 35 \text{ mm}$ ) で透過光を平行光にした。本実験で使用した非線形光学結晶は、大きさ  $15 \text{ mm} \times 2.1 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm}$  で分極反転周期  $\Lambda = 6.9 \mu\text{m}$  の MgO:PPLN とした。また、ペルチェモジュール (FPH1-7104NC, Fujitaka Corp.) およびサーミスタ (PSB-SI 形サーミスタ, SHIBAURA ELECTRONICS Co., Ltd.), 温度コントローラ (TED200C-ベンチトップ型 TEC コントローラ, Thorlabs Inc.) により非線形光学結晶の温度調節を行なった。非線形光学結晶を透過する光はポンプ光と 2 光子対であり、SDM で波長が長い 2 光子対が反射するように SDM でポンプ光と 2 光子対を分離した。2 光子対を APD に受光させるためにレンズ 3 (焦点距離  $f_3 = 120 \text{ mm}$ ) で APD 受光面に集光させた。ただし、SDM によって僅かに反射したポンプ光の内、光軸から離れた成分を、レンズ 3 直前に取り付けられた絞り (最大開口  $\phi 12 \text{ mm}$ ) で除去した。また、7.1.1 項での換算のため 1 枚または 2 枚の BPF (810 nm CWL, 12.5 mm Dia., Hard Coated OD4.0 10 nm Bandpass Filter, Edmund Optics Japan Ltd.) を APD 直前に設置した。ただし、迷光が APD に侵入しないように BPF (中心波長  $(810.00 \pm 2.00) \text{ nm}$ , 半値全幅 (Full Width at Half Maximum; FWHM)  $(10.00 \pm 2.00) \text{ nm}$ ) と APD 受光面の近傍を筒で覆った\*1。APD (SPCM-AQR-14, Excelitas Technologies Corp.) で受光した光は

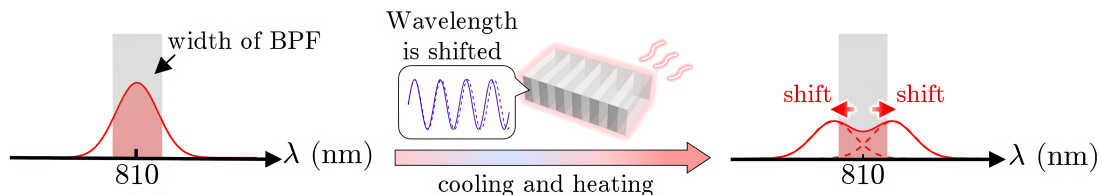


図 7.2 2 光子対が縮退した波長  $2\lambda_p$  で生成される確率が最も高いときは、単峰な分布となるが、非線形光学結晶を冷却や加熱すると結晶の屈折率が変化し、 $2\lambda_p$  から分離し双峰の確率分布となることで BPF の幅からずれる領域が増える。

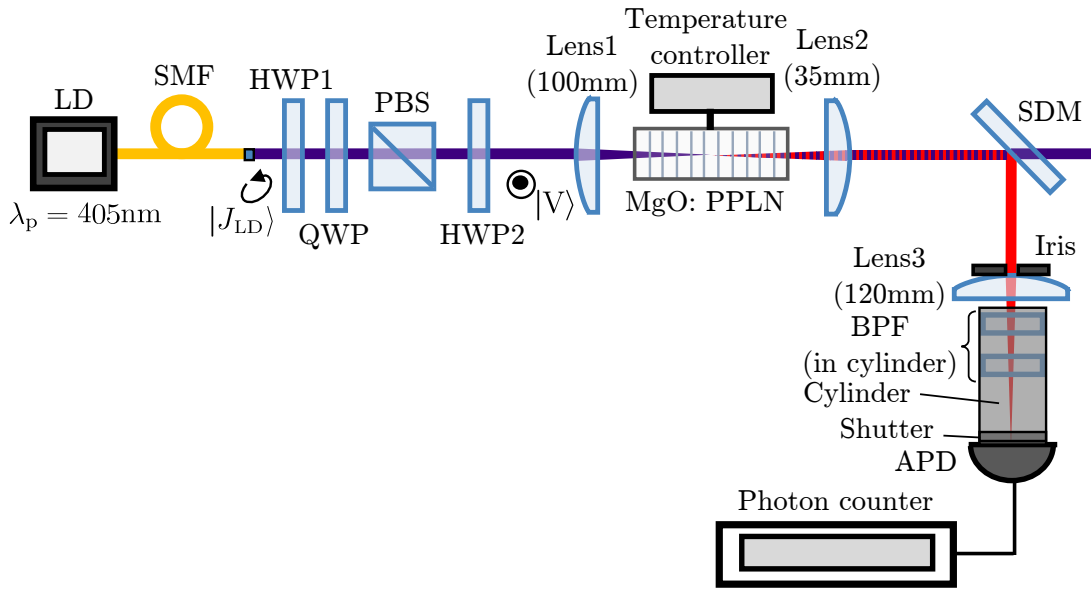


図 7.3 2光子対検出の実験系.

電気信号に変換され、光子計数器で 5 s 間の計数を 5 回連続で測定した。さらに、迷光によるノイズ成分  $\delta N_{\text{shutter}}(T)$  を計数するために筒と APD の間にシャッターを設置し、各温度でのノイズを測定した。

BPF の 405 nm での透過率は公称値では正確に値を取ることができなかつたため、LD 読出電流を 5.1 mA で BPF を筒に付けない場合と 1 枚付けた場合での  $5 \times 10^{-2}$  s 間の計数を 16 回測定し、その比率を  $\alpha_{405}$  とした。

### 7.3 2光子対検出の実験結果

図 7.4 に BPF が 1 枚のときの光子計数器での単位時間あたりの計数 (図 7.4(a)) と BPF が 2 枚のときの単位時間あたりの計数 (図 7.4(b)), シャッターで入射光を遮ったときの単位時間あたりの計数 (図 7.4(c)) を示した。図 7.4 から、 $T = (44 \pm 2)^\circ\text{C}$  で計数  $N_1(T), N_2(T)$  が最大となる殆ど上に凸な温度特性が得られた。また、温度  $T$  を変化させたときの計数の変動割合を

$$\Delta N := \frac{\max_T N(T) - \min_T N(T)}{\max_T N(T) + \min_T N(T)} \times 100\%, \quad (N = N_1, N_2, \delta N_{\text{shutter}}) \quad (7.3)$$

で評価すると、温度変化による変動割合は表 7.1 のようになった。表 7.1 から、 $N_1(T), N_2(T)$  の変動割合に対して誤差が 2 桁小さく、ノイズ成分  $\delta N_{\text{shutter}}(T)$  は誤差と変動割合が同程度でかつ  $N_1(T), N_2(T)$  に対して 2 桁小さい値であった。

図 7.4 の結果を式 (7.1) および式 (7.2) に代入して得られたポンプ光 (図 7.5(a)) および 2 光子対の光子数 (図 7.5(b)) を図 7.5 に示す。図 7.5 から、ポンプ光は温度変化に対して

\*1 図 7.3 での筒は簡便のため半透明に描いているが、実験では不透明な筒を使用した。

表 7.1 温度  $T$  を変化させたときの計数の変動割合.  $N_1(T), N_2(T), N_{405}(T)$  は誤差は変動割合に対して 2 桁小さく, さらに 15%, 20% と顕著に変動した. 一方,  $\delta N_{\text{shutter}}(T), N_{810}(T)$  は誤差と変動割合が同程度の変化となった.

計数・光子数名	$\Delta N_1$	$\Delta N_2$	$\Delta(\delta N_{\text{shutter}})$	$\Delta N_{405}$	$\Delta N_{810}$
変動割合 (%)	$15.16 \pm 0.24$	$20.5 \pm 0.5$	$3.6 \pm 3.4$	$25 \pm 22$	$20.5 \pm 0.5$

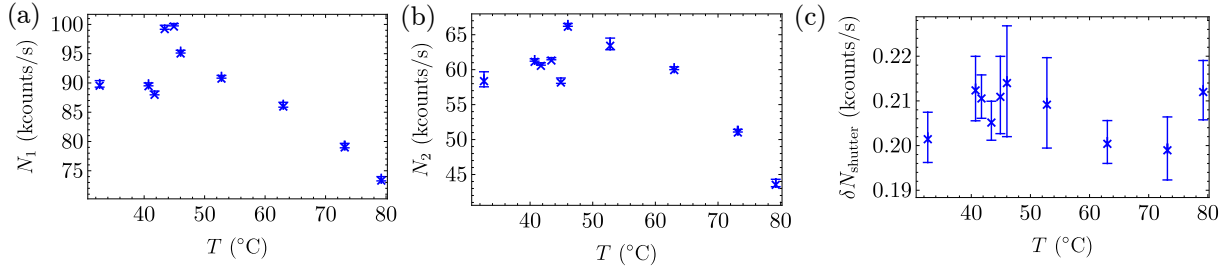


図 7.4 光子計数器で直接得られた (a) BPF が 1 枚のときの計数と, (b) BPF が 2 枚のときの計数, (c) シャッターで入射光を反射させたときの計数. (a) および (b) から  $T = (44 \pm 2)^\circ\text{C}$  で計数が最大となり, (a) および (b) による成分に対して (c) によるノイズ成分は 2 桁小さい値であった.

表 7.2 式 (7.1) および補正 (7.2) で用いたポンプ光 405 nm に対する各係数の値.

係数名	BPF の透過率 $\alpha_{405}$	SDM の透過率 $\alpha_{405}^{\text{SDM}}$	APD の量子効率 $\eta_{405}$
各係数の値	$(5 \pm 1) \times 10^{-5}$	$1.94 \times 10^{-2}$	$8.5 \times 10^{-2}$

表 7.3 式 (7.1) および補正 (7.2) で用いたポンプ光 810 nm に対する各係数の値.

係数名	BPF の透過率 $\alpha_{810}$	SDM の透過率 $\alpha_{810}^{\text{SDM}}$	APD の量子効率 $\eta_{810}$
各係数の値	0.95	0.935	0.53

殆ど一定であったが, 2 光子対は温度変化に対して顕著に変化し, 図 7.4 と殆ど同じ温度特性が得られた. 実際, 式 (7.3) に対して  $N = N_{405}, N_{810}$  として温度  $T$  を変化させたときの光子数の変動割合を評価すると表 7.1 のようになった. また, ポンプ光の光子数の誤差は  $N_1(T), N_2(T), N_{810}(T)$  とは異なり光子数と同じ桁数だけ広がった. さらに, 2 光子対の光子数はポンプ光の光子数に比べて 6 桁少ないが, 2 光子対は  $\delta N_{\text{shutter}}(T)$  に対して 2 桁多かった.

## 7.4 2 光子対検出の実験結果についての考察

まず, 図 7.4 による実験結果および式 (7.3) による各計数から得られた温度特性について考察する. 非線形光学結晶から得られる 2 光子対には温度特性があるため, 2 光子対が生成されると光子計数にも温度特性が反映されるはずである. この温度特性は, 式 (7.3) によ

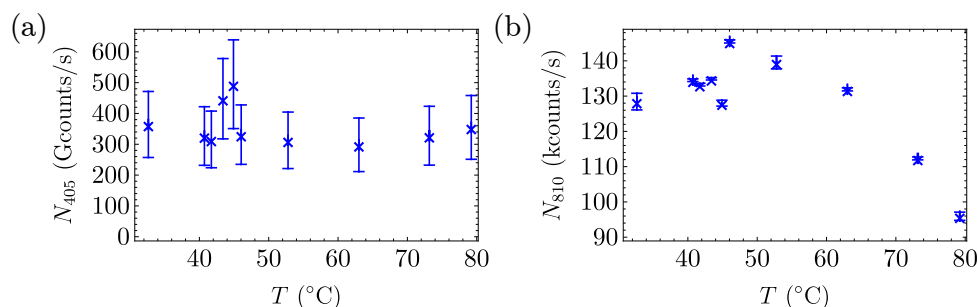


図 7.5 光子計数器で得られた計数から換算した (a) ポンプ光の光子および (b) 2光子対の光子数. (a) では温度変化に対して殆ど一定であるが (b) では温度変化に対して顕著に変化した. また, (b) は図 7.4 と殆ど同じ温度特性が得られた. さらに, (b) での光子数は (a) での光子数に比べて 6 桁少なかった.

る図 7.4 の計数変動の評価から顕著に変化したため, 確かめられたといえる. また, 図 7.4 から温度変化に対して殆ど上に凸となったが, これは 7.1.3 項による要因によるものと考えられる. さらに, 図 7.4(a) の温度変化が図 7.4(b) と同程度あることについては,  $N_1(T)$  が  $N_2(T)$  に対して桁が変わる程度には変化しなかったため, BPF を 1 枚通すのみでも 2 光子対がポンプ光に対して十分含まれていたことによるものといえる. 一方, ノイズ成分  $\delta N_{\text{shutter}}(T)$  は,  $N_1(T), N_2(T)$  よりも 2 桁小さいため十分無視でき, 式 (7.3) から温度特性が無い場合 MgO:PPLN からの迷光は殆ど無いといえる.

次に, 図 7.5 による実験結果および式 (7.3) による各光子数から得られた温度特性について考察する. ポンプ光の光子数が非線形光学結晶の温度依存性が現れなかった要因は, ポンプ光の光子数は 2 光子対の光子数に比べ 6 桁多く殆ど 2 光子対の光子数は無視できるため, QPM による 2 光子対を生成せず単に非線形光学結晶を通過した光子数が温度に依らない光子数として現れたといえる. 一方, 2 光子対の光子数はポンプ光の光子数とは異なり温度変化が  $N_1(T), N_2(T)$  と同程度現れたが, これは 7.1.3 項で述べたように QPM が温度依存性をもつことに起因するといえる.

さらに, ポンプ光の光子数の誤差が  $N_1(T), N_2(T), N_{810}(T)$  とは異なり光子数と同じ桁数だけ広がったことについて述べる. 表 7.2 の  $\alpha_{405}$  が, 桁数が一致する精度の不確かさであることに起因し, かつ図 7.5 から  $N_{810}(T)$  とは桁数が異なる程度の差があるため  $N_{810}(T)$  には  $\alpha_{405}$  の影響が殆どなく,  $N_{405}(T)$  のみに影響したと考えられる.

最後に, 2 光子対の光子数はポンプ光の光子数に比べて 6 桁少なく, また 2 光子対は  $\delta N_{\text{shutter}}(T)$  に対して 2 桁多かったことについて考察する. 2 光子対の数がポンプ光の光子数に比べて 6 桁小さい結果が得られた要因は, SPDC による 2 光子対の生成効率に起因した結果だといえる. しかし, 標準的な 2 光子対の生成効率と同程度の 2 光子対が得られたことについては, ポンプ光と 2 光子対がレンズ 3 によって集光されるときに生じる色収差によって, 2 光子対は焦点位置にあるがポンプ光は焦点位置からずれることでビームが広がり APD 受光面で得られる光子数が小さく見積もられたと考えられる.

## 第 8 章

# まとめ

本論文では、量子的な 2 光子対の伝搬に対する性質を明らかにすることであった。第 2 章では、2 次元平面および 3 次元空間での高次 Gaussian ビームと光波の伝搬に伴う重要な位相シフトである Gouy 位相について述べた。

第 3 章では、量子的な 2 光子対の代表的な手法である SPDC について述べた。古典的な光ビームを非線形光学結晶に入射することで SPDC により、低確率で量子的な 2 光子対が現れることを数式で説明し、SPDC によって生成された 2 光子対は量子論によって説明されることを述べた。また、SPDC は分極反転非線形光学結晶を用いると PM が分極反転の周期により QPM へと自由度が上がることを示した。

第 4 章では、ポンプ光を高次 Gaussian ビームとして SPDC により生成された 2 光子には、ある伝搬距離の組で位相特異点が光軸上で現れることについて述べた。位相特異点は 3 次元の高次 Gaussian ビームでは、ポンプ光の動径モードの次数によって位相特異点の次数が決まることを示し、Gouy 位相和によって得られることに触れた。また、2 次元平面においても同様に位相特異点が光軸上で発生することを示した。

以降の章では、ポンプ光の空間モードを変えて量子的な 2 光子対を生成のための実験について述べた。

第 5 章では、高次 Gaussian ビームを実際に生成する実験を行なった。本実験により、生成されたビームと所望の動径モードを有するビームとの相関係数が 90% 一致した。

第 6 章では、光子計数器の動作確認の実験を行なった。本実験により、光子検出器である APD に入射された光子数と光子計数器で得られた計数が比例したため、光子計数器によって光子数を計数することができることを示した。

第 7 章では、中心波長が 810 nm の BPF を 1, 2 枚透過させることで波長 405 nm のポンプ光と波長 810 nm の生成された 2 光子対が APD に到達できる光子数を操作し、2 光子対の光子数を換算した。本実験では、さらに生成される 2 光子対の温度特性を利用して実験した。本実験により、換算された 2 光子対の光子数には温度特性が確認され、ポンプ光の光子数には温度特性が無かったため、2 光子対は非線形光学結晶から生成されたと結論付けた。



# 謝辞

本研究に携わるにあたり、学部生のときから多大な助言やご指導賜りました高知工科大学システム工学群 光制御・ネットワーク研究室 小林 弘和准教授に心から感謝を申し上げます。

本論文の副査を担当して戴いた同学群の田上 周路准教授には、本研究を行なうにあたり分光器をお借り頂き、また学部2年ではアドバイザーとして研究室選びの助言等でも大変お世話になりました。また、同じく副査を担当して戴いた同学群の廖 望講師には量子系のコミュニティの紹介等を頂き、大変お世話になりました。改めて本論文執筆は、お忙しい中ではありますが、お二方の助力があったことで成しえました。ここに深謝の意を表わします。

また、学部生4年次に本学を退職された岩下 克名誉教授には、ゼミや研究室などで多くのご指導を頂きました。私が修士生として活躍できたことは、小林 弘和准教授と岩下 克名誉教授が研究室生として指導して頂いたためであり、心から感謝を申し上げます。

本研究を行なうにあたり、MgO:PPLN や APD など多くの実験器具をお借りさせて頂いた京都大学大学院 工学研究科 電子工学専攻 量子電磁工学研究室 杉山 和彦准教授ならびに同研究室の中西 俊博講師に深く感謝申し上げます。本学システム工学群 航空エンジン超音速流研究室 野崎 理教授ならびに荻野 要介講師には、分光器をお借り頂き深く感謝申し上げます。また、同研究室の修士課程1年橋爪 見奈氏には分光器の実験の構築を行なって頂き深く感謝申し上げます。

光制御・ネットワーク研究室では、博士課程3年の Jigme Zangpo 氏には研究活動や国際会議に提出する予稿の助言などで多くの助けがあったことに感謝を申し上げます。同期の内田 涼太氏には学部生の頃から実験系など多数の相談に快く受けて頂き感謝申し上げます。同研究室 学士課程4年の林 若那氏、柳田 瑞季氏には1年間進捗報告の場面で多数の質問をして頂き感謝申し上げます。同研究室 学士課程3年の石尾 周輝氏、日永 直仁氏、眞鍋 侑大氏は研究に対して大変意欲的で研究室に所属したときの初心を取り戻す良い刺激を与えられたことに感謝申し上げます。修士課程を昨年度修了された畑 聡之氏には、研究室内外でも研究室内外でも懇意にして頂き感謝を申し上げます。また、鈴木 建斗氏には Mathematica のプログラミングに関して多くの助言を頂き感謝を申し上げます。

最後に私を支えてくださったすべての方々へ、この場をお借りしまして心より感謝申し上げます。

## 参考文献

- [1] I. L. C. Michael A. Nielsen, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, CB2 2RU, United Kingdom, 2002).
- [2] D. Cozzolino, B. Da Lio, D. Bacco, and L. K. Oxenløwe, “High-Dimensional Quantum Communication: Benefits, Progress, and Future Challenges”, *Advanced Quantum Technologies* **2**, 1900038 (2019).
- [3] P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih, “New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4337–4341 (1995).
- [4] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger, “Entanglement of the orbital angular momentum states of photons”, *Nature* **412**, 313–316 (2001).
- [5] J. Yang and H. G. Winful, “Generalized eikonal treatment of the gouy phase shift”, *Opt. Lett.* **31**, 104–106 (2006).
- [6] N. Holme, M. Myaing, and T. Norris, “Gouy Phase Shift of Single-Cycle Picosecond Acoustic Pulses”, in *The Thirteenth International Conference on Ultrafast Phenomena* (2002), ThA5.
- [7] A. A. Kolomenskii, S. N. Jerebtsov, and H. A. Schuessler, “Focal transformation and the Gouy phase shift of converging one-cycle surface acoustic waves excited by femtosecond laser pulses”, *Opt. Lett.* **30**, 2019–2021 (2005).
- [8] L. Stoyanov, A. Stefanov, A. Dreischuh, and G. G. Paulus, “Gouy phase of Bessel-Gaussian beams: theory vs. experiment”, *Opt. Express* **31**, 13683–13699 (2023).
- [9] R. Ducharme and I. G. da Paz, “Gouy phase for relativistic quantum particles”, *Phys. Rev. A* **92**, 023853 (2015).
- [10] T. C. Petersen, D. M. Paganin, M. Weyland, T. P. Simula, S. A. Eastwood, and M. J. Morgan, “Unifying interpretations of the Gouy phase anomaly for electron waves”, *Phys. Rev. A* **89**, 063801 (2014).
- [11] I. G. da Paz, P. L. Saldanha, M. C. Nemes, and J. G. P. de Faria, “Experimental proposal for measuring the Gouy phase of matter waves”, *New J. Phys.* **13**, 125005 (2011).

- 
- [12] S. Feng and H. G. Winful, “Physical origin of the Gouy phase shift”, *Opt. Lett.* **26**, 485–487 (2001).
- [13] R. W. Boyd, “Intuitive explanation of the phase anomaly of focused light beams”, *J. Opt. Soc. Am.* **70**, 877–880 (1980).
- [14] T. Visser and E. Wolf, “The origin of the Gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields”, *Opt. Commun.* **283**, 3371–3375 (2010).
- [15] O. Baladron-Zorita, Z. Wang, C. Hellmann, and F. Wyrowski, “Isolating the Gouy phase shift in a full physical-optics solution to the propagation problem”, *J. Opt. Soc. Am. A* **36**, 1551–1558 (2019).
- [16] D. Subbarao, “Topological phase in Gaussian beam optics”, *Opt. Lett.* **20**, 2162–2164 (1995).
- [17] R. Simon and N. Mukunda, “Bargmann invariant and the geometry of the Gouy effect”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 880–883 (1993).
- [18] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, “Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes”, *Phys. Rev. A* **45**, 8185–8189 (1992).
- [19] D. Kawase, Y. Miyamoto, M. Takeda, K. Sasaki, and S. Takeuchi, “Observing Quantum Correlation of Photons in Laguerre-Gauss Modes Using the Gouy Phase”, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 050501 (2008).
- [20] F. de Brito, I. da Paz, B. Hiller, J. B. Araujo, and M. Sampaio, “Gouy phase of type-I SPDC-generated biphotons”, *Phys. Lett. A* **386**, 126989 (2021).
- [21] F. C. V. de Brito, C. H. S. Vieira, I. G. da Paz, J. B. Araujo, and M. Sampaio, “Sorkin parameter for type-I spontaneous parametric down-conversion biphotons and matter waves”, *Phys. Rev. A* **103**, 033707 (2021).
- [22] F. C. V. de Brito, I. G. da Paz, J. B. Araujo, and M. Sampaio, “Biphoton phase-space correlations from Gouy-phase measurements using double slits”, *Phys. Rev. A* **104**, 062430 (2021).
- [23] M. Hiekkamäki, R. F. Barros, M. Ornigotti, and R. Fickler, “Observation of the quantum Gouy phase”, *Nature Photonics* **16**, 828–833 (2022).
- [24] B. Baghdasaryan, C. Sevilla-Gutiérrez, F. Steinlechner, and S. Fritzsche, “Generalized description of the spatio-temporal biphoton state in spontaneous parametric down-conversion”, *Phys. Rev. A* **106**, 063711 (2022).
- [25] R. F. Offer, A. Daffurn, E. Riis, P. F. Griffin, A. S. Arnold, and S. Franke-Arnold, “Gouy phase-matched angular and radial mode conversion in four-wave mixing”, *Phys. Rev. A* **103**, L021502 (2021).

- [26] I. Kimel and L. Elias, “Relations between Hermite and Laguerre Gaussian modes”, *IEEE J. Quantum Electron.* **29**, 2562–2567 (1993).
- [27] 坂下徳幸, 軌道角運動量光ビームの空間伝送におけるモード多重分離への影響と適応制御に関する研究, 博士論文 (徳島大学大学院先端技術科学教育部, 2022).
- [28] Z. Y. Ou, *Multi-Photon Quantum Interference* (Springer Science+Business Media, LLC, New York, USA, 2007), pp. 17–61.
- [29] S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. Souto Ribeiro, “Spatial correlations in parametric down-conversion”, *Phys. Rep.* **495**, 87–139 (2010).
- [30] 枝松圭一, 単一光子と量子もつれ光子 量子光学と量子光技術の基礎, 基本法則から読み解く 物理学最前線 19 (共立出版株式会社, 東京, 2021), pp. 112–135.
- [31] O. Gayer, Z. Sacks, E. Galun, and A. Arie, “Temperature and wavelength dependent refractive index equations for MgO-doped congruent and stoichiometric LiNbO<sub>3</sub>”, *Appl. Phys. B* **91**, 343–348 (2008).
- [32] V. Arrizón, U. Ruiz, R. Carrada, and L. A. González, “Pixelated phase computer holograms for the accurate encoding of scalar complex fields”, *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 3500–3507 (2007).
- [33] 横川恒助, “高次ラゲールガウシアンビームの Gouy 位相による光強度分布の回転制御”, 修士論文 (高知工科大学大学院工学研究科, 2021).
- [34] 左貝潤一, 光学の基礎 (株式会社コロナ社, 東京, 2009), pp. 132–138.
- [35] R. Borghi, M. Santarsiero, and R. Simon, “Shape invariance and a universal form for the Gouy phase”, *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 572–579 (2004).
- [36] 清水明, 新版 量子力学の基礎 その本質のやさしい理解のために (株式会社サイエンス社, 東京, 2004), pp. 30–37.
- [37] 北野正雄, 量子力学の基礎 (共立出版株式会社, 東京, 2010), pp. 22–34.
- [38] 新井朝雄, 物理現象の数学的諸原理 —現代数理物理学入門— (共立出版株式会社, 東京, 2003), pp. 399–405.
- [39] W. N. Plick and M. Krenn, “Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams”, *Phys. Rev. A* **92**, 063841 (2015).
- [40] G. Nienhuis and L. Allen, “Paraxial wave optics and harmonic oscillators”, *Phys. Rev. A* **48**, 656–665 (1993).
- [41] E. Karimi, R. W. Boyd, P. de la Hoz, H. de Guise, J. Řeháček, Z. Hradil, A. Aiello, G. Leuchs, and L. L. Sánchez-Soto, “Radial quantum number of Laguerre-Gauss modes”, *Phys. Rev. A* **89**, 063813 (2014).
- [42] W. N. Plick, R. Lapkiewicz, S. Ramelow, and A. Zeilinger, *The Forgotten Quantum Number: A short note on the radial modes of Laguerre-Gauss beams*, 2013, [arXiv:1306.6517](https://arxiv.org/abs/1306.6517).

- 
- [43] J. Schneeloch and J. C. Howell, “Introduction to the transverse spatial correlations in spontaneous parametric down-conversion through the biphoton birth zone”, *J. Opt.* **18**, 053501 (2016).
- [44] K. J. Blow, R. Loudon, S. J. D. Phoenix, and T. J. Shepherd, “Continuum fields in quantum optics”, *Phys. Rev. A* **42**, 4102–4114 (1990).
- [45] 服部利明, 非線形光学入門 (株式会社 裳華房, 東京, 2022), pp. 24–91.
- [46] B. Baghdasaryan, F. Steinlechner, and S. Fritzsche, “Maximizing the validity of the Gaussian approximation for the biphoton state from parametric down-conversion”, *Phys. Rev. A* **106**, 063714 (2022).
- [47] A. Erdélyi, “Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen  $M_{k,m}$ -Funktionen auftreten”, *Math. Zeitschrift* **40**, 693–702 (1936).
- [48] H. Srivastava, H. Mavromatis, and R. Alassar, “Remarks on some associated Laguerre integral results”, *Applied Mathematics Letters* **16**, 1131–1136 (2003).
- [49] B. Ananthanarayan, S. Bera, S. Friot, O. Marichev, and T. Pathak, “On the evaluation of the Appell  $F_2$  double hypergeometric function”, *Comput. Phys. Commun.* **284**, 108589 (2023).

## 付録 A

# 高次 Gaussian ビーム

本章では、高次 Gaussian ビームでの近軸 Helmholtz 方程式による伝搬と、高次 Gaussian ビームと調和振動子との関連、高次 Gaussian ビームの Fourier 変換について述べる。付録 A.1 では近軸 Helmholtz 方程式、付録 A.2 では LG ビームの性質を述べる。また、付録 A.3 では量子的な 2 次元調和振動子の Hamiltonian で LG ビームを記述し、付録 A.5 ではビームの伝搬をユニタリ演算子で表現する。

付録 A.6 では HG モードの状態ベクトルと Fourier 変換について述べる。

### A.1 3次元空間における近軸 Helmholtz 方程式

本節ではビームの支配方程式である近軸 Helmholtz 方程式を 3 次元空間で求めるが、2 次元空間に置き換える際は単に横座標  $y$  を消去した場合となる。

自由空間中を伝搬するスカラー波と仮定した複素電場  $E(\mathbf{r}, z, t)$  は、次の波動方程式に従う：

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, z, t)}{\partial t^2} - \Delta E(\mathbf{r}, z, t) = 0. \quad (\text{A.1})$$

ただし、 $t$  は時刻、 $\Delta$  は空間成分  $(x, y, z)$  での Laplacian とした。

ここで、光波が単色 ( $\omega = \text{const.}$ ) で波面が殆ど伝搬方向  $z$  を向くことを仮定すると次のように記述できる：

$$E(\mathbf{r}, z, t) = E_0 u(\mathbf{r}, z) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (\text{A.2})$$

ただし、複素振幅  $E_0$  は電場の振幅と初期位相を表わす定数であり、複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  は伝搬方向への変化が小さい分布、位相  $\exp[i(kz - \omega t)]$  は  $z$  方向へ進行する平面波であり、光波の波数は  $k := \omega/c$ 、物理定数  $c := 2.997\,924\,58 \times 10^8$  m/s は真空中の光速である。また、複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  は各伝搬距離  $z$  で正規化する：

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} |u(\mathbf{r}, z)|^2 = 1. \quad (\text{A.3})$$

式 (A.2) では、複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  に伝搬方向に対する条件を課していないため、十分でない。このため、複素振幅分布の伝搬方向に対する 2 階偏導関数が 1 階偏導関数と波数  $k$  の積に比べ十分小さい緩包絡波近似 (Slowly-Varying Envelope Approximation; SVEA) を仮定する：

$$\left| 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r}, z)}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, z)}{\partial z^2} \right|. \quad (\text{A.4})$$

式 (A.4) は近軸近似と呼ばれる。近軸近似 (A.4) を波動方程式 (A.1) に適用した偏微分方程式は近軸 Helmholtz 方程式と呼ばれ、式 (A.2) の複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  に対する運動方程式になる。近軸 Helmholtz 方程式は

$$i \frac{\partial u(\mathbf{r}, z)}{\partial z} = -\frac{1}{2k} \Delta_{\perp} u(\mathbf{r}, z) \quad (\text{A.5})$$

で与えられる。ただし、 $\Delta_{\perp}$  は光波の横方向 ( $x, y$ ) に対する横方向 Laplacian である。近軸 Helmholtz 方程式 (A.5) から、光波の伝搬方向に対する 1 階偏導関数は、横方向に対して横方向の 2 階偏導関数による変化を与える。とくに、光波の横断面分布が光軸近傍に集中する場合、光波の伝搬方向に対する変化は、光波の横断面分布の変化に比べ緩やかになる。また、近軸 Helmholtz 方程式は自由粒子の Schrödinger 方程式と等価な偏微分方程式である。

## A.2 Laguerre–Gaussian ビームの諸性質

本論文では、LG ビームが有する性質を 3 つ述べる。

まず、LG ビームの伝搬に伴う光強度分布の形状不変性について述べる [35]。純粋 LG ビームの実振幅分布は、式 (2.8) から動径  $r$  と伝搬距離  $z$  のみに依存し、変数  $r$  を含む変数は  $r/w(z)$  の組み合わせのみ含まれる。変数  $r/w(z)$  は焦点面 ( $z = 0$ ) では  $r/w_0$  となるため、スケール因子  $\alpha(z)$  を

$$\alpha(z) := \frac{w_0}{w(z)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/z_R)^2}}$$

で定義してビームの実振幅分布の変数を  $\alpha(z)r$  と置く。スケール因子  $\alpha(z)$  を用いて、式 (2.8) を実振幅分布  $A_{l,p}^{\text{LG}}(\alpha(z)r, z)$  と位相分布  $\phi_{l,p}^{\text{LG}}(r, \theta, z)$  に分離すると次の式で与えられる：

$$A_{l,p}^{\text{LG}}(\alpha(z)r, z) := \alpha(z) \frac{C_{l,p}^{\text{LG}}}{w_0} \left( \frac{\sqrt{2}[\alpha(z)r]}{w_0} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2[\alpha(z)r]^2}{w_0^2} \right) \exp \left( -\frac{[\alpha(z)r]^2}{w_0^2} \right), \quad (\text{A.6a})$$

$$\phi_{l,p}^{\text{LG}}(r, \theta, z) := k \frac{r^2}{2R(z)} + l\theta - \chi_{l,p}(z). \quad (\text{A.6b})$$

式 (A.6a) から、 $\alpha(z)r$  の項は、ビームの伝搬に伴い集光面でのビーム横断面分布を相似な形状に維持しながら  $1/\alpha(z)$  倍拡大させる役割をもつ (図 A.1)。また、式 (A.6a) の右辺全

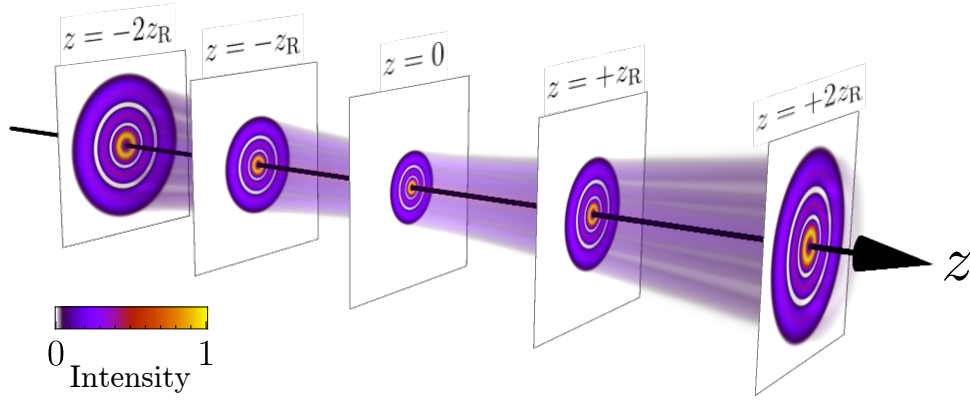


図 A.1 LG ビーム  $LG_{l=+1,p=2}$  の  $z$  方向への伝搬に伴うビームの変化を表した. 純粋な LG ビームでは, ビーム集光面  $z = 0$  での分布を中心に集光面から離れるにつれて相似な形状を保ちながら  $1/\alpha(z)$  倍拡大される.

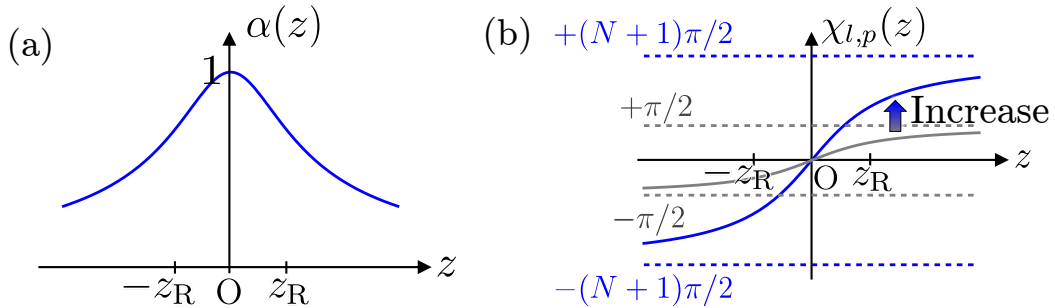


図 A.2 LG ビーム  $LG_{l=+1,p=5}$  の伝搬依存するスケール因子  $\alpha(z)$  と Gouy 位相変化  $\chi_{l,p}(z)$  を表した. (a) LG ビームの伝搬に伴うビームの振幅減衰とビーム断面の拡大率の逆数を与えるスケール因子  $\alpha(z)$  であり, スケール因子は光軸上で最大値になる上に凸な減衰をする. (b) 灰色の実線が基本 Gaussian ビーム  $LG_{0,0}$  の Gouy 位相  $\chi_{l,p}(z)$  で, 青色の実線が LG ビーム  $LG_{l,p}$  の Gouy 位相であり, モード番号の増加に伴い線形に Gouy 位相が増加する. Gouy 位相は焦点から Rayleigh 長  $z_R$  までの領域において急峻に変化する.

体に掛かる  $\alpha(z)$  は, 正規化 (A.3) による因子であり, 各横断面全体に対して振幅を一様に減衰させる (図 A.2(a)).

LG ビームではビーム径が焦点近傍で 2 次関数的に拡大するため横方向波数  $k$  は急峻に増加し, 焦点から十分伝搬するとビーム径は線形に拡大するため横方向波数  $k$  は一定となる. また, LG ビームの横断面上分布は単調増加に拡大するため, 横方向波数  $k$  もまた単調増加する. したがって, LG ビームの Gouy 位相は単調増加し, 焦点近傍で急峻に変化する (図 A.2(b)). さらに, LG ビームのモード番号に Gouy 位相変化は比例する (図 A.2(b)).

最後に, LG ビームの直交性について述べる. 式 (A.3) を満たす任意の複素振幅分布  $u_1(\mathbf{r}, z), u_2(\mathbf{r}, z)$  の内積を

$$\langle u_1(z) | u_2(z) \rangle := \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} u_1^*(\mathbf{r}, z) u_2(\mathbf{r}, z) \quad (\text{A.7})$$



で定義する. 式 (A.7) により, 複素振幅を与える複素数値関数全体の集合は Hilbert 空間  $\mathcal{H}$  になる [36, 37]. 式 (2.8) に対して Laguerre 陪多項式  $L_p^{l|}(\nu)$  の直交性

$$\int_0^\infty d\nu \nu^{|l|} e^{-\nu} L_{p'}^{l|}(\nu) L_p^{l|}(\nu) = \frac{(p + |l|)!}{p!} \delta_{p,p'}$$

および三角関数の複素表現  $\exp(i l \theta)$  の直交性

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta e^{-i l' \theta} e^{i l \theta} = 2\pi \delta_{l,l'}$$

に注意すると, 任意の LG ビーム  $\text{LG}_{l,p}, \text{LG}_{l',p'}$  との内積で

$$\langle u_{l,p}^{\text{LG}}(z) | u_{l',p'}^{\text{LG}}(z) \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{p,p'} \quad (\text{A.8})$$

が導かれる.

式 (A.8) から,  $\{\text{LG}_{l,p}\}_{l \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}_0^+}$  は正規直交系を成す. このとき, 任意の複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  は係数の組  $\{c_{l,p}\}_{l \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}_0^+}$  に対して,

$$u(\mathbf{r}, z) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}_0^+} c_{l,p} u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}, z), \quad c_{l,p} := \langle u_{l,p}^{\text{LG}}(z) | u(z) \rangle \quad (\text{A.9})$$

が成り立ち,  $\{\text{LG}_{l,p}\}_{l \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}_0^+}$  を完全という [38].

### A.3 量子的な 2 次元調和振動子の Hamiltonian と LG ビーム

複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  は内積 (A.7) と正規化 (A.3) を満たすので Hilbert 空間に属し, 量子力学における波動関数と同様の記法を適用することができる. したがって, 複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  を状態ベクトル  $|u(z)\rangle$  から横断面位置  $|\mathbf{r}\rangle$  を射影することで得られる値と捉えることができる:

$$u(\mathbf{r}, z) := \langle \mathbf{r} | u(z) \rangle. \quad (|\mathbf{r}\rangle := |x, y\rangle) \quad (\text{A.10})$$

一方, ブラケット記法により状態  $|u(z)\rangle$  に対して, 横断面位置  $|\mathbf{r}\rangle$  の代わりに横波数  $|\mathbf{k}\rangle$  を用いれば

$$\tilde{u}(\mathbf{k}, z) = \langle \mathbf{k} | u(z) \rangle. \quad (|\mathbf{k}\rangle := |k_x, k_y\rangle) \quad (\text{A.11})$$

と複素振幅分布の Fourier 変換  $\tilde{u}(\mathbf{k}, z) := \mathcal{F}[u(\mathbf{r}, z)]$  が得られるため, 状態ベクトルで議論すれば横断面や横波数による座標に依らない統一的な記述ができる.

次に, 焦点での LG ビームの状態ベクトルが 2 次元調和振動子の Hamiltonian 演算子と軌道角運動量演算子の固有状態であることを述べる. ビームの運動方程式は近軸 Helmholtz 方程式 (A.5) として伝搬距離  $z$  による発展は得られるが, 焦点面  $z = 0$  での横断面内の初期条件  $|u(z=0)\rangle$  は任意である. そこで, 初期条件として状態ベクトル  $|u(0)\rangle$  は量子的な

2次元調和振動子 (Harmonic Oscillator; HO) の Hamiltonian  $\hat{H}_{\text{HO}}$  の固有状態および軌道角運動量  $\hat{L}_z$  の固有状態であることを課す [39] :

$$\hat{H}_{\text{HO}} := \hbar\omega \left[ \frac{1}{w_0^2} (\hat{q}_x + \hat{q}_y)^2 + \frac{w_0^2}{4\hbar^2} (\hat{p}_x + \hat{p}_y)^2 \right] \quad (\text{A.12a})$$

$$\hat{L}_z := \hat{q}_x \hat{p}_y - \hat{q}_y \hat{p}_x \quad (\text{A.12b})$$

$$\hat{H}_{\text{HO}}|u(0)\rangle = \hbar\omega(N+1)|u(0)\rangle, \quad \hat{L}_z|u(0)\rangle = \hbar l|u(0)\rangle. \quad (\text{A.12c})$$

ただし, 演算子  $(\hat{q}_x, \hat{q}_y), (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$  はそれぞれ位置演算子・運動量演算子といい,  $x$  方向に対しては固有状態  $|x\rangle, |k_x\rangle$  によって

$$\hat{q}_x|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{p}_x|k_x\rangle = \hbar k_x|k_x\rangle \quad (\text{A.13})$$

を満たす ( $y$  方向についても同様). また, 固有値  $N, l$  はそれぞれ非負整数と整数であり, ビーム断面の大きさを与えるモード番号と方位角モードと一致する. さらに, 位置演算子と運動量演算子は交換関係

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] := \hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{q}_i = i\hbar \delta_{i,j}, \quad (i, j = x, y) \quad (\text{A.14})$$

を満たすことが量子力学においてよく知られている. ただし,  $\delta_{i,j}$  は Kronecker のデルタである.

式 (A.12a) と式 (A.12b) の固有値との関係は

$$\hat{a}_i^\dagger := \frac{1}{w_0} \hat{q}_i - i \frac{w_0}{2\hbar} \hat{p}_i, \quad \hat{a}_i := \frac{1}{w_0} \hat{q}_i + i \frac{w_0}{2\hbar} \hat{p}_i. \quad (i = x, y) \quad (\text{A.15})$$

で定義される上昇演算子  $(\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger)$  と下降演算子  $(\hat{a}_x, \hat{a}_y)$  を用いると簡潔に表わせる. 上昇演算子と下降演算子を合わせて昇降演算子という. ただし,  $\hat{q}_i, \hat{p}_i$  ( $i = x, y$ ) は式 (A.13) から固有値が実数であるため Hermite 共役を行なっても同じ演算子を維持する ( $\hat{O}^\dagger = \hat{O}$ ). このような演算子を Hermite 演算子という. 昇降演算子の交換関係は, 式 (A.14) から

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \quad (i, j = x, y) \quad (\text{A.16})$$

を満たす. 昇降演算子により式 (A.12a) と式 (A.12b) は次のように表わされる:

$$\hat{H}_{\text{HO}} = \hbar\omega(\hat{N} + 1), \quad \hat{L}_z = i\hbar(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x), \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{N} := \hat{N}_x + \hat{N}_y, \quad \hat{N}_i := \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i. \quad (i = x, y) \quad (\text{A.18})$$

LG モード  $\text{LG}_{l,p}$  の固有状態とするには, 昇降演算子に方位角方向に対して対称性を用いて

$$\hat{a}_\pm^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{a}_\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x \mp i\hat{a}_y) \quad (\text{A.19})$$

とし、粒子数演算子  $\hat{N}$  と軌道角運動量演算子  $\hat{L}_z$  は

$$\hat{N} = \hat{N}_+ + \hat{N}_-, \quad \hat{L}_z = \hbar(\hat{N}_+ - \hat{N}_-), \quad (\text{A.20})$$

$$\hat{N}_\pm = \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm + \hat{a}_\pm^\dagger \hat{a}_\pm, \quad \hat{N}_\pm |N_\pm\rangle = N_\pm |N_\pm\rangle, \quad |N\rangle := |N_+, N_-\rangle \quad (\text{A.21})$$

で記述される。明らかに式 (A.20) の固有値は  $N_+, N_-$  で記述でき、式 (A.12c) から  $N = N_+ + N_-$  の非負整数で記述され、式 (A.12c) から固有値  $l$  は  $l = N_+ - N_-$  となるため、固有値  $l$  は整数全体を取り得る。昇降演算子を固有状態  $|N\rangle = |N_+, N_-\rangle$  に作用した  $\hat{a}_\pm^\dagger |N_+, N_-\rangle, \hat{a}_\pm |N_+, N_-\rangle$  は式 (A.16) と式 (A.20) により固有値を  $\pm 1$  つずつ上昇または下降させるため、 $N_\pm$  は整数であり下限 0 がある。

固有値  $N_\pm$  が非負整数なので基底状態  $|N_\pm = 0\rangle$  があり、下降演算子を掛けるとその状態以下は無いので 0 とする：

$$\hat{a}_+ |N_+ = 0\rangle = \hat{a}_- |N_- = 0\rangle = 0. \quad (\text{A.22})$$

このとき、基底状態  $|N_+ = 0, N_- = 0\rangle = |l = 0, N = 0\rangle$  は  $\text{LG}_{0,0}$  に対応するといえる。

基底状態  $|0, 0\rangle$  が最も基本的な状態であり、一般の固有状態は基底状態を上昇演算子によってモードを上昇させることで得られる。実際に LG ビームの昇降演算子によるモード番号の上昇および下降は、 $\hat{a}_+^\dagger$  では  $l$  を  $+1$  上昇させ  $N$  を  $+1$  上昇させ、 $\hat{a}_-^\dagger$  では  $l$  を  $-1$  上昇させ  $N$  を  $+1$  上昇させ、 $\hat{a}_+$  では  $l$  を  $+1$  下降させ  $N$  を  $+1$  下降させ、 $\hat{a}_-$  では  $l$  を  $-1$  下降させ  $N$  を  $+1$  下降させる (図 A.3)。したがって、 $l, N$  はそれぞれ LG モードにおける方位角モードとビームの大きさを与えるモード番号といえ、式 (2.10) から図 A.3 の青線の位置が動径モード  $p$  を与える。

ここで、固有値  $N$  の代わりに動径モード  $p$  を導入すると、一般の LG モード  $\text{LG}_{l,p}$  の状態  $|u_{l,p}^{\text{LG}}(0)\rangle$  は

$$\begin{aligned} |u_{l,p}^{\text{LG}}(0)\rangle &= \frac{(-1)^{\min(N_+, N_-)}}{\sqrt{N_+! N_-!}} (\hat{a}_+^\dagger)^{N_+} (\hat{a}_-^\dagger)^{N_-} |0, 0\rangle \\ &= \frac{(-1)^p}{\sqrt{p!(p+|l|)!}} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-^\dagger)^p [\hat{a}_{\text{sgn}(l)}^\dagger]^{|l|} |0, 0\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

で表わされる [40, 41]。ただし、 $\text{sgn}(l)$  は符号関数、グローバル位相  $(-1)^p = (-1)^{\min(N_+, N_-)}$  は LG ビームの定義に合わせるために付与した。

動径モード  $p$  を与える演算子は SPDC で生成した 2 光子波動関数の光軸上の伝搬において重要であるため、横座標  $|\mathbf{r}\rangle$  での動径モード演算子  $\hat{p}$  を微分演算子で与える [39, 42]：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \hat{p} := & \begin{cases} \langle \mathbf{r} | \hat{N}_+ & (l < 0) \\ \langle \mathbf{r} | \hat{N} & (l = 0) \\ \langle \mathbf{r} | \hat{N}_- & (l > 0) \end{cases} \\ & = \left[ -\frac{w_0^2}{8} \Delta_\perp + \text{sgn}(l) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{r^2}{w_0^2} - 1 \right) \right] \langle \mathbf{r} |. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

動径モード演算子は、式 (2.10) や式 (A.15), 式 (A.17),  $\hat{p} = -i\nabla_\perp$  から導かれる。

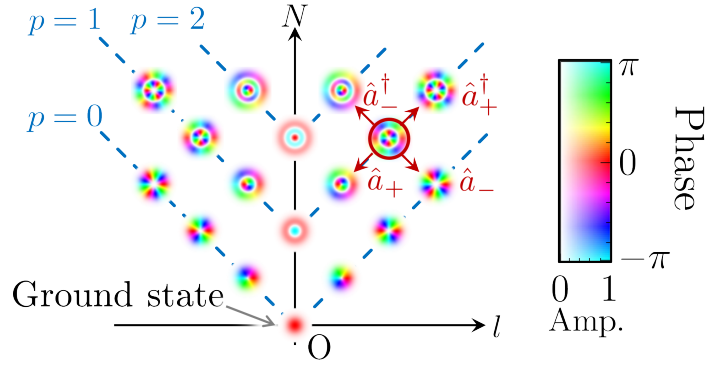


図 A.3 基本 Gaussian モード  $LG_{l=0,p=0}$  を基底状態とし、昇降演算子を複数演算することで方位角モード  $l$  と粒子数演算子の固有値  $N$  が異なる状態になる遷移を表わしている。この遷移から固有値  $N$  が与えられると方位角モード  $l$  に上限が現れ扱いづらいので、動径モード  $p$  を導入し、 $(l, N)$  の組み合わせから  $(l, p)$  の組み合わせでモードを指定し直すと、動径モード  $p$  を与えても方位角モード  $l$  に制限が掛からないため扱い易くなる。LG モード  $LG_{+2,1}$  のとき、 $\hat{a}_+^\dagger$  を演算すると  $LG_{+3,1}$ 、 $\hat{a}_-^\dagger$  を演算すると  $LG_{+1,2}$ 、 $\hat{a}_+$  を演算すると  $LG_{+1,1}$ 、 $\hat{a}_-$  を演算すると  $LG_{+3,0}$  になる。

#### A.4 昇降演算子による LG ビームの Fourier 変換

LG モード  $LG_{l,p}$  は、式 (A.23) から上昇演算子  $\hat{a}_\pm^\dagger$  を  $LG_{0,0}$  の状態  $|0,0\rangle$  に掛けることで表現されたので、 $\hat{a}_\pm^\dagger$  の横波数空間上での記述さえ与えれば式 (2.8) を直接 Fourier 変換しなくとも得られる。

式 (A.15) から

$$\hat{a}_i^\dagger = -i \left[ \frac{1}{(w_0/2)^{-1}\hbar} \hat{p}_i + i \frac{(w_0/2)^{-1}}{2} \hat{q}_i \right], \quad (\text{A.25a})$$

$$\hat{a}_i = +i \left[ \frac{1}{(w_0/2)^{-1}\hbar} \hat{p}_i - i \frac{(w_0/2)^{-1}}{2} \hat{q}_i \right]. \quad (i = x, y) \quad (\text{A.25b})$$

である。横座標では  $\hat{q} = \mathbf{r}$ ,  $\hat{p} = -i\hbar\nabla_\perp$  であるが、横波数だと  $\hat{q} = +i\nabla_\perp$ ,  $\hat{p} = \hbar\mathbf{k}$  となることが Fourier 解析により得られるため、式 (2.8) に対して  $\hat{a}_i^\dagger \rightarrow i\hat{a}_i^\dagger$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{k}$ ,  $w_0 \rightarrow (w_0/2)^{-1}$  とすれば式 (2.8) の Fourier 変換が得られる：

$$\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}, z=0) = \pi i^N C_{l,p}^{\text{LG}} w_0 \left( \frac{w_0 k_r}{\sqrt{2}} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{w_0^2 k_r^2}{2} \right) \exp\left(-\frac{w_0^2 k_r^2}{4}\right). \quad (\text{A.26})$$

ただし、Parseval の等式と式 (A.3)

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} |u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}, 0)|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} |\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}, 0)|^2 = 1$$

から  $\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}, 0)$  には余分に  $2\pi$  を掛ける必要があることを用いた。

さらに、式 (A.29) を式 (A.26) に作用すれば任意の伝搬距離での横波数空間での LG ビームが得られる：

$$\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}, z=0) = \pi i^N C_{l,p}^{\text{LG}} w_0 \left(\frac{2k_r}{\sqrt{2}}\right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{w_0^2 k_r^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{w_0^2 k_r^2}{4}\right) \exp\left(-i \frac{\|\mathbf{k}\|^2}{2k} z\right). \quad (\text{A.27})$$

## A.5 LG ビームの伝搬とユニタリ演算子

まず、焦点面でのビームの複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z=0)$  に、伝搬距離  $z$  を与える演算子  $\hat{U}(z)$  を作用した結果が伝搬距離  $z$  でのビームの複素振幅分布  $u(\mathbf{r}, z)$  とする：

$$u(\mathbf{r}, z) =: \hat{U}(z)u(\mathbf{r}, z=0). \quad (\text{A.28})$$

次に、式 (2.6) は 2 階線形偏微分方程式であり、導関数のみが偏微分方程式に含まれている。したがって、式 (2.6) を横断面に対して Fourier 変換すれば、 $z$  のみについての偏導関数が含まれる 1 階線形偏微分方程式となるため簡単に解が求まる：

$$\hat{U}(z) = \exp\left(-i \frac{z}{2\hbar^2 k} \hat{p}^2\right). \quad (\hat{p} := \hbar \mathbf{k}) \quad (\text{A.29})$$

とくに、式 (A.29) は演算前後で式 (2.7) の 2 式目を変えない演算子であり、このような演算子はユニタリ演算子と呼ばれる。

最後に、式 (2.7) で表わされる電場が焦点面から伝搬距離  $z$  だけ進ませる微分演算子  $\hat{U}^E(z)$  を求める。式 (2.7) から、 $z$  依存項は平面波項と複素振幅分布の項のみであり、複素振幅分布に対する微分演算子は式 (A.29) で与えられるため、平面波項  $\exp(ikz)$  を与える微分演算子を考えれば良い。平面波項を与える微分演算子  $\hat{U}^P(z)$  は、波数を与える微分演算子を式 (A.29) のように波数の大きさを与える運動量演算子  $\hat{p} := \hbar \mathbf{k}$  によって

$$\hat{U}^P(z) := \exp\left(i \frac{z}{\hbar} \hat{p}\right) \quad (\text{A.30})$$

と記述できる。

よって、電場を焦点面から伝搬距離  $z$  だけ進ませる微分演算子  $\hat{U}^E(z)$  は次の式で与えられる：

$$\hat{U}^E(z) := \hat{U}^P(z)\hat{U}(z). \quad (\text{A.31})$$

## A.6 Hermite–Gaussian モードの状態ベクトルと Fourier 変換

本節では、付録 A.6.1 で HG モードの状態ベクトルを、付録 A.6.2 で HG ビームの Fourier 変換について述べる。

### A.6.1 Hermite–Gaussian モードの状態ベクトル

2次元平面での HG モードは、単に横空間座標を  $x$  のみで表わした場合といえるので、HG モードを与える Hamiltonian と固有値  $n$  は

$$\hat{H}_{\text{HO}} = \hbar\omega \left[ \frac{1}{w_0^2} \hat{q}_x^2 + \frac{w_0^2}{4\hbar^2} \hat{p}_x^2 \right], \quad (\text{A.32})$$

$$\hat{H}_{\text{HO}}|u(0)\rangle = \hbar\omega(n+1)|u(0)\rangle \quad (\text{A.33})$$

とする。(A.15) から HG モードの昇降演算子は

$$\hat{a}_x^\dagger := \frac{1}{w_0} \hat{q}_x - i \frac{w_0}{2\hbar} \hat{p}_x, \quad \hat{a}_x := \frac{1}{w_0} \hat{q}_x + i \frac{w_0}{2\hbar} \hat{p}_x \quad (\text{A.34})$$

であり、基底状態である  $\text{HG}_{n=0}$  は

$$\hat{a}_x|n=0\rangle = 0 \quad (\text{A.35})$$

を満たす。このとき、一般の HG モード  $\text{HG}_n$  の状態ベクトル  $|u_n^{\text{HG}}(z=0)\rangle$  は

$$|u_n^{\text{HG}}(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}_x^\dagger)^n |0\rangle \quad (\text{A.36})$$

で生成される。

### A.6.2 Hermite–Gaussian ビームの Fourier 変換

HG ビームの Fourier 変換は、式 (2.3) と式 (A.36)、付録 A.4 での議論から、上昇演算子と  $\hat{a}_x^\dagger \rightarrow i\hat{a}_x^\dagger, x \rightarrow k_x, w_0 \rightarrow (w_0/2)^{-1}$  の置き換えを行なえば得られる：

$$\tilde{u}_n^{\text{HG}}(\mathbf{k}, z=0) = i^n C_n^{\text{HG}} \sqrt{2\pi w_0} H_n \left[ \frac{w_0 k_x}{\sqrt{2}} \right] \exp\left(-\frac{w_0^2 k_x^2}{4}\right). \quad (\text{A.37})$$

さらに、式 (A.29) を式 (A.37) に作用すれば任意の伝搬距離での横波数空間での LG ビームが得られる：

$$\tilde{u}_n^{\text{HG}}(\mathbf{k}, z) = i^n C_n^{\text{HG}} \sqrt{2\pi w_0} H_n \left[ \frac{w_0 k_x}{\sqrt{2}} \right] \exp\left(-\frac{w_0^2 k_x^2}{4}\right) \exp\left(-i \frac{k_x^2}{2k} z\right). \quad (\text{A.38})$$

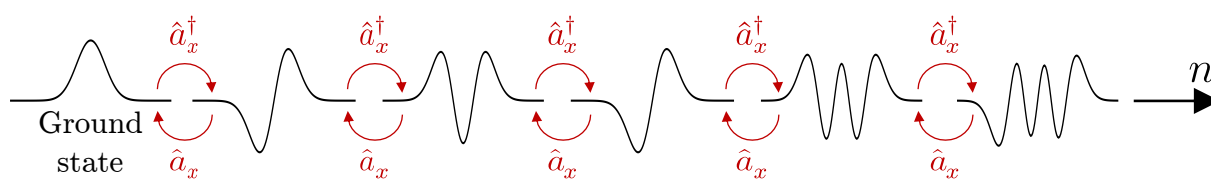


図 A.4 基本 Gaussian モード  $LG_{n=0}$  を基底状態とし、昇降演算子  $\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_x$  によりモードを昇降させる概念図.

## 付録 B

# 擬似位相整合による自発パラメトリック下方変換

本章では、QPM での SPDC による 2 光子対の生成を与える状態ベクトルとその伝搬について述べる。付録 B.1 では QPM での SPDC による 2 光子対の生成を 2 次非線形相互作用を用いて説明する。付録 B.2 では付録 B.1 で与えた 2 光子状態ベクトルに対して伝搬させたときの状態ベクトルを与える。

### B.1 擬似位相整合条件での自発パラメトリック下方変換による 2 光子対生成

本節では、付録 B.1.1 で 2 次非線形相互作用による Hamiltonian  $\hat{H}_{\text{NL}}(t)$  を与え、付録 B.1.2 で 2 光子状態ベクトルを与える。また、付録 B.1.3 では光子対に単色の条件を加え、付録 B.1.4 では波数に縮退の条件を加えた場合について述べる。

#### B.1.1 2 次非線形相互作用による Hamiltonian の記述

まず、2 光子対の初期状態  $|\psi(0)\rangle$  として、2 光子対が真空状態  $|\text{vac}\rangle_{s,i}$  とすると

$$|\psi(0)\rangle = |\text{vac}\rangle_{s,i} \quad (\text{B.1})$$

で与えられる。

次に、非線形光学結晶が直方体のバルク型分極反転非線形光学結晶（断面積  $D = L_x L_y$ 、長さ  $L$ ）とし（図 B.1）、ポンプ光は古典光の電場  $\vec{E}_p(\mathbf{r}, z, t)$  でシグナル光子とアイドラ光子は第二量子化された電場  $\hat{E}_s(\mathbf{r}, z, t), \hat{E}_i(\mathbf{r}, z, t)$  とすると、2 次非線形相互作用による



Hamiltonian 演算子  $\hat{H}_{\text{NL}}$  は

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{NL}}(t) &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_D d\mathbf{r} \int_{-L/2}^{L/2} dz \chi_{ijk}^{(2)}(z) E_{pi}(\mathbf{r}, z, t) \hat{E}_{sj}(\mathbf{r}, z, t) \hat{E}_{ik}(\mathbf{r}, z, t) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}_p}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}_s}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}_i}{(2\pi)^{3/2}} \left[ 2d_{\text{eff}} \sum_{m:\text{odd}} \frac{-2i}{m\pi} \frac{-\hbar}{2\varepsilon_0 c} \right. \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\omega_s(\vec{k}_s)\omega_i(\vec{k}_i)v_g(\omega_s(\vec{k}_s))v_g(\omega_i(\vec{k}_i))}{n(\omega_s(\vec{k}_s))n(\omega_i(\vec{k}_i))}} \int_D d\mathbf{r} e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \int_{-L/2}^{L/2} dz e^{i\Delta k_z z} \quad (\text{B.2}) \\ &\quad \left. \times e^{-i\Delta\omega t} \hat{E}_p(\vec{k}_p) \hat{a}_s^\dagger(\vec{k}_s) \hat{a}_i^\dagger(\vec{k}_i) + \text{h.c.} \right] \end{aligned}$$

で記述される [43–45]. ただし, 横空間座標でのベクトルは  $\mathbf{v}$  とし, 3次元空間では  $\vec{v}$  のように表記し,  $\varepsilon_0 = (8.8541878128 \pm 0.0000000013) \times 10^{-12}$  F/m は真空中の誘電率, 角周波数と波数には

$$k_j = \frac{n(\omega_j(\vec{k}_j))\omega_j(\vec{k}_j)}{c}$$

の関係にあることを用いた. また, 第二量子化された電場  $\hat{E}(\mathbf{r}, z, t)$  は, 非線形光学結晶の分極反転周期  $\Lambda$  が生成される光子対の波長  $\lambda_j$  ( $j = s, i$ ) よりも十分長いとすると, 連続モードと近似できる (図 B.1). このとき, 第二量子化された Coulomb ゲージでのベクトルポテンシャル  $\hat{A}(\mathbf{r}, z, t)$  により

$$\begin{aligned} \hat{E}_j(\mathbf{r}, z, t) &= -\frac{\partial \hat{A}_j(\mathbf{r}, z, t)}{\partial t} \quad (j = s, i) \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\vec{k}_j}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_j(\vec{k}_j)v_g(\omega_j(\vec{k}_j))}{2\varepsilon_0 c n(\omega_j(\vec{k}_j))}} \hat{a}_j^\dagger(\vec{k}_j) \vec{e}(\vec{k}_j) e^{-i(\mathbf{k}_j\cdot\mathbf{r} + k_{jz}z - \omega_j t)} + \text{h.c.} \end{aligned}$$

と与えられる [44]. ただし,  $v_g(\omega_j(\vec{k}_j)) := 1/[\partial k_j(\vec{k}_j)/\partial \omega_j(\vec{k}_j)]$  は群速度,  $\hat{a}_j^\dagger(\vec{k}_j)$  は光子を1つ励起させる生成演算子,  $\vec{e}(\vec{k}_j)$  は偏光, h.c. は第1項の Hermite 共役を意味する. さらに,  $d_{\text{eff}}(z) := \chi_{ijk}^{(2)}(z)/2$  ( $d_{\text{eff}} := |\chi_{ijk}^{(2)}(z)|/2$ ) は実効的非線形光学係数とした. ただし,  $\chi_{ijk}^{(2)}(z)$  は2次非線形感受率で, 分極反転非線形光学結晶では  $z \in [-L/2, L/2]$  内で分極反転周期  $\Lambda$  の周期関数である (図 B.1). したがって, 2次非線形感受率の大きさが  $\chi_{0,ijk}^{(2)}$  で分極反転が  $\Lambda/2$  の周期となっていることを用いると,

$$\chi_{ijk}^{(2)}(z) = \chi_{0,ijk}^{(2)} \sum_{m:\text{odd}} \frac{-2i}{m\pi} e^{-imk_c z}, \quad k_c := \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (\text{B.3})$$

のように複素 Fourier 級数展開できる [45].  $\Delta\mathbf{k} := \mathbf{k}_p - (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i)$  と  $\Delta k_z := k_{pz} - (k_{sz} + k_{iz} + mk_c)$  はそれぞれ横波数と縦波数の QPM からのずれとし,  $\Delta\omega := \omega_p - (\omega_s + \omega_i)$  はエネルギー保存則からのずれとした.

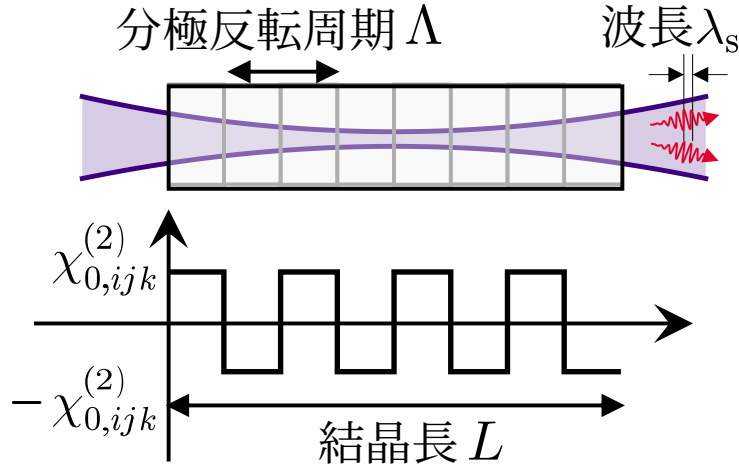


図 B.1 分極反転非線形光学結晶を介し SPDC により生成される 2 光子を表わした概念図. 非線形光学結晶は, 結晶長  $L$ , 分極反転周期が  $\Lambda$  で 2 次非線形感受率は大きさ  $\chi_{0,ijk}^{(2)}$  で  $\Lambda/2$  毎に符号が反転している. 光子対の一方の波長は  $\lambda_s$  で, 分極反転周期  $\Lambda$  よりも短いことを表わしている (他方の光子についても同様).

ここで, 式 (B.2) に対してポンプ光およびシグナル光子とアイドラ光子が SVEA 下にあると仮定すると, 縦波数よりも角周波数についての積分の方が扱い易いため,  $(\mathbf{k}_j, k_{jz})^\top$  ( $j = p, s, i$ ) についての積分を  $(\mathbf{k}_j, \omega_j)^\top$  に変数変換する. このとき, SVEA から

$$k_{jz} := \sqrt{k_j^2(\omega_j) - \|\mathbf{k}_j\|^2} \simeq k_j(\omega_j) - \frac{\|\mathbf{k}_j\|^2}{2k_j(\omega_j)} \quad (j = p, s, i) \quad (\text{B.4})$$

の関係にあるので<sup>\*1</sup>, 偏導関数  $\partial k_{jz}/\partial \omega_j$  と生成演算子  $\hat{a}_j(\vec{k}_j)$  は式 (B.4) よりも高次の導関数を無視すると, 次のようになる [44]:

$$\frac{\partial k_{jz}}{\partial \omega_j} \simeq v_g^{-1}(\omega_j), \quad \hat{a}_j^\dagger(\vec{k}_j) \simeq v_g^{+1/2}(\omega_j) \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{k}_j; \omega_j). \quad (\text{B.5})$$

よって, 式 (B.2) を変数変換し, 結晶内の横空間および伝搬距離について積分すると

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{NL}}(t) = & i\hbar \sum_{m:\text{odd}} \frac{\sqrt{2^3} (2\pi)^5 D L \sqrt{I_p}}{m\pi c} d_{\text{eff}} \int_0^\infty \frac{d\omega_s}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{d\omega_i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \\ & \times \int_0^\infty \frac{d\omega_p}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{\omega_s \omega_i}{n(\omega_s) n(\omega_i) v_g(\omega_p)}} e^{-i\Delta\omega t} \right. \\ & \left. \times \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_z L}{2}\right) \tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) S_p(\omega_p) \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}_s; \omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_i; \omega_i) + \text{h.c.} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

<sup>\*1</sup> ポンプ光がパルス波である場合は, 群速度の分散も考慮する必要がある [24]:

$$k_{jz} \simeq k_j(\omega_j) + \frac{\Omega_j}{v_g(\omega_j)} + \frac{1}{2} G_j \Omega_j^2 - \frac{\|\mathbf{k}_j\|^2}{2k_j(\omega_j)}. \quad (j = p, s, i)$$

ただし,  $\Omega_j := \omega_j - \omega_{j0}$  ( $\Omega \ll \omega_{j0}$ ) はエネルギー保存則を満たす中心周波数  $\omega_{j0}$  からのずれとし,  $G := \partial[v_g^{-1}(\omega_j)]/\partial\omega_j$  は群速度分散 (Group Velocity Dispersion; GVD) とした [24].

を得る. ただし,  $\text{sinc}(x) := \sin(x)/x$  は sinc 関数であり, ポンプ光の横波数と角周波数は互いに独立していると仮定し, ポンプ光の電場  $\tilde{E}(\vec{k}_p)$  は光強度を  $I_p$ , 焦点面での複素振幅分布の Fourier 変換を  $\tilde{u}_p(\mathbf{k}_p)$ , スペクトルを  $S_p(\omega_p)$  として分解した:

$$\tilde{E}(\vec{k}_p) = \sqrt{I_p} \tilde{u}_p(\mathbf{k}_p) S_p(\omega_p). \quad (\text{B.7})$$

また, 結晶の横断面の大きさ  $D$  は集光された非線形光学結晶中のビーム横断面積よりも十分大きいため

$$\int_D d\mathbf{r} e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \simeq (2\pi)^2 \delta[\mathbf{k}_p - (\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i)] \quad (\text{B.8})$$

と Dirac のデルタで近似した. これにより, ポンプ光の横波数  $\mathbf{k}_p$  での積分は直ちに実行され, 被積分関数の変数を  $\mathbf{k}_p \rightarrow \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i$  に変更すれば良い.

### B.1.2 自発パラメトリック下方変換による 2 光子状態ベクトル

SPDC では, 初期状態 (B.1) から 2 次非線形相互作用により, ポンプ光の横空間分布と周波数分布に応じてシグナル光子とアイドラ光子が生成される. 2 光子対の生成確率は十分に小さいため, 2 次非線形相互作用による Hamiltonian  $\hat{H}_{\text{NL}}(t)$  は十分に小さいといえる. したがって, 時間依存する 1 次摂動として考えることができ, 2 光子対が現れる 1 次の項のみに着目した状態  $|\psi_{\text{SPDC}}\rangle$  は式 (B.6) から次のようになる [43]:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{SPDC}}\rangle &\simeq \frac{1}{i\hbar} \int_0^T dt \hat{H}_{\text{NL}}(t) |\psi(0)\rangle \\ &= \tilde{N} \int_0^\infty \frac{d\omega_s}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega_i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \omega_s, \omega_i) |\mathbf{k}_s, \omega_s; \mathbf{k}_i, \omega_i\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

ただし, QPM が満たされる分極反転非線形光学結晶による整数  $m$  は唯一つとし,  $\tilde{N}$  は正規化  $\langle \psi_{\text{SPDC}} | \psi_{\text{SPDC}} \rangle = 1$  のための比例係数とし,  $T$  は非線形光学結晶を通過する時間,  $|\mathbf{k}_s, \omega_s; \mathbf{k}_i, \omega_i\rangle$  ( $:= \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}_s; \omega_s) |\text{vac}_s \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}_i; \omega_i) |\text{vac}_i$ ) は横波数  $(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  の 2 光子対を 1 対生成する状態ベクトルとした. 関数  $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \omega_s, \omega_i)$  は次のように与えた:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \omega_s, \omega_i) &:= \int_0^\infty \frac{d\omega_p}{2\pi} \sqrt{v_g^{-1}(\omega_p)} S_p(\omega_p) e^{i\Delta\omega T/2} \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega T}{2}\right) \text{sinc}\left(\frac{\Delta k_z L}{2}\right) \\ &\quad \times \prod_{j=s,i} \sqrt{\frac{\omega_j}{n(\omega_j)}} \tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

ただし, 縦波数の QPM からのずれ  $\Delta k_z$  は式 (B.4) から

$$\Delta k_z = \Delta k - \left( \frac{\|\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p} - \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} - \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \right) \quad (\text{B.11})$$

と表わされる [44]. 式 (B.11) で用いた  $\Delta k$  ( $:= k_p - (k_s + k_i + mk_c)$ ) は QPM からのずれである.

ここで, ポンプ光のスペクトルは LD で発振することを想定すると狭帯域と仮定できる. このとき,  $\omega_p$  についての積分は被積分関数は定数と見做せ, スペクトル  $S_p(\omega_p)$  に対して  $\omega_p \gg \Delta\omega$  を想定しているため  $\Delta\omega T \simeq 0$  といえる. したがって, 次のように簡単化できる:

$$\begin{aligned} & \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \omega_s, \omega_i) \\ & \simeq \frac{\Delta\omega_p}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega_s\omega_i}{v_g(\omega_s + \omega_i)n(\omega_s)n(\omega_i)}} S_p(\omega_s + \omega_i) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta k_z L}{2}\right) \tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

ただし,  $\Delta\omega_p$  はポンプ光の角周波数幅である. とくに, スペクトル  $S_p(\omega_p)$  が Gauss 分布であるならば  $\Delta\omega_p$  は  $1/e^2$  幅とすれば良い. また, 縦波数の QPM からのずれは, 波数が QPM(3.6) を満たすなら

$$\Delta k_z \simeq -\left(\frac{\|\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p} - \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} - \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i}\right). \quad (\text{B.13})$$

とできる. このとき, 式 (B.12) の関数  $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \omega_s, \omega_i)$  は平方根の項を除けば, ポンプ光の分布と結晶の大きさによって決まる関数といえる.

### B.1.3 単色の 2 光子状態ベクトル

より強い条件として, ポンプ光と 2 光子対が十分狭帯域でスペクトルが殆ど Dirac のデルタとなる場合\*2,  $\omega_s, \omega_i$  による積分は簡単に計算でき, 次のように表わせる:

$$|\psi_{\text{SPDC}}\rangle = \tilde{N} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) |\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\rangle \quad (\text{B.14})$$

$\tilde{N}$  は関数  $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  に現れなかった定数をまとめた比例係数で, 関数  $\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  は

$$\Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) := e^{-\alpha\Delta k_z L/2} \tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) \quad (\text{B.15})$$

であり, 簡単のために  $\operatorname{sinc}(x^2) \simeq \exp(-\alpha x^2)$  で Gauss 関数に近似し, 実係数  $\alpha$  は  $\alpha = 0.718$  とした [46].  $\Delta k_z$  は式 (B.13) で与えられた式とした.

\*2 十分狭帯域な BPF を通すことによっても実現できる.

### B.1.4 単色で波数が縮退した 2 光子状態ベクトル

簡単のために、2 光子対の波数が  $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$  で縮退していると仮定すると式 (B.13) は次のように簡単になる：

$$\Delta k_z \simeq \frac{\|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p}. \quad (\text{B.16})$$

つまり、非線形光学結晶が有限であることによる QPM の許容は、光子対の横波数の差  $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  として現れることを意味する。横空間で式 (B.16) を解釈すると、QPM からの許容は光子対同士の生成位置のずれに相当する。

## B.2 生成された 2 光子対の伝搬

本節では、生成された 2 光子対を各伝搬距離  $\mathbf{z} := (z_s, z_i)^\top$  での横波数空間および横断面上における 2 光子状態ベクトルを求める。付録 B.3 では 3 次元空間での 2 光子状態ベクトルを求め、付録 B.4 では 2 次元平面の場合について述べる。

## B.3 3 次元空間における 2 光子対の伝搬距離に対する 2 光子状態ベクトル

SPDC により生成された 2 光子対の状態ベクトル (B.14) を、互いに独立に  $\mathbf{z} := (z_s, z_i)^\top$  伝搬させる (図 4.1) と、自由空間中の伝搬なので

$$\begin{aligned} |\psi(\mathbf{z})\rangle &:= \hat{U}_s^p(z_s) \hat{U}_i^p(z_i) \hat{U}_s(z_s) \hat{U}_i(z_i) |\psi_{\text{SPDC}}\rangle \\ &= \tilde{N} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \\ &\quad \times \exp\left[-i \frac{z_s}{2(k_s/n_s)} \|\frac{\mathbf{k}_s}{n_s}\|^2\right] \exp\left[-i \frac{z_i}{2(k_i/n_i)} \|\frac{\mathbf{k}_i}{n_i}\|^2\right] e^{i[(k_s/n_s)z_s + (k_i/n_i)z_i]} |\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\rangle \\ &= \tilde{N} e^{i(k_s z_s/n_s + k_i z_i/n_i)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \\ &\quad \times \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \exp\left(-i \left[ \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} \frac{z_s}{n_s} + \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \frac{z_i}{n_i} \right]\right) |\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

で与えられる。ただし、右辺第 2 行目では、自由空間中の伝搬を表わすために波数を屈折率で除した。

\*2,

\*2 分極反転型非線形光学結晶を用いる場合は、QPM により  $k_p = k_s + k_i + mk_c$  となるため、反転波数  $k_c$  も考慮する必要があるが、分極反転周期はポンプ光の波長に対して十分長く設計するため  $k_c$  による波数は十分無視することができる。

状態ベクトル  $|\psi(z)\rangle$  は、伝搬距離  $(z_s, z_i)$  における 1 対の光子対の生成を表わしている。一方、横波数  $(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  をもつ 1 対の光子対を計数する状態ベクトルは  $|\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\rangle$  で与えられ、式 (B.17) に対して内積をとると、系の状態を表わす  $|\psi(z)\rangle$  から横波数  $(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  の光子対が現れる確率振幅、つまり 2 光子波動関数  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z)$  が得られる：

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z) &:= \langle \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i | \psi(z) \rangle \\ &= \tilde{N} e^{i(k_s z_s / n_s + k_i z_i / n_i)} \Phi(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \exp\left(-i \left[ \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2 z_s}{2k_s n_s} + \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2 z_i}{2k_i n_i} \right]\right).\end{aligned}\quad (\text{B.18})$$

一方、式 (B.17) に対して横座標  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  上で 1 対の光子対を計数する状態ベクトル

$$|\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i)} |\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\rangle \quad (\text{B.19})$$

で内積をとると、系の状態を表わす  $|\psi(z)\rangle$  から横座標  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i)$  の光子対が現れる確率振幅、すなわち 2 光子波動関数  $\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z)$  が得られる：

$$\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z) := \langle \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i | \psi(z) \rangle = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z)](\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i). \quad (\text{B.20})$$

## B.4 2次元空間における 2光子対の伝搬距離に対する 2光子状態ベクトル

式 (B.18) および式 (B.16) から、2 光子波動関数  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z)$  は、横波数  $k_x, k_y$  に対して直積となっている。つまり、 $k_y$  方向について無視すれば、2次元平面において SPDC で生成した 2 光子対の伝搬距離操作も行なうことができることを示唆している。したがって、 $k_y$  について無視した 2 光子波動関数  $\tilde{\psi}(k_{sx}, k_{ix}; z)$  を考えることができ、式 (B.18) および式 (B.16) から

$$\tilde{\psi}(k_{sx}, k_{ix}; z) = \tilde{N} e^{i(k_s z_s / n_s + k_i z_i / n_i)} \Phi(k_{sx}, k_{ix}) \exp\left(-i \left[ \frac{k_{sx}^2 z_s}{2k_s n_s} + \frac{k_{ix}^2 z_i}{2k_i n_i} \right]\right), \quad (\text{B.21})$$

$$\Phi(k_{sx}, k_{ix}) := \frac{(k_{sx} - k_{ix})^2}{2k_p} \quad (\text{B.22})$$

と記述される。また、横空間では

$$\tilde{\psi}(x_s, x_i; z) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}(k_{sx}, k_{ix}; z)](x_s, x_i; z) \quad (\text{B.23})$$

とすれば良い。

3次元で行なった SPDC を 2次元で行なう利点は、生成した 2 光子対の次元が  $3 \times 2 = 6$  次元から  $2 \times 2 = 4$  次元と 2次元分圧縮でき、4次元となったことにより 1次元分だけ 1つ条件を加えれば ( $z_s - z_i$  方向に伝搬など)、3次元空間で可視化することができる。

## 付録 C

# 横空間における 2 光子波動関数の導出

本章では、横空間における SPDC により生成された光子対の 2 光子波動関数  $\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z})$  の導出を行なう。付録 C.1 では、光子対の波数がほぼ等しいときの 2 光子波動関数を導出する。付録 C.2 は、付録 C.1 の結果から一般の場合の 2 光子波動関数を導出する。

### C.1 光子対の波数がほぼ等しいときの 2 光子波動関数

#### C.1.1 光子対の波数が縮退しているときの 2 光子波動関数の導出

光子対の波数がほぼ等しい、つまり  $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$  のとき  $\Delta k_z$  は式 (B.16) で表わされる。さらに、ポンプ光の複素振幅分布  $u_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i)$  を  $LG_{l,p}$  とすると、

$$\tilde{u}_p(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i) = \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, 0) \quad (\text{C.1})$$

と表わされる。このときの横波数空間における 2 光子波動関数は、式 (C.1) を式 (B.18) に代入した式となり、モード番号を明記した  $\tilde{\psi}_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \mathbf{z})$  と表記する。また、比例係数も  $\tilde{N}_{l,p}$  とする。ただし、 $\tilde{N}_{l,p}$  による正規化は付録 D で述べる。しかし、2 光子は光子検出器で光子の位置を通常は測定するため、横波数空間上でなく横断面  $\mathbf{r}$  での 2 光子波動関数を求める必要がある。2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z})$  は、(B.20) から  $\tilde{\psi}_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; \mathbf{z})$  の逆 Fourier 変換なので

$$\begin{aligned} \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) = & \tilde{N}_{l,p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, 0) \exp\left(-\frac{\alpha L \|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{4k_p}\right) \\ & \times \exp\left(-i \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2 z_s}{2k_s n_s}\right) \exp\left(-i \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2 z_i}{2k_i n_i}\right) e^{+i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s / n_s + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i / n_i)} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

で与えられる。ただし、屈折率を  $n_j := n(\omega_j)$  ( $j = p, s, i$ ) と省略し、平面波成分は干渉計でないときはグローバル位相となるため無視した。付録 D と同様に横波数  $\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i$  を  $\mathbf{k}_\pm$  に座

標変換し、内積が  $\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i = \mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_+ + \mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}_+$  となるように横座標  $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i$  を  $\mathbf{r}_\pm$  に座標変換すると

$$\mathbf{k}_\pm := \mathbf{k}_s \pm \mathbf{k}_i, \quad \mathbf{r}_\pm := \frac{\mathbf{r}_s/n_s \pm \mathbf{r}_i/n_i}{2}$$

と記述できる．座標変換後の 2 光子波動関数は次のように整理される：

$$\begin{aligned} \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) &= \tilde{N}_{l,p} \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0) e^{i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_+} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\alpha L}{k_p} \|\mathbf{k}_-\|^2\right) \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{z_s}{2n_s k_s} \frac{\|\mathbf{k}_+\|^2 + \|\mathbf{k}_-\|^2 + 2\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{k}_-}{4}\right) \\ &\quad \times \exp\left(-i \frac{z_i}{2n_i k_i} \frac{\|\mathbf{k}_+\|^2 + \|\mathbf{k}_-\|^2 - 2\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{k}_-}{4}\right) e^{i\mathbf{k}_- \cdot \mathbf{r}_-}. \end{aligned}$$

ただし、横波数の積分での変数変換で Jacobian により係数が  $1/4$  となることを用いた．簡単のために Gauss 関数の項および指数関数の項の係数を

$$A := \frac{\alpha L}{k_p} =: \frac{w_-^2}{2}, \quad B := \frac{1}{2} \left( \frac{z_s}{n_s k_s} + \frac{z_i}{n_i k_i} \right) =: \frac{2z_+}{k_p}, \quad (\text{C.3})$$

$$B' := \frac{1}{2} \left( \frac{z_s}{n_s k_s} - \frac{z_i}{n_i k_i} \right) =: \frac{2z_-}{k_p}, \quad C := i \frac{2}{k_p} q_+(z_+) \quad (\text{C.4})$$

とする．ただし、係数  $C$  での  $q$  パラメータは式 (D.3) を用いて

$$z_{\text{Rp}} := \frac{1}{2} k_p \left( \frac{w_0}{n_p} \right)^2, \quad z_{\text{Rs-}} := \frac{1}{2} k_s w_-^2, \quad z_{\text{Ri-}} := \frac{1}{2} k_i w_-^2, \quad z_{\text{Rp-}} := \frac{1}{2} k_p w_-^2, \quad (\text{C.5})$$

$$q_s(z_s) := \frac{z_s}{n_s} - i z_{\text{Rs-}}, \quad q_i(z_i) := \frac{z_i}{n_i} - i z_{\text{Ri-}}, \quad (\text{C.6})$$

$$q_\pm(z_\pm) := \frac{1}{2} \left[ \frac{k_p/2}{k_s} q_s(z_s) \pm \frac{k_p/2}{k_i} q_i(z_i) \right] = \frac{q_s(z_s) \pm q_i(z_i)}{2} = z_\pm - i z_{\text{R}\pm}, \quad (\text{C.7})$$

$$z_\pm := \frac{z_s/n_s \pm z_i/n_i}{2}, \quad z_{\text{R}\pm} := \frac{z_{\text{Rs-}} \pm z_{\text{Ri-}}}{2} \quad (\text{C.8})$$

で定義した．2 光子波動関数は

$$\begin{aligned} \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) &= \frac{\tilde{N}_{l,p}}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0) \exp\left(-i \frac{B \|\mathbf{k}_+\|^2}{4}\right) e^{i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_+} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^2} \exp\left(-\frac{1}{4} C \|\mathbf{k}_-\|^2\right) \exp\left[i\mathbf{k}_- \cdot \left(\mathbf{r}_- - \frac{B'}{2} \mathbf{k}_+\right)\right] \end{aligned}$$

となる．

$\mathbf{k}_-$  に関する積分は Gauss 関数の Fourier 変換と見做せる． $\mathbf{k}_-$  について Fourier 積分を



実行して整理すると

$$\begin{aligned}
\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) &= \frac{\tilde{N}_{l,p}}{4\pi C} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0) \exp\left(-i\frac{B\|\mathbf{k}_+\|^2}{4}\right) e^{i\mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{r}_+} \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{1}{C} \left\| \mathbf{r}_- - \frac{B'}{2} \mathbf{k}_+ \right\|^2\right) \\
&= \frac{\tilde{N}_{l,p}}{4\pi C} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}_-\|^2}{C}\right) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0) \\
&\quad \times \exp\left[-i\frac{\|\mathbf{k}_+\|^2}{2k_p} \left(\frac{k_p B}{2} - i\frac{k_p B'^2}{2C}\right)\right] \exp\left[i\mathbf{k}_+ \cdot \left(\mathbf{r}_+ - i\frac{B'}{C} \mathbf{r}_-\right)\right]
\end{aligned}$$

を得る.

さらに、係数を整理するために係数  $D$  を

$$D := -i\frac{k_p}{2}C \quad (\text{C.9})$$

と定義し、他方の  $\mathbf{k}_+$  についての積分を実行すると

$$\begin{aligned}
\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) &= \frac{\tilde{N}_{l,p}}{4\pi C} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}_-\|^2}{C}\right) u_{l,p}^{\text{LG}}\left(\mathbf{r}_+ - i\frac{B'}{C} \mathbf{r}_-, \frac{k_p B}{2} - i\frac{k_p B'^2}{2C}\right) \\
&= -\frac{ik_p \tilde{N}_{l,p}}{2\pi D} \exp\left(ik_p \frac{\|\mathbf{r}_-\|^2}{2D}\right) u_{l,p}^{\text{LG}}\left(\mathbf{r}_+ - i\frac{B'}{C} \mathbf{r}_-, \frac{k_p B}{2} - i\frac{k_p B'^2}{2C}\right) \\
&= \frac{\tilde{N}_{l,p}}{\sqrt{2\pi w_-}} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_+) u_{l,p}^{\text{LG}}\left(\mathbf{r}_+ - i\frac{B'}{C} \mathbf{r}_-, \frac{k_p}{2} \left(B - i\frac{B'^2}{C}\right)\right)
\end{aligned}$$

を得る. ただし、最後の行で LG ビームの定義式 (2.8) を用いた.

最後に、正規化係数を  $N_{l,p}$  としてまとめ、LG ビームの変数を整理すると

$$N_{l,p} := \frac{1}{\sqrt{2\pi w_-}} \tilde{N}_{l,p}, \quad i\frac{B'}{C} = \frac{z_-}{q_+(z_+)}, \quad B - i\frac{B'^2}{C} = \frac{2}{k_p} \left[ z_+ - \frac{z_-^2}{q_+(z_+)} \right]$$

となる. また、LG ビームの項の変数に対して有効横座標  $\mathbf{r}_{\text{eff}}$  と有効伝搬距離  $z_{\text{eff}}$  を

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} := \mathbf{r}_+ - \frac{z_-}{q_+(z_+)} \mathbf{r}_-, \quad z_{\text{eff}} := z_+ - \frac{z_-^2}{q_+(z_+)} \quad (\text{C.10})$$

と置けば、2 光子波動関数は

$$\therefore \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_+) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}) \quad (\text{C.11})$$

のように整理される.

## C.2 横空間上での 2 光子波動関数

光子対の波数が縮退していないとき  $\Delta k_z$  は式 (B.13) で表わされる. 式 (C.11) の結果を流用するために式 (B.13) を予め

$$\begin{aligned}\Delta k_z &\simeq - \left( \frac{\|\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p} - \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} - \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \right) \\ &= \frac{\|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p} + \left( \varepsilon_s \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} + \varepsilon_i \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

と置く. ただし, 光子対の縮退波数  $k_p/2$  からのずれの割合として

$$\varepsilon_j := \frac{k_p/2 - k_j}{k_p/2} \quad (j \in \{s, i\})$$

を用いた. このときの横空間における 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z})$  は, 式 (C.11) および式 (D.3) から

$$\begin{aligned}\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) &= \tilde{N}_{l,p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, 0) \exp\left(-\frac{\alpha L \|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{4k_p}\right) \\ &\quad \times \exp\left[-i \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} \left(\frac{z_s}{n_s} - i \frac{\varepsilon_s \alpha L}{2}\right)\right] \exp\left[-i \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \left(\frac{z_i}{n_i} - i \frac{\varepsilon_i \alpha L}{2}\right)\right] \\ &\quad \times e^{+i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s/n_s + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i/n_i)} \\ &= \tilde{N}_{l,p} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, 0) \exp\left(-\frac{\alpha L \|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{4k_p}\right) \\ &\quad \times \exp\left[-i \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} \left(\frac{z_s}{n_s} - i \varepsilon_s \frac{z_{\text{Rp-}}}{2}\right)\right] \exp\left[-i \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \left(\frac{z_i}{n_i} - i \varepsilon_i \frac{z_{\text{Rp-}}}{2}\right)\right] \\ &\quad \times e^{+i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_s/n_s + \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_i/n_i)}\end{aligned}\quad (\text{C.13})$$

で与えられる. 式 (C.2) と式 (C.13) を比較すると, 伝搬距離に  $-i\varepsilon_j z_{\text{Rp-}}/2$  ( $j \in \{s, i\}$ ) のみが付与され, 式 (C.3) と式 (C.4) の係数  $B, B', C$  および式 (C.6) と, 式 (C.7), 式 (C.8) の  $q$  パラメータと Rayleigh 長は

$$B := \frac{2(z_+ - iz_{\text{R}\varepsilon+})}{k_p}, \quad B' := \frac{2(z_- - iz_{\text{R}\varepsilon-})}{k_p}, \quad z_{\text{R}\varepsilon\pm} := \left(\frac{\varepsilon_s}{1 - \varepsilon_s} \pm \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i}\right) \frac{z_{\text{Rp-}}}{4}, \quad (\text{C.14})$$

$$C := i \frac{2}{k_p} q_+(z_+), \quad q_{\pm}(z_{\pm}) := \frac{1}{2} \left[ \frac{k_p/2}{k_s} q_s(z_s) \pm \frac{k_p/2}{k_i} q_i(z_i) \right] = z_{\pm} - iz_{\text{R}\pm}, \quad (\text{C.15})$$

$$z_{\pm} := \frac{1}{2} \left( \frac{z_s/n_s}{1 - \varepsilon_s} \pm \frac{z_i/n_i}{1 - \varepsilon_i} \right), \quad z_{\text{R}\pm} := \frac{1}{2} \left( \frac{z_{\text{Rs-}} + \varepsilon_s z_{\text{Rp-}}/2}{1 - \varepsilon_s} \pm \frac{z_{\text{Ri-}} + \varepsilon_i z_{\text{Rp-}}/2}{1 - \varepsilon_i} \right), \quad (\text{C.16})$$

$$q_j(z_j) := \frac{z_j}{n_j} - i \left( z_{\text{R}j-} + \varepsilon_j \frac{z_{\text{Rp-}}}{2} \right) \quad (j \in \{s, i\}) \quad (\text{C.17})$$

に再定義される。したがって、有効横座標  $\mathbf{r}_{\text{eff}}$  および有効伝搬距離  $z_{\text{eff}}$  は

$$\mathbf{r}_{\text{eff}} := \mathbf{r}_+ - \frac{z_- - iz_{\text{R}\varepsilon-}}{q_+(z_+)} \mathbf{r}_-, \quad z_{\text{eff}} := \left[ z_+ - \frac{z_-^2 - z_{\text{R}\varepsilon-}^2}{q_+(z_+)} \right] - i \left[ z_{\text{R}\varepsilon+} - \frac{2z_{\text{R}\varepsilon-}z_-}{q_+(z_+)} \right] \quad (\text{C.18})$$

に変更される。

以上の置き換えにより、2光子波動関数は形式的に式 (C.11) と一致する：

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_+) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}). \quad (\text{C.19})$$

### C.3 ポンプ光を2次元平面での分布とする光子対の波数がほぼ等しいときの2光子波動関数

2次元平面のみに着目したポンプ光でかつ、光子対の波数がほぼ等しい ( $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$ ) とし、ポンプ光の複素振幅分布  $u_p(k_{sx} + k_{ix})$  を  $\text{HG}_n$  とすると、

$$\tilde{u}_p(k_{sx} + k_{ix}) = \tilde{u}_n^{\text{HG}}(k_{sx} + k_{ix}, 0) \quad (\text{C.20})$$

と表わされる。付録 C.1.1 でも述べたように、横波数でなく、横断面  $(x_s, x_i)$  での2光子波動関数に着目する。よって、式 (B.21) を逆 Fourier 変換し、付録 C.1.1 の導出方法と同様の手順で計算すると次の式を得る：

$$\psi_n(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}) = N_n u_0^{\text{HG}}(x_-, z_+) u_n^{\text{HG}}(x_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}) \quad (\text{C.21})$$

ただし、 $N_n$  は正規化定数、 $\text{HG}_0$  の項の波数は  $k_p$  で Rayleigh 長は  $z_{\text{R}+}$  であり、 $\text{HG}_n$  の項の波数も同様に  $k_p$  で Rayleigh 長は  $z_{\text{R}p}$  である。また、 $x_-, z_+, x_{\text{eff}}, z_{\text{eff}}$  は、3次元の LG ビームをポンプ光とした波動関数のときと同じである。

## 付録 D

# ポンプ光が Laguerre–Gaussian ビーム のときの正規化係数 $\tilde{N}_{l,p}$

本章では、 $\text{LG}_{l,p}$  を SPDC のポンプ光としたときの横波数空間上での 2 光子波動関数の正規化係数  $\tilde{N}_{l,p}$  を求める。付録 D.1 ではシグナル光子とアイドラ光子の角周波数が異なる場合における正規化係数を計算し、付録 D.2 ではシグナル光子とアイドラ光子の角周波数が縮退した場合における正規化係数を計算した。正規化係数  $\tilde{N}_{l,p}$  は、シミュレーションにおいて全確率が 1 となることを確かめる際に有用である。

### D.1 シグナル光子とアイドラ光子の角周波数が異なる場合

ポンプ光が LG ビームなので正規化係数は空間モード  $(l, p)$  に依存する可能性がある。そこで、本節では LG ビームがポンプ光のときの正規化係数  $\tilde{N}_{l,p}$  を計算する。ここでは計算の簡略化のため、シグナル光子とアイドラ光子の角周波数は唯一つ  $(\omega_s, \omega_i)$  と仮定する。このとき、確率密度  $P_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z_s, z_i)$  は式 (C.2) と縮退波数の条件を外した式 (B.13) により

$$\begin{aligned} P_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z_s, z_i) &:= |\tilde{\psi}_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z_s, z_i)|^2 \\ &= |\tilde{N}_{l,p}|^2 |\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, z = 0)|^2 \\ &\quad \times \exp\left(-\alpha L \left[ -\frac{\|\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i\|^2}{2k_p} + \frac{\|\mathbf{k}_s\|^2}{2k_s} + \frac{\|\mathbf{k}_i\|^2}{2k_i} \right]\right). \end{aligned}$$

と与えられる。横波数上の座標を  $(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$  から  $(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-)$  へと移すと次の式を得る：

$$\begin{aligned} P_{l,p}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-; z_s, z_i) &= |\tilde{N}_{l,p}|^2 |\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0)|^2 \\ &\quad \times \exp\left[ \frac{1}{4} w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 - \frac{1}{8} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 (\|\mathbf{k}_+\|^2 + \|\mathbf{k}_-\|^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{k}_- \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

ただし、座標変換および座標変換後のビーム径を  $w_+, w_-$  とし、

$$\mathbf{k}_\pm := \mathbf{k}_s \pm \mathbf{k}_i, \quad (\text{D.2})$$

$$w_+ := \sqrt{2}w_0, \quad w_- := \sqrt{\frac{2\alpha L}{k_p}} \quad (\text{D.3})$$

で与えた。

横波数空間全体で積分すると 1 になる正規化条件を与えると、

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} P_{l,p}(\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i; z_s, z_i) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^2} P_{l,p}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-; z_s, z_i) = 1$$

となる。

まずは  $\mathbf{k}_-$  について積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^2} \exp \left[ -\frac{1}{8} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \|\mathbf{k}_-\|^2 - \frac{1}{4} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} - \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \mathbf{k}_+ \cdot \mathbf{k}_- \right] \\ &= \frac{4}{\pi k_p w_-^2 (1/k_s + 1/k_i)} \exp \left[ \frac{1}{4} \frac{k_p w_-^2 (k_s - k_i)^2}{4 k_s k_i (k_s + k_i)} \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

を得る。

次に、残りの  $\mathbf{k}_+$  についての積分を行なう。式 (D.1) と式 (D.4) から、被積分関数の変数のある項のみに着目すると

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} |\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0)|^2 \exp \left[ \frac{1}{4} w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 - \frac{1}{8} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{1}{4} \frac{k_p w_-^2 (k_s - k_i)^2}{4 k_s k_i (k_s + k_i)} \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

と記述できる。LG ビームの Fourier 変換が式 (A.27) で与えられるので、式 (D.5) の被積分関数は  $\|\mathbf{k}_+\|$  のみの関数となる。したがって、式 (D.5) は

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} |\tilde{u}_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_+, 0)|^2 \exp \left[ \frac{1}{4} w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 - \frac{1}{8} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{1}{4} \frac{k_p w_-^2 (k_s - k_i)^2}{4 k_s k_i (k_s + k_i)} \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \\ &= \frac{\pi w_0^2 (C_{l,p}^{\text{LG}})^2}{2} \int_0^\infty d\|\mathbf{k}_+\| \|\mathbf{k}_+\| \left( \frac{w_0^2 \|\mathbf{k}_+\|^2}{2} \right)^{|l|} \left[ L_p^{|l|} \left( \frac{w_0^2 \|\mathbf{k}_+\|^2}{2} \right) \right]^2 \\ & \times \exp \left( -\frac{1}{2} w_0^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 \right) \exp \left[ \frac{1}{4} w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 - \frac{1}{8} \frac{k_p}{2} \left( \frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i} \right) w_-^2 \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{1}{4} \frac{k_p w_-^2 (k_s - k_i)^2}{4 k_s k_i (k_s + k_i)} \|\mathbf{k}_+\|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

となる。ここで、変数変換と被積分関数の Gauss 関数の項をまとめて整理すると

$$\Pi := w_0^2 \|\mathbf{k}_+\|^2, \quad \Sigma := \frac{w_-^2}{w_+^2} \left( \frac{w_+^2 - w_-^2}{w_-^2} + \frac{k_p}{k_s + k_i} \right) \quad (\text{D.7})$$

を得る. 式 (D.6) に代入すると

$$\begin{aligned} & \frac{\pi(C_{l,p}^{\text{LG}})^2}{4 \times 2^{|l|}} \int_0^\infty d\Pi \Pi^{(|l|+1)-1} \exp\left(\frac{-\Sigma}{2}\Pi\right) L_p^{|l|}\left(\frac{\Pi}{2}\right) L_p^{|l|}\left(\frac{\Pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi(C_{l,p}^{\text{LG}})^2}{4 \times 2^{|l|}} \binom{p+|l|}{p}^2 \frac{|l|!}{(-\Sigma/2)^{|l|+1}} F_2\left(|l|+1; -p, -p; |l|+1; |l|+1; -\frac{1}{\Sigma}, -\frac{1}{\Sigma}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

を得る [47, 48]. ただし,  $F_2(a; b_1, b_2; c_1, c_2; x, y)$  は 2 変数に対する Appell 超幾何級数である [48, 49].

以上より, 式 (D.1) と式 (D.4), 式 (D.8) から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_+}{(2\pi)^2} \frac{d\mathbf{k}_-}{(2\pi)^2} P_{l,p}(\mathbf{k}_+, \mathbf{k}_-; z_s, z_i) \\ &= |\tilde{N}_{l,p}|^2 \frac{1}{2\pi k_p w_-^2} \left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i}\right)^{-1} \binom{p+|l|}{p} \frac{|l|!}{\Sigma^{|l|+1}} F_2\left(|l|+1; -p, -p; |l|+1; |l|+1; -\frac{1}{\Sigma}, -\frac{1}{\Sigma}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので, 正規化定数  $\tilde{N}_{l,p}$  は次のようになる:

$$\therefore \tilde{N}_{l,p} = C_{l,p}^{\text{LG}} w_- \sqrt{\frac{\pi k_p \Sigma^{|l|+1}}{F_2(|l|+1; -p, -p; |l|+1; |l|+1; -\Sigma^{-1}, -\Sigma^{-1})} \left(\frac{1}{k_s} + \frac{1}{k_i}\right)}. \quad (\text{D.9})$$

## D.2 シグナル光子とアイドラ光子の角周波数が縮退している場合

式 (D.9) はシグナル光子とアイドラ光子の角周波数が異なる場合であるが, 光子対を用いた実験では通常, 縮退した光子対を用いる. つまり,  $k_s = k_i (=: k)$  の場合を考える. このとき, 式 (D.9) は

$$\therefore \tilde{N}_{l,p} = C_{l,p}^{\text{LG}} \sqrt{2\pi} w_- \sqrt{\frac{k_p}{k} \frac{\Sigma^{|l|+1}}{F_2(|l|+1; -p, -p; |l|+1; |l|+1; -\Sigma^{-1}, -\Sigma^{-1})}} \quad (\text{D.10})$$

となり, 式 (D.7) の係数  $\Sigma$  は

$$\Sigma = \frac{w_-^2}{w_+^2} \left( \frac{w_+^2 - w_-^2}{w_-^2} + \frac{k_p}{2k} \right) \quad (\text{D.11})$$

となり, 式 (D.7) の右辺の括弧中の第 3 項が消去される.

## 付録 E

# 光軸上の 2 光子波動関数と位相特異点発生

本章では、光軸上の 2 光子波動関数を求め、動径モードが高次の場合に位相特異点が現れることを見る。付録 E.1 では、光子対の波数が縮退  $k_s \simeq k_i$  している場合の光軸上の 2 光子波動関数および位相特異点発生を導出する。付録 E.2 では、一般の光子対の波数についての光軸上の 2 光子波動関数および位相特異点発生を導出する。

### E.1 光子対の波数がほぼ等しいときの光軸上の 2 光子波動関数

本節では、光子対の波数が縮退  $k_s \simeq k_i$  しているときの光軸上の 2 光子波動関数および位相特異点発生を導出する。

#### E.1.1 光子対の波数がほぼ等しいときの光軸上の 2 光子波動関数の導出

まず、2 光子波動関数は式 (C.11) で与えられた。光軸上で光子対を計数するため、 $\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$  とすると、2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  は

$$\psi_{l,p}(z) := \psi_{l,p}(\mathbf{r}_s = \mathbf{0}, \mathbf{r}_i = \mathbf{0}; z) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_+) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_{\text{eff}}) \quad (\text{E.1})$$

となる。

次に、式 (2.8) を 2 光子波動関数に代入するが、簡単のために

$$\begin{aligned} u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}, z) &= C_{l,p}^{\text{LG}} \left[ \frac{z_{\text{R}} \sqrt{2} r e^{i \text{sgn}(l)\theta}}{i w_0 (z - i z_{\text{R}})} \right]^{|l|} L_p^{|l|} \left[ \frac{2r^2}{w^2(z)} \right] \left[ -\frac{z + i z_{\text{R}}}{z - i z_{\text{R}}} \right]^p \\ &\quad \times \frac{z_{\text{R}}}{i w_0} \frac{1}{z - i z_{\text{R}}} \exp \left[ i k \frac{r^2}{2(z - i z_{\text{R}})} \right] \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

と変形した式を用いると、2 光子波動関数は

$$\begin{aligned}
\psi_{l,p}(z) &= N_{l,p} C_{0,0}^{\text{LG}} \frac{z_{\text{R}+}}{i\sqrt{2z_{\text{R}+}/k_{\text{p}}}} \frac{1}{z_+ - iz_{\text{R}+}} \\
&\quad \times C_{l,p}^{\text{LG}} \left( \frac{z_{\text{R}p}}{iw_0} \frac{\sqrt{2}}{z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}} \right)^{|l|} L_p^{|l|}(0) \left[ \frac{z_{\text{eff}} + iz_{\text{R}p}}{z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}} \right]^p \frac{z_{\text{R}p}}{iw_0} \frac{1}{z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}} \\
&= N_{l,p} C_{0,0}^{\text{LG}} C_{l,p}^{\text{LG}} \frac{z_{\text{R}+}}{i\sqrt{2z_{\text{R}+}/k_{\text{p}}}} \left( \frac{\sqrt{2}z_{\text{R}p}}{iw_0} \right)^{|l|} \frac{z_{\text{R}p}}{iw_0} L_p^{|l|}(0) \\
&\quad \times \frac{1}{z_+ - iz_{\text{R}+}} \frac{1}{(z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p})^{|l|+1}} \left[ \frac{z_{\text{eff}} + iz_{\text{R}p}}{z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}} \right]^p
\end{aligned}$$

となる。ただし、方位角モード  $l$  が 0 でないときは、光軸上で常に波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  は 0 をとる。しかし、方位角モードが高次のときは光軸近傍で光子対を計数すると考えると、方位角モードによる  $r^{|l|} \exp(il\theta)$  の項は光軸近傍で位相変化を打ち消し合い、かつ伝搬距離  $z$  に依存しない。よって、本節では波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  の伝搬距離による複素数値の変化を求めているため、伝搬距離に依らない  $r^{|l|} \exp(il\theta)$  の寄与を無視した。

最後に、定数項を全てまとめて

$$N_{l,p}^z := N_{l,p} C_{0,0}^{\text{LG}} C_{l,p}^{\text{LG}} \frac{z_{\text{R}+}}{i\sqrt{2z_{\text{R}+}/k_{\text{p}}}} \left( \frac{\sqrt{2}z_{\text{R}p}}{iw_0} \right)^{|l|} \frac{z_{\text{R}p}}{iw_0} L_p^{|l|}(0) \quad (\text{E.3})$$

と置くと、光軸上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  は次の式のようにになる：

$$\therefore \psi_{l,p}(z) = N_{l,p}^z \frac{1}{z_+ - iz_{\text{R}+}} \frac{1}{(z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p})^{|l|+1}} \left[ \frac{z_{\text{eff}} + iz_{\text{R}p}}{z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}} \right]^p. \quad (\text{E.4})$$

### E.1.2 光子対の波数がほぼ等しいときの高次 LG ビームの項による位相特異点発生

光軸上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  は前項から式 (E.4) として与えられた。そこで本項では、式 (E.4) のゼロ点に着目する。本項により、ゼロ点  $z = z_0$  では式 (E.4) の右辺の  $(z_{\text{eff}} + iz_{\text{R}p})^p$  の項によって与えられ、ゼロ点は位相特異点である。

まず、ゼロ点の発生が  $(z_{\text{eff}} + iz_{\text{R}p})^p$  によって与えられることを示す。式 (E.4) の伝搬距離依存項に注意すると  $z_+, z_{\text{R}+}$  が実数であるため、伝搬距離  $z$  に依らず  $1/(z_+ - iz_{\text{R}+})$  の項は 0 にならない。  $z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p}$  もまた、  $z_{\pm}, z_{\text{R}\pm}, z_{\text{R}p}$  が実数であることと、式 (C.8) と式 (C.10) から

$$\begin{aligned}
z_{\text{eff}} - iz_{\text{R}p} &= z_+ - \frac{z_-^2}{z_+ + iz_{\text{R}+}} - iz_{\text{R}p} \\
&= z_+ \left( 1 - \frac{z_-^2}{z_+^2 + z_{\text{R}+}^2} \right) - i \left( z_{\text{R}p} + z_{\text{R}+} \frac{z_-^2}{z_+^2 + z_{\text{R}+}^2} \right)
\end{aligned}$$



となるため、伝搬距離  $z$  に依らず  $z_{\text{eff}} - iz_{\text{Rp}}$  は 0 にならない。

最後に  $z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}}$  の項について調べる。実際に、式 (C.8) と式 (C.10) から

$$\begin{aligned} z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}} &= z_+ - \frac{z_-^2}{z_+ - iz_{\text{R}+}} + iz_{\text{Rp}} \\ &= \frac{(z_+^2 - z_-^2 + z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+}) + iz_+(z_{\text{Rp}} - z_{\text{R}+})}{z_+ - iz_{\text{R}+}} \end{aligned}$$

となるため、実部および虚部が同時に 0 を取り得る。よって、ゼロ点を  $z = z_0 = (z_{s0}, z_{i0})^\top = (z_{+0}, z_{-0})^\top$  とすると

$$\begin{cases} z_{+0}^2 - z_{-0}^2 + z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+} = 0 \\ z_{+0}(z_{\text{Rp}} - z_{\text{R}+}) = 0 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

が満たすべき条件である。ここで、 $|z_+ - iz_{\text{R}+}| > 0$  を用いた。

式 (E.5) の第 2 式から、Rayleigh 長は正の定数なので  $z_{+0} = 0$  が直ちに得られる。このとき、式 (E.5) の第 1 式もまた直ちに

$$\therefore z_{-0} = \pm \sqrt{z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+}} \quad (\text{E.6})$$

を得る。 $z_{\text{R}+}$  は式 (C.8) から  $z_{\text{R}+} > 0$  なので、

$$\begin{pmatrix} z_{+0} \\ z_{-0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \sqrt{z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.7})$$

となる。式 (C.8) から

$$z_s = n_s(z_+ + z_-), \quad z_i = n_i(z_+ - z_-)$$

によって伝搬距離の座標変換を行なうことができ、 $(z_{+0}, z_{-0}) = (0, \pm \sqrt{z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+}})$  を代入すると

$$z_0 = \begin{pmatrix} z_{s0} \\ z_{i0} \end{pmatrix} = \pm \sqrt{z_{\text{Rp}}z_{\text{R}+}} \begin{pmatrix} n_s \\ -n_i \end{pmatrix}$$

となる。より簡潔に表わすために式 (C.5) と式 (C.8) を用いると、ゼロ点の要素  $z_{j0}$  ( $j = s, i$ ) は

$$z_{j0} = \pm n_j \sqrt{\frac{1}{2} k_p \left( \frac{w_0}{n_p} \right)^2 \times \frac{1}{2} \frac{k_p}{2} w_-^2} = \pm n_j \times \frac{1}{2} \frac{k_{p0}}{2} [(\sqrt{2}w_0) \times w_-], \quad (k_p =: n_p k_{p0})$$

となり、さらに式 (D.3) および相乗平均と相乗平均による Rayleigh 長を定義した

$$\bar{w} := \sqrt{w_+ w_-} = \sqrt{(\sqrt{2}w_0) \times w_-}, \quad \bar{z}_{\text{R}j} := \frac{1}{2} \frac{n_j k_{p0}}{2} \bar{w}^2, \quad (j = s, i) \quad (\text{E.8})$$

を考える。このとき、ゼロ点  $z_0$  は相乗平均の Rayleigh 長で現れる：

$$\therefore z_0 = \pm \begin{pmatrix} \bar{z}_{\text{R}s} \\ -\bar{z}_{\text{R}i} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

次に、式 (E.9) が位相特異点であることを示す。

式 (E.9) によるゼロ点  $z_0$  近傍を  $z = z_0 + \delta z$  とおき、 $\delta z$  は十分短い伝搬距離とする。

このとき、2 光子波動関数 (E.4) の項  $z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}}$  のみがゼロ点ではゼロとなることから、 $\delta$  を項  $z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}}$  のゼロ点からのずれとして高次項を無視すると

$$\delta := z_{\text{eff}} + iz_{\text{Rp}} \simeq \frac{[2z_{+0} + i(z_{\text{Rp}} - z_{\text{R}+})]\delta z_+ - 2z_{-0}\delta z_{-0}}{z_{+0} - iz_{\text{R}+}}$$

となる。ただし、

$$\delta z_{\pm 0} = \frac{\delta z_s/n_s \pm \delta z_i/n_i}{2} \quad (\text{E.10})$$

である。よって、2 光子波動関数 (E.4) は微小量  $\delta$  を用いると、高次項を無視して

$$\psi_{l,p}(z) \simeq (-1)^p N_{l,p}^z \frac{1}{z_{+0} - iz_{\text{Rp}} - 2} \frac{\delta^p}{(-2iz_{\text{Rp}})^{p+|l|+1}}$$

と近似できる。

ここで、ゼロ点からの微小長さ  $\epsilon (> 0)$  で  $(\delta z_+, \delta z_-) = (\epsilon \cos(z_\theta), \epsilon \sin(z_\theta))$  ( $z_\theta \in (-\pi, +\pi]$ ) となるようにゼロ点周りで一周すると微小量  $\delta$  は

$$\delta = \frac{1}{z_+ - iz_{\text{R}+}} \frac{c_1 \zeta^2 + c_2}{\zeta} \quad (\text{E.11})$$

と書ける。ただし、変数変換  $\zeta = e^{iz_\theta}$  を行ない、簡単のため式 (E.7) から  $z_{+0} = 0$  を用い、定数を

$$c_1 := i \left( z_{-0} + \frac{z_{\text{Rp}} - z_{\text{R}+}}{2} \right), \quad c_2 := -i \left( z_{-0} - \frac{z_{\text{Rp}} - z_{\text{R}+}}{2} \right)$$

とまとめた。このとき、 $\psi(\epsilon, \zeta) := \psi(z)$  と置き直すと

$$\psi_{l,p}(\epsilon, \zeta) \simeq c \left( \frac{c_1 \zeta^2 + c_2}{\zeta} \right)^p \quad (\text{E.12})$$

となる。ただし、係数を  $c$  でまとめた。

式 (G.7) から、偏角の原理を適用すると領域  $\{\zeta \mid |\zeta| < 1\}$  で式 (E.12) から極は  $P[\psi_{l,p}] = p$  であり、ゼロ点は式 (E.7) を適用して

$$N[\psi_{l,p}] = \begin{cases} 2p & \left( z_{-0} > 0 \text{かつ} 1 < \frac{z_{\text{Rp}}}{z_{\text{R}+}} \text{または} z_{-0} < 0 \text{かつ} 1 > \frac{z_{\text{Rp}}}{z_{\text{R}+}} \right) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

となる。したがって、ゼロ点  $z_0$  での位相特異点の次数は

$$N[\psi_{l,p}] - P[\psi_{l,p}] = \begin{cases} +p & \left( z_{-0} > 0 \text{かつ} 1 < \frac{z_{\text{Rp}}}{z_{\text{R}+}} \text{または} z_{-0} < 0 \text{かつ} 1 > \frac{z_{\text{Rp}}}{z_{\text{R}+}} \right) \\ -p & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (\text{E.13})$$

であり、符号の差はあるが  $\pm p$  次位相特異点となる。

## E.2 光軸上の 2 光子波動関数

本節では、光子対の波数が QPM のみで制限されるとき、光軸上の 2 光子波動関数および位相特異点発生を導出する。

### E.2.1 光軸上の 2 光子波動関数の導出

付録 C.2 から、形式的には式 (C.19) は式 (C.11) に一致するので、光軸上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(z)$  もまた式 (E.4) に一致する：

$$\psi_{l,p}(z) = N_{l,p}^z \frac{1}{z_+ - iz_{R+}} \frac{1}{(z_{\text{eff}} - iz_{R_p})^{|l|+1}} \left[ -\frac{z_{\text{eff}} + iz_{R_p}}{z_{\text{eff}} - iz_{R_p}} \right]^p. \quad (\text{E.14})$$

### E.2.2 高次 LG ビームの項による位相特異点発生

形式的に式 (C.11) と式 (C.19) に一致することから、ゼロ点もまた同様に  $z_{\text{eff}} + iz_{R_p}$  の項によって生成されるといえる。そこで、本項では  $z_{\text{eff}} + iz_{R_p}$  から与えられるゼロ点位置を導出する。 $z_{\text{eff}} + iz_{R_p}$  を式 (C.5) および式 (C.18) から

$$\begin{aligned} z_{\text{eff}} + iz_{R_p} &:= \left[ z_+ - \frac{z_-^2 - z_{R_{\varepsilon-}}^2}{q_+(z_+)} \right] + i \left[ (z_{R_p} + z_{R_{\varepsilon+}}) - \frac{2z_{R_{\varepsilon-}}z_-}{q_+(z_+)} \right] \\ &= \frac{z_+(z_+ - iz_{R+}) - (z_-^2 - z_{R_{\varepsilon-}}^2) + i(z_{R_p} + z_{R_{\varepsilon+}})(z_+ - iz_{R+}) - 2iz_{R_{\varepsilon-}}z_-}{q_+(z_+)} \\ &= \frac{[z_+^2 - z_-^2 + z_{R+}(z_{R_p} + z_{R_{\varepsilon+}}) + z_{R_{\varepsilon-}}^2] + i[(2z_{R_{\varepsilon+}} + z_{R_p})z_+ - 2z_{R_{\varepsilon-}}z_-]}{q_+(z_+)} \end{aligned}$$

と与えられる。実部と虚部それぞれで 0 とするので、ゼロ点  $z_0 = (z_{s0}, z_{i0})^T = (z_{+0}, z_{-0})^T$  は、全ての  $z_+ (\in \mathbb{R})$  に対して  $|q_+(z_+)| > 0$  に注意すると

$$z_{\text{eff}} + iz_{R_p} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_{+0}^2 - z_{-0}^2 + z_{R+}(z_{R_p} + z_{R_{\varepsilon+}}) + z_{R_{\varepsilon-}}^2 = 0 \\ (2z_{R_{\varepsilon+}} + z_{R_p})z_{+0} - 2z_{R_{\varepsilon-}}z_{-0} = 0 \end{cases} \quad (\text{E.15})$$

で与えられる。第 2 式より

$$z_{-0} = \frac{2z_{R_{\varepsilon+}} + z_{R_p}}{2z_{R_{\varepsilon-}}} z_{+0}.$$

よって、第 1 式は

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{2z_{R_{\varepsilon+}} + z_{R_p}}{2z_{R_{\varepsilon-}}} \right)^2 - 1 \right] z_{+0}^2 &= z_{R+}(z_{R_p} + z_{R_{\varepsilon+}}) + z_{R_{\varepsilon-}}^2 \\ z_{+0}^2 &= (2z_{R_{\varepsilon-}})^2 \frac{z_{R+}z_{R_p} + (z_{R_{\varepsilon+}}z_{R+} + z_{R_{\varepsilon-}}^2)}{(2z_{R_{\varepsilon+}} + z_{R_p})^2 - (2z_{R_{\varepsilon-}})^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、ゼロ点  $(z_{+0}, z_{-0})^T$  は

$$z_{+0} = \pm 2z_{R\varepsilon-}(1 - \varepsilon_R) \sqrt{\frac{z_{R+}}{z_{Rp}}} \quad z_{-0} = \pm (z_{Rp} + 2z_{R\varepsilon+})(1 - \varepsilon_R) \sqrt{\frac{z_{R+}}{z_{Rp}}}$$

で与えられる。ここで、縮退した波数とのずれによる係数  $\varepsilon_R$  を

$$\varepsilon_R := 1 - \sqrt{\frac{1 + [z_{R\varepsilon+}/z_{Rp} + z_{R\varepsilon-}^2/(z_{R+}z_{Rp})]}{(1 + 2z_{R\varepsilon+}/z_{Rp})^2 - (2z_{R\varepsilon-}/z_{Rp})^2}}$$

で定義した。シグナル光子とアイドラ光子の伝搬距離に置き換えると、ゼロ点  $z_0$  は

$$\begin{aligned} z_0 &= \pm \frac{2}{k_p}(1 - \varepsilon_R) \sqrt{\frac{z_{R+}}{z_{Rp}}} \begin{pmatrix} n_s k_s [z_{Rp} + 2(z_{R\varepsilon+} + z_{R\varepsilon-})] \\ -n_i k_i [z_{Rp} + 2(z_{R\varepsilon+} - z_{R\varepsilon-})] \end{pmatrix} \\ &= \pm (1 - \varepsilon_R) \begin{pmatrix} \bar{z}_{Rs} \\ -\bar{z}_{Ri} \end{pmatrix} \pm (1 - \varepsilon_R) \sqrt{\frac{z_{R+}}{z_{Rp}}} \begin{pmatrix} \varepsilon_s n_s z_{Rp-} \\ -\varepsilon_i n_i z_{Rp-} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

で与えられる。式 (E.9) と式 (E.16) を比べると、縮退した波数  $k_p/2$  からのずれにより、式 (E.16) の右辺第 1 項は  $\varepsilon_R$  だけずれる。一方、式 (E.16) の右辺第 2 項は、より高次のずれとして与えられる。ここで、 $\varepsilon_s \simeq \varepsilon_i \simeq 0$  となる縮退した波数  $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$  では、式 (E.9) に一致する。

## 付録 F

# 位相特異点上での横空間 2 光子波動関数

### F.1 位相特異点上での横空間 2 光子波動関数

付録 F では光軸上の 2 光子波動関数を求め、ある伝搬距離  $z = z_0$  では位相特異点となることを示した。本節では、付録 F の位相特異点  $z = z_0$  における横断面上の 2 光子波動関数  $\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z_0)$  を示す。

まず、式 (E.15) によって位相特異点  $z_0$  は与えられるので、式 (C.11) は次のようになる：

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; z_0) = N_{l,p} u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_{+0}) u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, -iz_{\text{Rp}}). \quad (\text{F.1})$$

ただし  $z_{+0}$  は位相特異点での伝搬距離で、縮退した波数  $k_s \simeq k_i \simeq k_p/2$  のときは  $z_{+0} = 0$  である (付録 E)。

次に、式 (F.2) の右辺第 3 項を LG ビームの定義式 (2.8) で展開すると

$$u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, z_{\text{eff}} = -iz_{\text{Rp}}) = \frac{C_{l,p}^{\text{LG}}}{w(-iz_{\text{Rp}})} \left[ \frac{\sqrt{2}r_{\text{eff}}}{w(-iz_{\text{Rp}})} \right]^{|l|} L_p^{|l|} \left[ \frac{2r_{\text{eff}}^2}{w^2(-iz_{\text{Rp}})} \right] \exp \left[ -\frac{r_{\text{eff}}^2}{w^2(-iz_{\text{Rp}})} \right] \\ \times \exp \left\{ i \left[ k \frac{r_{\text{eff}}^2}{2R(-iz_{\text{Rp}})} + l\theta_{\text{eff}} - (2p + |l| + 1)\chi_0(-iz_{\text{Rp}}) \right] \right\}$$

となる。式 (E.15) の条件下では、定義式 (2.9) と式 (2.4b) により、

$$e^{-i\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} = 0, \quad \frac{e^{-i\chi(z_{\text{eff}})}}{w(z_{\text{eff}})} \Big|_{z_{\text{eff}}=-iz_{\text{Rp}}} = \frac{1}{\sqrt{2}w_+}, \quad \left[ -\frac{r_{\text{eff}}^2}{w^2(z_{\text{eff}})} + ik \frac{r_{\text{eff}}^2}{2R(z_{\text{eff}})} \right] \Big|_{z_{\text{eff}}=-iz_{\text{Rp}}} = -\frac{r_{\text{eff}}^2}{w_+^2}$$

が成り立つ。この計算により、方位角モードによる振幅項と Gouy 位相の積

$$\left[ \frac{\sqrt{2}r_{\text{eff}}}{w(-iz_{\text{Rp}})} \right]^{|l|} e^{-i|l|\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} = \left[ \frac{\sqrt{2}r_{\text{eff}}e^{-i\chi_0(-iz_{\text{Rp}})}}{w(-iz_{\text{Rp}})} \right]^{|l|} = \left( \frac{r_{\text{eff}}}{w_+} \right)^{|l|}$$

および, Laguerre 陪多項式 (2.9) と動径モードによる Gouy 位相の積は

$$\begin{aligned}
& L_p^{|l|} \left[ \frac{2r_{\text{eff}}^2}{w^2(-iz_{\text{Rp}})} \right] e^{-2ip\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} \\
&= \sum_{j=0}^p \binom{p+|l|}{p-i} \frac{1}{j!} \left[ -\frac{2r_{\text{eff}}^2}{w^2(-iz_{\text{Rp}})} \right]^j e^{-2ip\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} \\
&= \sum_{j=0}^p \binom{p+|l|}{p-i} \frac{1}{j!} \left\{ -2r_{\text{eff}}^2 \left[ \frac{e^{-i\chi_0(-iz_{\text{Rp}})}}{w(-iz_{\text{Rp}})} \right]^2 \right\}^j e^{-2i(p-j)\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} \\
&= \sum_{j=0}^p \binom{p+|l|}{p-i} \frac{1}{j!} \left( -\frac{r_{\text{eff}}^2}{w_+^2} \right)^j e^{-2i(p-j)\chi_0(-iz_{\text{Rp}})} \\
&= \frac{(-1)^p}{p!} \left( \frac{r_{\text{eff}}}{w_+} \right)^{2p}
\end{aligned}$$

となるので, LG ビームの定義式 (2.8) も用いると LG ビームの項は次のようになる:

$$u_{l,p}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, z_{\text{eff}} = -iz_{\text{R}}) = (-1)^p \sqrt{\frac{N!}{p!(p+|l|)!}} \exp\left(\frac{r_{\text{eff}}^2}{w_+^2}\right) u_{N,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, 0).$$

よって, 式 (F.1) は

$$\psi_{l,p}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i; \mathbf{z}_0) = (-1)^p N_{l,p} \sqrt{\frac{N!}{p!(p+|l|)!}} \exp\left(\frac{r_{\text{eff}}^2}{w_+^2}\right) u_{0,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_-, z_{+0}) u_{N,0}^{\text{LG}}(\mathbf{r}_{\text{eff}}, 0). \quad (\text{F.2})$$

式 (F.2) から, 光軸上で位相特異点となる伝搬距離  $z = z_0$  では横断面方向で  $N$  次の位相特異点をもち得るといえる.

## F.2 2 光子目の断面座標について積分したときの波動関数

2 光子波動関数 (C.11) はポンプ光をビームとしているので, 生成された 2 光子波動関数は各ビーム横断面でエネルギー保存則が成立している. このため, 単色の 2 光子波動関数  $\psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, \mathbf{z})$  について 2 光子目の断面座標  $\mathbf{r}_i$  について積分すると伝搬距離  $z_i$  に依らない 1 光子波動関数  $\psi(\mathbf{r}_s, z_s)$  を得るはずである:

$$\psi(\mathbf{r}_s, z_s, z_i) := \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_i \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, z_s, z_i) \quad (\text{F.3})$$

$$\therefore \psi(\mathbf{r}_s, z_s, z_i) = \psi(\mathbf{r}_s, z_s, z_i = 0) =: \psi(\mathbf{r}_s, z_s). \quad (\text{F.4})$$

式 (F.3) はビームの複素振幅分布が

$$u(\mathbf{r}, z) = \hat{U}(z)u(\mathbf{r}, z=0) = \frac{k_0}{2\pi iz} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}' u(\mathbf{r}', 0) \exp\left(-i\frac{k_0}{2z}\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2\right)$$

で発展することを用いることによって得られる：

$$\begin{aligned}
 \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, z_s, z_i) &= \frac{k_{i0}}{2\pi i z_i} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', z_s, 0) \exp\left(-i \frac{k_{i0}}{2z_i} \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'\|^2\right) \\
 \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_i \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i, z_s, z_i) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', z_s, 0) \\
 &\quad \times \frac{k_{i0}}{2\pi i z_i} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}_i \exp\left(-i \frac{k_{i0}}{2z_i} \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'\|^2\right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r}' \psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}', z_s, 0) \\
 \therefore \psi(\mathbf{r}_s, z_s, z_i) &= \psi(\mathbf{r}_s, z_s, 0). \quad (\because \text{式(F.3)})
 \end{aligned}$$

## 付録 G

# Gouy 位相和による 1 次位相特異点の発生

本章では、シグナル光子の Gouy 位相およびアイドラ光子の Gouy 位相のテンソル積の線形重ね合わせにより、1 次位相特異点が現れることについて述べる。

付録 G.1 では 2 光子波動関数を正規直交関数である LG モードに展開する。付録 G.2 では 2 光子波動関数がシグナル光子、アイドラ光子でセパラブルな状態であるとき、光軸上で位相特異点が発生しないことを示す。付録 G.3 では 1 次位相特異点が、シグナル光子の Gouy 位相およびアイドラ光子の Gouy 位相のテンソル積の線形重ね合わせで現れることを示す。

### G.1 LG モードによる 2 光子波動関数の展開

まず、量子もつれした 2 光子の各 LG モードでのテンソル和について述べる。一般に単色の 2 光子対で、各横断面上で正規化された状態ベクトル  $|\psi(\mathbf{z})\rangle$  は、LG ビームのテンソル和で表わされる：

$$|\psi(\mathbf{z})\rangle = \sum_{l_s, p_s} \sum_{l_i, p_i} c_{l_s, p_s}^{l_i, p_i} |u_{l_s, p_s}^{\text{LG}}(z_s)\rangle |u_{l_i, p_i}^{\text{LG}}(z_i)\rangle. \quad (\text{G.1})$$

ただし、 $c_{l_s, p_s}^{l_i, p_i}$  は各モードのテンソルの係数である。また、総和は各モードが取り得る範囲全体とした。

光軸上での位相特異点発生について議論するため、2 光子状態ベクトル  $|\psi(\mathbf{z})\rangle$  と固有ベクトル  $|\mathbf{r}_s = \mathbf{0}, \mathbf{r}_i = \mathbf{0}\rangle$  で内積すると、光軸上の 2 光子波動関数  $\psi(\mathbf{z})$  は

$$\psi(\mathbf{z}) := \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} | \psi(\mathbf{z}) \rangle = \sum_{p_s, p_i} c_{p_s, p_i} u_{0, p_s}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_s) u_{0, p_i}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_i) \quad (\text{G.2})$$

で与えられる。ただし、方位角モードが  $l_s = l_i = 0$  の場合のみ光軸上で振幅がゼロでないことを用い、簡単のために  $c_{p_s, p_i} := c_{0, p_i}^0$  とした。また、光軸上での LG ビームの項である



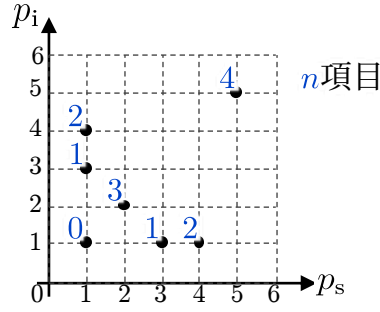


図 G.1 動径モード  $p_s, p_i$  による 2 重総和でなく、動径モードの組  $(p_s, p_i) = (p_n, p_{\bar{n}})$  での番号  $n$  についてのみの総和を取るときの番号の割当てを表わした図. ボソンの対称性から、 $p_s$  と  $p_i$  の入れ替えについて対称となるため同じ番号とし、和をとった.

式 (G.2) は、式 (2.8) および  $q$  パラメータの定義式  $q(z) := z - iz_R$  を用いて

$$u_{0,p_j}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_j) = A(z_j)e^{-i2p_j\chi_j}, \quad (j \in \{s, i\}) \quad (\text{G.3})$$

$$A(z_j) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{z_R}{iw_0} \frac{1}{q_j}, \quad q_j := q(z_j), \quad \chi_j := \chi_0(z_j) \quad (\text{G.4})$$

と表記し、動径モード  $p_s, p_i$  による 2 重総和でなく、動径モードの組  $(p_s, p_i) = (p_n, p_{\bar{n}})$  での番号  $n$  についてのみの総和とし (図 G.1), 組  $(p_n, p_{\bar{n}})$  と  $(p_{\bar{n}}, p_n)$  を区別できないボソンの対称性を用いると、式 (G.2) は Gouy 位相の和によって位相特異点の次数が決定されるといえる:

$$\psi(\mathbf{z}) = A(z_s)A(z_i)\psi_M(\mathbf{z}), \quad \psi_M(\mathbf{z}) := \sum_n c_n \Phi_n(\boldsymbol{\chi}) \quad (\text{G.5})$$

$$\Phi_n(\boldsymbol{\chi}) := e^{-i2p_n\chi_s} e^{-i2p_{\bar{n}}\chi_i} + e^{-i2p_{\bar{n}}\chi_s} e^{-i2p_n\chi_i} \quad (\text{G.6})$$

式 (G.5) の  $A(z_s)A(z_i)$  が任意の伝搬距離でゼロとならないことから、関数  $\psi_M(\mathbf{z})$  は  $M$  次位相特異点を与える関数を意味する. また、係数  $c_n$  ではボソンの対称性  $c_{p_s, p_i} = c_{p_i, p_s}$  を適用し、Gouy 位相の組を  $\boldsymbol{\chi} := (\chi_s, \chi_i)$  とした. ただし式 (2.10) より、 $\chi_j := \tan^{-1}(z_j/R)$  と定義した.

次に、 $M(\in \mathbb{Z}_0^+)$  次位相特異点となる条件について述べる.  $M$  次位相特異点とは、ゼロ点近傍での半径  $\epsilon \ll 1$  の経路  $C = \{z \mid \|z - z_0\| = \epsilon\}$  によるゼロ点からの 2 光子波動関数のずれ  $\delta\phi(\mathbf{z}) := \psi(\mathbf{z}) - \psi(\mathbf{z}_0)$  の位相項の積分が

$$M = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \oint_C \text{darg}[\delta\psi(\mathbf{z})] \quad (\text{G.7})$$

となる場合を指す.

## G.2 セパラブル状態のときのゼロ点

2 光子波動関数  $\psi(\mathbf{z})$  が単一の量子状態の直積で表わされる状態を、セパラブル状態と言  
い、式 (G.2) から  $\psi(\mathbf{z})$  がセパラブル状態のとき

$$\psi(\mathbf{z}) = \left[ \sum_{p_s} c_{p_s} u_{0,p_s}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_s) \right] \times \left[ \sum_{p_i} c_{p_i} u_{0,p_i}^{\text{LG}}(\mathbf{0}, z_i) \right] \quad (\text{G.8})$$

で与えられる。ただし、 $c_{p_j}$  ( $j \in \{s, i\}$ ) は任意の複素係数とした。式 (G.8) では、全ての波  
動関数のゼロ点  $z_0$  は  $z$  の各方向で独立なため孤立ゼロ点とならず位相特異点とはならな  
い。したがって、位相特異点が存在するためには少なくとも量子もつれ状態である必要が  
ある。

## G.3 Gouy 位相和による 1 次特異点発生

本節では、1 次位相特異点の発生について述べるため、位相特異点の次数を与える関数  
 $\psi_M(\mathbf{z})$  は  $\psi_{M=1}(\mathbf{z})$  と表記する。位相特異点の計算のために、 $\psi_1(\mathbf{z})$  の  $z_s, z_i$  についての偏  
導関数を予め計算する。 $\psi_M(\mathbf{z})$  は関数  $\Phi_n(\chi)$  の重ね合わせなので、 $\Phi_n(\chi)$  の偏導関数を  
求めると、式 (2.10) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_n(\chi)}{\partial z_j} &= -\frac{i2p_n z_R}{|q_j|^2} e^{-i2p_n \chi_s} e^{-i2p_n \chi_i} - \frac{i2p_{\bar{n}} z_R}{|q_j|^2} e^{-i2p_{\bar{n}} \chi_s} e^{-i2p_n \chi_i} \quad (j = s, i) \\ &= -i \frac{2z_R}{|q_j|^2} \hat{p}_j \Phi_n(\chi) \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

となる。ただし、 $\hat{p}_j$  ( $j = s, i$ ) は各光子の動径モードを与える動径モード演算子である。し  
たがって、関数  $\psi_1(\mathbf{z})$  はこの偏導関数の重ね合わせなので直ちに次の式を得る：

$$\therefore \frac{\partial \psi_1(\mathbf{z})}{\partial z_j} = -i \frac{2z_R}{|q_j|^2} \hat{p}_j \psi_1(\mathbf{z}). \quad (\text{G.10})$$

ここで、関数  $\psi_1(\mathbf{z})$  に位相特異点  $\mathbf{z}_0$  近傍  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z}$  ( $\delta\mathbf{z}$ : 微小変位) の条件を課すと、  
Taylor 展開の 1 次近似は次のようになる：

$$\psi_1(\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z}) \simeq 0 + \delta\mathbf{z} \cdot \nabla_{\mathbf{z}} \psi_1(\mathbf{z}_0). \quad (\nabla_{\mathbf{z}} \psi_1(\mathbf{z}_0) := [\nabla_{\mathbf{z}} \psi_1(\mathbf{z})]_{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0}) \quad (\text{G.11})$$

ただし、 $\nabla_{\mathbf{z}} := (\partial/\partial z_s, \partial/\partial z_i)^\top$  は各光子の伝搬距離に対するナブラ演算子である。また、  
第 1 項はゼロ点であるために付与される条件である。ベクトル場  $\nabla_{\mathbf{z}} \psi_1(\mathbf{z}_0)$  の各成分を実  
部  $U_j(\mathbf{z}_0)$  ( $j = s, i$ ) および虚部  $V_j(\mathbf{z}_0)$  ( $j = s, i$ ) に分けると

$$\nabla_{\mathbf{z}} \psi_1(\mathbf{z}_0) := \begin{pmatrix} \psi_{1,s}(\mathbf{z}_0) \\ \psi_{1,i}(\mathbf{z}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_s(\mathbf{z}_0) & U_i(\mathbf{z}_0) \\ V_s(\mathbf{z}_0) & V_i(\mathbf{z}_0) \end{pmatrix} \quad (\text{G.12})$$

を得る. よって, 式 (G.11) に式 (G.12) を代入し, 任意の微小変位  $\delta z$  に対して  $\psi_1(z) \neq 0$  となるには

$$\det \begin{pmatrix} U_s(z_0) & U_i(z_0) \\ V_s(z_0) & V_i(z_0) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (\text{G.13})$$

$$U_s(z_0)V_i(z_0) - U_i(z_0)V_s(z_0) \neq 0 \quad (\text{G.14})$$

となる必要がある. ここで,  $\psi_1(z) = 0$  となるような  $\delta z$  が少なくとも 1 点存在すると, 位相特異点が孤立ゼロ点である条件から外れるため, 全ての微小変位  $\delta z$  に対して  $\psi_1(z) \neq 0$  となる必要がある. 関数  $\psi_1(z)$  は複素数であるため, 式 (G.14) は実数に複数回変換する必要があるため不便である. そこで, 式 (G.14) を式 (G.12) により書き換えると次の式のようになる:

$$U_s(z_0)V_i(z_0) - U_i(z_0)V_s(z_0) \neq 0 \iff \text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)] \neq 0. \quad (\text{G.15})$$

しかし, 式 (G.15) では実際に 1 次位相特異点とは直接主張できないが, 式 (G.7) により, 1 次近似の元で孤立ゼロ点である条件 (G.15) は 1 次位相特異点であることと透過になることが示される.

まず, ゼロ点近傍での半径  $\epsilon \ll 1$  の経路  $C = \{z \mid \|z - z_0\| = \|\delta z\| = \epsilon\}$  を,

$$\delta z = \begin{pmatrix} \epsilon \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \\ \epsilon \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i} \end{pmatrix}, \quad (\forall |\zeta| = 1) \quad (\text{G.16})$$

と経路  $C = \{\zeta \mid |\zeta| = 1\}$  で置き直すと, 式 (G.7) には偏角の原理が適用でき, 経路内部のゼロ点の個数  $N[\psi_1]$  と極の個数  $P[\psi_1]$  の差が位相特異点の次数となる:

$$M = N[\psi_1] - P[\psi_1]. \quad (\text{G.17})$$

よって,  $\psi_1(z)$  を  $\zeta$  の関数として整理すると

$$\psi_1(z) = \frac{[\psi_{1,s}(z_0) - i\psi_{1,i}(z_0)]\zeta^2 - [\psi_{1,s}(z_0) + i\psi_{1,i}(z_0)]}{2\zeta} \quad (\text{G.18})$$

を得る. したがって, 極の個数は明らかに  $P[\psi_1] = 1$  であるので, ゼロ点の数  $N[\psi_1]$  は 0 または 2 となる必要がある. 実際に, ゼロ点は式 (G.18) から

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{\psi_{1,s}(z_0) + i\psi_{1,i}(z_0)}{\psi_{1,s}(z_0) - i\psi_{1,i}(z_0)}} \quad (\text{G.19})$$

となり, この解は

$$\left| \frac{\psi_{1,s}(z_0) + i\psi_{1,i}(z_0)}{\psi_{1,s}(z_0) - i\psi_{1,i}(z_0)} \right|^2 = \frac{[|\psi_{1,s}(z_0)|^2 + |\psi_{1,i}(z_0)|^2] - 2\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)]}{[|\psi_{1,s}(z_0)|^2 + |\psi_{1,i}(z_0)|^2] + 2\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)]} \quad (\text{G.20})$$

と変形できる. 式 (G.19) および式 (G.20) から,  $\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)]$  が正のときは全て  $|\zeta| < 1$  を満たし, 負のときは全て  $|\zeta| > 1$  となる. したがって, 式 (A.25a)

$$M = \begin{cases} -1 & (\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)] < 0) \\ 0 & (\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)] = 0) \\ +1 & (\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)] > 0) \end{cases} \quad (\text{G.21})$$

となり, 1 次位相特異点となるには, 式 (G.15) が成り立つ必要がある.

よって, ゼロ点が孤立点となる条件 (G.15) とゼロ点が 1 次特異点となる条件は等価であることが示された.

## G.4 1 次位相特異点発生 の最小 Gouy 位相和

本節では, 1 次位相特異点が発生する最小の Gouy 位相和は, 縮退した動径モード  $p_{n=0} = p_{\bar{n}=0}$  と異なる 2 種の動径モード  $(p_1, p_{\bar{1}})$  であることを示し, 1 次位相特異点は  $p_0$  による項よりも  $(p_1, p_{\bar{1}})$  による項の方が係数の絶対値が大きくなる必要があることを述べる.

まず, 付録 G.2 から式 (G.5) での総和記号で用いた  $n$  は 1 つ以上の項の和でなければならない. したがって, 次点で最小の組み合わせとして,  $n = 0, 1$  までの和

$$\psi_{M=1}(z) := \sum_{n=0}^1 c_n \Phi_n(\chi), \quad \Phi_n(\chi) := e^{-i2p_n\chi_s} e^{-i2p_{\bar{n}}\chi_i} + e^{-i2p_{\bar{n}}\chi_s} e^{-i2p_n\chi_i} \quad (\text{G.22})$$

とする. このとき, 式 (G.22) を簡単にすると

$$\psi_{M=1}(z) = \frac{-2ce^{-i2p_0(\chi_s + \chi_i)} + [e^{-i(2p_1\chi_s + 2p_{\bar{1}}\chi_i)} + e^{-i(2p_{\bar{1}}\chi_s + 2p_1\chi_i)}]}{\sqrt{2(1 + 2|c|^2)}} \quad (\text{G.23})$$

のように複素数の定数  $c$  を用いて表わすことができる.

式 (G.15) は, さらに式 (G.9) から

$$\text{Im}[\psi_{1,s}^*(z_0)\psi_{1,i}(z_0)] \neq 0. \iff \text{Im}\{[\hat{p}_s\psi_1(z_0)]^*[\hat{p}_i\psi_1(z_0)]\} \neq 0 \quad (\text{G.24})$$

を得る. よって, 式 (G.24) に式 (G.23) を代入して整理すると, 直ちに次の式を得る:

$$\chi_{j0} = \tan^{-1}\left(\frac{z_{j0}}{z_R}\right) = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\arg(c) + 2n\pi}{p_1 + p_{\bar{1}} - 2p_0} \pm \frac{\cos^{-1}(|c|^2) + 2m\pi}{p_{\bar{1}} - p_1} \right]. \quad (j = s, i) \quad (\text{G.25})$$

ただし,  $m, n$  は任意の整数であり,  $j = s$  のときは +,  $j = i$  のときは - を選択するとした. さらに, 式 (G.25) から  $0 < |c| < 1$  の条件が付与される. つまり, 1 次位相特異点を得るには, 縮退した動径モード  $p_0$  の項よりも異なる 2 つの動径モード  $(p_1, p_{\bar{1}})$  の項の方が大きくなる必要がある. また, 式 (G.25) から動径モードには  $2p_0 \neq p_1 + p_{\bar{1}}, p_{\bar{1}} \neq p_1$  の 2 つの条件が課せられる.

以上より、最小の Gouy 位相和による 1 次位相特異点発生の条件は次の式で与えられる：

$$0 < |c| < 1, \quad 2p_0 \neq p_1 + p_{\bar{1}}, \quad p_{\bar{1}} \neq p_1. \quad (\text{G.26})$$

図 G.2 は式 (G.26) の例であり、 $|p_s, p_i\rangle$  の係数が  $|0, 0\rangle, |1, 0\rangle, |0, 1\rangle$  で値をもつときの 1 次位相特異点発生を表わしている。1 次位相特異点は、 $|1, 0\rangle, |0, 1\rangle$  の Gouy 位相和でボソンの対称性により  $z_s + z_i$  軸対称なゼロ点の軌跡が現れ、 $|0, 0\rangle$  の係数の振幅が上下することでゼロ点が孤立点となり位相特異点が現れる。

## G.5 SPDC で生成した 2 光子対による 1 次位相特異点発生

$\text{LG}_{l=0, p=1}$  をポンプ光として SPDC で生成された 2 光子対による 1 次位相特異点が、前節の結論に帰着することを示す。ポンプ光を LG ビームとしたときの SPDC による 2 光子生成のシグナル光子およびアイドラ光子による LG モード展開

$$c_{l_s, p_s}^{l_i, p_i} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_s}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} u_{l, p}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i, 0) \exp\left(-\alpha \frac{L\|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i\|^2}{4k_p}\right) \times [u_{l_s, p_s}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_s, 0)]^* [u_{l_i, p_i}^{\text{LG}}(\mathbf{k}_i, 0)]^* \quad (\text{G.27})$$

は既に知られている [46]：

$$c_{l_s, p_s}^{l_i, p_i} = N\pi^2 \delta_{l, l_s + l_i} \sum_{u=0}^p \sum_{s=0}^{p_s} \sum_{i=0}^{p_i} T_u^{p, l} T_s^{p_s, l_s} T_i^{p_i, l_i} \sum_{n=0}^{|l|} \sum_{m=0}^u \binom{|l|}{n} \binom{u}{m} \times \sum_{f=0}^{u-m} \sum_{v=0}^m \binom{u-m}{f} \binom{m}{v} \Gamma(h)\Gamma(b) \frac{D^d}{H^h B^b} {}_2\tilde{F}_1\left(h, b, 1+d, \frac{D^2}{HB}\right) \quad (\text{G.28})$$

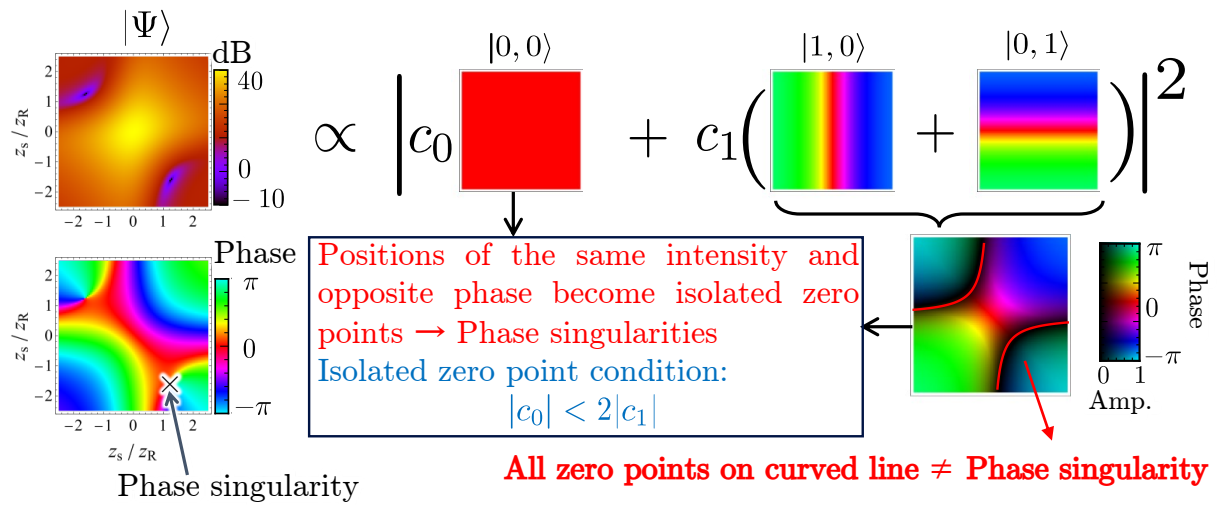


図 G.2 動径モード  $p_s, p_i$  による 2 重総和でなく、動径モードの組  $(p_s, p_i) = (p_n, p_{\bar{n}})$  での番号  $n$  についてのみの総和を取るときの番号の割当てを表わした図。ボソンの対称性から、 $p_s$  と  $p_i$  の入れ替えについて対称となるため同じ番号とし、和をとった。

ただし,  $N$  は正規化係数,  $\Gamma(x)$  はガンマ関数,  ${}_2\tilde{F}_1(h, b, 1 + d, D^2/(HB))$  は正規化された超幾何関数であり, その他のパラメータは

$$T_u^{p,l} := \sqrt{\frac{p!(p+|l|)!}{\pi}} \left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^{2u+|l|+1} \frac{(-1)^{p+u} i^l}{(p-u)! (|l|+u)! u!}, \quad (\text{G.29a})$$

$$H := \frac{w_p^2}{4} + \frac{w_s^2}{4} + \frac{\alpha L}{4k_p}, \quad D := -\frac{w_p^2}{4} + \frac{\alpha L}{4k_p}, \quad (\text{G.29b})$$

$$B := \frac{w_p^2}{4} + \frac{w_i^2}{4} + \frac{\alpha L}{4k_p}, \quad d := l_i + m - n - 2v, \quad (\text{G.29c})$$

$$h := \frac{2 + 2s + l + l_i + 2(-f + u) - 2n - 2v + |l_s|}{2}, \quad (\text{G.29d})$$

$$b := \frac{2 + 2f + 2i + l_i + 2m - 2v + |l_i|}{2} \quad (\text{G.29e})$$

で与えられる [46].

簡単のために,  $w_s = w_i = w_p$  とする. このとき, 表 4.1 のパラメータと, 式 (G.2) から 図 G.3 が得られる. 図 G.3 から係数の 2 乗  $|c_{p_s, p_i}|^2$  は,  $p_0$  として 0 または 1 を選択しても, 組  $(p_1, p_{\bar{1}}) = (0, 1)$  または  $(1, 0)$  の方が大きい. したがって, 式 (G.26) が満たされ,  $\text{LG}_{0,1}$  のポンプ光を用いた SPDC で 1 次位相特異点が発生したといえる.

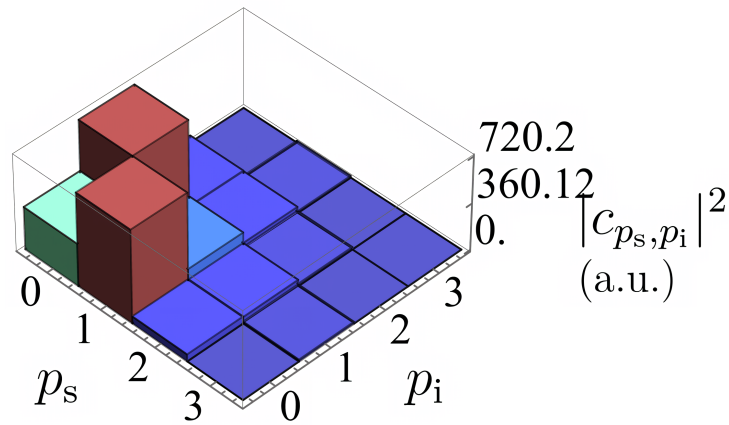


図 G.3  $\text{LG}_{l=0, p=1}$  のポンプ光を用いた SPDC によって生成された 2 光子対の動径モード  $(p_s, p_i)$  による展開.  $p_0 = p_{\bar{0}}$  の対角方向の成分は,  $p_1 \neq p_{\bar{1}}$  ( $p_1 + p_{\bar{1}} \neq 2p_0$ ) の非対角成分に比べ小さいため, 1 次位相特異点の発生条件を満たす.