

2020（令和2）年度 修士学位論文

模型変形による空力特性変化の数値計算コード構築  
Code Development of Numerical Calculation for Changes  
in Aerodynamic Characteristics due to Model Deformation

2021年3月11日

高知工科大学大学院 工学研究科基盤工学専攻  
航空宇宙工学コース

1235106 豊田有里

指導教員 荻野要介

## 目次

1. 序論 .....	1
1.1 研究背景 .....	1
1.2 研究目的 .....	2
2. 数値計算法 .....	3
2.1 流体計算 .....	3
2.1.1 支配方程式 .....	3
2.1.2 Spalart-Allmaras 乱流モデル .....	5
2.1.3 空間離散化 .....	6
2.1.4 非粘性流束 .....	7
2.1.5 勾配計算法 .....	7
2.1.6 再構築法と制限関数 .....	8
2.1.7 時間積分法 .....	9
2.2 構造計算 .....	12
2.2.1 支配方程式 .....	12
2.2.2 構造マトリクスの導出 .....	13
2.2.3 構造ひずみおよび応力の評価 .....	16
3. 形状データ作成 .....	17
3.1 計算対象 .....	17
3.2 計算対象作成 .....	17
4. 数値計算手法 .....	19
4.1 流体計算条件 .....	19
4.1.1 流体計算範囲 .....	19
4.1.2 境界条件 .....	20
4.1.3 計算手法や各条件 .....	21
4.1.4 <i>CD</i> 補正 .....	21
4.2 構造計算条件 .....	22
4.2.1 計算格子 .....	22
4.2.2 計算境界条件 .....	22
4.2.3 計算手法と各条件 .....	23
4.3 流体と構造の繰り返し計算法 .....	23
5. 流体と構造計算結果および考察 .....	24
5.1 低迎角 case 計算結果および考察 .....	24
5.1.1 case1 ( $\alpha = 0.1$ ) .....	24
5.1.2 case2 ( $\alpha = 2.2$ ) .....	26

5.1.3 case3 ( $\alpha = 4.3$ ).....	28
5.2 高迎角 case 計算結果および考察.....	30
5.2.1 case4 ( $\alpha = 8.45$ ).....	30
5.2.2 case5 ( $\alpha = 10.65$ ).....	34
5.2.3 case6 ( $\alpha = 12.75$ ).....	39
5.2.4 case7 ( $\alpha = 14.9$ ).....	43
5.3 case 毎の比較と空力補正.....	48
6. 結論.....	51
謝辞.....	51
参考文献.....	52

# 1. 序論

## 1.1 研究背景

ライト兄弟が 1903 年に世界初の有人動力飛行に成功して約 1 世紀が経過した。当時、ライト兄弟が成功した最大の要因は、実際に飛行機を製作する前に風洞を活用して最適な形状を導きだしたことにありとされている。それ以来、飛行機を設計開発する際に風洞は最も重要な実験設備の一つとして活用されてきた<sup>[1]</sup>。そして現代では、計算機ハードウェア及びソフトウェア技術の進歩によって数値流体力学 (Computational Fluid Dynamics 略称: CFD) が発達により、風洞と CFD の 2 つの手段でデータを取得できる。CFD は風洞の代用品ではなく、CFD と風洞のそれぞれの特徴や得意分野を生かすことにより、更に効率的にデータの取得、設計へ反映できる。実際の航空機開発の現場においても、風洞を利用した航空機模型の空力特性の計測試験と同時並行で CFD が実行され、相互補完的に活用されている。

航空機の空力設計に CFD を適応することで、設計開発コストの低減や空力特性の高性能化に関する知見も獲得できることから今後の更なる活用が期待されている。

また、巡航飛行時と同程度のレイノルズ数を再現することができる高レイノルズ数風洞での空力計測結果を解析するためには、CFD から得られる数値データが必要不可欠である。高レイノルズ数風洞において、マッハ数を変えずにレイノルズ数だけを増加させる方法がいくつかある。レイノルズ数の定義を考えると、(1) 模型や風洞のサイズを大きくする、(2) 作動流体の温度を下げる、(3) 圧力を上げる、(4) 分子量の大きな気体を使う 4 つがある。しかし、模型や風洞のサイズを大きくすると、風洞に必要なパワーが増大し、同時に建設コストとランニングコストが高騰するため(1)は現実的ではない。また、安全かつ安価で大量に使用できる分子量の大きな気体は存在しないため(4)も不適となる。そこで、例えば European Transonic Wind-tunnel (ETW)<sup>[2]</sup>や NASA Langley の National Transonic Facility (NTF)<sup>[3]</sup>の施設では、液体窒素を用いた(2)低温化と(3)加圧という 2 つの方法を併用することによって、実機と同程度のレイノルズ数を達成している。また、JAXA の高レイノルズ数遷音速風洞は、(3)主流の圧力を上げることにより、レイノルズ数の高い流れを得ている<sup>[4]</sup>。

しかし、高レイノルズ数を再現するため、通常の風洞より圧力を上昇させた結果、高圧な流体が模型当たって淀み、さらに高圧になることで大きな荷重が加わり変形し、本来得たい初期の形状の空力特性とは異なる<sup>[5]</sup>。模型変形の影響を、CFD と実験の両面から補正することでデータ精度の向上や信頼性の確保を目指した研究が行われている。

## 1.2 研究目的

本研究では、模型変形による空力特性の変化を、計算格子生成から圧縮性流体の CFD と構造計算実行までを含めて、解析できる統合数値計算環境を構築する。模型変形前後での空力特性の変化、迎角による変形量や空力特性の変化量の違いについて考察することを目的とする。計算格子生成と圧縮性流体の CFD と構造計算を繰り返し実行することで、模型変形前後の空力特性の変化の補正手法を提案する。

## 2. 数値計算法

計算手法として流体計算では、宇宙航空研究開発機構で開発された高速圧縮性流体解析ソルバである FaSTAR<sup>[6]</sup>を用いる。構造計算では、有限要素法を主体とした解析ツールである ANSYS<sup>[7]</sup>を用いる。その数値計算法をまとめる。

### 2.1 流体計算

#### 2.1.1 支配方程式

支配方程式は圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{Q} dv + \int_S \left[ \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \frac{1}{\text{Re}} \mathbf{F}_v(\mathbf{Q}) \right] \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$ は保存量ベクトルで、 $\mathbf{F}$ は非粘性ベクトル、 $\mathbf{F}_v$ は粘性ベクトル、 $d\mathbf{s}$ は面積の絶対値をもつ外向き垂直方向ベクトルである。それぞれを書き下すと

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (e+p)w \end{pmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_v(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \end{pmatrix} \mathbf{i} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \end{pmatrix} \mathbf{j} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \end{pmatrix} \mathbf{k} \quad (2.2)$$

となる。 $\rho$ は密度、 $u, v, w$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向の速度、 $e$ は単位体積あたりの全エネルギー、 $p$ は圧力である。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向の単位ベクトルである。また、ニュートン流体の粘性応力テンソルは

$$\tau_{ij} = \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

と記述でき、Stokes の仮定（体積粘性率が 0、すなわち $\tau_{ii} = 0$ ）を用いると

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.4)$$

となる。これを採用し、具体的に書き下すと

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
\beta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x} = u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \left\{ \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \right\} \\
\beta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial y} = u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \left\{ \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \right\} \\
\beta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial z} = u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \frac{\kappa}{(\gamma-1)\text{Pr}} \left\{ \gamma \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。ここで、 $\mu$ は粘性係数、 $\kappa$ は熱伝導係数、 $\gamma$ は比熱比である。温度勾配は理想気体の状態方程式を用いて変換した。また、これまでに示した変数は以下のように無次元化されている。

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\tilde{x}}{L}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{L}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{L}, \quad \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_\infty}, \quad \mathbf{u} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{a_\infty}, \quad T = \frac{\tilde{T}}{T_\infty}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\rho_\infty a_\infty^2}, \quad e = \frac{\tilde{e}}{\rho_\infty a_\infty^2} \\
\mu &= \frac{\tilde{\mu}}{\mu_\infty}, \quad \kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa_\infty}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_\infty a_\infty L}{\mu_\infty} = \frac{\rho_\infty U_\infty L a_\infty}{\mu_\infty U_\infty} = \text{Re}_\infty \frac{1}{M_\infty}, \quad \text{Pr} = \frac{C_p \mu_\infty}{\kappa_\infty}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$L$ は代表長であり、 $a_\infty$ は一様流音速である。さらに、 $\text{Re}$ はレイノルズ数、 $\text{Pr}$ はプラントル数である。粘性係数は温度によって変化し、以下の Sutherland の式で求める。

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mu_\infty} = \frac{\tilde{\mu}_{ref}}{\mu_\infty} \frac{\tilde{T}_{ref} + C}{\tilde{T} + C} \left( \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{2.7}$$

式中の $\mu$ は、無次元値である。また、プラントル数を一定とすると無次元化された粘性係数と熱伝導係数は等しい。

$$\mu = \kappa$$

圧力は以下の式を用いて求める。

$$p = (\gamma - 1) \left[ e - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \right] \tag{2.8}$$

温度は、以下の無次元化された理想気体の状態方程式を用いて求める。

$$T = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.9)$$

単位体積あたりの全エネルギーは

$$e = \rho \left( \bar{E} + \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} \right) \quad (2.10)$$

と書ける。 $\bar{E}$ は単位質量あたりの内部エネルギーであり、等積比熱 $C_v$ を用いて以下のように変換できる。

$$\bar{E} = C_v T = \frac{1}{\gamma - 1} R \cdot \frac{p}{\rho R} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.11)$$

これを用いて全エネルギーは

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \rho \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} \quad (2.12)$$

となる。さらに、音速 $a$ を用いて表すと

$$e = \rho \left( \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} \right) \quad (2.13)$$

また、式(2.2)中に現れる $(e + p)$ は単位体積あたりの全エンタルピー $h$ であり、以下のように書ける

$$e + p = \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \rho \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} = \rho \left( \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} \right) = \rho H = h \quad (2.14)$$

$H$ は単位質量あたりの全エンタルピーである。

### 2.1.2 Spalart-Allmaras 乱流モデル<sup>[8]</sup>

次式の1方程式モデルである Spalart-Allmaras 乱流モデルを用いる。FaSTAR では、オリジナルのモデルから $f_{t2}$ の項を省略した SA-noft2 を採用する。

$$\frac{\partial \rho \hat{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \hat{v}}{\partial x_j} = \rho C_{b1} \hat{S} \hat{v} - \frac{M_\infty}{\text{Re}_\infty} C_{wl} f_w \left( \frac{\hat{v}}{d} \right)^2 + \frac{M_\infty \rho}{\text{Re}_\infty \sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (v + \hat{v}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_j} \right) + C_{b2} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x_i} \right] \quad (2.15)$$

この式で計算された $\hat{v}$ を用いて、乱流粘性係数が以下のように求まる。

$$\mu_t = \rho \hat{v} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{vl}^3}, \quad \chi = \frac{\hat{v}}{v} \quad (2.16)$$

ここで

$$\hat{S} = \Omega + \frac{M_\infty}{\text{Re}_\infty} \frac{\hat{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad \Omega = |\text{rot} \vec{u}|, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

$$f_w = r_{sw} g \left[ \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} + (1 - r_{sw})(1 + C_{w3}^6)^{\frac{1}{6}}, \quad g = r_{sw} \{r + C_{w2}(r^2 - r)\}$$

$$r = \frac{\hat{v}}{\max(\hat{S}\kappa^2 d^2, \varepsilon)}, \quad r_{sw} = \frac{1}{2} - \text{sign}\left(\frac{1}{2}, r - 4\right)$$

$$C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad \kappa = 0.41$$

$$C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2, \quad C_{v1} = 7.1, \quad C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma}$$

であり, FaSTAR では消滅項の $f_w$ に対して JTAS<sup>[9][10]</sup>による修正を施している. そして, 式(2.2)中の粘性係数, 熱伝導係数は次の式で置き換えられる.

$$\mu \rightarrow \mu + \mu_t \quad (2.17)$$

$$\kappa = \mu \rightarrow \mu + \mu_t \frac{\text{Pr}}{\text{Pr}_t}$$

### 2.1.3 空間離散化

空間離散化には, 有限体積法のセル中心法を採用する. 各面での垂直方向の流束と面積を掛けたものの和で流束の発散値を評価する.  $ds$ は面積の絶対値をもつ外向き垂直方向ベクトルである.

$$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{s} = \sum_{kmax} [\mathbf{F}_k(\mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{s}_k] \quad (2.18)$$

ここで,  $k$ は各面の番号を示し, 要素の面の数だけある.

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (f_x n_x + f_y n_y + f_z n_z)S = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} (f_x n_x + f_y n_y + f_z n_z)S = \mathbf{T}^{-1} F_n S \quad (2.19)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & 0 \\ 0 & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n^2 + p \\ \rho u_n u_{t1} \\ \rho u_n u_{t2} \\ (e + p)u_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & t_{1x} & t_{2x} & 0 \\ 0 & n_y & t_{1y} & t_{2y} & 0 \\ 0 & n_z & t_{1z} & t_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

ここで,  $f_x, f_y, f_z$  は $x, y, z$ 方向の流束,  $T$ は回転行列,  $S$ は面積である. 回転行列の成分の $(n_x, n_y, n_z)$ は面の法線ベクトル成分,  $(t_{1x}, t_{1y}, t_{1z}), (t_{2x}, t_{2y}, t_{2z})$ は2つの接線ベクトルである. これらの法線ベクトル, 接線ベクトルは単位ベクトルである. また,  $u_n, u_{t1}, u_{t2}$ は法線方向, 接線方向の速度である. ここで, 以下の関係式が成り立つ.

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{T} \mathbf{Q}$$

$$\begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_n \\ \rho u_{t1} \\ \rho u_{t2} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & t_{1x} & t_{1y} & t_{1z} & 0 \\ 0 & t_{2x} & t_{2y} & t_{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$\mathbf{Q}_n$ はセル垂直方向に $x$ 軸をもつ局所座標系での保存量ベクトル,  $\mathbf{Q}$ は全体座標での保存量

ベクトルである. 式(2.20)の $\mathbf{F}_n$ はセル境界面で定義され, リーマン解法では境界面を挟んだ両側の値 $\mathbf{Q}'_{ai}$ ,  $\mathbf{Q}'_{bi}$ を用いて求められる.

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n(\mathbf{Q}'_{ai}, \mathbf{Q}'_{bi}) \quad (2.22)$$

ここで,  $\mathbf{Q}'_{ai}$ ,  $\mathbf{Q}'_{bi}$ の算出方法は2.1.6節に示す.

## 2.1.4 非粘性流束

AUSM系の全速度スキームであるSLAU<sup>[11]</sup>スキームを採用する. 質量流束にRoe<sup>[12]</sup>の手法を応用している.

$$\mathbf{F}_n = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix}_b + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ H \end{pmatrix}_a + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{p} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

ここで, 右辺第一, 二項の質量流束 $\dot{m}$ は次式で定義される.

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left\{ \rho_b(u_b + |\bar{u}|_b) + \rho_a(u_a + |\bar{u}|_a) - \frac{\chi}{\bar{c}} \Delta p \right\}$$

ここで

$$\begin{aligned} \chi &= (1 - \hat{M})^2, \hat{M} = \min \left( 1, \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{\frac{u_b^2 + u_a^2}{2}} \right) \\ |\bar{u}|_{a,b} &= (1 - g) \frac{\rho_b |u_b| + \rho_a |u_a|}{\rho_b + \rho_a} + g |u|_{a,b} \\ g &= -\max[\min(M_b, 0), -1] \times \min[\max(M_a, 0), 1] \\ M_{a,b} &= \frac{u_{a,b}}{\bar{c}}, \bar{c} = \frac{c_a + c_b}{2} \end{aligned} \quad (2.24)$$

である. また, 式(2.23)第三項の圧力流束 $\tilde{p}$ は次式となる.

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{p_b + p_a}{2} + \frac{\beta_b + \beta_a}{2} (p_b - p_a) + (1 - \chi) (\beta_b + \beta_a - 1) \frac{p_b + p_a}{2} \\ \beta_{a,b} &= \begin{cases} \frac{1}{4} (2 \mp M_{a,b}) (M_{a,b} \pm 1)^2, & |M_{a,b}| < 1 \\ \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\pm M_{a,b})], & |M_{a,b}| < 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.1.5 勾配計算法

Green-Gauss(GG)とWeighted-Least-Square(WLSQ)<sup>[13]</sup>のハイブリッド手法であるGLSQ法<sup>[14]</sup>を採用した. 壁表面近くの薄く曲がった格子にはGreen-Gaussを使用し, 壁から離れた場所ではWeighted-Least-Squareになる. GLSQでは,

$$[\beta \mathbf{M} + 2(1 - \beta)VI]\nabla q = \beta \sum_j \varpi_j L_j \Delta \bar{x}_{tj} \Delta q_j + (1 - \beta) \sum_j s_j \bar{x}_{tj} \Delta q_j \quad (2.26)$$

の式を用いて勾配を求める。ここで

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{XY} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{YZ} & I_{ZZ} \end{pmatrix} \\ I_{AB} &= \sum_j \varpi_j \Delta A_j \Delta B_j \\ \varpi_j &= \left(2 \frac{l_j}{L_j}\right)^2 \frac{s_j}{L_j} \\ \beta &= \min\left(1, \frac{V}{\max(\Delta x_j) \cdot \max(s_j)}\right), \quad \beta \in [0,1] \end{aligned} \quad (2.27)$$

である。βがGGとWLSQを切り替えるパラメータであり、β = 0でGGに、β = 1でWLSQになる。

### 2.1.6 再構築法と制限関数

求めた勾配を用いてセル内の保存量分布を再構築し、流束を計算するセル境界面上の値を計算する。セル内の分布を、勾配を用いて線形で再構築する場合には、以下の式を用いる。

$$\mathbf{Q}'_{ai} = \mathbf{Q}_a + \nabla \mathbf{Q}_a \cdot \mathbf{r}_{ai} \quad (2.28)$$

$\mathbf{Q}'_{ai}$ は再構築された面上の値、 $\mathbf{Q}_a$ はセル平均値、 $\nabla \mathbf{Q}_a$ は勾配、 $\mathbf{r}_{ai}$ はセル中心から面に向かうベクトルである。(図 2.1 参照)

非粘性流束を計算する際に使用する値を平均値( $\mathbf{Q}_a$ ,  $\mathbf{Q}_b$ )から再構築された値( $\mathbf{Q}'_a$ ,  $\mathbf{Q}'_b$ )にすることで高次精度化ができる。今回は、線形内挿しているので空間2次精度である。単調性を維持し安定した計算を行うため、制限関数 $\phi_a$ を使用する。

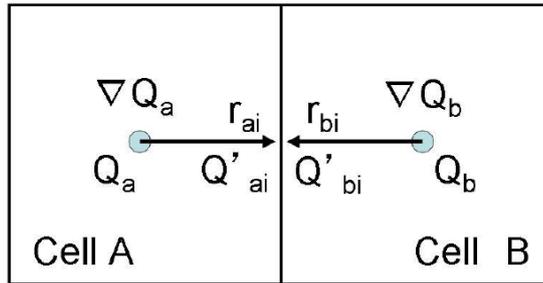


図 2.1 再構成法

本計算では Venkatakrishnan<sup>[15]</sup>リミタを導入する。セル A でのリミタ $\phi_a$ を決める際には、まずセル A の周りのセルとの最大の差 $\Delta \mathbf{Q}_{\max}$ と最小の差 $\Delta \mathbf{Q}_{\min}$ を求める。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_{\max} &= \max(\mathbf{Q}_{neighbor} - \mathbf{Q}_a) \\ \Delta \mathbf{Q}_{\min} &= \min(\mathbf{Q}_{neighbor} - \mathbf{Q}_a) \end{aligned} \quad (2.29)$$

次に、式(2.28)を用いて面*i*に対する $\mathbf{Q}'_{ai}$ を求め、 $\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}'_a - \mathbf{Q}_a$ の正負に応じて以下の式を計

算する.

$$\Phi_{ai} = \begin{cases} \frac{\Delta Q_{\max}^2 + \varepsilon^2 + 2\Delta Q \Delta Q_{\max}}{\Delta Q_{\max}^2 + 2\Delta Q^2 + \Delta Q_{\max} \Delta Q + \varepsilon^2} & (\Delta Q > 0) \\ \frac{\Delta Q_{\min}^2 + \varepsilon^2 + 2\Delta Q \Delta Q_{\min}}{\Delta Q_{\min}^2 + 2\Delta Q^2 + \Delta Q_{\min} \Delta Q + \varepsilon^2} & (\Delta Q < 0) \end{cases} \quad (2.30)$$

ここで,  $\varepsilon^2 = (\kappa \Delta x)^3$  であり,  $\kappa$  は入力値として採用される. セル A に接するすべての面に対して  $\Phi_{ai}$  を計算し最後にその最小値を計算する.

$$\Phi_a = \min(\Phi_{ai}) \quad (2.31)$$

### 2.1.7 時間積分法

本計算では, LU-SGS<sup>[16]</sup>を用いる. 1 次の後退 Euler 法を用いて, さらに流束の変化をヤコビアンで線形近似すると, 解くべき離散式は, 下記のように書ける

$$\left( \frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{F}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_i} \right) \Delta \mathbf{Q}_i = \mathbf{R}_i \quad (2.32)$$

ここで,  $V_i$  はセル  $i$  の体積,  $\Delta t$  は時間刻み,  $\mathbf{F}_{ij}$  はセル  $i$  とセル  $j$  の間の流束,  $\Delta \mathbf{Q}_i$  はセル  $i$  の保存量ベクトルの変化量,  $\mathbf{R}_i$  はセル  $i$  の非粘性及び粘性流束の和である. また,  $\partial \mathbf{F}_{ij} / \partial \mathbf{Q}_i$  はヤコビ行列である. 例えば, 図 2.2 のようなセル番号の配置の場合を考える. Cuthill-McKee 法で並び替えをすると, セル番号は実際このような並び順になる. セル番号 5 について式(2.32)を書くと

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & \frac{\partial \mathbf{F}_{52}}{\partial \mathbf{Q}_2} & \frac{\partial \mathbf{F}_{53}}{\partial \mathbf{Q}_3} & 0 & \frac{V_i}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{F}_{52}}{\partial \mathbf{Q}_5} + \frac{\partial \mathbf{F}_{53}}{\partial \mathbf{Q}_5} + \frac{\partial \mathbf{F}_{53}}{\partial \mathbf{Q}_5} + \frac{\partial \mathbf{F}_{58}}{\partial \mathbf{Q}_5} & 0 & \frac{\partial \mathbf{F}_{57}}{\partial \mathbf{Q}_7} & \frac{\partial \mathbf{F}_{58}}{\partial \mathbf{Q}_8} & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{Q}_1 \\ \Delta \mathbf{Q}_2 \\ \Delta \mathbf{Q}_3 \\ \Delta \mathbf{Q}_4 \\ \Delta \mathbf{Q}_5 \\ \Delta \mathbf{Q}_6 \\ \Delta \mathbf{Q}_7 \\ \Delta \mathbf{Q}_8 \\ \Delta \mathbf{Q}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

となる. 左辺の流束は 1 次精度を採用する場合, 流束は隣り合うセルの値だけで決まる. LU-SGS では, この行列を下三角行列  $\mathbf{L}$ , 対角行列  $\mathbf{D}$ , 上三角行列  $\mathbf{U}$  に分ける. 上の例では, セル番号が 5 より小さいセル番号 2 と 3 が  $\mathbf{L}$  に属し, セル番号が 5 より大きいセル番号 7 と 8 が  $\mathbf{U}$  に属する. 非構造格子では, セル番号の並び順でどちらに属するのかが決まる. 上式左辺の LDU 分解を行うと

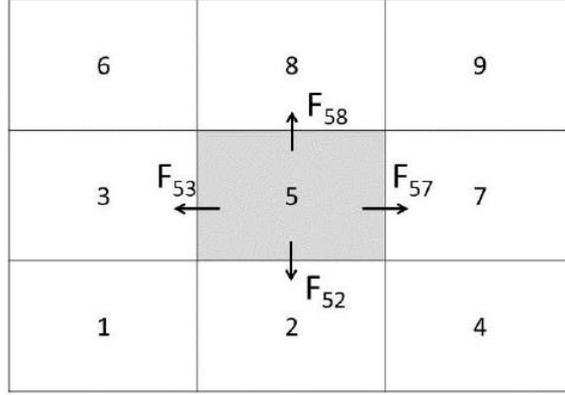


図 2.2 セルの配置と流束

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\Delta\mathbf{Q} \approx (\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{U})\Delta\mathbf{Q} \quad (2.34)$$

となる。以下の二段階のステップで解く。

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} + \mathbf{D})\Delta\mathbf{Q}^* &= \mathbf{R} && \text{forward sweep} \\ (\mathbf{D} + \mathbf{U})\Delta\mathbf{Q} &= \mathbf{D}\Delta\mathbf{Q}^* && \text{backward sweep} \end{aligned} \quad (2.35)$$

また、ヤコビアン要素の差分は1次精度とし、流束を Rusanov 法<sup>[17]</sup>で評価する。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{Q}_i} - \rho_A \mathbf{I} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \mathbf{Q}_j} + \rho_A \mathbf{I} \right) \quad (2.36)$$

となる。ここで  $\rho_A$  はスペクトル半径である。これを用いると、対角項の成分において、ヤコビアンの部分がキャンセルし

$$\rho_A = \vec{U} \cdot \vec{n} + c + \frac{2\mu}{\text{Re}ph}$$

$$D_i = \sum_{j \in D(i)} \left( \frac{V_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{j \in D(i)} \rho_{Aj} S_j \right) \mathbf{I} \quad (2.37)$$

のようにスカラーに近似できる。このようにすることにより、行列の反転を無くし、スカラーの割り算にすることができる。さらに、スイープ中での計算においても、

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_i} \Delta\mathbf{Q}_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{Q}_i} \Delta\mathbf{Q}_i - \rho_A \Delta\mathbf{Q}_i \right) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{F}(\mathbf{Q}_i + \Delta\mathbf{Q}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_i) - \rho_A \Delta\mathbf{Q}_i) \quad (2.38)$$

と近似すれば、さらに行列計算の全くない matrix-free の陰解法ができる。また、粘性項のフラックスは直接使用せず、最大固有値で考慮する。最終的に、LU-SGS 法は以下の二段階のステップで解く。

$$\Delta\mathbf{Q}_i^* = \mathbf{D}_i^{-1} \left[ \mathbf{R}_i - \frac{1}{2} \sum_{j \in D(i)} \left[ (\mathbf{F}(\mathbf{Q}_j + \Delta\mathbf{Q}_j^*) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j) - \rho_A \Delta\mathbf{Q}_j^*) S_{ij} \right] \right] \text{ forward sweep}$$

$$\Delta \mathbf{Q}_i = \Delta \mathbf{Q}_i^* - \mathbf{D}_i^{-1} \frac{1}{2} \sum_{j \in D(i)} [(\mathbf{F}(\mathbf{Q}_j + \Delta \mathbf{Q}_j) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_j) - \rho_A \Delta \mathbf{Q}_j) S_{ij}] \text{ backward sweep}$$

$$R_i = - \sum_{j \in i} [F_{ij} S_{ij}] \quad (2.39)$$

ここで、式中の流束 $\mathbf{F}$ は以下の式によって求める。

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} \rho u_n \\ \rho u_n u + p n_x \\ \rho u_n v + p n_y \\ \rho u_n w + p n_z \\ \rho u_n H \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

$u_n$ は垂直方向速度で、 $\mathbf{n}$ は垂直方向ベクトルである。前進スイープでは、セル番号 1 番から最大のセル番号まで順にスイープする。この手法では、セル $i$ に属する面 $j$ を Lower と Upper に分ける。 $\Delta \mathbf{Q}^*$ はすでに更新されたものを使って計算する。同様に、後退スイープでも更新された $\Delta \mathbf{Q}$ を用いて計算する。番号付け方によって、Lower と Upper のバランスが悪くなり、収束性悪化の原因となるので、FaSTAR では Cuthill-Mckee 法<sup>[18]</sup>を使ってセル番号と面番号の並び替えをしている。

また、CFL 固定の局所時間刻みを用いる場合には、

$$\Delta t = CFL \frac{V_i}{\max(\rho_A)} \quad (2.41)$$

なので、

$$D_i = \sum_{j \in i} \left( \frac{V_i}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_{j \in D(i)} \rho_{Aj} S_j \right) \mathbf{I} = \sum_{j \in i} \left( \frac{\max(\rho_A)}{CFL} + \frac{1}{2} \sum_{j \in D(i)} \rho_{Aj} S_j \right) \mathbf{I} \quad (2.42)$$

となる。一方、CFL 固定の統一時間刻みは、

$$\Delta t = \min \left( CFL \frac{V_i}{\max(\rho_A)} \right) \quad (2.43)$$

のように計算し、全てのセルの中で最も小さい $\Delta t$ が採用される。

## 2.2 構造計算

### 2.2.1 支配方程式

線形材料においての応力は以下の定式でひずみに関連づけられる.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (2.44)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (2.45)$$

ここで,  $\boldsymbol{\sigma}$ は応力ベクトル,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ は全ひずみベクトル,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ は弾性ひずみベクトル,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}$ は熱ひずみベクトルである. 式(2.44)は以下に反転させることができる.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \quad (2.46)$$

3次元の場合は, 熱ひずみベクトルは以下の通りになる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{th} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_x^{se} \\ \alpha_y^{se} \\ \alpha_z^{se} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta T = T - T_{ref} \quad (2.47)$$

ここで,  $\alpha_x^{se}$ はx方向の平均熱膨張係数,  $T$ は任意点での温度,  $T_{ref}$ は参照温度,  $\mathbf{D}^{-1}$ は弾性またはコンプライアンスマトリクスで以下のようになる.

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

$\nu_{xy}$ と $\nu_{yx}$ の相違は以下の通りである. また,  $\mathbf{D}^{-1}$ マトリクスは対称であると想定される為, 以下のようになる.

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y} = \frac{\nu_{xy}}{E_x} \quad (2.49)$$

$$\frac{\nu_{xz}}{E_z} = \frac{\nu_{zx}}{E_x} \quad (2.50)$$

$$\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y} \quad (2.51)$$

式(2.44)を式(2.46)から式(2.51)まで展開し, 以下 6 つの方程式を陽に書き出すことができる.

$$\varepsilon_x = \alpha_x \Delta T + \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{xy} \sigma_y}{E_x} - \frac{\nu_{xz} \sigma_z}{E_x} \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_y = \alpha_y \Delta T - \frac{\nu_{xy} \sigma_x}{E_x} + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_{yz} \sigma_z}{E_y} \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_z = \alpha_z \Delta T - \frac{\nu_{xz} \sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_{yz} \sigma_y}{E_y} + \frac{\sigma_z}{E_z} \quad (2.54)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{xy}} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G_{yz}} \quad (2.56)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G_{xz}} \quad (2.57)$$

式(2.48)を反転させて展開して、次の6つの方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{E_x}{h} \left( 1 - (\nu_{yz})^2 \frac{E_z}{E_y} \right) (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_y}{h} \left( \nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{yz} \frac{E_z}{E_y} \right) (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} (\nu_{xz} + \nu_{yz} \nu_{xy}) (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \frac{E_y}{h} \left( \nu_{xy} + \nu_{xz} \nu_{yz} \frac{E_z}{E_y} \right) (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_y}{h} \left( 1 - (\nu_{xz})^2 \frac{E_z}{E_x} \right) (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} (\nu_{yz} + \nu_{xz} \nu_{xy}) (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{E_z}{h} (\nu_{xz} + \nu_{yz} \nu_{xy}) (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \frac{E_z}{h} \left( \nu_{yz} + \nu_{xz} \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x} \right) (\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) \\ & + \frac{E_z}{h} \left( 1 - (\nu_{xy})^2 \frac{E_y}{E_x} \right) (\varepsilon_z - \alpha_z \Delta T) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\sigma_{xy} = G_{xy} \varepsilon_{xy} \quad (2.61)$$

$$\sigma_{yz} = G_{yz} \varepsilon_{yz} \quad (2.62)$$

$$\sigma_{xz} = G_{xz} \varepsilon_{xz} \quad (2.63)$$

## 2.2.2 構造マトリクスの導出

仮想仕事の原理では、内部ひずみエネルギーの非常に小さな仮想変化は、負荷された荷重による外部仕事で同一の変化によりオフセットされる必要がある。

$$\delta U = \delta V \quad (2.64)$$

ここで、 $U = U_1 + U_2$ のひずみエネルギー、 $V = V_1 + V_2 + V_3$ の外部仕事である。仮想ひずみエネルギーは、以下で求められる。

$$\delta U_1 = \int_{vol} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} dvol^T \quad (2.65)$$

ここで、 $vol$ は要素の体積である。線形材料および形状を仮定して、式(2.64)および式(2.65)

から以下が得られる.

$$\delta U_1 = \int_{vol} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{th}) dvol \quad (2.66)$$

ひずみは, 以下により節点変位に関連付けることができる.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (2.67)$$

ここで,  $\mathbf{B}$ は要素形状関数に基づいたひずみ-変位マトリクス,  $\mathbf{u}$ は節点変位ベクトルである. すべての効果が全体直交座標系で作用すると仮定する. 式(2.67)を用いて以下が得られる.

$$\delta U_1 = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dvol \mathbf{u} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{th} dvol \quad (2.68)$$

仮想ひずみエネルギーの別の形式は, 基礎剛性のように表面が分布抵抗に対して変化する場である. これは以下の通りに記述できる.

$$\delta U_2 = \int_{area_f} \delta \mathbf{w}_n^T \boldsymbol{\sigma} darea_f \quad (2.69)$$

ここで,  $\mathbf{w}_n$ は表面に垂直な運動,  $\boldsymbol{\sigma}$ は表面により伝達する応力,  $area_f$ は分布抵抗の作用する面積である.  $\mathbf{w}_n$ および $\boldsymbol{\sigma}$ は, 通常 1 つの非ゼロ成分のみを持つ. 点ごとの垂直変位は, 以下によって節点変位に関連付けられる.

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{N}_n \mathbf{u} \quad (2.70)$$

ここで,  $\mathbf{N}_n$ は表面における垂直運動の形状関数のマトリクスである. 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は, 以下の通りである.

$$\boldsymbol{\sigma} = k \mathbf{w}_n \quad (2.71)$$

ここで,  $k$ は単位長さあたりの基礎剛性である. 式(2.69)と式(2.71)を結合し, 要素面内で $k$ が一定であると仮定すると, 以下の通りになる.

$$\delta U_2 = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{Tk} \int_{area_f} \mathbf{N}_n^T \mathbf{N}_n darea_f \mathbf{u} \quad (2.72)$$

次に, 外部仮想仕事を考慮する. まず内部効果が考える.

$$\delta V_1 = - \int_{vol} \delta \mathbf{w}^T \frac{\mathbf{F}^a}{vol} dvol \quad (2.73)$$

ここで,  $\mathbf{w}$ は任意点の変位ベクトル,  $\mathbf{F}^a$ は加速度ベクトルである. ニュートンの第 2 法則によると, 以下の通りになる.

$$\frac{\mathbf{F}^a}{vol} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{w} \quad (2.74)$$

要素内の変位は, 以下の通りに節点変位に関連付けられる.

$$\mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (2.75)$$

ここで,  $\mathbf{N}$ は形状関数のマトリクスになる. 式(2.73)と式(2.75)を結合し,  $\rho$ は体積一定であると仮定すると以下の通りになる.

$$\delta V_1 = -\delta \mathbf{u}^T \rho \int_{vol} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dvol \frac{\delta^2}{\delta t^2} \mathbf{u} \quad (2.76)$$

圧力ベクトルの定式化は、次のようになる。

$$\delta V_2 = \int_{area_p} \delta \mathbf{w}_n^T \mathbf{P} darea_p \quad (2.77)$$

ここで、 $\mathbf{P}$ は圧力ベクトルは、圧力が作用する要素面積である。式(2.73)および式(2.75)を結合することにより以下の通りになる。

$$\delta V_2 = \delta \mathbf{u}^T \int_{area_p} \mathbf{N}_n \mathbf{P} darea_p \quad (2.78)$$

要素に作用する節点力は、以下の通りに説明することができる。

$$\delta V_2 = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e^{nd} \quad (2.79)$$

ここで、 $\mathbf{F}_e^{nd}$ は節点力である。最終的に式(2.64), 式(2.68), 式(2.72), 式(2.76), 式(2.78), 式(2.79)を結合して以下を得ることができる。

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{u}^T \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dvol \mathbf{u} - \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{th} dvol + \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T k \int_{area_f} \mathbf{N}_n^T \mathbf{N}_n darea_f \mathbf{u} \\ & = -\delta \mathbf{u}^T \rho \int_{vol} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dvol \frac{\delta^2}{\delta t^2} \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^T \int_{area_p} \mathbf{N}_n^T \mathbf{P} darea_p + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e^{nd} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$\delta \mathbf{u}^T$ ベクトルは、上記のすべての項で共通な任意の仮想変位で、式(2.80)を満たすために必要な条件は以下へ統合される。

$$(\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_e^f) \mathbf{u} - \mathbf{F}_e^{th} = \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_e^{pr} + \mathbf{F}_e^{nd} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dvol$$

$$\mathbf{K}_e^f = \int_{area_f} \mathbf{N}_n^T \mathbf{N}_n darea_f$$

$$\mathbf{F}_e^{th} = \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{th} dvol$$

$$\mathbf{M}_e = \rho \int_{vol} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dvol$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\delta^2}{\delta t^2} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{F}_e^{pr} = \int_{area_p} \mathbf{N}_n^T \mathbf{P} darea_p$$

$\mathbf{K}_e$ は要素剛性マトリクス、 $\mathbf{K}_e^f$ は要素基礎剛性マトリクス、 $\mathbf{F}_e^{th}$ は要素伝熱荷重ベクトル、 $\mathbf{M}_e$ は要素質量マトリクス、 $\ddot{\mathbf{u}}$ は加速度ベクトル、 $\mathbf{F}_e^{pr}$ は要素圧力ベクトルである。式(2.81)により模型変位の時間発展を解く事ができる。

### 2.2.3 構造ひずみおよび応力の評価

要素積分点ひずみおよび応力は, 式(2.44)および式(2.67)を統合することにより, 以下のとおり計算される.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^{el} \quad (2.83)$$

節点および重心応力は, 積分点応力で計算される.

## 3. 形状データ作成

### 3.1 計算対象



図 3.1 計算対象の AGARD-B 模型

本研究では，計算対象として風洞標準モデルである AGARD-B を使用した．AGARD-B は公開された実験データが豊富にあることから，構築した計算環境の結果と実験データを比較しやすいため選定した．AGARD-B は，主翼が  $60^\circ$  の後退角を持つデルタ翼，胴体は尖端部をもつ回転体である<sup>[19]</sup>．

### 3.2 計算対象作成

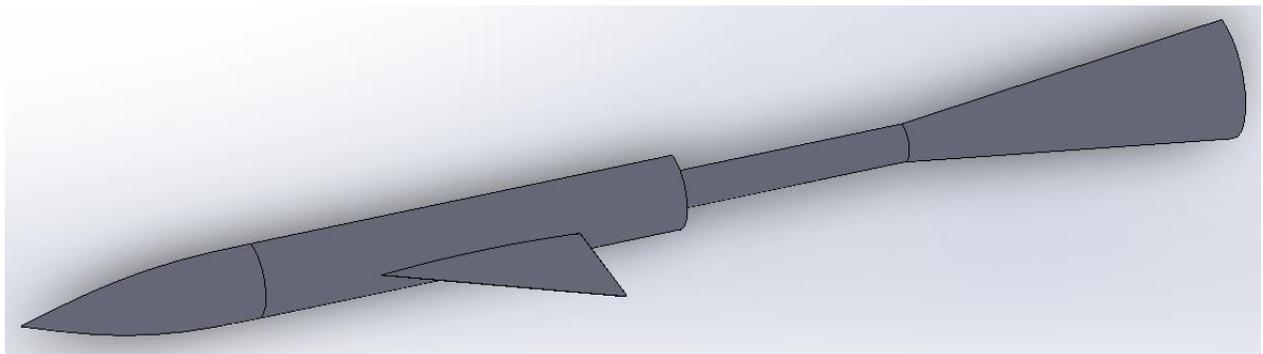


図 3.2 半裁の AGARD-B

図 3.2 に示したものが，3DCAD ソフト solidworks によって作成した AGARD-B である．図 3.3 に示した AGARD-B の形状定義に従い作成した．全ての寸法が模型胴体直径  $D$  で企画課されており， $D = 75\text{mm}$ とした．実験では風洞内に模型を固定するために支持棒が必要となる．よって計算でも同様に支持棒がついた計算対象とした．また，計算量削減のため，半裁モデルで計算を行う．図 3.3 の定義通りでは，境界層格子生成が困難だったため，デルタ翼の端に  $R = 0.1\text{mm}$ のわずかなフィレットをかけている．



## 4. 数値計算手法

### 4.1 流体計算条件

#### 4.1.1 流体計算範囲

流体計算範囲は、図 4.1 に示す通り、模型全長 1.174m に対して $x$ 方向に 1.454m、 $y$ 方向に 2m、 $z$ 方向に 4m とった。衝撃波が外側流入境界に触れないような広さとした。計算対象の表面格子を図 4.2 に示す。この格子は、境界層に 1759212 個の三角柱格子、境界層よりも外側に 977850 個の四面体格子からなる、合計 2737062 個の格子を持つ非構造ハイブリッド格子である。AGARD-B 表面格子は 66119 個である。境界層の三角柱格子を図 4.3 に示す。図 4.3 は、AGARD-B 本体の底面近くの場合を示した。

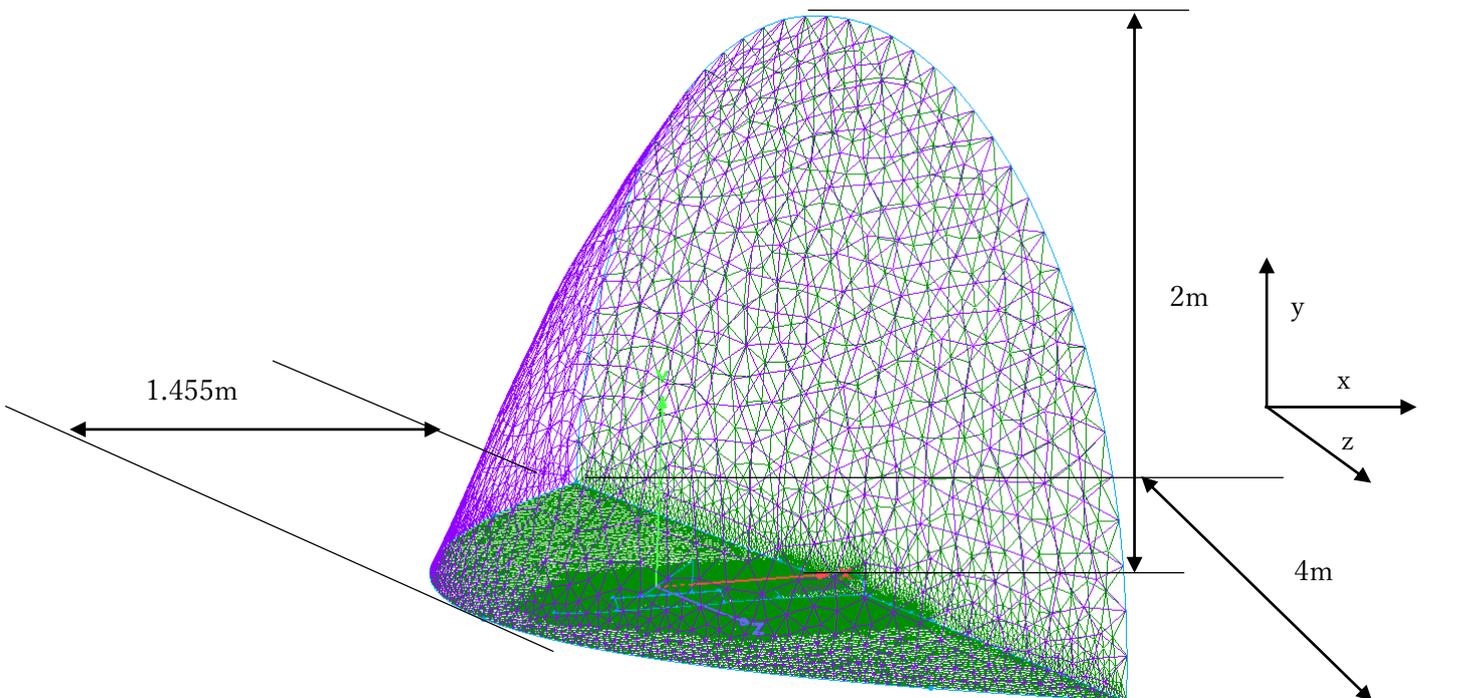


図 4.1 AGARD-B の各種寸法

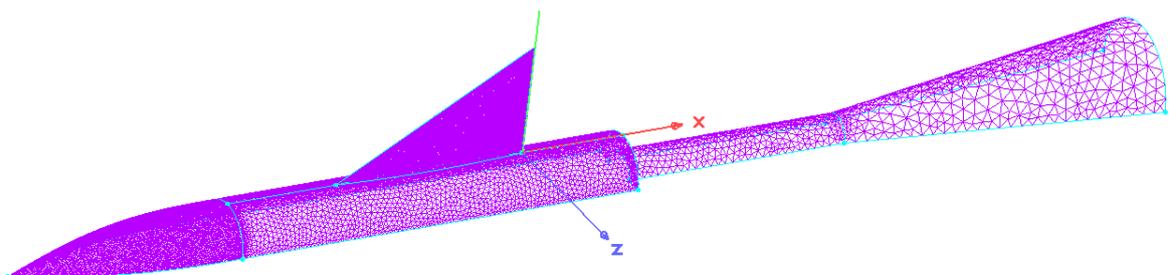


図 4.2 計算対象の表面格子

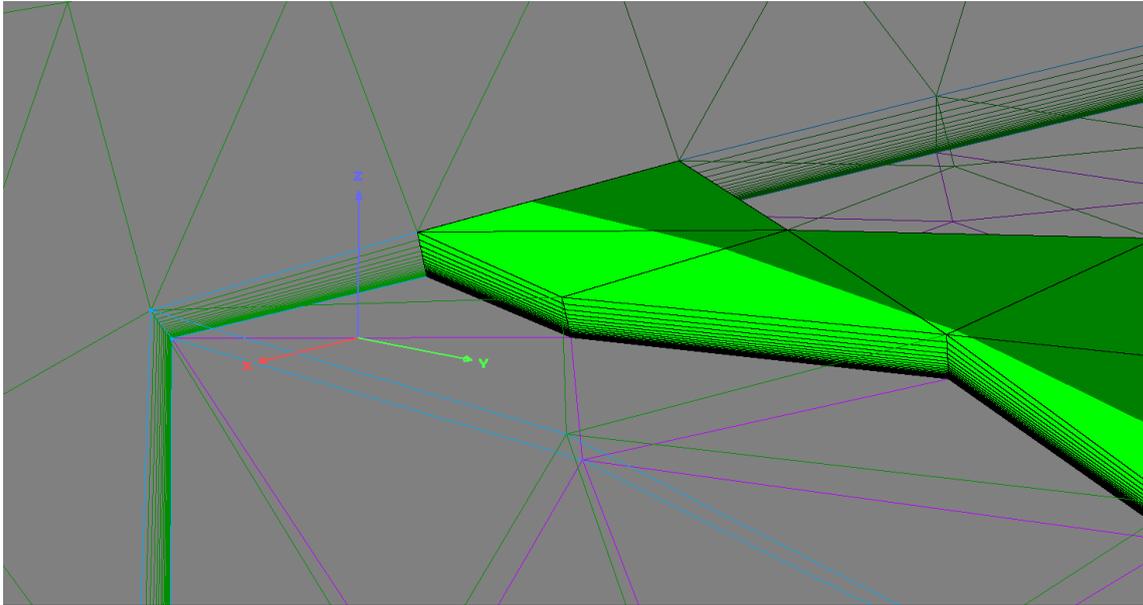


図 4.3 境界層の三角柱格子

#### 4.1.2 境界条件

半裁モデルの境界パッチ名を図 4.4 に示す. 計算対象である AGARD-B 本体の底面を除いた面を「Body」, AGARD-B 本体の底面を「Base」, 支持棒を「Sting」と呼ぶ. これら 3 つの計算対象の境界条件は滑り無し断熱壁条件としている. 流入面を「Inflow」で一様流, 流出面を「Outflow」で外挿, 対称面を「Symmetry」で対称境界とする. 境界条件を表 4.1 に示す.

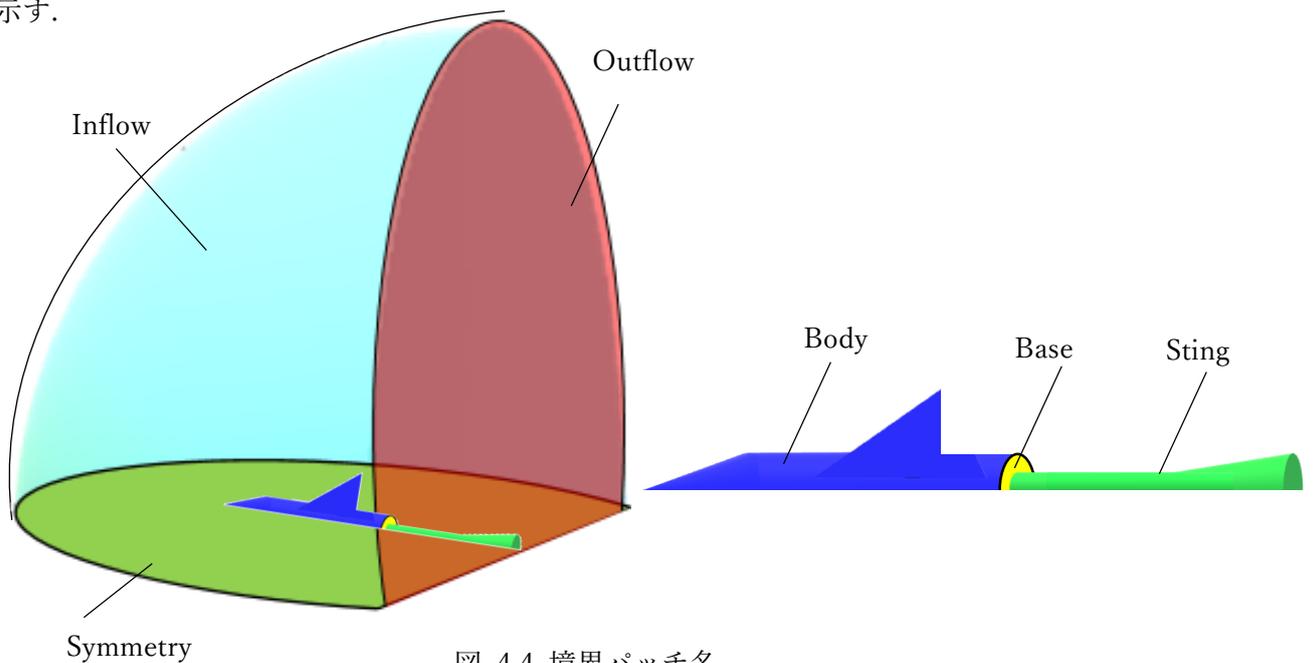


図 4.4 境界パッチ名

表 4.1 流体計算境界条件

境界パッチ名	境界条件
Body	滑り無し断熱壁条件
Base	滑り無し断熱壁条件
Sting	滑り無し断熱壁条件
Inflow	一様流
Outflow	外挿
Symmetry	対称

#### 4.1.3 計算手法や各条件

主流条件は、表 4.2 に示す。宇宙航空研究開発機構で開発された高速圧縮性流体解析ソフトウェアである FaSTAR を用いる。今回 case1~7 までの条件の計算を行う。

表 4.2 主流条件

	迎角[° ]	マッハ数[-]	全温 [K]	全圧 [kPa]
case1	0.1	1.4	273.9	167.1
case2	2.2			
case3	4.3			
case4	6.4			
case5	8.45			
case6	10.65			
case7	14.9			

#### 4.1.4 $C_D$ 補正

実験と同じ条件にするために、AGARD-B と指示棒が接合したモデルで計算を行ったが、支持棒と結合しているために AGARD-B だけの  $C_D$  とはならない。そのため、AGARD-B 本体と支持棒の接合面に本来かかるはずだった力を算出し、以下の式を用いて補正する。

$$C_A = C_{A0} + \frac{1}{S_{ref}} C_{pstring} S_{sting} \quad (4.1)$$

$$C_{A0} = C_A - \frac{1}{S_{ref}} C_{pstring} S_{sting} \quad (4.2)$$

$$C_A = C_{D_{before}} \cos\alpha \quad (4.3)$$

$S_{ref}$  は翼面積で  $C_L$ ,  $C_D$  を導出するときを使用している値,  $C_{pstring}$  は接合部付近の圧力,  $S_{sting}$  は接合部の面積,  $C_{D_{before}}$  は補正前の  $C_D$  の計算結果である。式(4.2)より、計算結果の  $C_A$  から

接合部に本来かかるはずだった力を引く事で $C_{A0}$ を求める。式(4.3)の通り、 $C_A$ には $C_{D_{before}}$ の $\cos\alpha$ 倍した値を使用した。

$$C_{D_{after}} = C_N \sin\alpha + C_{A0} \cos\alpha \quad (4.4)$$

$C_{D_{after}}$ は式(4.4)で求める事ができる。

## 4.2 構造計算条件

### 4.2.1 計算格子

構造計算用格子を図 4.5 に示す。半裁面や支持棒底面以外の表面格子は流体計算時と同じ格子を使用している。構造計算のため、機体内部に格子を切っている。ANSYS への入力可能格子点数に 4 万点の制限があるため、格子点数は約 4 万点としている。

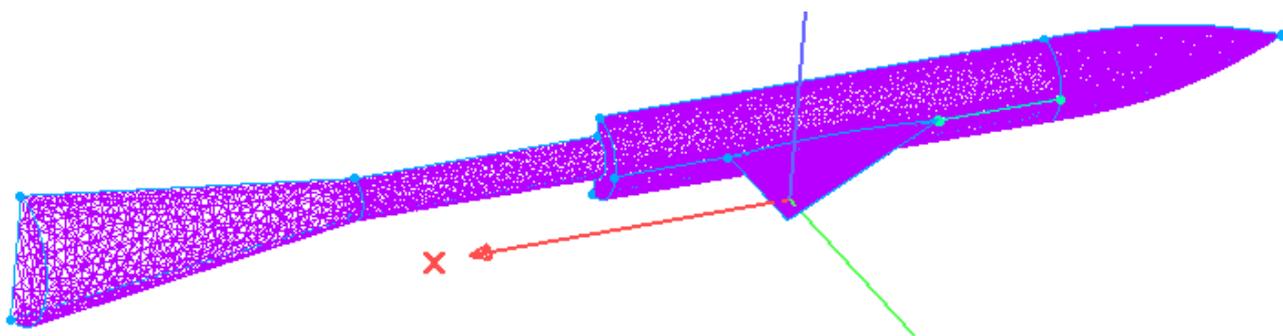


図 4.5 模型内部に切った構造計算用格子

### 4.2.2 計算境界条件

構造計算時の境界条件を図 4.6 に示す。半裁面と支持棒底面を固定とし、それ以外の機体表面は流体計算から得られた圧力分布荷重とする。

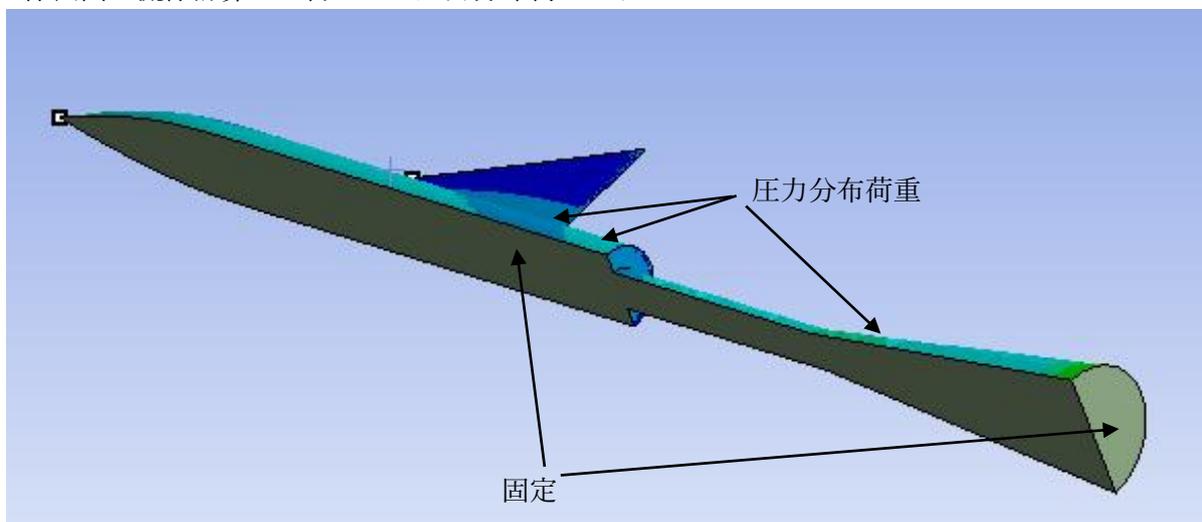


図 4.6 構造計算境界条件

### 4.2.3 計算手法と各条件

有限要素法を主体とした解析ツールである ANSYS を用いる。構造計算手法等を表 4.3 に示す。機体材料は、実際の模型の AGARD-B と同じ SUS304 を使用している。

表 4.3 構造計算時共通条件

計算手法	静的線形構造計算
ソルバ	Mechanical APDL(Newton-Rapson 法)
要素タイプ	四面体ソリッド
機体材料	SUS304(ヤング率 193GPa, 密度 7.93g/cm <sup>3</sup> , ポアソン比 0.29)

### 4.3 流体と構造の繰り返し計算法

本研究で構築した、統合数値計算環境の概要のフローチャートを図 4.7 に示す。まず初めに、形状データを 3DCAD ソフト Solidworks で作成する。次に、格子生成ソフト Pointwise に形状データを入力し、流体と構造用の格子を作成する。作成した格子を用いて、FaSTAR にて流体計算を行う。FaSTAR によって得られた機体表面の圧力分布を ANSYS に入力し、構造計算を行い機体の変形量を求める。変形した形状データを ANSYS から stl 形式で出力し、Pointwise にて再び格子を作成する。

Pointwise に入力可能な形式かつ ANSYS から出力できる形状データの形式が stl しかなかった。Pointwise に入力した形式が stl であると、形状データ上に connector を自動で引いてくれる機能 Connectors on Database Entities が使用できず、手動で形状データに沿うように connector を引かなければならない。これにより、この計算環境は格子生成時に一部手動となっている。

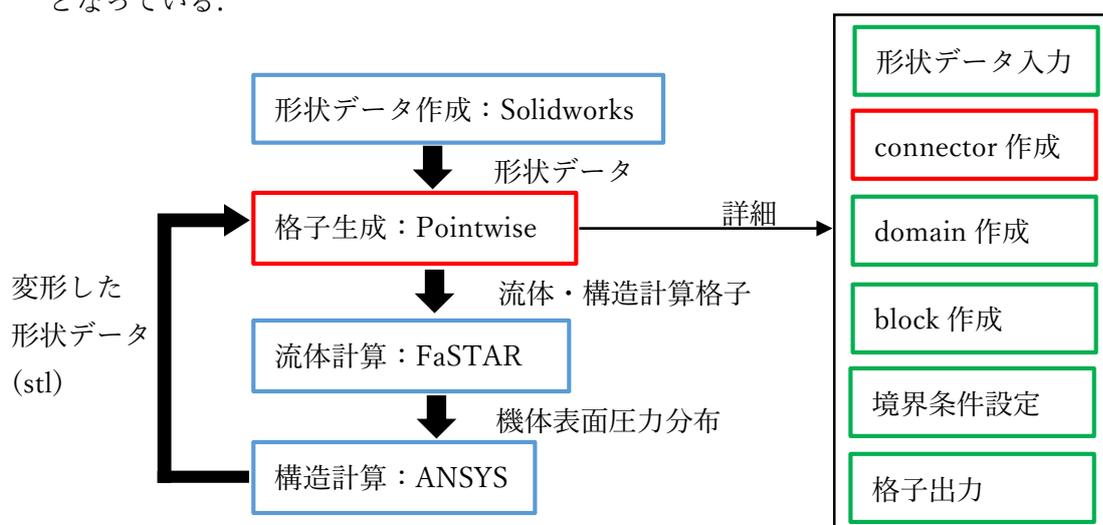


図 4.7 繰り返し計算概要

## 5. 流体と構造計算結果および考察

前章の表 4.2 に示した, 各 case について計算結果を示す.

### 5.1 低迎角 case 計算結果および考察

この節では, 各 case の中でも低迎角である case1~3 の結果および考察を示す.

#### 5.1.1 case1 ( $\alpha = 0.1$ )

case1 は迎角  $0.1^\circ$  の条件である. 計算値と実験値の  $C_L$ ,  $C_D$  を表 5.1 に示す. 全ての case において  $C_L$ ,  $C_D$  共に case1 が最も低い値となった.  $C_L$ ,  $C_D$  共に計算値の方が高く出ている.

表 5.1 case1 計算値と実験値結果

case1	$C_L$	$C_D$
計算値	0.0045	0.0887
実験値	0.0009	0.0289

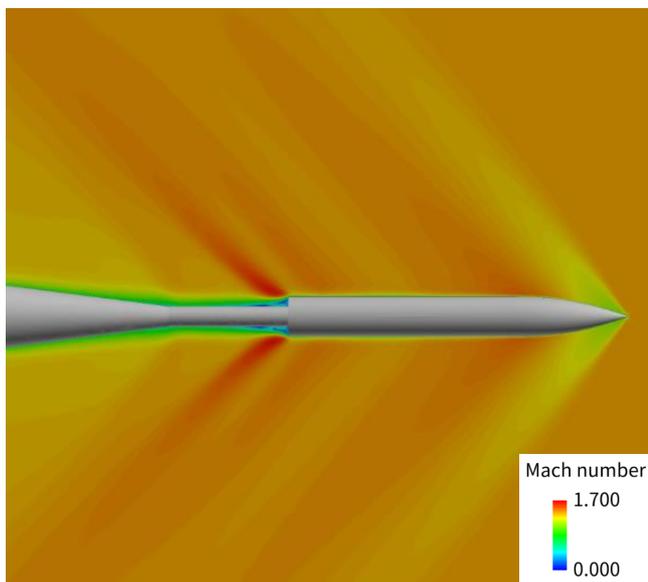


図 5.1 case1 マッハ数分布

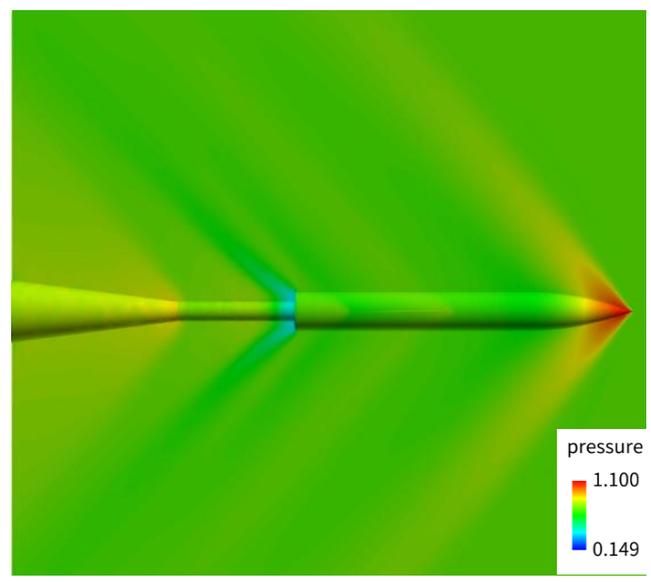


図 5.2 case1 圧力分布

マッハ数分布を図 5.1, 圧力分布を図 5.2 に示す. 迎角  $0.1^\circ$  であるため, ほぼ上下対称なマッハ角となっており, 機体先端からななめ衝撃波が発生していることがわかる.

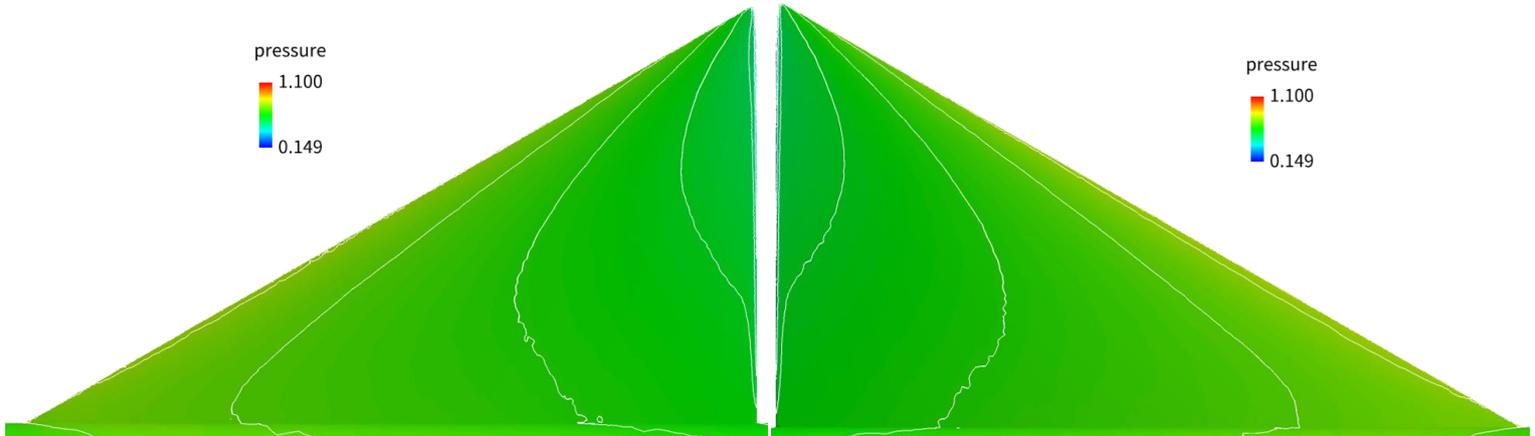


図 5.3 case1 翼上面圧力分布

図 5.4 case1 翼下面圧力分布

翼上面圧力分布を図 5.3 に，翼下面圧力分布を図 5.4 に示す．迎角  $0.1^\circ$  であるため，翼上下面での圧力差がほとんどないことがわかる．この事から全ての case の中で case1 の  $C_L$ ， $C_D$  が最も低い結果となる事が考えられる．迎角の分だけ，翼下面側前縁付近がわずかに上面側よりも高圧となっている．

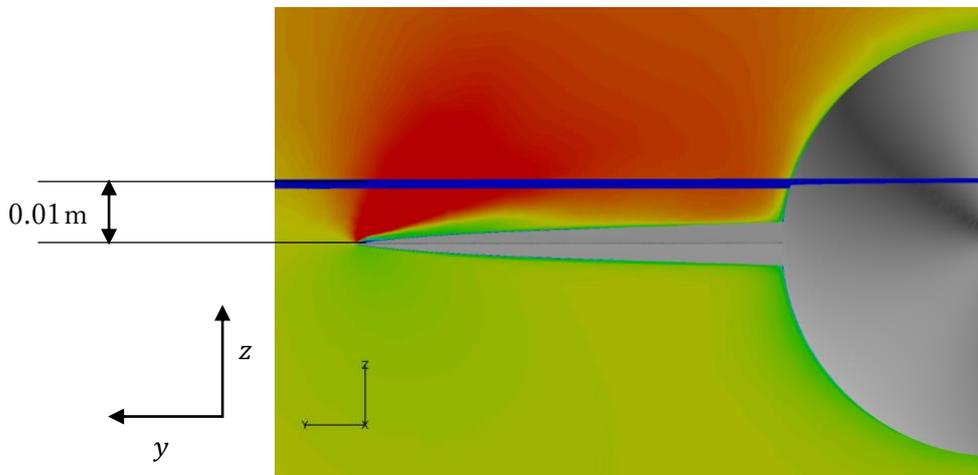


図 5.5 渦度取得位置

渦度の取得位置を図 5.5 に示す．図 5.5 は AGARD-B を機体前方から  $yz$  面で見た図である．図の青線が， $z$  方向垂直に機体中心軸から翼上面側に  $0.01\text{m}$  の位置で渦度分布を取得する．また，この位置は，境界層の外側である．

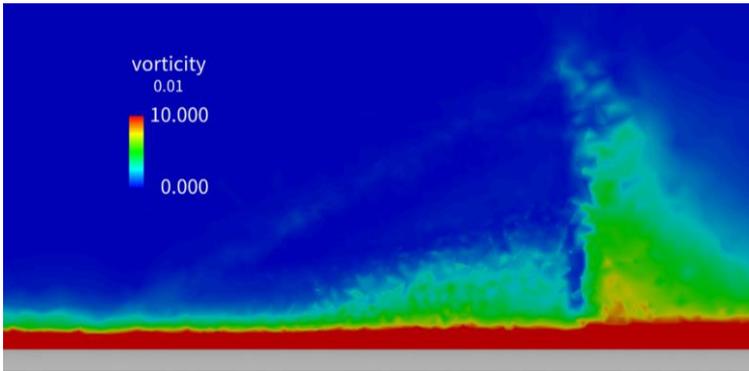


図 5.6 case1 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

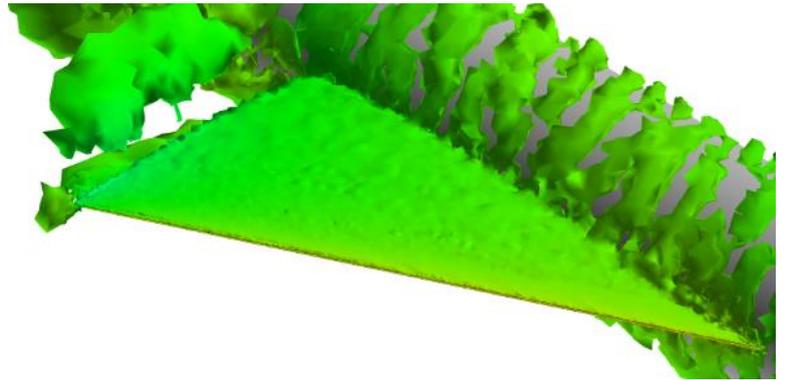


図 5.7 case1 Q 値と表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した渦度分布を図 5.6 に、等 Q 値面上の圧力分布を図 5.7 に示す. 図 5.3 でも示した通り、翼上下面での圧力差がほぼない事から揚力の元となる翼上面に発生する渦もほとんど確認できない. 図 5.6 から翼後方の機体側と翼端には多少渦度が確認できるが、前縁側にはほとんど確認できない.

### 5.1.2 case2 ( $\alpha = 2.2$ )

case2 は迎角  $2.2^\circ$  の条件である. 計算値と実験値の  $C_L$ ,  $C_D$  を表 5.2 示す.  $C_L$  は計算値の方が高く出て入るものの大きな差はない.  $C_D$  は、実験値の 3 倍近い値となっている.

表 5.2 case2 計算値と実験値結果

case2	$C_L$	$C_D$
計算値	0.1069	0.0903
実験値	0.1000	0.0321

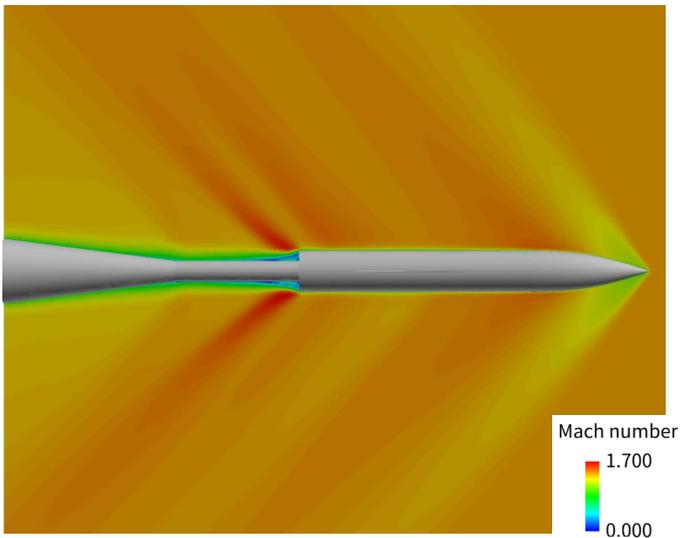


図 5.8 case2 マッハ数分布

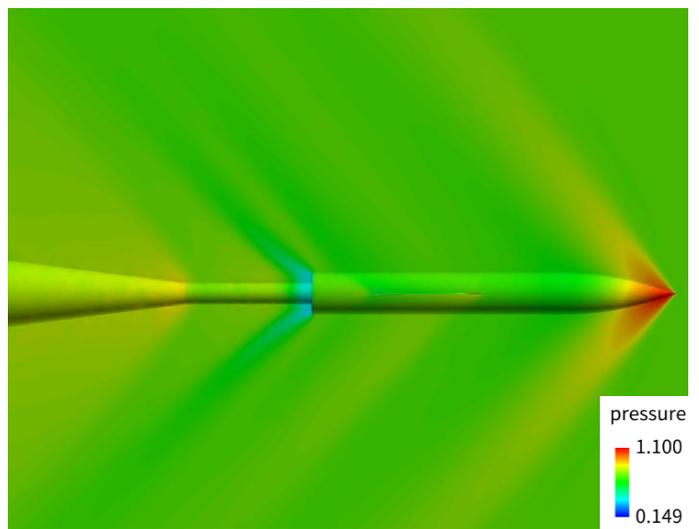


図 5.9 case2 圧力分布

マッハ数分布を図 5.8, 圧力分布を図 5.9 に示す. 迎角  $2.2^\circ$  であるため, case1 よりはずかに衝撃波が迎角分  $z$  方向上向きに傾いている. 図 5.9 より, 機体先端の下部の高圧な箇所が図 5.2 の時よりも増大している.

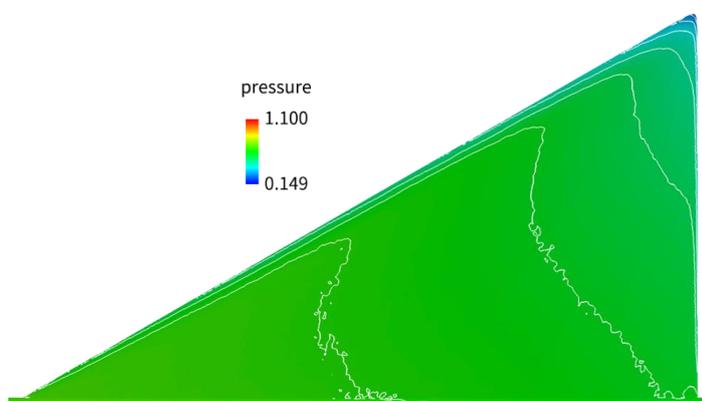


図 5.10 case2 翼上面圧力分布

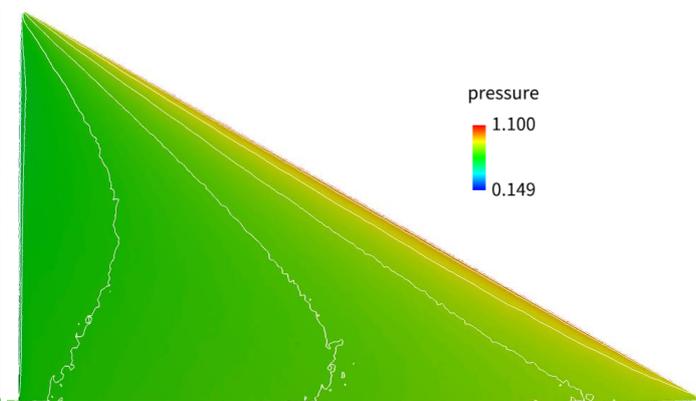


図 5.11 case2 翼下面圧力分布

翼上面圧力分布を図 5.10 に, 翼下面圧力分布を図 5.11 に示す. 図 5.10 では, 翼後方の翼端部に低圧となっている箇所が見られる. 図 5.11 では, 翼端部を中心に高圧となっている領域が確認できる. case1 の時よりは翼上下面の翼面圧力差が小さいながら確認できる.

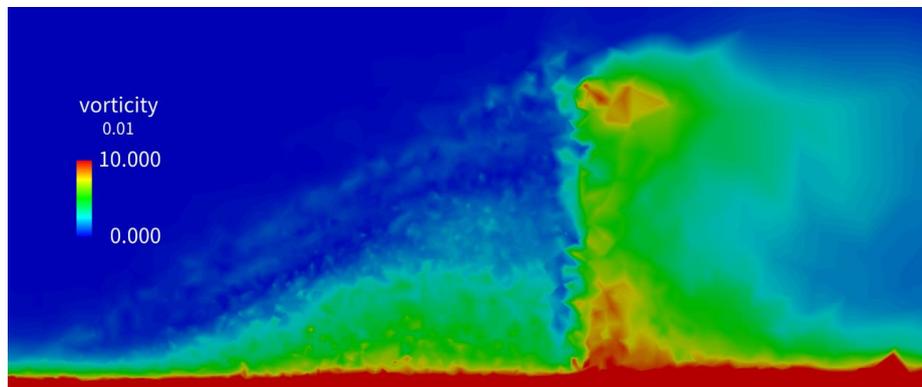


図 5.12 case2 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

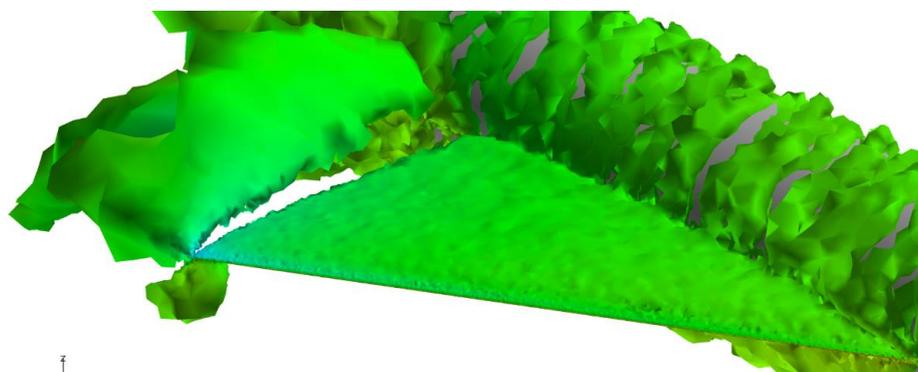


図 5.13 case2 Q 値と表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した渦度分布を図 5.12 に、等 Q 値面上の圧力分布を図 5.13 に示す。図 5.12 の渦度から、翼の  $60^\circ$  角の先端から後方に渦ができていることが確認できる。また、図 5.13 の Q 値も同様に、渦の発生が確認できる。

### 5.1.3 case3 ( $\alpha = 4.3$ )

case3 は迎角  $4.3^\circ$  の条件である。計算値と実験値の  $C_L$ ,  $C_D$  を表 5.3 示す。 $C_L$ ,  $C_D$  共に計算値の方が高く出ている。 $C_L$  は、case2 同様に大きく差はないが、 $C_D$  は、2 倍程度計算値の方が高く出ている。

表 5.3 case3 計算値と実験値結果

case3	$C_L$	$C_D$
計算値	0.2126	0.0887
実験値	0.2020	0.0423

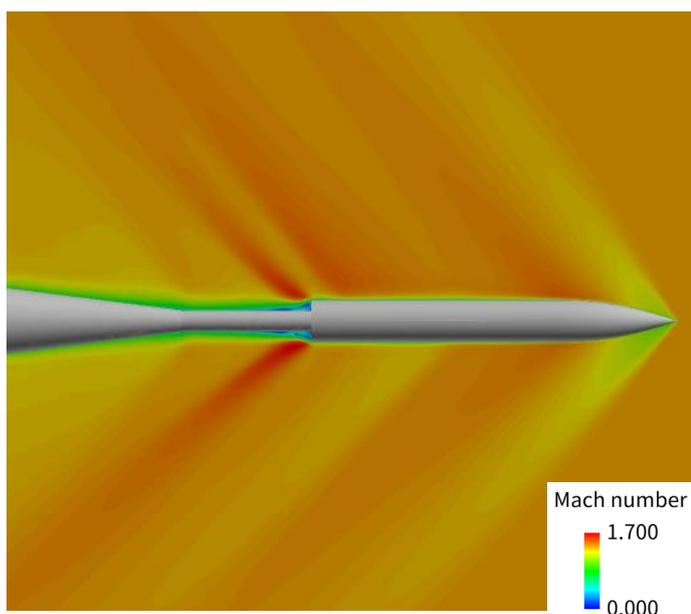


図 5.14 case3 マッハ数分布

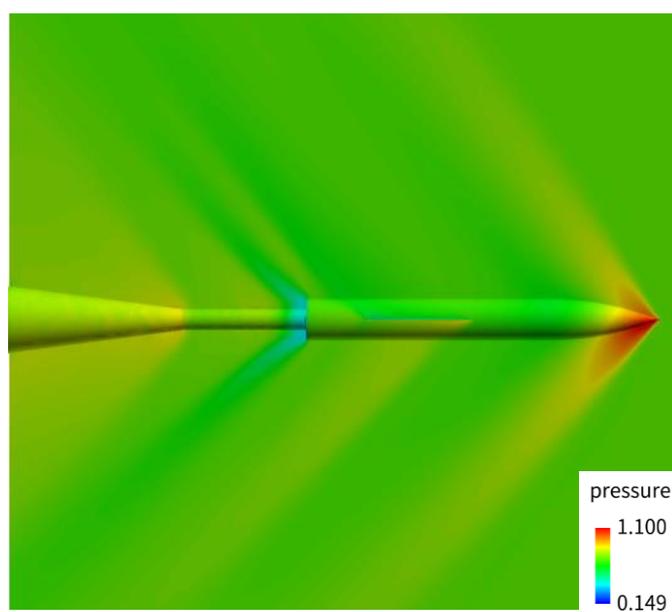


図 5.15 case3 圧力分布

マッハ数分布を図 5.14, 圧力分布を図 5.15 に示す。case1 から case2 の変化と同様に、迎角の変化によって、斜め衝撃波や伝播角度も偏向している。

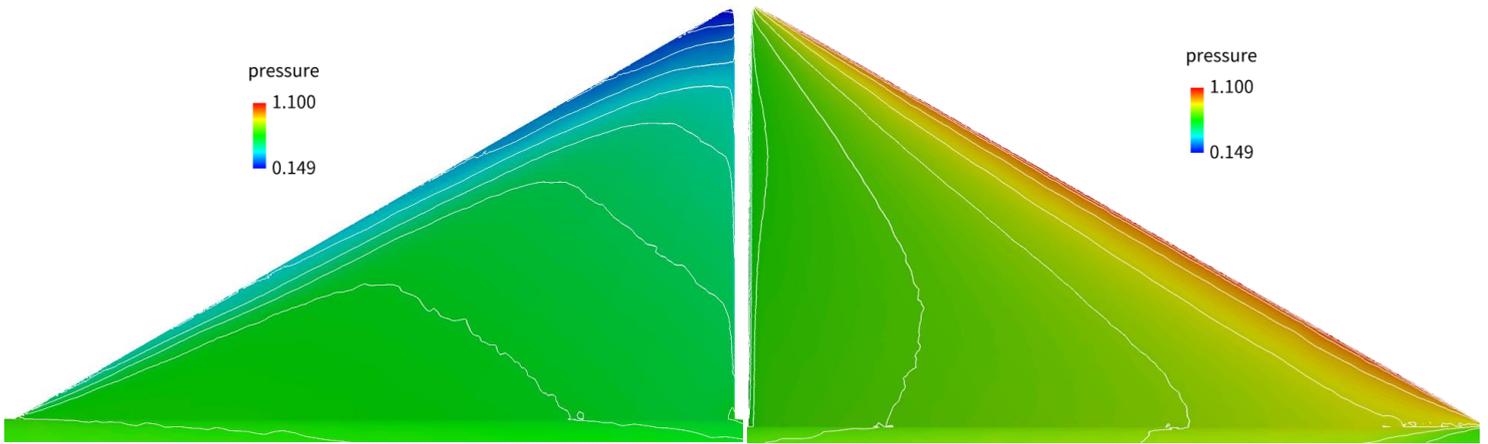


図 5.16 case3 翼上面圧力分布

図 5.17 case3 翼下面圧力分布

翼上面圧力分布を図 5.16 に、翼下面圧力分布を図 5.17 に示す. 図 5.16 から, case2 よりも翼の  $60^\circ$  角の先端付近の低圧部が広がりを見せると同時に更に低圧となっている. 図 5.17 より, 翼先端部を中心に翼端部が, case2 よりも更に高圧となっていることがわかる. この事から翼面圧力差の増加により,  $C_L$  の増加につながっている事がわかる.

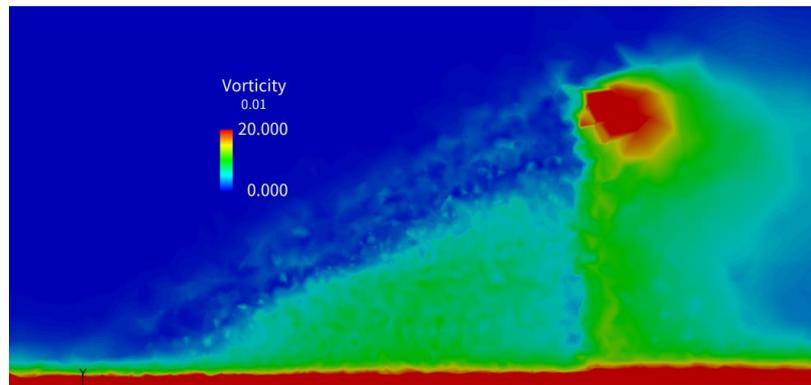


図 5.18 case3 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

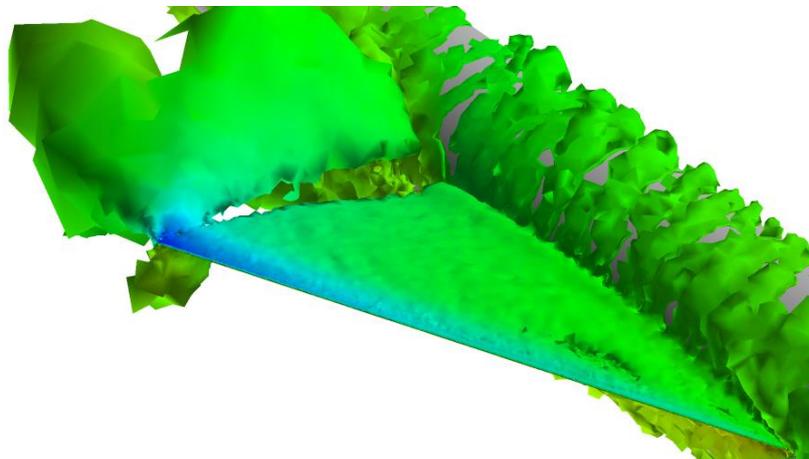


図 5.19 case3 Q 値と表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した渦度分布を図 5.18 に、等 Q 値面上の圧力分布を図 5.19 に示す。図 5.18, 図 5.19 から翼の 60° 角の先端から後方に渦ができています。case2 と同様の位置でより強い渦が確認できる。また翼と機体の付け根での渦も多少確認できる。

## 5.2 高迎角 case 計算結果および考察

### 5.2.1 case4 ( $\alpha = 8.45$ )

case4 は迎角 8.45° の条件である。case4 では迎角がより大きく、風洞実験では模型の変形が確認されたことから流体計算と構造計算を繰り返し行う。空力係数が共にほぼ収束したことから、繰り返し回数は 3 回とした。初期形状と 3 回目変形後の計算値、実験値、変形量の  $C_L$ ,  $C_D$  を表 5.4 示す。変形により  $C_L$  は 0.0019,  $C_D$  は 0.0032 と共に減少することが分かった。また、 $C_L$ ,  $C_D$  両方の減少に伴い、変形量も収束に向かい、3 回目の変形後の方が初期形状からの変形量よりも 0.0111mm 減少していることがわかる。多少の  $C_L$ ,  $C_D$  の変化でも変形に影響することがわかる。

表 5.4 case4 計算値と実験値結果と変形量

case4	$C_L$	$C_D$	変形量[mm]
初期形状	0.4343	0.1510	0.5507
変形後	0.4324	0.1478	0.5396
実験値	0.4010	0.0857	

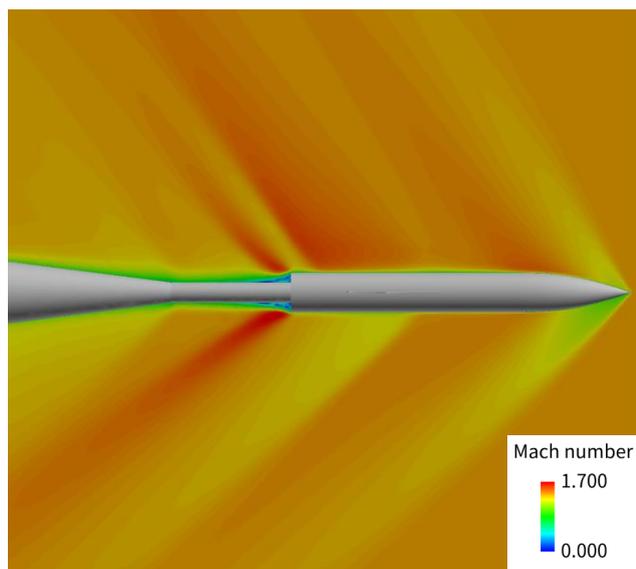


図 5.20 case4 変形後 マッハ数分布

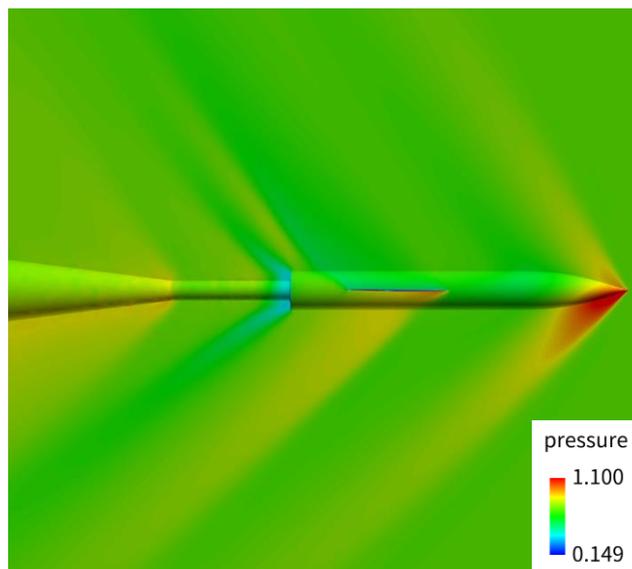


図 5.21 case4 変形後 圧力分布

変形後のマッハ数分布を図 5.20, 変形後の圧力分布を図 5.21 を示す.

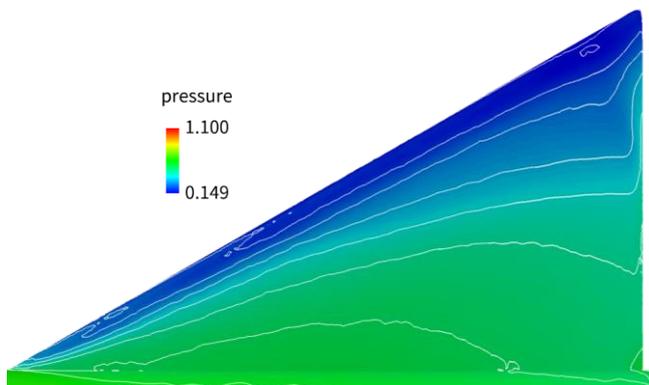


図 5.22 case4 変形後 翼上面圧力分布

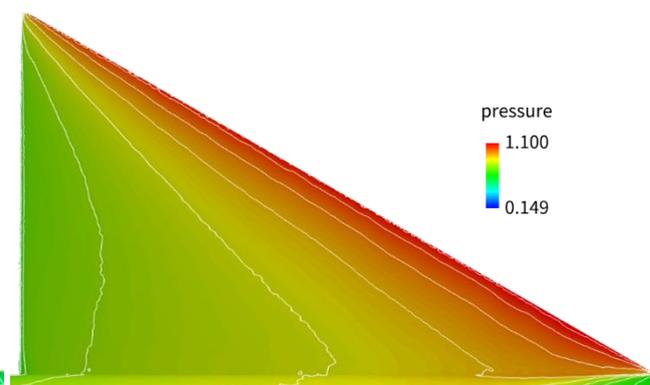


図 5.23 case4 変形後 翼下面圧力分布

変形後の翼上面圧力分布を図 5.22 に, 変形後の翼下面圧力分布を図 5.23 に示す. case3 では, 翼上面側において, 翼の  $60^\circ$  角の先端付近にしか低圧となっている範囲はなかったが, 翼先端部から翼端全体にかけて低圧となっている範囲が増えている. また, 翼の  $60^\circ$  角の先端近くの後縁においての等高線が, case3 までは翼端とほぼ平行になっていた等高線が, case4 では後縁とほぼ平行となった. 機体下面側も case3 よりも更に高圧となっていることがわかる.

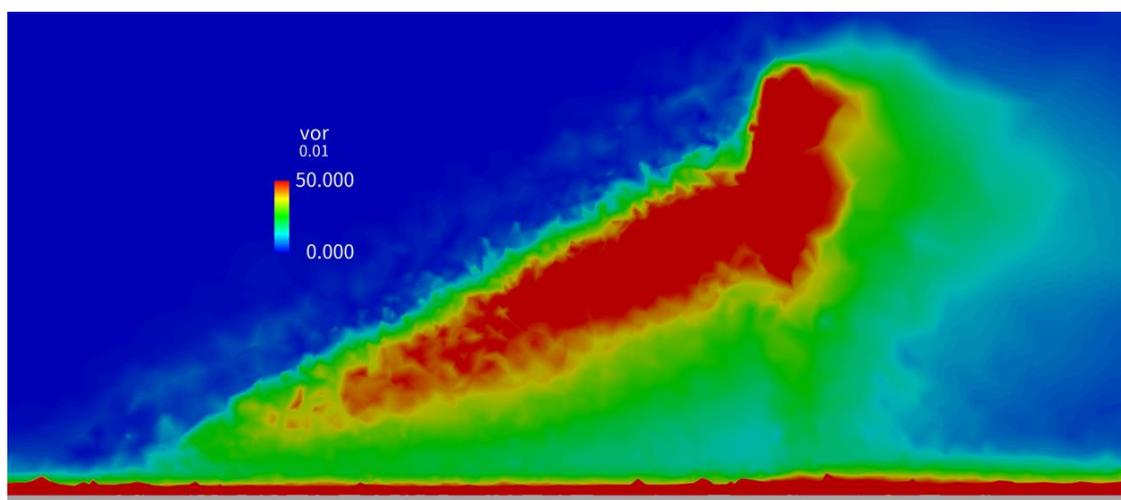


図 5.24 case4 変形後 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

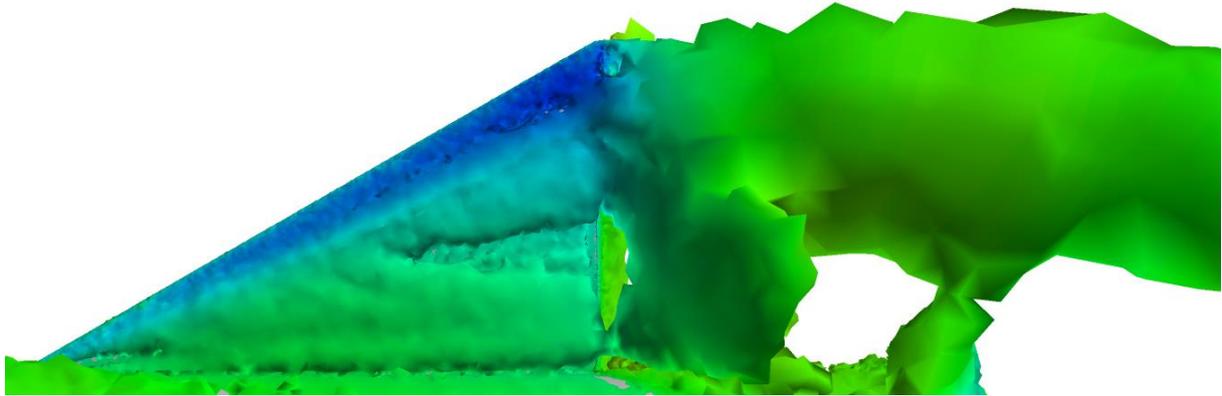


図 5.25 case4 変形後 Q 値 表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した変形後の渦度分布を図 5.24 に、変形後の等 Q 値面上の圧力分布を図 5.25 に示す。渦度では、case3 ではあまり確認できなかった翼上面においての翼先端から翼後方へ駆ける渦が確認できる。Q 値では、渦度分布で見られた翼上面の渦と翼の後方へとつながる渦、翼と機体の付け根での渦が確認できる。どの渦も case3 の時より成長した渦となっていることがわかる。

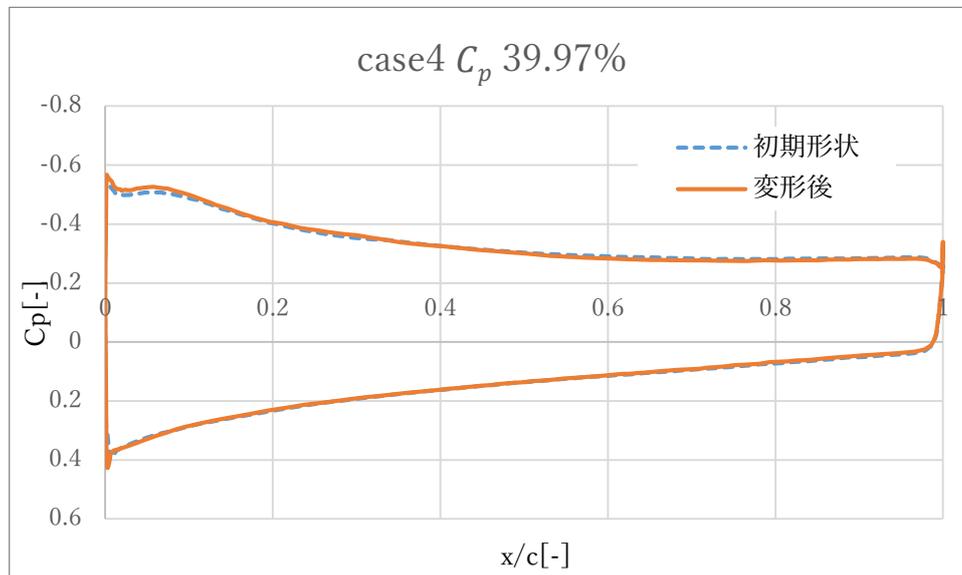


図 5.26 case4  $C_p$ 線図 39.97%

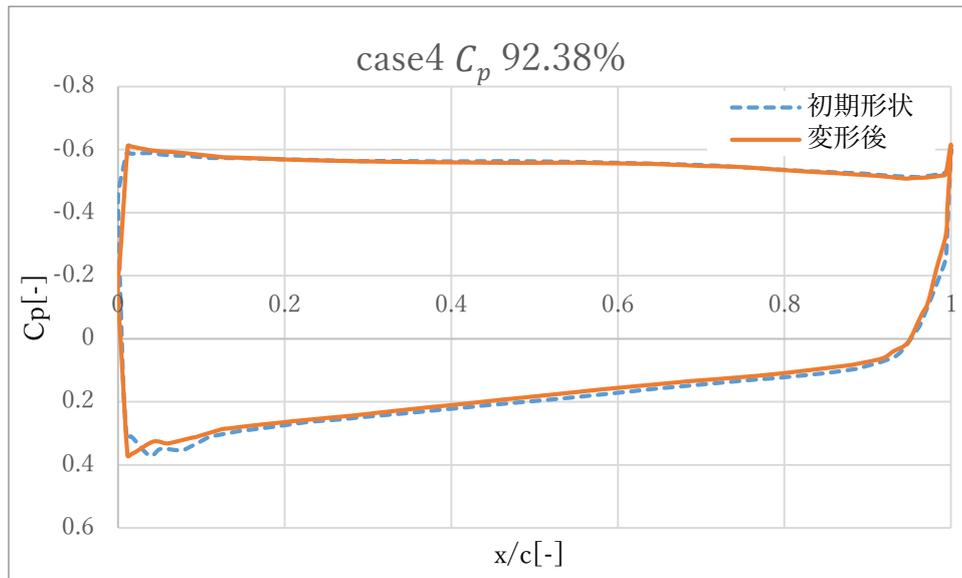


図 5.27 case4  $C_p$ 線図 92.38%

スパン方向 39.97%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.26 に、スパン方向 92.38%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.27 に示す. スパン方向 39.97%の位置では、変形が非常に小さいため初期形状と変形後でほぼ同じである. スパン方向 92.38%の位置では、39.97%の位置よりは変形が大きい. 翼上面側は初期形状と変形後での変化は特に確認できないが、翼下面側において初期形状の方がわずかながら高く出ている. この差が、変形前の方が $C_L$ が高く出ていることにつながっていると考えられる.

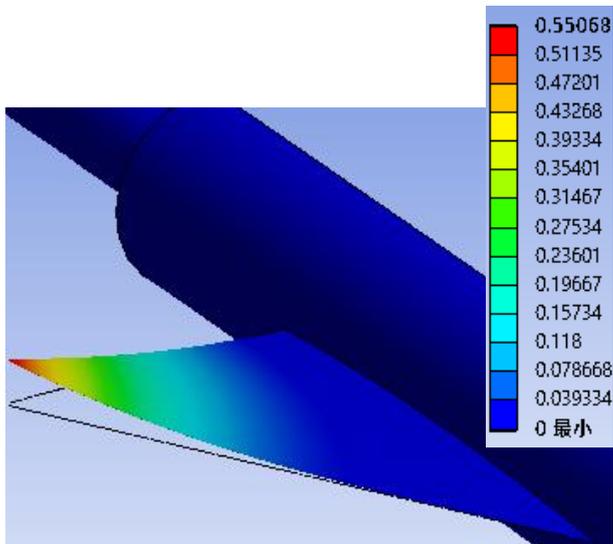


図 5.28 case4 構造計算 1 回目

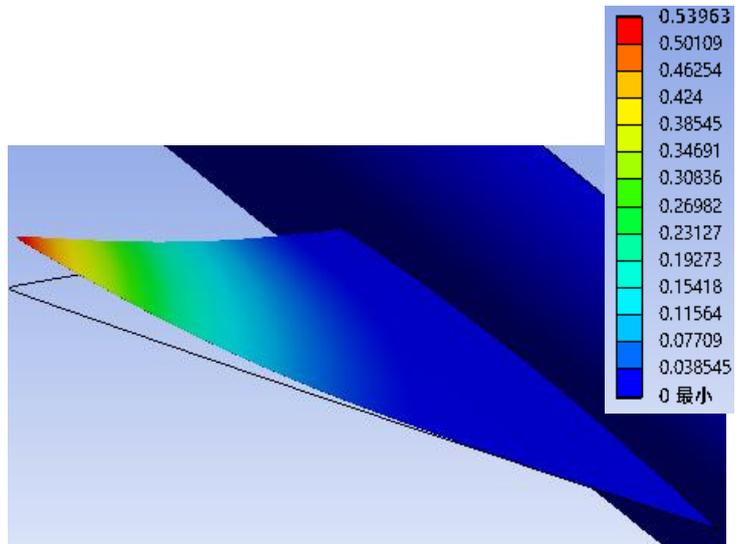


図 5.29 case4 構造計算 3 回目

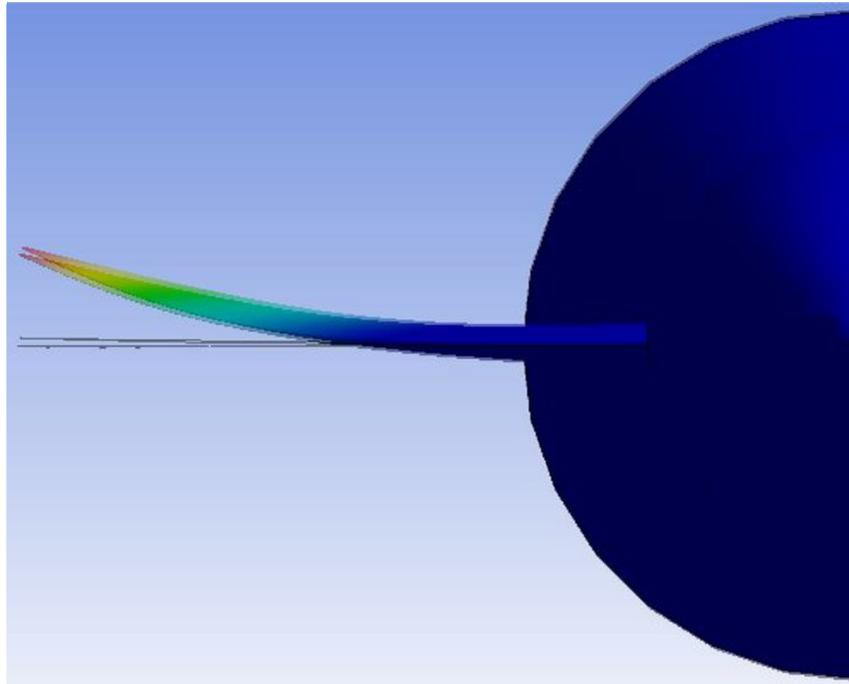


図 5.30 case4 構造計算 1 回目と 3 回目の変形比較

構造計算 1 回目の初期形状からの変形結果を図 5.28 に、流体と構造計算の繰り返し 3 回目の変形結果を図 5.29 に、 $xz$ 面での 1 回目と 3 回目の変形結果比較を図 5.30 に示す。どの変形結果図も  $z$ 方向上向きに 30 倍して描いた図となっている。1 回目の最大変形量は 0.5507mm, 3 回目の最大変形量は 0.5396mm となっている。差は 0.0111mm であり, 1 回目の方が変形量が大きい。

どちらの結果も翼の  $60^\circ$  角の先端に向けて  $z$ 方向上向きに変形している。

### 5.2.2 case5 ( $\alpha = 10.65$ )

case5 は迎角  $10.65^\circ$  の条件である。風洞実験で模型の変形が確認されたことから流体計算と構造計算を繰り返し行う。空力係数が共にほぼ収束したことから、繰り返し回数は 3 回とした。初期形状と 3 回目の変形後の計算値, 実験値, 変形量の  $C_L$ ,  $C_D$  を表 5.5 示す。変形により  $C_L$  は 0.0017,  $C_D$  は 0.0015 と共に減少することが分かった。また,  $C_L$ ,  $C_D$  両方の減少に伴い, 変形量も収束に向かい, 3 回目の変形後の方が初期形状からの変形量よりも 0.0151mm 減少していることがわかる。case4 の初期形状と変形後を比較して,  $C_L$  の減少は同程度だが,  $C_D$  の減少は半分程度となっている。変形量は case5 の方が大きい結果となった。

表 5.5 case5 計算値と実験値結果と変形量

case5	$C_L$	$C_D$	変形量[mm]
初期形状	0.5450	0.1854	0.6281
変形後	0.5433	0.1839	0.6130
実験値	0.4933	0.1197	

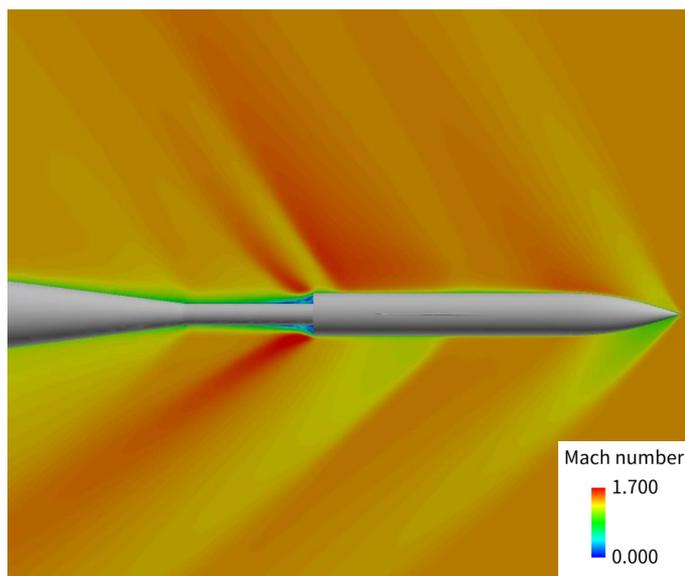


図 5.31 case5 変形後 マッハ数分布

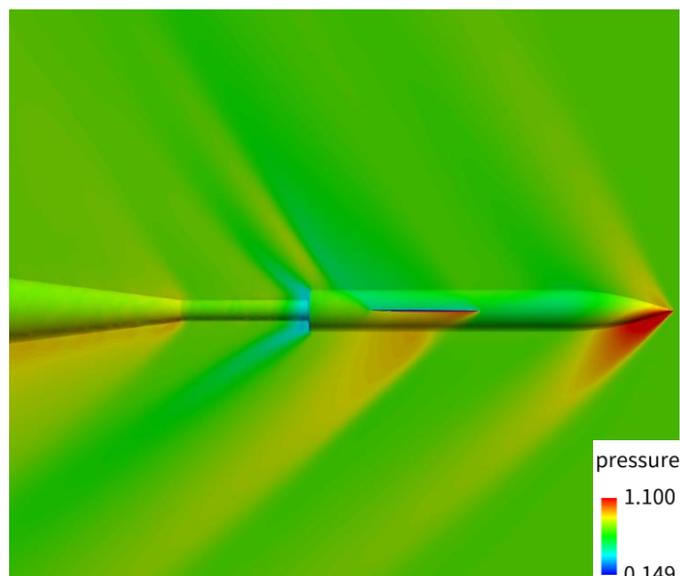


図 5.32 case5 変形後 圧力分布

変形後のマッハ数分布を図 5.31, 変形後の圧力分布を図 5.32 に示す. 機体先端部の下部だけでなく, 翼下面側も更に高圧となっていることがわかる.

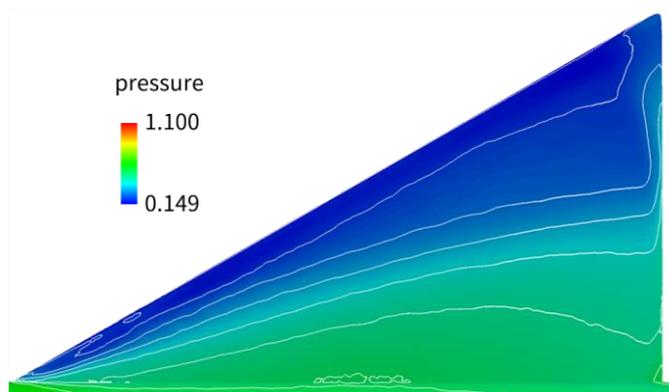


図 5.33 case5 変形後 翼上面圧力分布

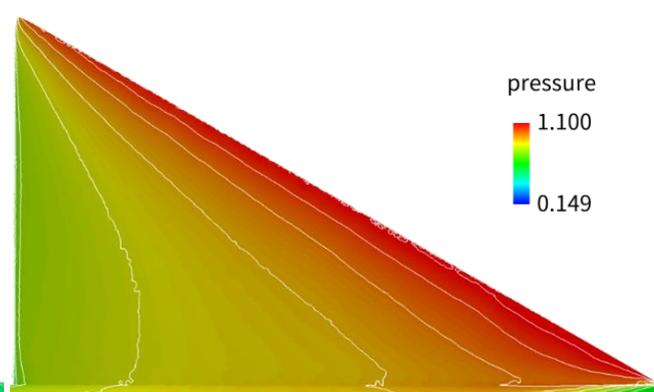


図 5.34 case5 変形後 翼下面圧力分布

変形後の翼上面圧力分布を図 5.33 に, 変形後の翼下面圧力分布を図 5.34 に示す. case4 より翼上面側では更に低圧な範囲が翼端部付近から機体中心側へと増えた. 翼端付近での等高線が case4 よりも粗であるため, 圧力の変化が緩やかになっている. 翼下面側では更に

高圧な範囲が増えた.

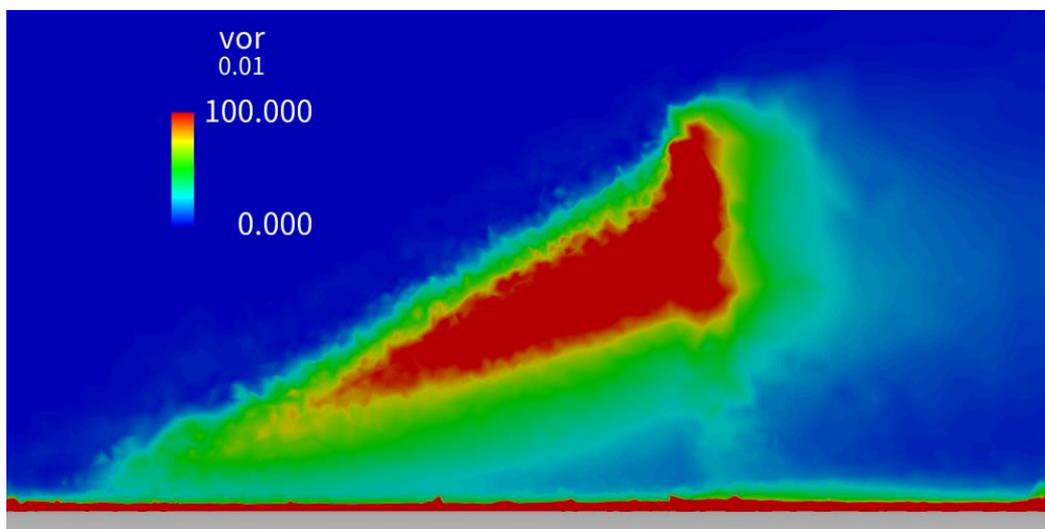


図 5.35 case5 変形後 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

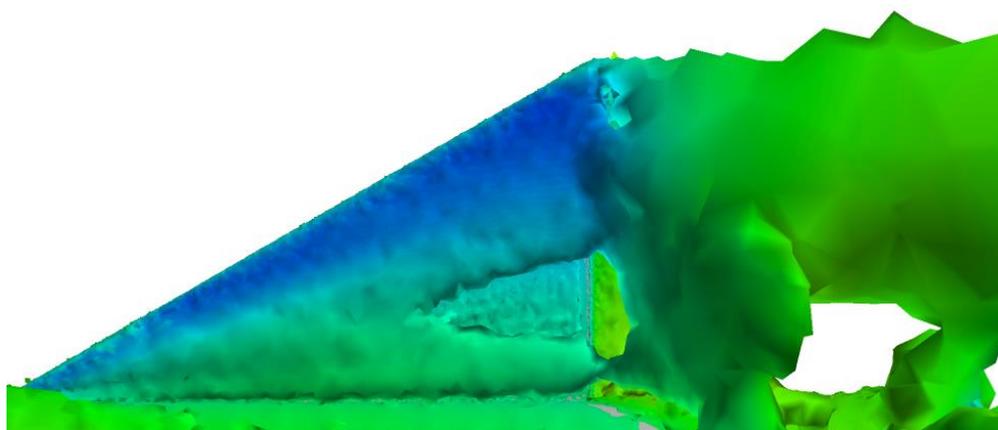


図 5.36 case5 変形後 Q 値の表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した変形後の渦度分布を図 5.35 に, 変形後の等 Q 値面上の圧力分布を図 5.36 に示す. case4 よりも翼上面に発生している渦は大きい. Q 値では, case4 同様に渦度分布で見られた翼上面の渦と翼の後方へとつながる渦, 翼と機体の付け根での渦が確認できる. 揚力の元となる翼上面の渦が case4 よりも成長していることから, case5 の方が  $C_L$  が高いことが考えられる.

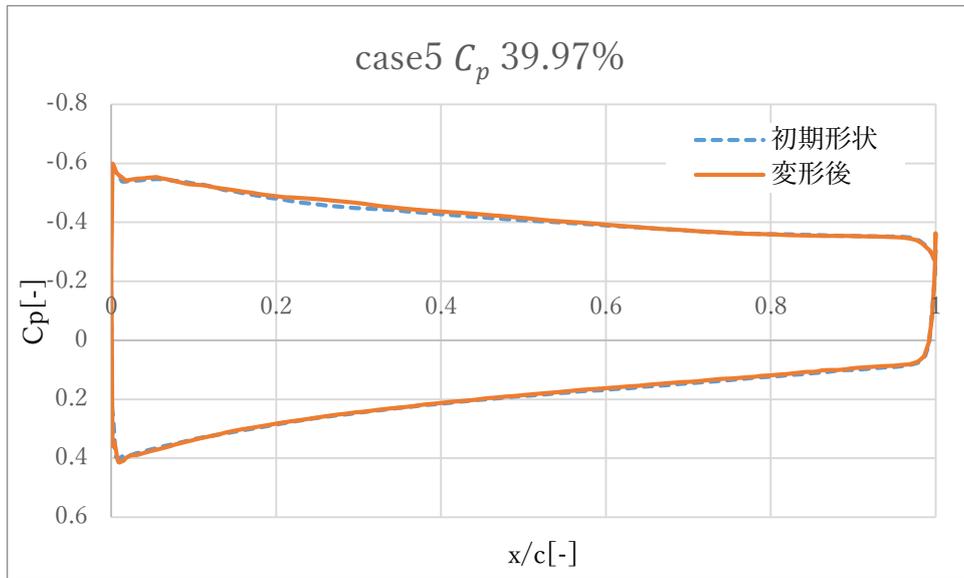


図 5.37 case5  $C_p$ 線図 39.97%

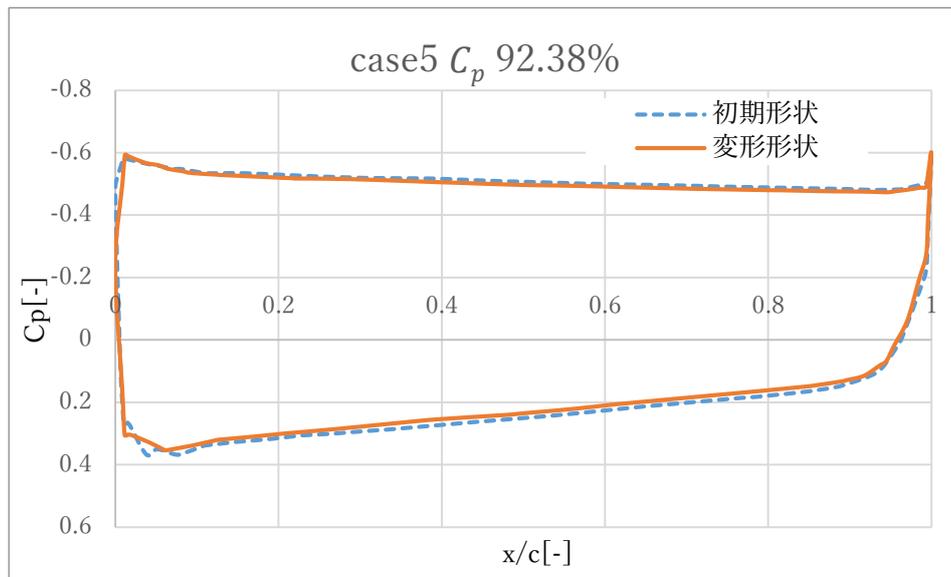


図 5.38 case5  $C_p$ 線図 92.38%

スパン方向 39.97%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.37 に、スパン方向 92.38%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.38 に示す. スパン方向 39.97%の位置では, case4 同様に, 変形が非常に小さいため初期形状と変形後でほぼ同じである. スパン方向 92.38%の位置では, 39.97%の位置よりは変形が大きい. case4 では翼下面側でしかほとんど変化がなかったが, case5 では翼上下面とも初期形状の方が高く出ている. この差も, 初期形状の方が $C_L$ が高く出ていることにつながっていると考えられる. case5 の方が変形量も大きいいため,  $C_p$ 線図の変化にもつながったのではないかと考えられる.

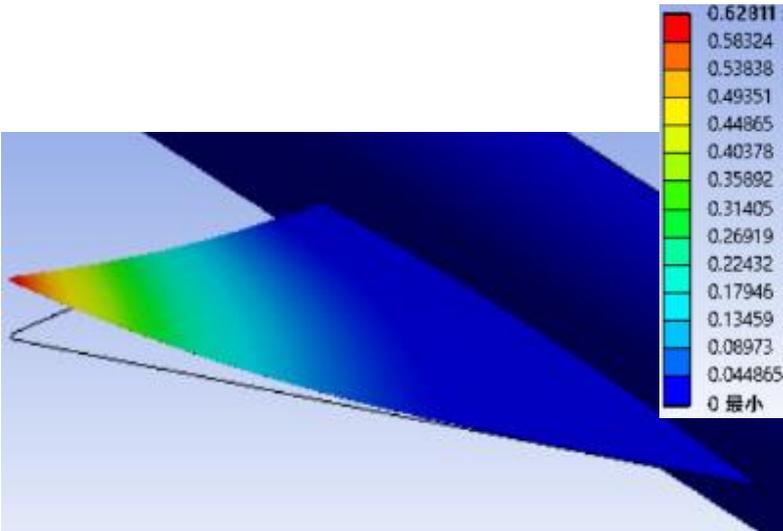


図 5.39 case5 構造計算 1 回目

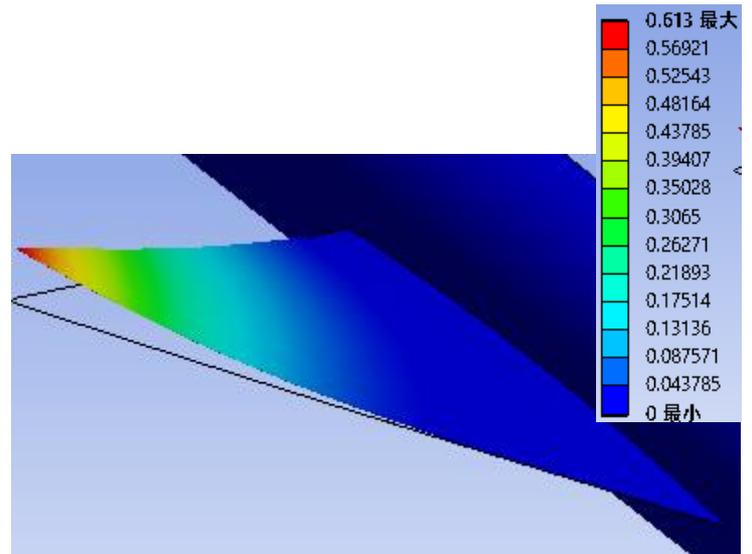


図 5.40 case5 構造計算 3 回目

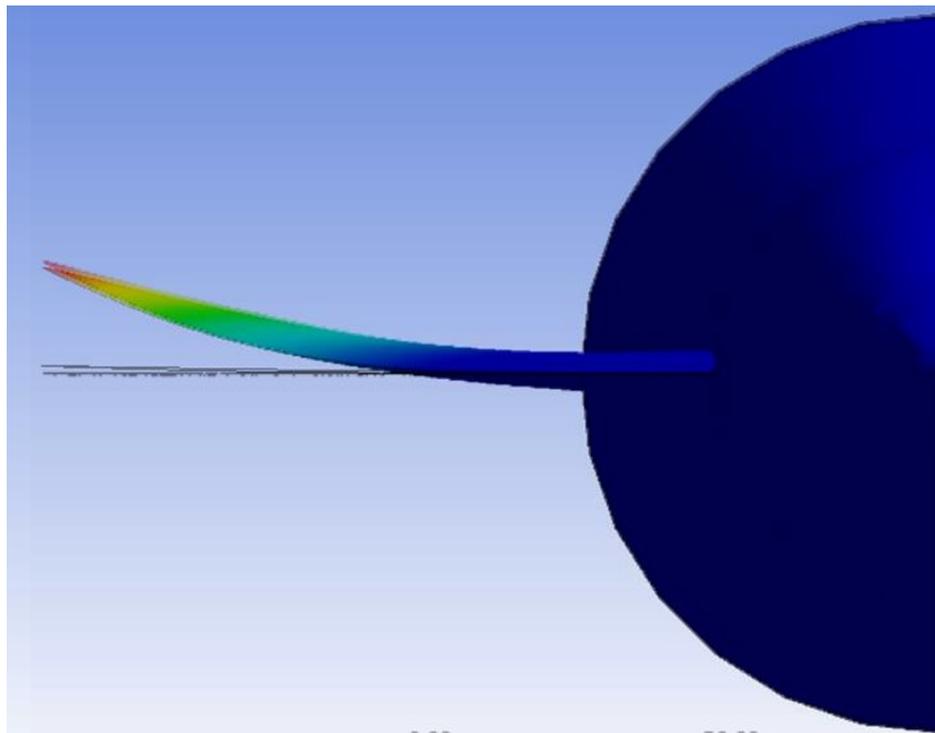


図 5.41 case5 1 回目と 3 回目の変形比較

構造計算 1 回目の初期形状からの変形結果を図 5.39 に、流体と構造計算の繰り返し 3 回目の変形結果を図 5.40 に、 $xz$ 面での 1 回目と 3 回目の変形結果比較を図 5.41 に示す。どの変形結果も、 $z$ 方向上向きに 30 倍して描いた図となっている。1 回目の最大変形量は 0.6281mm、3 回目の最大変形量は 0.6130mm となっている。差は 0.0151mm であり、1 回目の方が変形量が大きい。どちらの結果も翼の  $60^\circ$  角の先端が  $z$ 方向上向きに変形している。

### 5.2.3 case6 ( $\alpha = 12.75^\circ$ )

case6 は迎角  $12.75^\circ$  の条件である。風洞実験では模型の変形が確認されたことから流体計算と構造計算を繰り返し行う。空力係数が共にほぼ収束したことから、繰り返し回数は3回とした。初期形状と3回目の変形後の計算値、実験値、変形量の  $C_L$ 、 $C_D$  を表 5.6 に示す。変形により  $C_L$  は 0.0035、 $C_D$  は 0.0024 と共に減少することが分かった。また、 $C_L$ 、 $C_D$  両方の減少に伴い、変形量も収束に向かい、3回目の変形後の方が初期形状からの変形量よりも 0.0085mm 減少していることがわかる。case6 の初期形状と変形後を比較して、 $C_L$ 、 $C_D$  共に約2倍減少している。変形量は case6 の方が大きい結果となった。

表 5.6 case6 計算値と実験値結果と変形量

case6	$C_L$	$C_D$	変形量[mm]
初期形状	0.6547	0.2273	0.6990
変形後	0.6512	0.2249	0.6905
実験値	0.5866	0.1587	

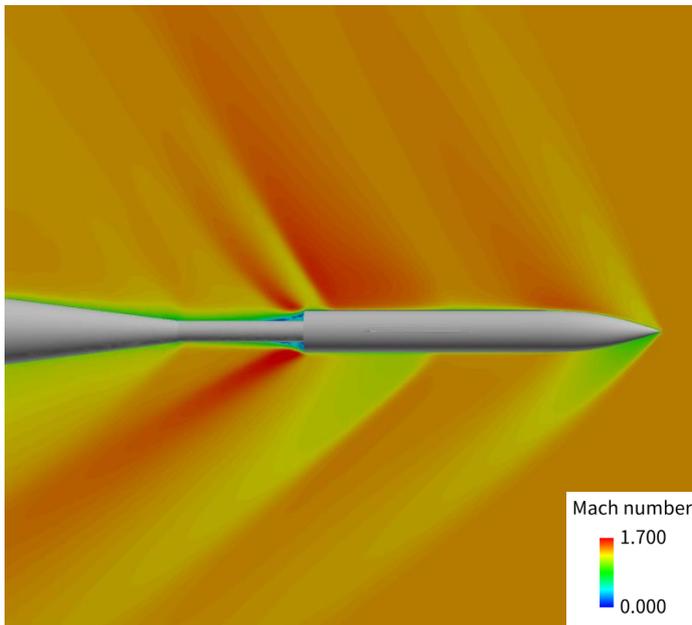


図 5.42 case6 変形後 マッハ数分布

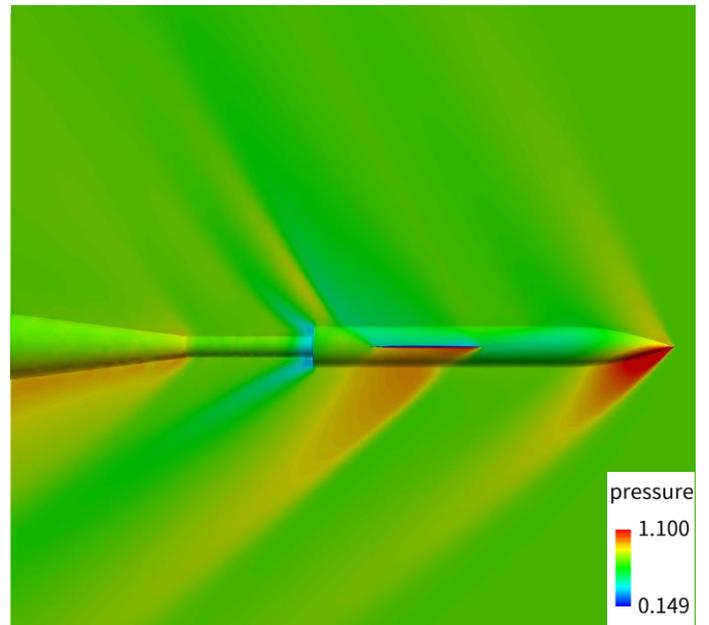


図 5.43 case6 変形後 圧力分布

変形後のマッハ数分布図 5.42 を、変形後の圧力分布を図 5.43 に示す。機体先端部の下部だけでなく、翼下面側も case5 の時より更に高圧となり、機体先端部と同等程度に高圧となっている。

pressure  
1.100  
0.149

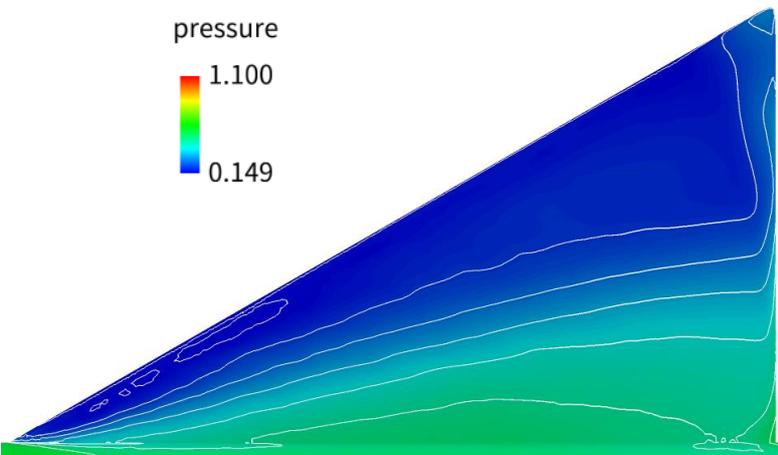


図 5.44 case6 変形後 翼上面圧力分布

pressure  
1.100  
0.149

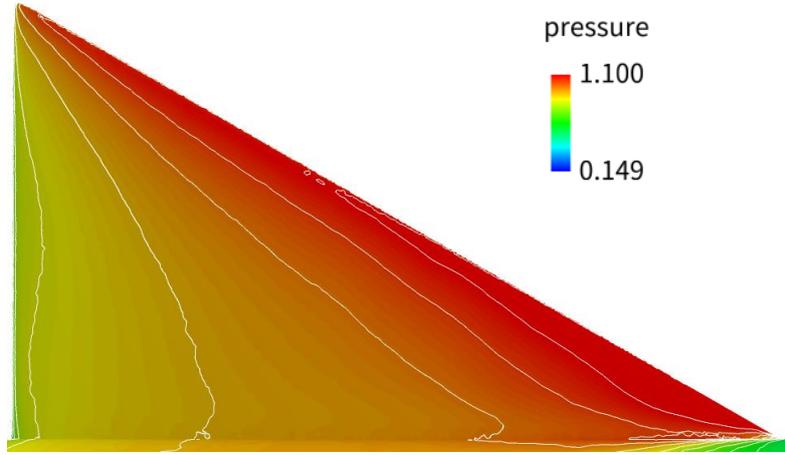


図 5.45 case6 変形後 翼下面圧力分布

変形後の翼上面圧力分布を図 5.44 に，変形後の翼下面圧力分布を図 5.45 に示す. case5 より翼上面側では更に低圧な範囲が翼端部付近から機体中心側へと増えた. 等高線が密となる圧力変化が大きい場所が case5 よりも機体中心側へ移動している. 翼下面側では更に高圧な範囲が増えた結果となった.

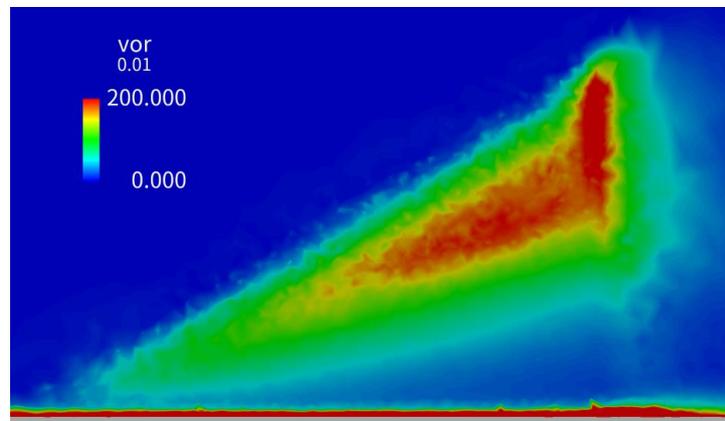


図 5.46 case6 変形後 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

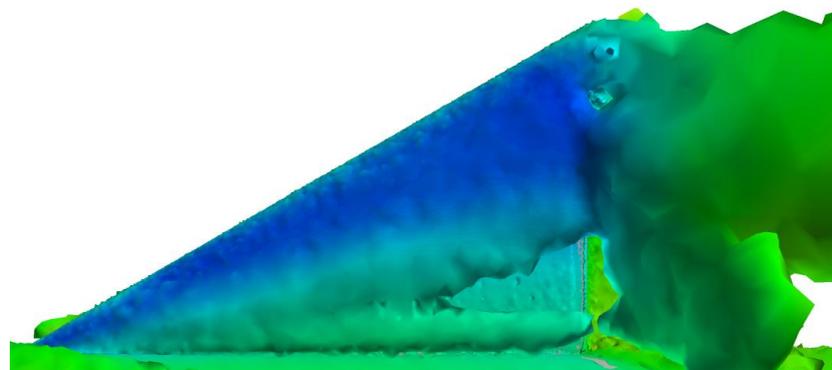


図 5.47 case6 変形後 Q 値の表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した変形後の渦度分布を図 5.46 に，変形後の等 Q 値面上の圧力分布を図 5.47 に示す. case5 よりも翼上面に発生している渦は大きい. 翼上面で発生している渦よりも翼後縁付近で発生している渦の方が大きい. Q 値では，case5 同様に渦度分布で見られた翼上面の渦と翼の後方へとつながる渦，翼と機体の付け根での渦が確認できる. 図 5.44 において等高線が密となっていた場所と Q 値において翼上面の渦と翼の後方へとつながる渦の場所が一致している.

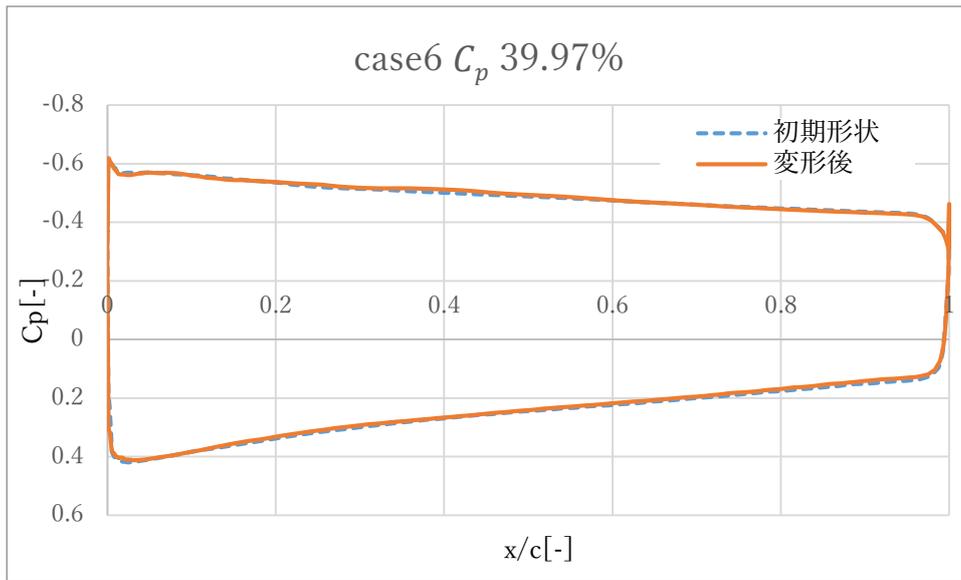


図 5.48 case6  $C_p$  39.97%

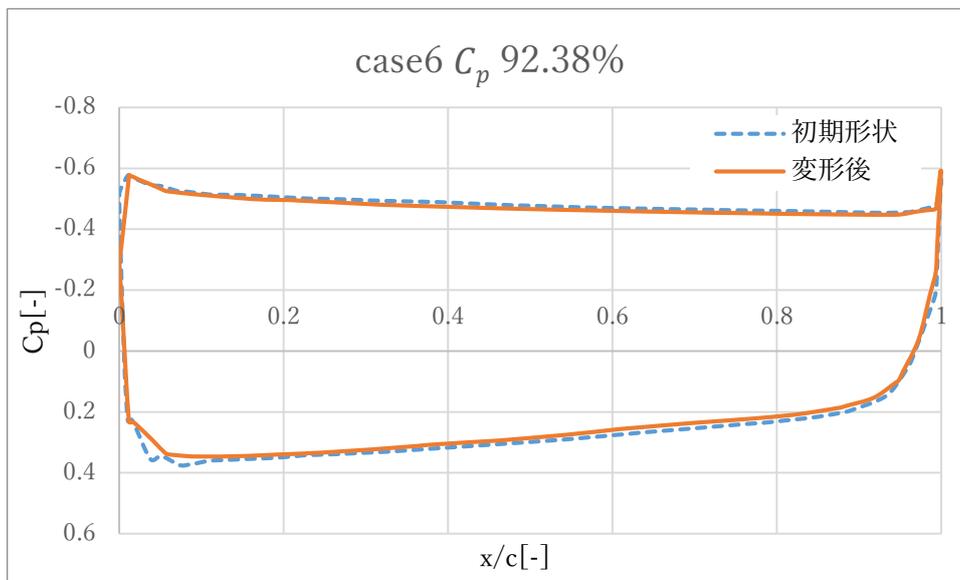


図 5.49 case6  $C_p$  92.38%

スパン方向 39.97%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.48 に、スパン方向 92.38%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.49 に示す。スパン方向 39.97%の位置では、case5 同様に、変形が非常に小さいため初期形状と変形後ではほぼ同じである。スパン方向 92.38%の位置では、39.97%の位置よりは変形が大きい。翼上下面とも初期形状の方が高く出ている。この差が、初期形状の方が $C_L$ が高く出ていることにつながっていると考えられる。しかし、case5 に比べて $C_p$ 線図の変化がわずかながら小さい。構造計算 1 回目と 3 回目の変形量の差が case5 の方が大きかったことから、 $C_p$ 線図の変化は変形量の増減にも影響することがわかる。

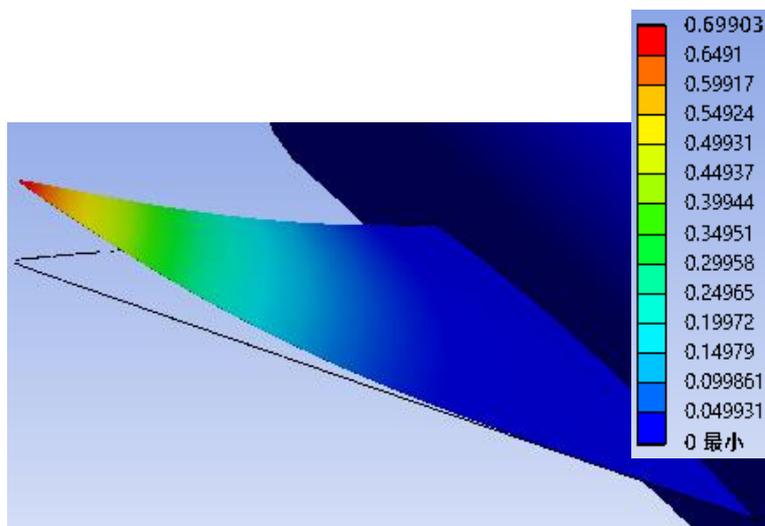


図 5.50 case6 構造計算 1 回目 変形

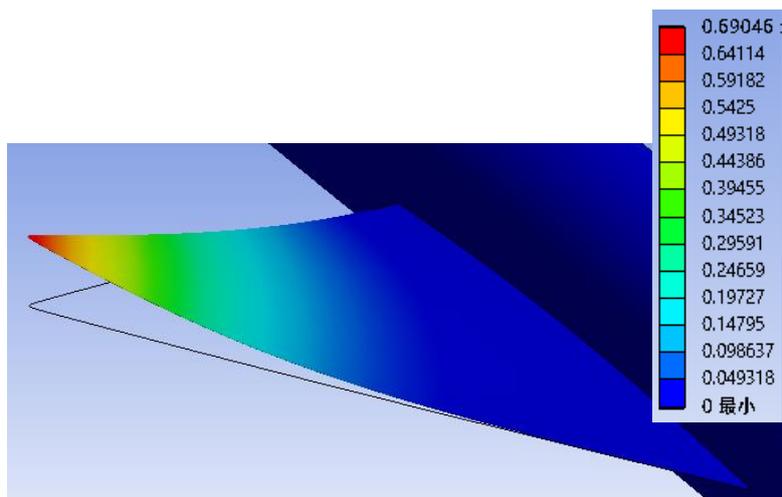


図 5.51 case6 構造計算 3 回目 変形

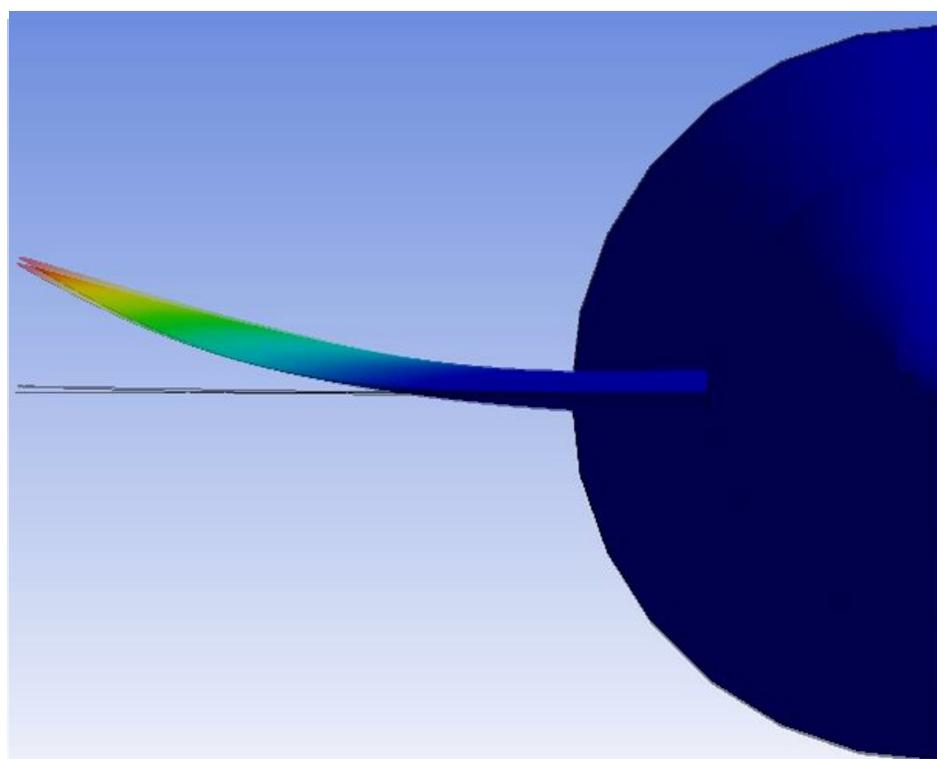


図 5.52 case6 1 回目と 3 回目の変形比較

構造計算 1 回目の初期形状からの変形結果を図 5.50 に、流体と構造計算の繰り返し 3 回目の変形結果を図 5.51 に、 $xz$ 面での 1 回目と 3 回目の変形結果比較を図 5.52 に示す。どの変形結果図も、 $z$ 方向上向きに 30 倍して描いた図となっている。1 回目の最大変形量は 0.6990mm、3 回目の最大変形量は 0.6969mm となっている。差は 0.0085mm であり、1 回目の方が変形量が大きい。case5 に比べて 1、3 回目での変形量の差が小さい。case5 との変形量の差は先ほど  $C_p$  線図の変化で述べたものと考えられる。どちらの結果も翼の  $60^\circ$  角の先端から  $z$ 方向上向きに変形している。

### 5.2.4 case7 ( $\alpha = 14.9$ )

case7 は迎角  $14.9^\circ$  の条件である。風洞実験では模型の変形が確認されたことから流体計算と構造計算を繰り返し行う。空力係数が共にほぼ収束したことから、繰り返し回数は3回とした。初期形状と3回目の変形後の計算値、実験値、変形量の  $C_L$ 、 $C_D$  を表 5.7 に示す。変形により  $C_L$  は 0.0398、 $C_D$  は 0.0061 と共に減少することが分かった。また、 $C_L$ 、 $C_D$  両方の減少に伴い、変形量も収束に向かい、3回目の変形後の方が初期形状からの変形量よりも 0.013mm 減少していることがわかる。case4~6 と比較して、 $C_L$ 、 $C_D$  共に case7 が最も減少している。変形量は case7 が最も大きい結果となった。

表 5.7 case7 計算値と実験値結果と変形量

case7	$C_L$	$C_D$	変形量
初期形状	0.7656	0.2833	0.7666
変形後	0.7258	0.2771	0.7536
実験値	0.6765	0.2044	

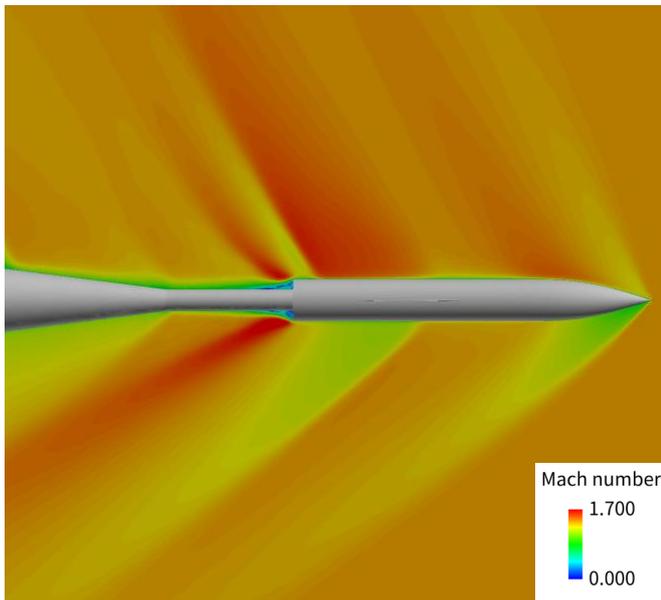


図 5.53 case7 変形後 マッハ数分布

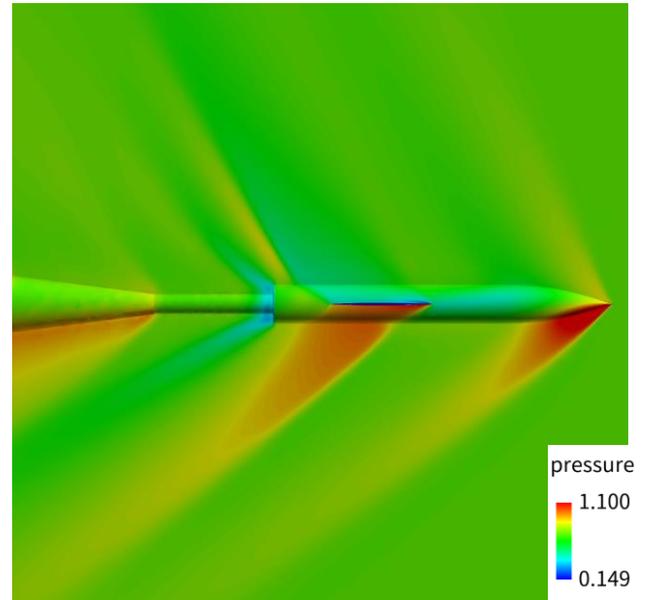


図 5.54 case7 変形後 圧力分布

変形後のマッハ数分布を図 5.53、変形後の圧力分布を図 5.54 に示す。機体先端部の下部や翼下面側の高圧部は全ての case の中で最も高圧となっていることがわかる。これは case7 が最も迎角の大きい条件であるためだと考えられる。

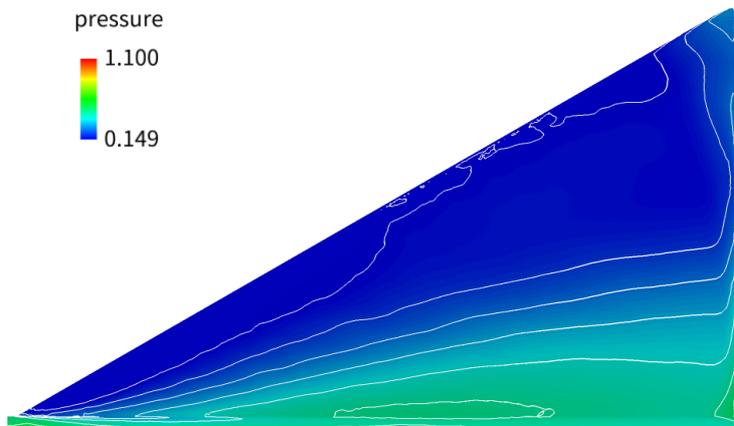


図 5.55 case7 初期形状 翼上面圧力分布

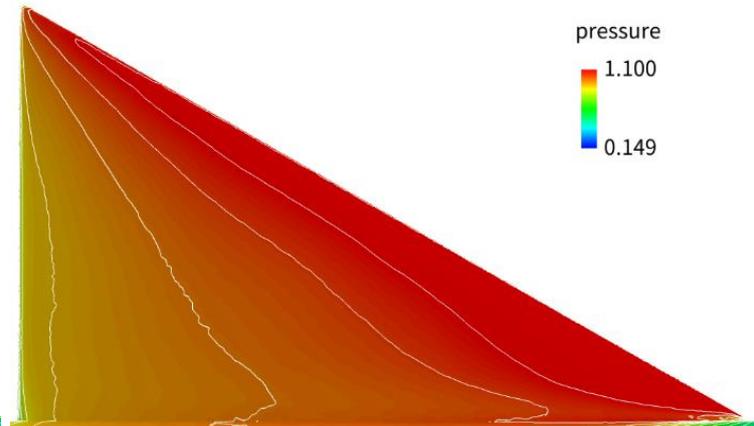


図 5.56 case7 初期形状 翼下面圧力分布

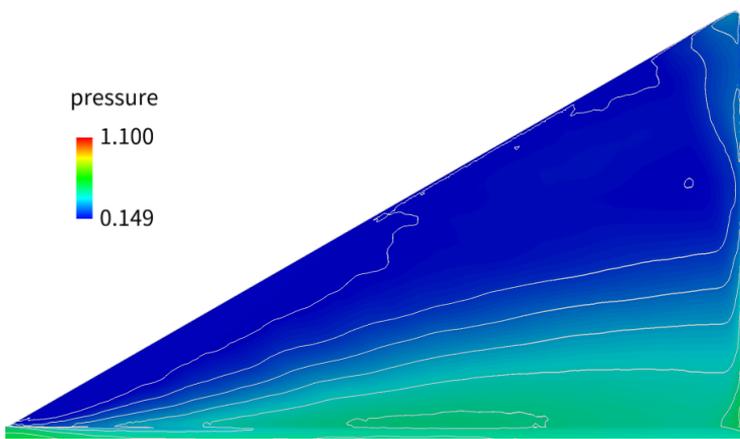


図 5.57 case7 変形後 翼上面圧力分布

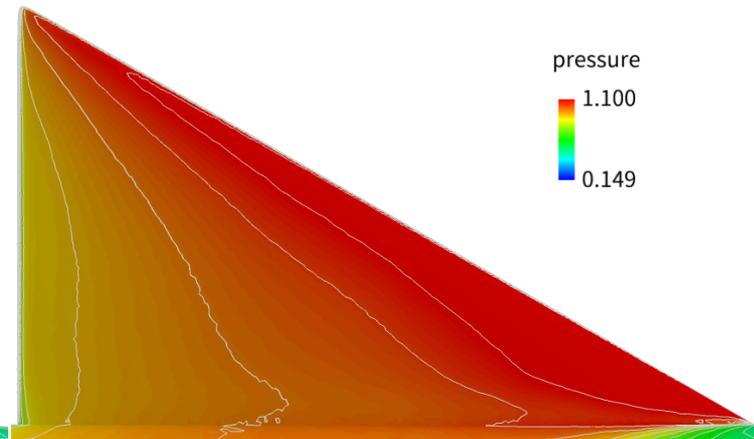


図 5.58 case7 変形後 翼下面圧力分布

初期形状の翼上面圧力分布を図 5.55 に、初期形状の翼下面圧力分布を図 5.56 に、変形後の翼上面圧力分布を図 5.57 に、変形後の翼下面圧力分布を図 5.58 に示す. case6 より翼上面側では更に低圧な範囲が翼端部付近から機体中心側へと増えた. 翼下面側では更に高圧な範囲が増えた結果となった. 全ての計算条件の中において case7 は、翼上面側では最も低圧な範囲が広く、翼下面側では最も高圧な範囲が広い結果となった. 初期形状と変形後での等高線の変化は、case7 が最も大きく確認できた. 変形後の等高線が翼上下面共にわずかながら初期形状の時よりも、翼端側へ移動した. また、等高線の変化は、翼端に近いほど大きく、機体中心に近いほど変化が小さい. 翼後縁付近も翼端と同様に変化が大きい. これは、翼の  $60^\circ$  角の先端から変形するため、翼端や翼後縁付近において等高線の変化が大きくなると考えられる. そして、変形後の方が初期形状よりも  $C_L$  が小さいことから、翼上下面での圧力差の減少が起きていると考えられる.

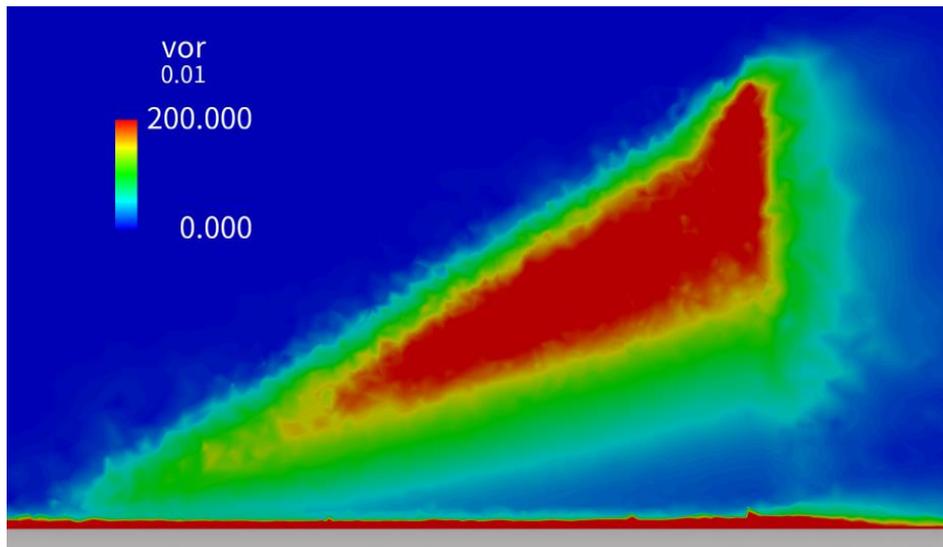


図 5.59 case7 変形後 翼上面側  $z=0.01$  渦度分布

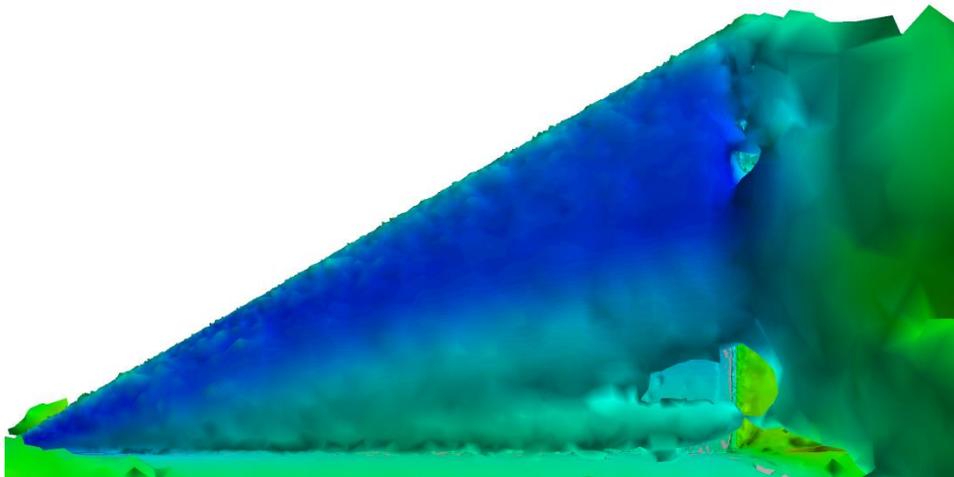


図 5.60 case7 変形後 Q 値の表面圧力分布

図 5.5 で示した位置で取得した変形後の渦度分布を図 5.59 に、変形後の等 Q 値面上の圧力分布を図 5.60 に示す. case6 よりも翼上面に発生している渦は大きい. 翼上面で発生している渦よりも翼後縁付近で発生している渦の方が大きい. Q 値では、case6 同様に渦度分布で見られた翼上面の渦から翼の後方へとつながる渦、翼と機体の付け根での渦が確認できる. 翼上面の渦から翼の後方へとつながる渦の位置が迎角が大きくなるに従い、機体中心側に近づいていることがわかる. よってこの渦の発生角度は、迎角によって変化することがわかる.

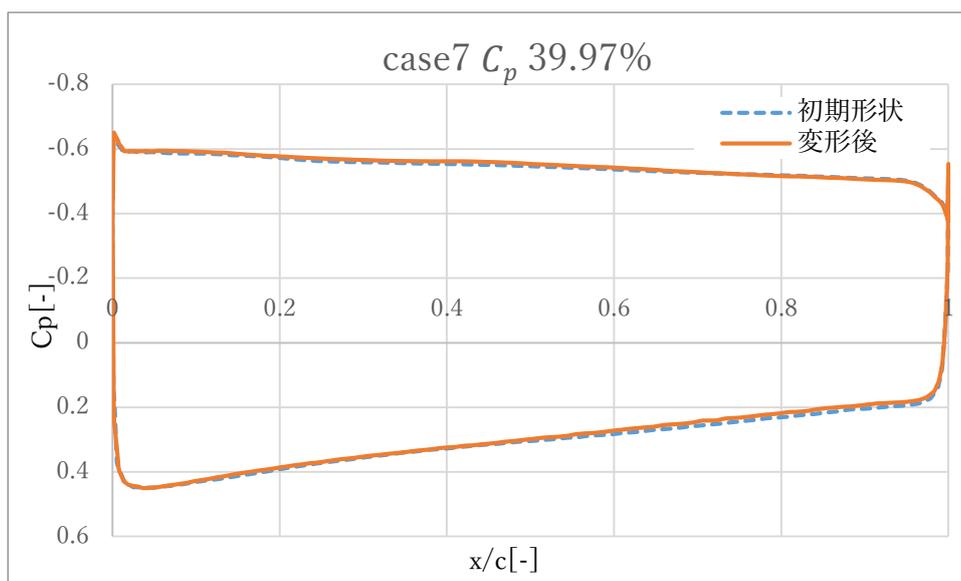


図 5.61 case7  $C_p$  39.97%

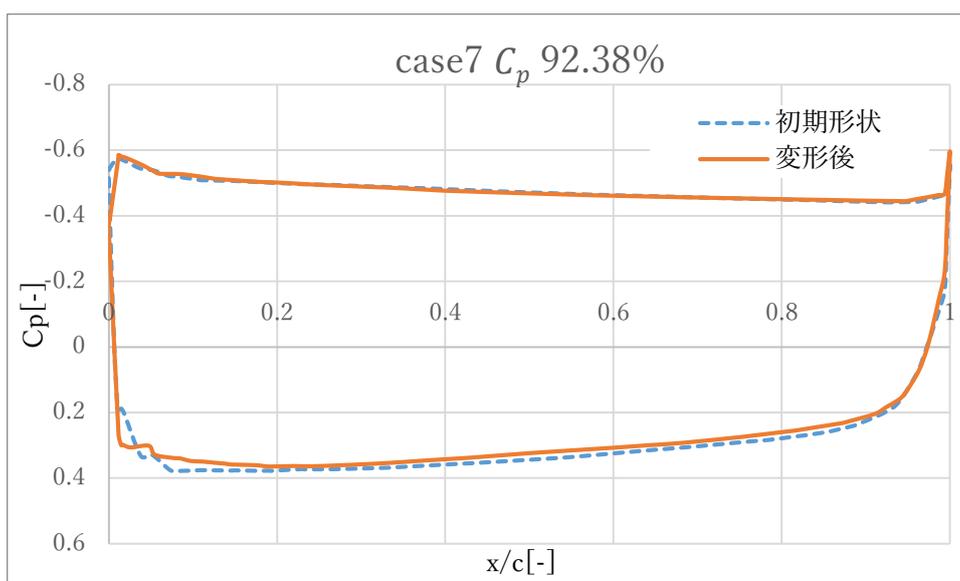


図 5.62 case7  $C_p$  92.38%

スパン方向 39.97%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.61 に、スパン方向 92.38%の位置で取得した $C_p$ 線図を図 5.62 に示す。スパン方向 39.97%の位置では、case6 同様に、変形が非常に小さいため変形前後でほぼ同じである。それでも、case7 が最も変形が大きいため、他 case よりは多少の変化は確認できる。スパン方向 92.38%の位置では、39.97%の位置よりは変形が大きいため、変化がある。翼下面側の変形前の方が高く出ている。この差が、変形前の方が $C_L$ が高く出ていることにつながっていると考えられる。 $C_p$ 線図において一番変化があるのは、翼前縁である。変形による迎角の変化を最も影響を受ける場所の為だと考えられる。

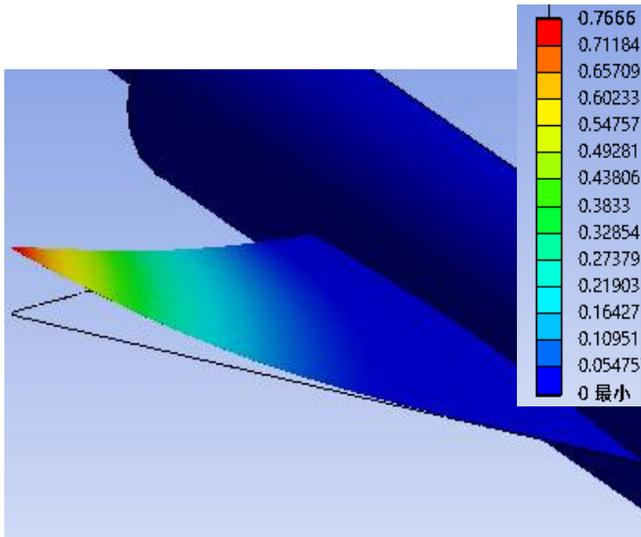


図 5.63 case7 構造計算 1 回目

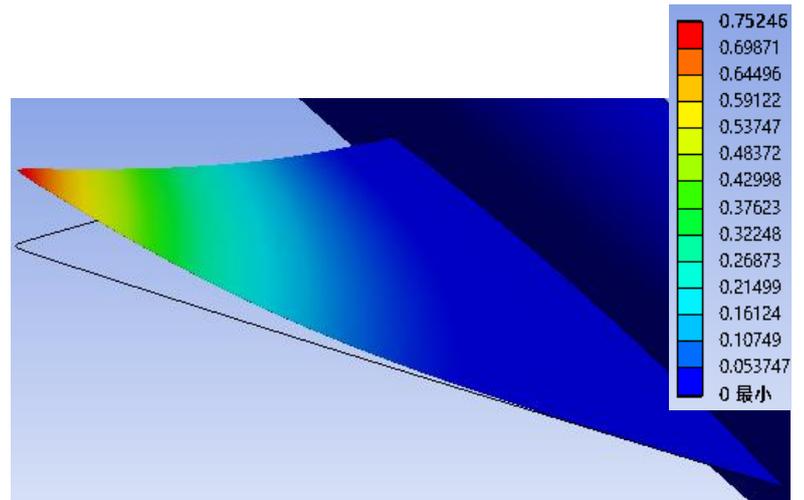


図 5.64 case7 構造計算 3 回目

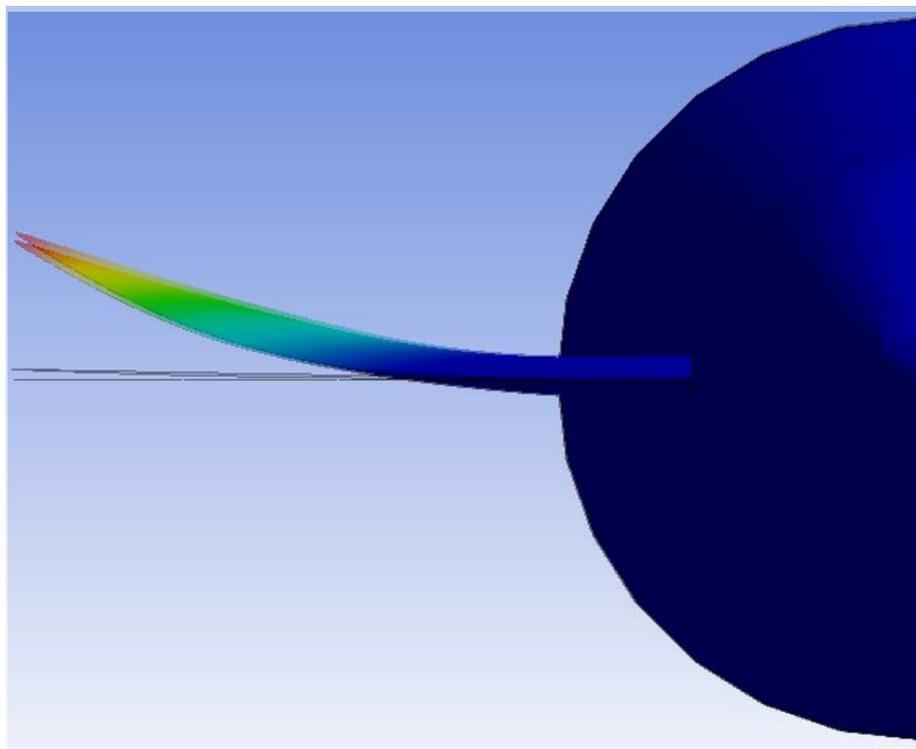


図 5.65 case7 1 回目と 3 回目の変形比較

構造計算 1 回目の初期形状からの変形結果を図 5.63 に、構造計算 3 回目の変形結果を図 5.64 に、xz 面での 1 回目と 3 回目の変形結果比較を図 5.65 に示す。どの変形結果図も、z 方向上向きに 30 倍して描いた図となっている。1 回目の最大変形量は 0.7666mm、1 回目の最大変形量は 0.7525mm となっている。差は 0.013mm であり、1 回目の方が変形量が大きい。どちらの結果も翼の 60° 角の先端から z 方向上向きに変形している。case7 は全ての case において最も変形量が大きい。

### 5.3 case 毎の比較と空力補正

case1~7 までの初期形状と変形後の計算値, 実験値, 変形量の case 毎の空力係数と変形量結果を表 5.8 にまとめる. 初期形状と変形後の $C_L - \alpha$ 線図の比較を図 5.66 に, 初期形状と変形後の $C_D - \alpha$ 線図の比較を図 5.67 に示す.

表 5.8 case 毎の空力係数と変形量

	迎角[° ]	初期形状計算値		変形後計算値		実験値		変形量[mm]
		$C_L$	$C_D$	$C_L$	$C_D$	$C_L$	$C_D$	
caes1	0.10	0.0045	0.0887			0.0009	0.0289	
case2	2.20	0.1069	0.0903			0.1000	0.0321	
case3	4.30	0.2126	0.1028			0.2020	0.0423	
case4	8.45	0.4343	0.1494	0.4324	0.1478	0.4010	0.0857	0.5396
case5	10.65	0.5450	0.1854	0.5433	0.1839	0.4933	0.1197	0.6130
case6	12.75	0.6547	0.2273	0.6510	0.2249	0.5866	0.1587	0.6905
case7	14.90	0.7656	0.2833	0.7258	0.2771	0.6765	0.2044	0.7525

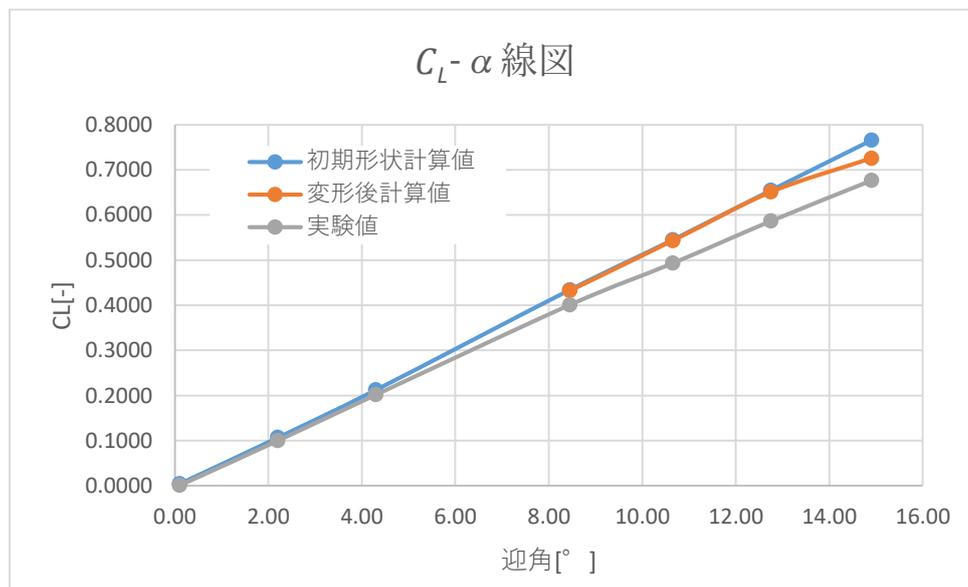


図 5.66 初期形状と変形後の $C_L - \alpha$ 線図の比較

図 5.66 と図 5.67 は, 計算値の方が高く出ている.  $C_L$  は, 迎角が大きくなるほど差が開いている. しかし $C_D$  は $C_L$ とは異なり, 迎角によって差が開くことはなく, グラフの傾きなどから実験値と計算値は同等の傾向を持っていることがわかる.  $C_D$  の計算値が高く出る理由として, 境界層格子の不足による数値粘性の増加が考えられる. 図 5.66, 図 5.67 共に初期

形状と変形後の計算値では、迎角が大きくなるほどわずかに差が開いており、初期形状の計算値の方が高く出ている。初期形状と変形後での迎角による $C_L$ 、 $C_D$ の差は、変形によって有効迎角が減少することで、 $C_L$ 、 $C_D$ の減少につながると考えられる。よって迎角が大きくなると共に変形量も増加することから、更に有効迎角の減少につながる。これにより、初期形状と変形後での $C_L$ 、 $C_D$ に差が開く事がわかる。

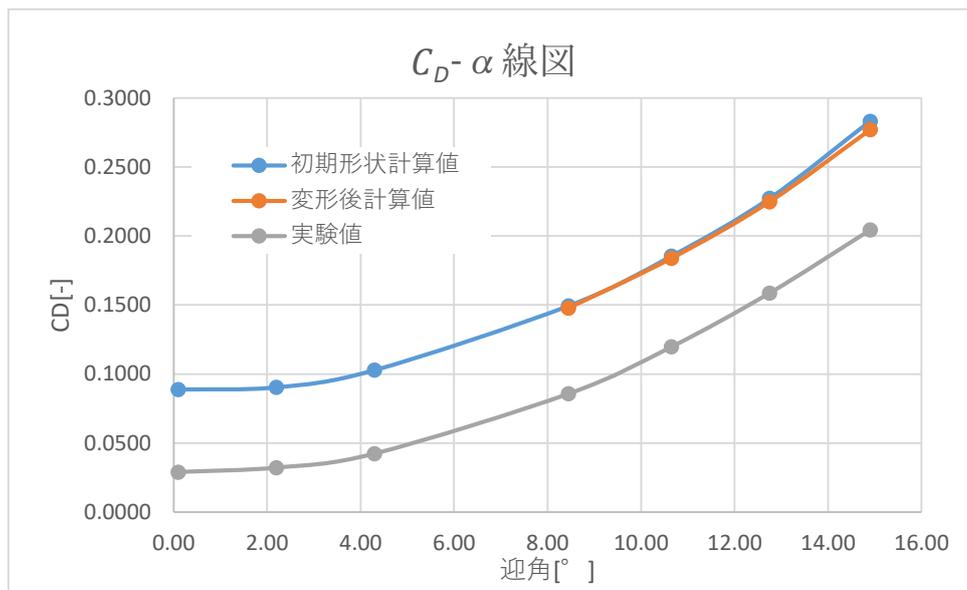


図 5.67 初期形状と変形後の $C_D - \alpha$ 線図の比較

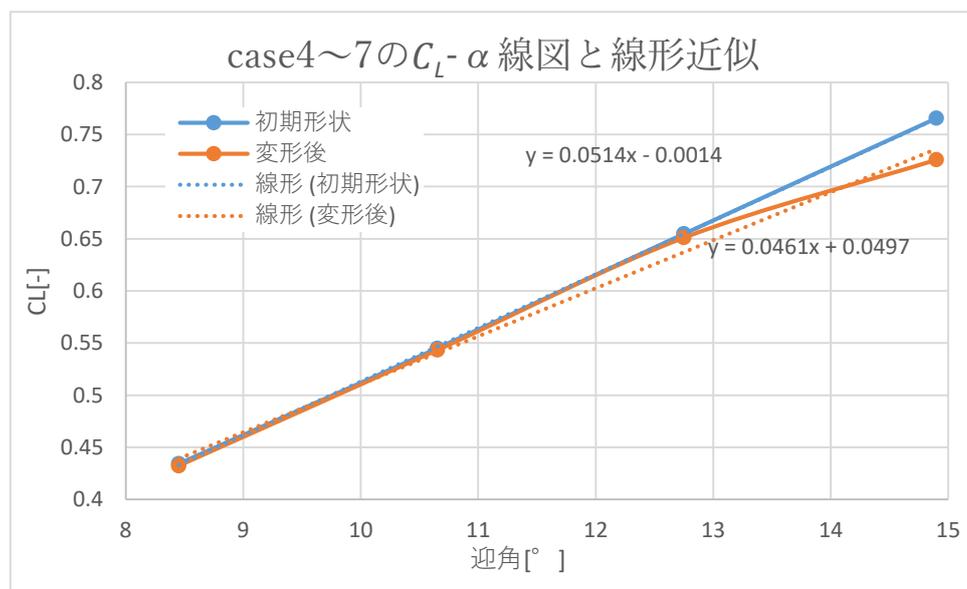


図 5.68 case4~7 までの初期形状と変形後の $C_L - \alpha$ 線図と線形近似

変形が発生した case4~7 までの初期形状と変形後の  $C_L - \alpha$  線図と線形近似を図 5.68 に示す. case4~7 までの初期形状の  $C_{L_b}$  を線形近似すると

$$C_{L_b} = 0.0514\alpha - 0.0014 \quad (5.1)$$

式(5.1)の関係性で表される. 変形後の  $C_{L_a}$  を線形近似すると

$$C_{L_a} = 0.0461\alpha + 0.0497 \quad (5.2)$$

式(5.2)の関係性で表される. よって変形により, 揚力曲線の勾配は 0.0053 減少することがわかる. 得られた  $C_L$  に基づくと, 迎角  $14.9^\circ$  である case7 において,  $0.6^\circ$  の迎角と同等の減少に相当することわかる. よって計算対象のわずかな変位でも空力特性の変化に影響を及ぼす.

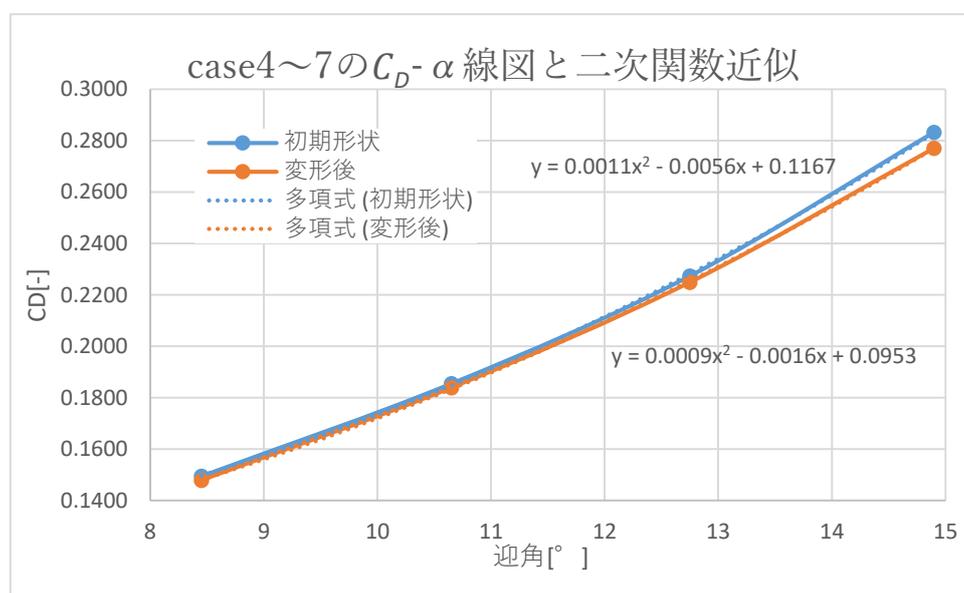


図 5.69 case4~7 までの初期形状と変形後の  $C_D - \alpha$  線図と線形近似

変形が発生した case4~7 までの変形前後の  $C_D$  と迎角の関係を図 5.69 に示す. case4~7 までの初期形状の  $C_{D_b}$  を二次関数近似すると

$$C_{D_b} = 0.0011\alpha^2 - 0.0056\alpha + 0.1167 \quad (5.3)$$

式(5.3)の関係性で表される. 変形後の  $C_{D_a}$  を線形近似すると

$$C_{D_a} = 0.0009\alpha^2 - 0.0016\alpha + 0.0953 \quad (5.4)$$

式(5.4)の関係性で表される. 得られた  $C_D$  に基づくと, 迎角  $14.9^\circ$  である case7 において,  $0.23^\circ$  の迎角と同等の減少に相当することがわかる. 変形による空力特性の変化は  $C_L$  の方が受けやすいことがわかった.

## 6. 結論

本研究では、計算格子生成から圧縮性流体の CFD, 構造計算実行までを含めた模型変形による空力特性の変化を計算できる統合数値解析環境を構築した. 一部行程のみ手動で行わなければならない, 完全な自動化には至っていない.

作成した環境下での模型変形前後においての空力特性の変化を導き出した.  $C_L$ ,  $C_D$  共に変形後, 減少することが分かった. これは, 変形による有効迎角の減少によるものだとわかった. 変形は  $z$  方向上向きに翼端から発生していた. 翼端が機体中心から最も離れていることより, モーメントを最も受けやすい場所であると同時に, 翼面圧力差が大きいためだとわかった.

迎角  $0.1^\circ$  から  $14.9^\circ$  まで 7 つの条件で計算を行い,  $C_L$ ,  $C_D$  の初期形状と変形後での近似曲線を導き出すことができた. これにより, 変形による空力特性の変化が迎角の減少に相当することがわかった. それと同時に, 計算対象のわずかな変位でも空力特性の変化につながることを示した. 以上より, 作成した環境下における模型変形前後での空力特性の変化, 迎角による変形量や空力特性の変化量の違いを解析可能であることを示した.

本研究で計算を行った AGARD-B のようなシンプルな形状の計算対象だったが, 複雑形状でも格子さえ作成できれば計算可能な環境である. そのため, 戦闘機または, 架空の複雑形状な機体であっても適応でき, 幅広く活用されることを期待できる.

## 謝辞

本研究を行うにあたり, 高知工科大学の野崎理教授, 荻野要介講師には多大なる御指導, 御支援を頂き心から感謝いたします. また, 本研究に様々な御協力, 助言いただいた高知工科大学航空エンジン超音速流研究室の皆様には感謝いたします. そして, 精神的な面で支えになって頂いた, LiSA さんに心からの感謝の気持ちと, お礼を申し上げたく存じます. 本当にありがとうございました.

10 年以上もの長い間精神的な面で支えになって頂いた, LiSA さん, 気分転換である学内周回散歩に付き合ってくれた数少ない友人, あまり会う機会なかったが急な近況報告と新年の挨拶だけは爆速で送ってくる友人, ずっと情報源が謎のままよくわからないゲテモノお菓子や土産を食べさせようとしてくる親友, それぞれ忙しい中, 四国カルスト旅行を諦めず計画し, 何とか山荘営業期間に予定をねじ込んで, 最高の夜明けを一緒に見ることができた友人たち, とあるきっかけでアベンジャーズにハマリエンドゲームは一緒に見ようと誓った友人, 研究の息抜きとしてや, とても楽しい学生生活の思い出を皆さんありがとうございました.

## 参考文献

- [1] 宇宙航空研究開発機構, “航空マガジン FLIGHT PATH”, No. 5, 2014.
- [2] EUROPEAN TRANSONIC WINDTUNNEL, “THE MOST ADVANCED AERODYNAMIC TEST FACILITY IN THE WORLD”.  
<https://www.etw.de/wind-tunnel/overview>.
- [3] National Aeronautics and Space Administration, “National Transonic Facility Overview”,  
<https://www.nasa.gov/aeroresearch/programs/aavp/aetc/transonic/ntf>.
- [4] 鈴木宏二郎, 安倍賢一, 亀田正治, “粘性流体力学”, 丸善出版, 2017.
- [5] K. YASUE, “Study of High Order Discontinuous Galerkin Finite Element CFD Solver for Aerospace Applications”, 東北大学大学院博士学位論文, 2010.
- [6] 宇宙航空研究開発機構, “FaSTAR 理論マニュアル”, 2014.
- [7] ANSYS, Inc. and ANSYS Europe, Ltd., “理論リファレンス”, 2019.
- [8] P. Spalart and S. Allmaras, "A One Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows", AIAA Paper 92-0439, 1992.
- [9] 藤田健, 松島紀左, 中橋和博, “非構造格子 CFD を用いた逆問題設計システムの高度化”, 第 15 回数値流体力学シンポジウム予稿集, D05-3, 2001.
- [10] 坂下雅秀, 松尾裕一, 村山光宏, “非構造格子 Euler/Navier-Stokes ソルバ JTAS の計算性能最適化”, JAXA-RR-06-004, 2006.
- [11] E. Shima, and K. Kitamura, “Parameter Free Simple Low Dissipation AUSM Family Scheme for All Speeds”, *AIAA Journal*, Vol. 49, No. 8, pp. 1693-1709, 2011.
- [12] P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”, *Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372, 1981.
- [13] D. J. Mavriplis, “Revisiting the Least Squares Procedure for Gradient Reconstruction on Unstructured”, AIAA Paper 2003-3986, 2003.
- [14] E. Shima, K. Kitamura, and T. Haga, “Green Gauss/Weighted Least Squares Hybrid Gradient Reconstruction for Arbitrary Polyhedra Unstructured Grids”, *AIAA Journal*, Vol. 51, No.11, pp. 2740-2747, 2013.
- [15] V. Venkatakrisnan, “Convergence to Steady State Solutions of the Euler Equations on Unstructured Grids with Limiters”, *Computational Physics*, Vol. 118, pp. 120-130, 1995.
- [16] O. S. Menshov, and Y. Nakamura, “Implementation of the LU SGS Method for an Arbitrary Finite Volume Discretization”, 第 9 回数値流体シンポジウム, 1995.
- [17] V. V. Rusanov, “The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, Vol. 1, No. 2, pp. 267-279, 1961.
- [18] G. H. Golub, C. F. V. Loan, “Matrix Computation”, *JHU Press*, pp. 602-604, 2013

- [19] 飯島秀俊, 渡辺光則, 神田宏, 佐藤衛, 永井伸治, 鈴木教雄, “超音速風洞における AGARD-B 標準模型 3 分力試験”, JAXA-RR-06-046, 2007.
- [20] D. Damljanić, “Convergence of transonic wind tunnel test results of the AGARD-B standard model”, *FME Transactions*, Vol. 48, No. 4, pp. 761-769, 2020.