

2021（令和3）年度 修士学位論文

楕円錐模型周りの極超音速境界層遷移に関する
擾乱成長過程の数値的考察

Numerical Consideration of Unstable Disturbances
Growth Process on Hypersonic Boundary Layer Transition
around Elliptic Cone

2022年3月2日

高知工科大学大学院 工学研究科基盤工学専攻
航空宇宙工学コース

1245033 青景 壮真

指導教員 荻野 要介, 野崎 理

目次

第1章

緒論	1
1.1 研究背景	1
1.1.1 極超音速機の実現と乱流遷移	1
1.1.2 HIFiRE プログラム	1
1.1.3 流れ場の安定性理論	2
1.1.4 HIFiRE 模型周りの安定性解析	2
1.2 研究の目的	5
1.3 本論文の構成	5

第2章

平均流の数値計算と全体安定性解析	7
2.1 はじめに	7
2.2 数値計算法	7
2.2.1 平均流の支配方程式	7
2.2.2 離散化手法	9
2.2.3 全体安定性解析	9
2.2.4 全体安定性解析の流れ	12
2.3 計算条件	13
2.3.1 計算格子	13
2.3.2 計算条件	15
2.3.3 全体安定性解析条件	15
2.4 平均流の計算結果	16
2.5 全体安定性解析の解析結果	20
2.5.1 固有値分布	20
2.5.2 最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布	21
2.5.3 Crossflow 部における各擾乱の固有モード分布	23
2.5.4 模型先端部, Attachment line 側の固有モード分布	26
2.5.5 低レイノルズ主流条件での全体安定性解析	28

第 3 章

線形安定性理論 (Linear parallel Stability Theory : LST) と線形放物型安定方程式 (Linear Parabolized Stability Equations : LPSE) に基づく安定性解析	31
3.1 はじめに	31
3.2 安定方程式の導出	31
3.2.1 線形攪乱方程式	31
3.2.2 局所平行流近似	34
3.2.3 弱非平行流近似 (PSE 近似)	34
3.3 計算の流れ	35
3.4 Attachment line 部における LPSE 解析	36
3.4.1 解析領域	36
3.4.2 T-S 波を想定した低周波擾乱の導入	39
3.4.3 Mack 波を想定した高周波擾乱の導入	40
3.5 ストリークを通過する断面内の LPSE 解析	42
3.5.1 解析領域	42
3.5.2 Stationary crossflow 波を想定した擾乱の導入	43
3.5.3 Traveling crossflow 波を想定した擾乱の導入	45
3.5.4 Mack 波を想定した擾乱の導入	48
3.6 境界層内における不安定擾乱についての考察	48

第 4 章

結論	51
----------	----

付録 A

高解像度格子を用いた平均流計算	53
-----------------------	----

付録 B

B.1 LST の安定方程式における係数行列の要素	57
B.2 LPSE の安定方程式における係数行列の要素	59

参考文献	63
------------	----

謝辞	67
----------	----

第1章

緒論

1.1 研究背景

1.1.1 極超音速機の実現と乱流遷移

近年、次世代の航空機として極超音速機の実用化を目指し世界各国の協力のもとで研究開発が行われている。極超音速機の実用化が達成されると飛行時間の短縮を図ることが可能になると同時に高高度を高速で飛行するため、音速を超えて飛行する際に発生するソニックブームを低減することができる。一方で極超音速で飛行する際に機体より前方では強い衝撃波が発生し、衝撃波と壁面の間には衝撃層を形成する。また壁面近傍の境界層において乱流遷移が発生すると、機体表面での壁面加熱や摩擦抵抗が大幅に増える可能性がある。そのため機体を守る熱防衛システム（Thermal Protection System : TPS）を施す必要がある[1]。しかし TPS は機体重量を増加させる要因一つでもあり、離陸重量や燃費向上の観点からなるべく最小限とする必要がある。極超音速機実現のためには、機体設計時にあらかじめ乱流遷移位置を把握し、正確な TPS 設計を行うことが極めて重要である。

1.1.2 HIFiRE プログラム

極超音速境界層の乱流遷移時のデータ収集を目的とし、ドイツ航空宇宙センター（Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt German Aerospace Center: DLR）では2016年に ROTEX-T (図 1.1) を打ち上げマッハ 5.4 での壁面加熱を計測した[2]。この他にも多数の計画が世界各国で盛んに進められている。極超音速機実現に向けた研究の一つに、Hypersonic International Flight Research and Experimentation (HIFiRE) プログラム[3]がある。ここでは極超音速飛行実現に必要不可欠と考えられる技術を開発・検証を行う事を発端とし、現在では米国空軍研究所（Air Force Research Laboratory : AFRL）にオーストラリア防衛科学技術機構（Australian Defense and Technology Organization : DSTO）、Boeing 社等も加わって行われている。ここでは極超音速風洞による流動計測が行われ、実機を用いたフライトテストも実現している（図 1.2）[4-9]。これまで HIFiRE-1 では軸対称形状である全長1100 [m]、半頂角7 [°]、先端が半径2.5 [mm]の球状になっている円錐模型を用いて遷移に関するデータ収集が行われた[10]。つづく、HIFiRE-5 では楕円錐機体形状（図 1.3）での遷移現象に主眼を置き実機を用いたフライトテストが行われ[11, 12]、複数の不安定モードが誘起されることが確認された[13-15]。T. J. Juliano と S. P. Schneider は極超音速風洞を用いて、楕円錐模型周りの壁面で温度上昇などの計測する実験を行った[16]。実験より $Re = 8.1 \times 10^6$ [/m]のときには境界層の薄い先端部と長径側壁面のみに比較的高い加熱が

見られたが、 $Re = 11.8 \times 10^6$ [m] 主流の時には境界層の薄い先端部と長径側に加えて模型後方でもストリーク状の高い加熱率分布が生じた。これは乱流遷移したことが原因と考えられており[17]、Crossflow の影響も考慮した遷移の詳しいメカニズムの解明に向け、より詳しい流れ場の直接数値計算 (Direct Numerical Simulation : DNS) が行われると同時に様々な条件で実験も行われている[18-20]。

1.1.3 流れ場の安定性理論

一方で流れ場の安定性に関する研究は古くから行われてきた。1880 年頃、Lord Kelvin や H. V. Helmholtz そして Lord Rayleigh によって 2 次元平行流の非圧縮非粘性流れの安定性に関する研究が行われた[21,22]。検査対象とする流れ (基本流) に対して微小な振幅を持つ擾乱を付加し、その擾乱が減衰し安定化した流れ場、あるいは増幅し不安定な流れ場となるか理論的に考察し、体系化した線形安定性理論 (Linear parallel Stability Theory : LST) を中心に研究された。1950 年代になると粘性流れの擾乱の線形成長を記述する Orr-Sommerfeld 方程式をコンピュータにより解析的に解く方法が発展し、さらに安定性理論へ擾乱成長の非線形性の影響を取り入れる弱非線形安定性理論 (Weakly non-linear stability theory) も作られた[23]。1980 年代には 3 次元非圧縮性流れに対する安定性解析も行われるようになった[24]。

その後 3 次元圧縮性境界層における流れの安定性を詳細に理解するために、様々な研究が実施された[25]。圧縮性境界層内に擾乱を付加すると、遷移初期段階においては境界層内に擾乱が受容され、そのうちいくつかの擾乱が不安定波として 2 次元的に増幅する場合がある[26]。擾乱振幅がある程度の大きさを超えると奥行き方向へも勾配を持つ 3 次元的な擾乱波となる。結果として局所的に変曲点を持つ流速分布となり、ヘアピン型の渦が生成され成長したのち破断、その後より細かい渦の生成という一連の過程が流れ場の至る所で発生し乱流境界層へと非線形成長していくと考えられている。よく知られている 2 次元的な擾乱波には Tollmien - Schlichting (T-S) 波や斜行波があり、その他 3 次元的な擾乱波として Göertler 波、Crossflow 波が挙げられ、様々な不安定波が流れ場には混在している。特に高マッハ数時に現れる支配的な擾乱波は L. M. Mack によって調べられており、極超音速流内では T-S 波に相当すると考えられる 1 次モードやより高周波な Mack モードと呼ばれる 2 次モードが存在することが報告されている[27] (図 1.3)。これらの不安定性についての数値解析方法は多くあるが、非平行な境界層の発達を無視する局所平行流近似を施した Orr-Sommerfeld 方程式や Squire 方程式などによる線形安定性理論やその近似を排除した線形放物型安定方程式 (Linear Parabolized Stability Equations : LPSE) に基づく擾乱成長解析が行われている[28]。

1.1.4 HIFiRE 模型周りの安定性解析

これまで、円錐形状の HIFiRE-1 を対象に極超音速風洞実験[29]と同条件下における模型周りの流れ場に対して LST や LPSE を用いて安定性解析が行われた[30]。その結果、飛行実験によって得られた境界層遷移に関するデータベースをもとに、様々な主流条件での擾乱の成長率を得た[31]。また、宇田の研究では、流れ場の中で最も不安定成長する擾乱の特定にこれらの手法を用い、得られた不安定成長する擾乱と低周波数擾乱を平均流計算に導入し、擾乱非線形干渉を確認した[32]。

また他方，全体安定性解析[33, 34]という流れ場の全体に微小擾乱を付加し時間発展させてデータ行列を作成し，その固有値問題として流れ場の安定性を解析する手法がある．他の多くの安定性解析手法では平板境界層との類推として擾乱成長を考えるのに対して，流れ場全体で擾乱の時間発展を考えるため流れ場への近似を施すことなく，複雑な物体形状周りの流れ場に対しても安定性解析を行うことができる．そのため，境界層の主流方向成長以外の流れ場における乱流遷移についても流体挙動を考察することができる．松瀬の数値研究[35]では，同じくHIFiRE-1を計算対象としており，主流条件が $Re = 6.65 \times 10^7$ [1/m]で行われた極超音速風洞での実験[36]と同条件で全体安定性解析を行った．その結果，最大固有値に対する温度や圧力擾乱の固有モード分布が境界層外縁付近や衝撃層内において2次モードと類似した構造で分布した．この分布は実験で観察されたものと同様の傾向を示した．HIFiRE-5の楕円錐模型周りの流体には，形状の3次元性から主流方向に直交する周方向にも分布を持ち，より複雑となる．平行流れとして近似することができないためLSTやLPSEなどの安定性解析が困難な流れ場の1つである．全体安定性解析の真価が問われる流動場である．



図 1.1 打ち上げ直前の ROTEX-T [2]



図 1.2 実機を用いたフライトテストの模式図 [9]



図 1.3 HIFiRE-5 の楕円錐模型 [12]

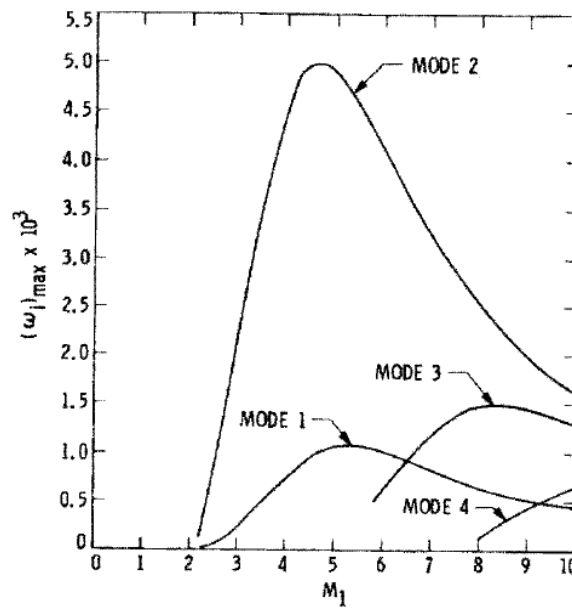


図 1.3.2 次元平板境界層におけるマッハ数と不安定モードの成長率の関係 [24]

1.2 研究の目的

本研究では楕円錐模型 (HIFiRE-5) の乱流遷移位置の予測を目的とし、模型周りの流れ場に対して全体安定性解析を行い、擾乱成長の特徴を調査することで固有モード分布について考察する。さらに、LPSE 解析を実施することで乱流遷移に繋がる擾乱成長の物理過程を明らかにし、遷移による高い壁面加熱率の発生原因を調査する。

1.3 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す。第 1 章では、緒論と題して本研究の背景および目的について示した。第 2 章では、平均流の数値計算手法や結果、全体安定性解析の結果と考察を示す。第 3 章では LPSE 解析に必要な方程式の導出などを行う。そして第 2 章で示した流れ場から境界層を抽出し、LPSE 解析を行った結果と考察を示す。第 4 章では結論を示す。

第2章

平均流の数値計算と全体安定性解析

2.1 はじめに

本章では初めに HIFiRE-5 の楕円錐模型周りの平均流計算を行い、計算した平均流結果を用いて全体安定性解析を行う。全体安定性解析は境界層内の擾乱成長を追うのではなく、流れ場全体を対象に安定性解析を行う。流れ場に近似を施さないので3次元流れの複雑な状況に対して不安定なモードなどの特徴的な空間構造や強さを解析することができることから、Crossflowを含む楕円錐模型周りの複雑な流れに適している。

2.2 数値計算法

2.2.1 平均流の支配方程式

HIFiRE-5の楕円錐模型周りの流れ場の計算には3次元圧縮性Navier-Stokes方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v)}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

ここで \mathbf{Q} は保存量ベクトルであり、 \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} は対流流束ベクトル、 \mathbf{E}_v , \mathbf{F}_v , \mathbf{G}_v は粘性流束ベクトルである。それぞれ、以下のように得られる。

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ (e + p)w \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{F}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ v\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{G}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} - q_z \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

ここで ρ は密度, u は速度の x 方向成分, v は速度の y 方向成分, w は速度の z 方向成分, e は単位体積あたりの全エネルギー, p は圧力を表し, 理想気体の状態方程式

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2}{2\rho} \right\}, \quad (2.7)$$

より求める. γ は比熱比で $\gamma = 1.4$ の空気とした. また $\boldsymbol{\tau}$ は粘性応力, \mathbf{q} は熱流束を示す. 粘性応力 $\boldsymbol{\tau}$ と熱流束 \mathbf{q} は Stokes の定理と Fourier の法則を用いて

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.8)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (2.9)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (2.10)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.11)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (2.12)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.13)$$

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.14)$$

のように与えられる. ここで k は熱伝導係数, T は温度を示す.

2.2.2 離散化手法

空間の離散化には有限体積法を用いる。支配方程式(2.1)を任意のセル V について積分を行う。

$$\iiint_V \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(E - E_v)}{\partial x} + \frac{\partial(F - F_v)}{\partial y} + \frac{\partial(G - G_v)}{\partial z} \right) dV = 0. \quad (2.15)$$

流束ベクトルに対しガウスの発散定理を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V Q dV + \oint_{\partial V} \{(E - E_v)n_x + (F - F_v)n_y + (G - G_v)n_z\} dS = 0, \quad (2.16)$$

と表される。ここで n_x , n_y , n_z はそれぞれセル境界面の法線ベクトルの x , y , z 成分を表す。各セルでの平均値は、そのセル自身の体積を用いて、以下のように与えられる。

$$\bar{Q} = \frac{\iiint_V Q dV}{\iiint_V dV}. \quad (2.17)$$

セルの体積 $\Delta V (= \iiint_V dV)$, セル境界の面積 $\Delta S (= dS)$, それぞれ与えると、離散化された式は以下のように表される。

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} \Delta V + \sum_{k=1}^6 \{(E - E_v)n_x + (F - F_v)n_y + (G - G_v)n_z\} k dS_k = 0. \quad (2.18)$$

最終的な計算には、時間積分には3次精度のTVD-Runge-Kutta法[37]を用いた。数値流束にはAUSM-DV風上スキーム[38]を用い、WENO法[39]を用いて流束を再構築し5次精度とする。粘性流束の評価は2次の中心差分を採用した。

2.2.3 全体安定性解析

本研究で用いる全体安定性解析は、CFDと組み合わせることで流れ場全体に対して安定性解析を行う計算手法であり、擾乱の時間発展に対する固有値問題に帰着させることで流れ場全体として持つ波をモードごとに分離させる。得られた固有値から流れ場が安定であるかどうかを判断し、さらに、それらの固有ベクトルから流れ場の不安定モードを抽出する。Navier-Stokes方程式に支配される離散点の解の時間発展は以下のように記述できる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f(Q), \quad (2.19)$$

$$\mathbf{Q} = (\rho_1, (\rho\mathbf{u})_1, e_1, \dots, \rho_N, (\rho\mathbf{u})_N, e_N), \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} = (u, v, w). \quad (2.21)$$

ここで N は総格子点数であり、 \mathbf{Q} は各格子点上での保存量ベクトルを示す。また、保存量 \mathbf{Q} は先の CFD 計算により得られた定常解を基本量 $\bar{\mathbf{Q}}$ とし、微小擾乱項を $\tilde{\mathbf{Q}}$ とすることで、以下のように分解できる。

$$\mathbf{Q} = \bar{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (2.22)$$

基本量は時間変化せず、微小擾乱よりはるかに大きいとすると式(2.19)を線形化することができ、微小擾乱 $\tilde{\mathbf{Q}}$ に対して以下の方程式を得る。

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial t} = \left(\frac{\partial f(\mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \right)_{\mathbf{Q}=\bar{\mathbf{Q}}} \tilde{\mathbf{Q}} \equiv \mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}}. \quad (2.23)$$

この係数行列 \mathbf{A} の固有値問題を解くことで流れ場の安定性解析を行う。固有ベクトルとそれに対応する固有値は以下のように得ることができる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \lambda_m \phi_m. \quad (2.24)$$

つまり、

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{m=1}^n \lambda_m \phi_m. \quad (2.25)$$

ここで ϕ は行列 \mathbf{A} の固有ベクトル、 λ_m は ϕ に対する固有値を表す。得られた固有値 λ の実部 $\text{Re}(\lambda)$ から流れ場の安定性がわかり、流れ場の安定性は次のように分類することができる。

$$\text{Re}(\lambda) = \begin{cases} > 0 & \text{不安定} \\ = 0 & \text{中立安定} \\ < 0 & \text{安定} \end{cases}, \quad (2.26)$$

本研究では不安定性に興味があるため固有値の実部が大きいものに着目する。ここで行列 \mathbf{A} の固有値問題を扱うが、行列の大きさは \mathbf{Q} の成分の数に依存するため、多次元計算では大規模な計算となり、直接固有値問題を扱うのは難しい。そこで本研究では、大規模行列の固有値を陽に扱わない Arnoldi 法[40]を用いる。Arnoldi 法では大規模行列に対して部分空間を用いることで、近似行列で表現し、反復的な方法により絶対値が比較的大きな固有値とその固有ベクトルのみを求めることができるため、計算コストを削減することができる。以下に Arnoldi 法を用いて行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルを求める手順を説明する。

まず任意の擾乱ベクトル $\tilde{\mathbf{Q}}_1$ を与え、そのベクトルを正規化し反復操作を行うことで、近似行列の成分を集める。以下にアルゴリズムを示す。

$\tilde{\mathbf{Q}}_1$: arbitrary initial vector

$$\zeta_1 = (\tilde{\mathbf{Q}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_1)^{-1/2} \tilde{\mathbf{Q}}_1, \quad (2.27)$$

for k = 1 to M

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} = \mathbf{A}\zeta_k - \sum_{j=1}^k h_{j,k} \zeta_j, \quad (2.28)$$

$$h_{j,k} = \zeta_j \cdot \mathbf{A}\zeta_k, \quad (2.29)$$

$$h_{k+1,k} = (\tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1})^{1/2}, \quad (2.30)$$

$$\zeta_{k+1} = \tilde{\mathbf{Q}}_{k+1} / h_{k+1,k}, \quad (2.31)$$

next k

ここで、 M は反復回数である。また $h_{j,k}$ は近似行列の成分を表す。 $h_{j,k}$ によって作られる近似行列は $M \times M$ サイズの上 Hessenberg 行列となる。Hessenberg 行列を \mathbf{H} と表記する。行列 \mathbf{A} の固有値 λ^A に対応する固有ベクトル ϕ は行列 \mathbf{H} の固有値 λ^H 、固有ベクトル ψ を用いて以下のように与えられる。

$$\mathbf{H}\psi_j = \lambda_j^H \psi_j \quad (j = 1, 2, \dots, M), \quad (2.32)$$

$$\phi = \sum_{k=1}^M (\psi_j)_k \zeta_j. \quad (2.33)$$

ここで、 $(\psi_j)_k$ は j 番目の固有ベクトルの k 番目の成分を表す。千葉による時間発展法[41, 42]を用い、基本流れ場に擾乱を付加しその流れ場の時間積分をとることで、固有値の実部に対応するモードは成長し、負に対応するモードは減衰することを利用して不安定モードと安定モードを区別する。擾乱を与えたときの時刻を t 、積分時間を T とすると時刻 t と時刻 $t + T$ における微小擾乱 $\tilde{\mathbf{Q}}$ の関係は以下のように表せる。

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t + T) = \exp(\mathbf{A}T)\tilde{\mathbf{Q}}(t). \quad (2.34)$$

また、

$$\mathbf{B} \equiv \exp(\mathbf{A}T), \quad (2.35)$$

とすると、行列 \mathbf{A} の固有値 λ^A と行列 \mathbf{B} の固有値 λ^B の関係は以下のように表せる。

$$\lambda^B = \exp(\lambda^A T). \quad (2.36)$$

Arnoldi 法を用いる際、 $\mathbf{A}\zeta$ は直接用いず、以下の近似式を用いて計算する。

$$\mathbf{B}\zeta_k = \frac{\mathbf{Q}(t + T) - \bar{\mathbf{Q}}}{\epsilon}. \quad (2.37)$$

ここで、初期擾乱を付加した流れ場を以下のように表す。

$$\mathbf{Q}(t) = \bar{\mathbf{Q}} + \epsilon \zeta_k. \quad (2.38)$$

したがって、 $\mathbf{Q}(t+T)$ はこの式を時刻 T だけ積分することで得られる。また ϵ は微小定数であり、以下のように定義し擾乱の大きさを調節する。

$$\epsilon = \frac{\|\bar{\mathbf{Q}}\|}{\|\zeta_k\|N} \epsilon_0. \quad (2.39)$$

ここで、 ϵ_0 は調節パラメータ、 N は総格子点数である。

2.2.4 全体安定性解析の流れ

全体安定性解析の手順を図 2.1 に示す。まず平均流の準定常解を算出し、得られた保存量を用いて原始変数を求める。次に保存量と原始変数に対する初期擾乱を与える。本研究では、保存量にのみ初期擾乱を付加し、式(2.22)で表す擾乱入り流れ場を得る。擾乱入り流れ場を積分時間 T だけ時間発展させる。時間発展後の保存量を用いて、原始変数を求める。さらに、保存量と原始変数のそれぞれで、式(2.37)で表される近似を行う。次に式(2.28) – (2.31)で表される Arnoldi 法に従い、保存量と原始変数のそれぞれで、行列 \mathbf{H} の成分と次の擾乱を計算する。以降この操作を反復させ、保存量と原始変数のそれぞれに対する行列 \mathbf{H} を作成する。保存量に対する擾乱の固有値と固有モードと同様に、先に示した手法を元に原始変数に対する擾乱の固有値と固有モードも算出した。

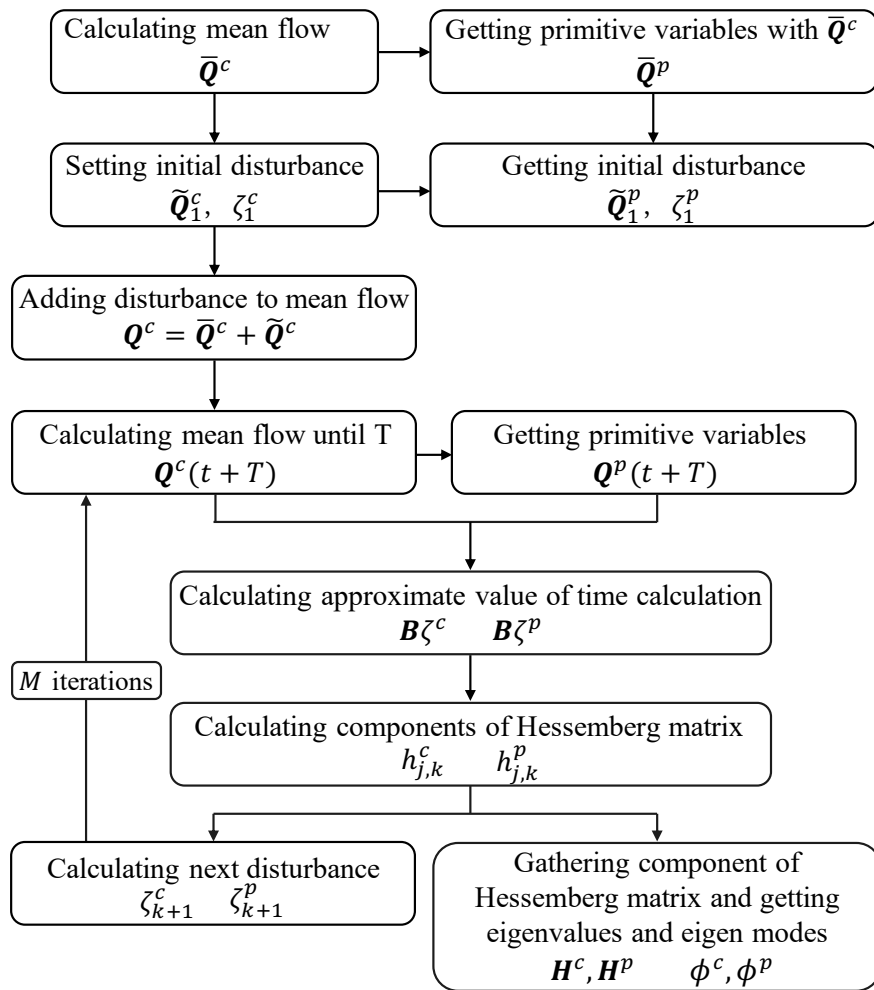


図 2.1 全体安定性解析の流れ

2.3 計算条件

2.3.1 計算格子

物体形状は T. J. Juliano と S. P. Schneider の風洞実験に用いられた楕円錐模型に従う。断面アスペクト比は 2:1 となり，楕円錐底面の長軸半径が 82[mm]，短軸半径が 41[mm]である。軸方向長さは 328[mm]で，先端は短径側で 0.95[mm]の球状である。迎角を付けないため，計算対象は 1/4 部分を計算する。楕円錐模型周りの計算格子全体を図 2.2 に示す。格子先端部での特異点により数値擾乱が残ってしまうことを避ける為，マルチブロック格子を採用した[43]。先端部分を拡大したものを図 2.3 に示す。また衝撃波面から生じたノイズが圧力波として壁面に到達し，圧力振動を引き起こす[44]可能性があるため，衝撃波面位置を事前計算によって特定し，衝撃波付近で格子幅が小さくなるように作成した。流出面での計算格子を図 2.4 に示す。総格子点数は周方向に 257 点，主流方向に 321 点，壁面垂直方向に 257 点の構造格子を用いた。一方，極超音速流内の境界層内で渦などを十分に解像するためにはとりわけ境界層内における格子解像度を十分にしておく必要がある。そこで最小格子幅 Δx_{\min} は次式を参考[45]に $\Delta x_{\min} = 0.5 \times 10^{-3}$ [mm] とし，境界層内には最低 65 点格子が存在するようにした。

$$\Delta x_{\min} = \frac{0.1L}{\sqrt{Re L}} \quad (2.40)$$

ただし，代表長さ L は楕円錐模型の全長である $L = 0.328$ [m] とする。

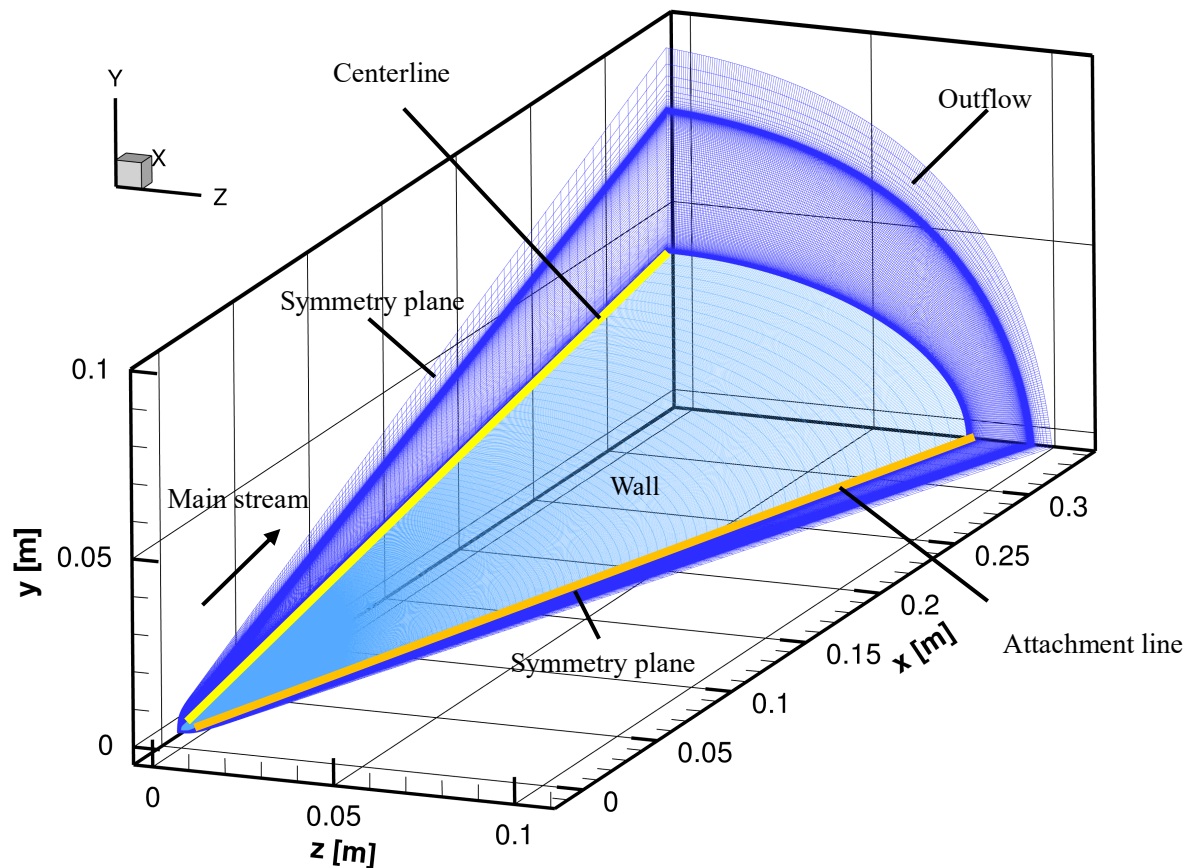


図 2.2 模型周りの計算領域と表面格子

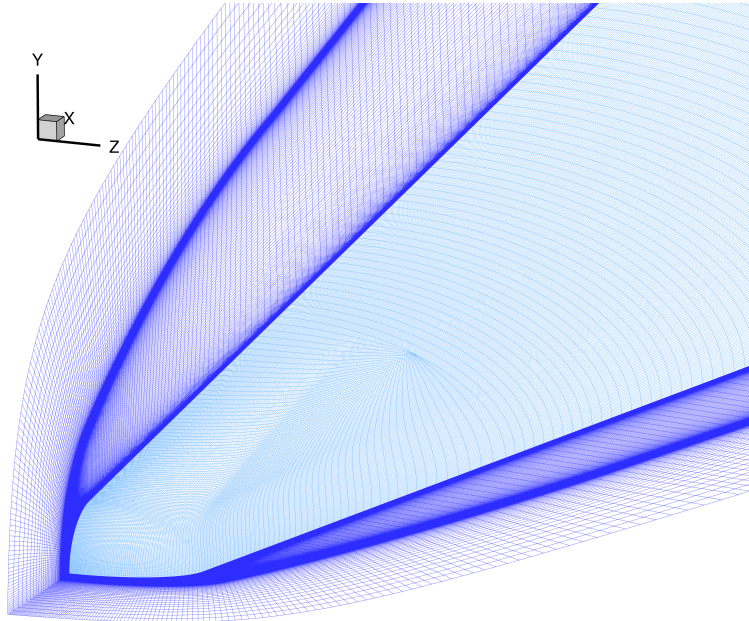


図 2.3 格子先端部の拡大図

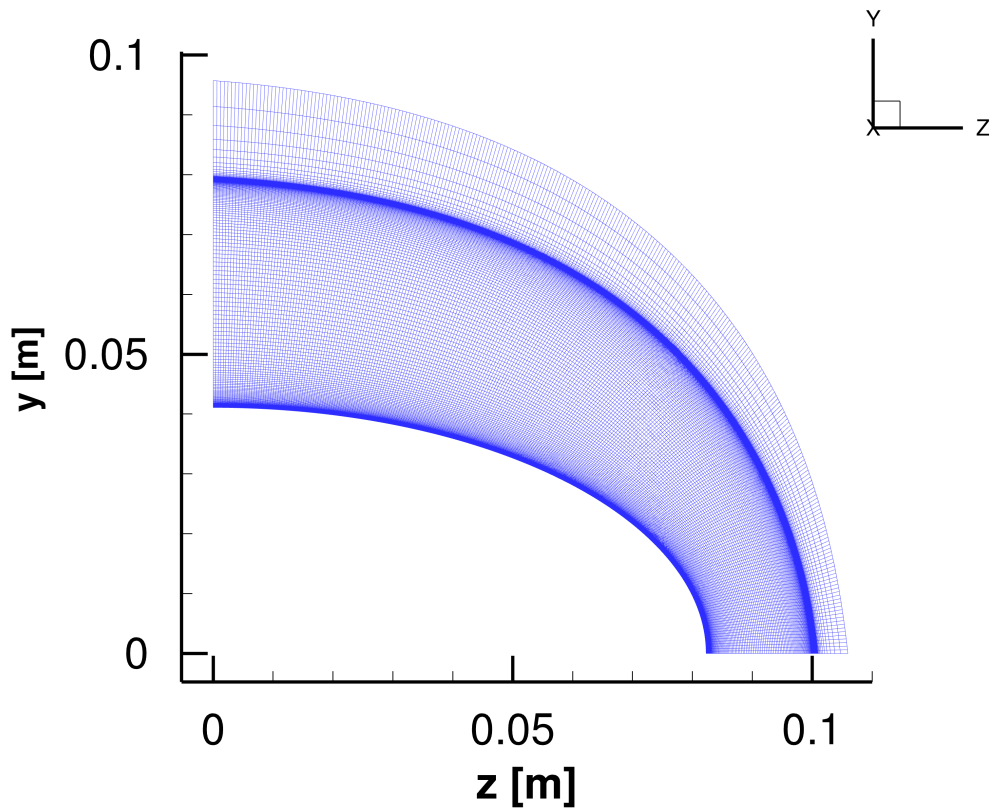


図 2.4 流出面における計算格子

2.3.2 計算条件

T. J. Juliano と S. P. Schneider の風洞実験に用いられた主流条件[16]に従う。理想気体を仮定し、比熱比 $\gamma = 1.4$ 、プラントル数 $Pr = 0.72$ とした。流れ場の主流条件を表 1 に示す。 Re は単位レイノルズ数、 M は主流マッハ数、 U_∞ は主流速度、 T_∞ は主流温度、 T_{wall} は壁面温度を表す。

表 2.1 主流条件

Parameters	Values
Re , [/m]	11.8×10^6
M , [-]	6.0
U_∞ , [m/s]	869.7
T_∞ , [K]	52.3
T_{wall} , [K]	300.0

2.3.3 全体安定性解析条件

全体安定性解析での時間発展法では、擾乱の発展を計算する積分時間 T 、擾乱の大きさを調節するパラメータ ϵ_0 、そして流れ場の大規模行列を **Hessenberg** 行列によって近似的に表現し固有値を求める際の行列のサイズに当たる反復回数 M を指定する。積分時間 T については、流体が模型長さの約40%の距離を主流速度で伝播するのに要する時間として無次元時間 1.0×10^{-4} を与えた。次に調整パラメータ ϵ_0 は $\epsilon_0 = 3.3 \times 10^3$ とし、これは主流密度に対して約 1.0×10^{-6} 程度の擾乱を与えることに相当する。上記の T と ϵ_0 にて全体安定性解析を行った際の反復回数と固有値の実部の履歴を図 2.5 示す。mode 1 が最大固有値の実部を、mode 2 が 2 番目に大きい固有値の実部である。2つの固有値の実部は反復回数 $M = 15$ 回でほぼ収束しているが、十分な繰り返し回数を見て $M = 30$ 回とした。

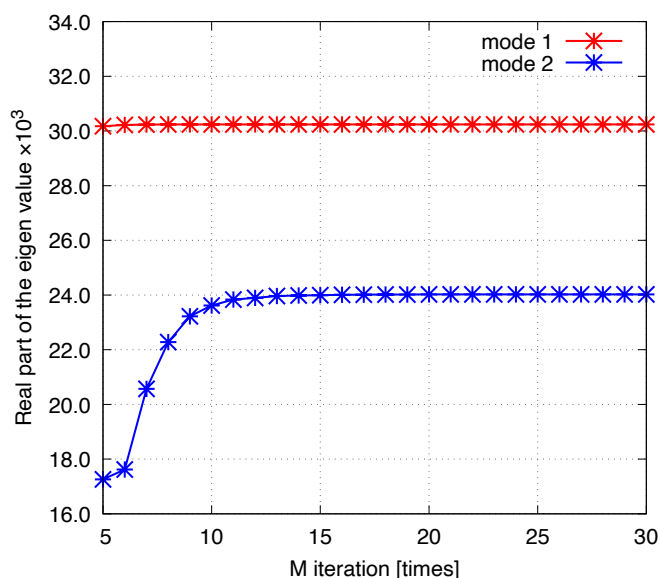


図 2.5 固有値の反復計算回数と固有値実部の履歴

2.4 平均流の計算結果

図 2.6 に平均流計算における密度残差の履歴を示す。0 ステップから約 42 万ステップまでは空間精度を 2 次精度 MUSCL 法によって残差が一定になるまで計算を行い、その後約 102 万ステップまで空間精度を 5 次精度 WENO 法に切り替え、計算を行った。この時大きく密度残差が増加するのは空間精度を切り替えたことによって、より小さい渦などを解くことができるようになったためである。さらに、102 万ステップ以降は時間積分法を Euler 陽解法から切り替えて、最後の 116 万ステップまでは TVD-Runge-Kutta 法を用いて 3 次精度とし、残差が一定になるまで計算を行った。

図 2.7 に最終的に得られた準定常解[46]をマッハ数分布と壁面においては圧力分布を用いて示す。模型全体が衝撃波に覆われ、壁面と衝撃波の間に衝撃層が形成されていることが確認できた。また長径側では圧力が短径側よりも高くなっており、主流方向とは異なる向きに圧力勾配が発生していることが確認できる。また図 2.8 に流出面におけるマッハ数分布を示す。楕円錐が非軸対称形状であるため、境界層や衝撃層が短径側では厚く、長径側では薄くなっている。さらに Centerline 側対称境界面付近では、境界層外縁でキノコ雲状の縦渦が確認できた。

図 2.9 に、 ρ/ρ_∞ 分布を $x/L = 0.06, 0.18, 0.30, 0.43, 0.54, 0.69, 0.82, 0.98$ 位置の断面で表す。図 2.9 (a) に本研究で行なった計算結果を示し、図 2.9 (b) に D. J. Dinzi と G. V. Candler によって行われた DNS による計算結果[47]を比較対象として示す。この DNS は 6 次空間精度、総格子点数が約 2 億点で行われた計算である。Centerline 側壁面付近におけるキノコ状の渦の形状はある程度似ており、境界層外縁付近に形成されている複数の縦渦も DNS による結果と比較して、散逸的ながら解像できていることがわかる。

図 2.10 に壁面熱流束分布を示す。模型先端部と Attachment line 側壁面は衝撃層の厚さが比較的薄いため、高い加熱率分布を示した。また模型先端部から伸びる複数の縦渦をとらえることができたことで、 $x = 50$ [mm] 付近の高加熱領域の分岐部を頂点とし、流出面に向けて伸びるストリーク状の加熱上昇が確認できる。T. J. Juliano と S. P. Schneider の風洞実験で得られた壁面加熱率の計測結果[16]では上流側から伸びるストリーク状の加熱分布が横軸 $x = 255$ [mm] 付近から乱れ始め、 $x = 275$ [mm] 付近にて崩壊し、以降乱流へと遷移した。しかし図 2.10 から実験ほどの乱流遷移によるストリーク状の高加熱率分布の 3 次元化は見られなかった。

図 2.11 に境界層中程度位置を流れる流体と境界層外部を流れる流体をストリームリボンと流線を使って可視化した図を示す。まず、ピンク色の流線で示す境界層外の流れは物体形状に沿って流れ去っていくことが確認できる。一方ストリームリボンは流線とその線上での各々の位置における流速ベクトルの rot を合わせて表現したものである。リボンのねじれは渦度ベクトルのねじれに相当する。ストリームリボンを見ると模型先端部から流入した流体は境界層内で長径側から短径側へ曲がりながら後方へ向かう Crossflow となっている。

図 2.12 に境界層内における縦渦の分布を等 Q 値面によって可視化した。実験でストリーク状の加熱が得られた箇所付近に、模型先端部から伸びる縦渦が数本確認できる。

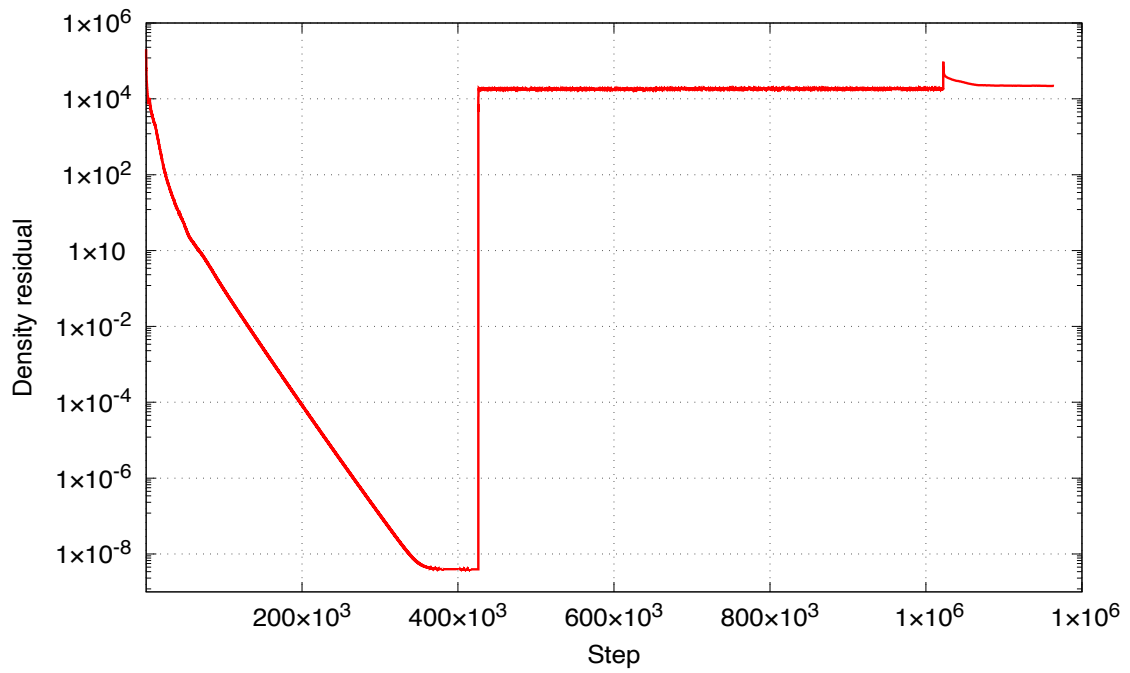


図 2.6 平均流計算における密度残差の時間履歴

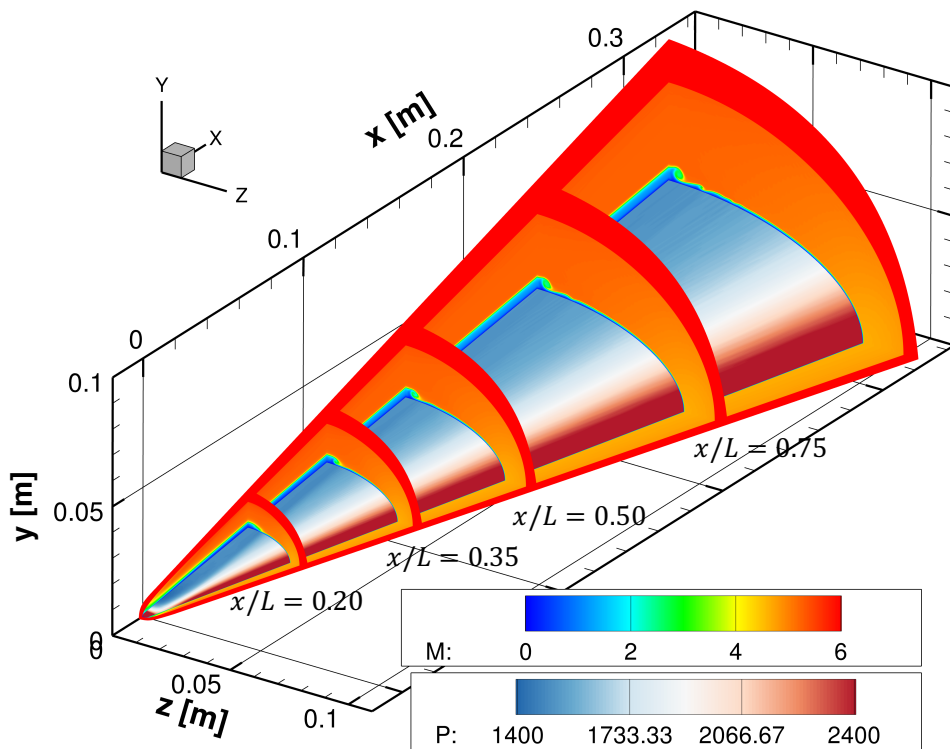


図 2.7 模型周りのマッハ数分布と壁面における圧力分布

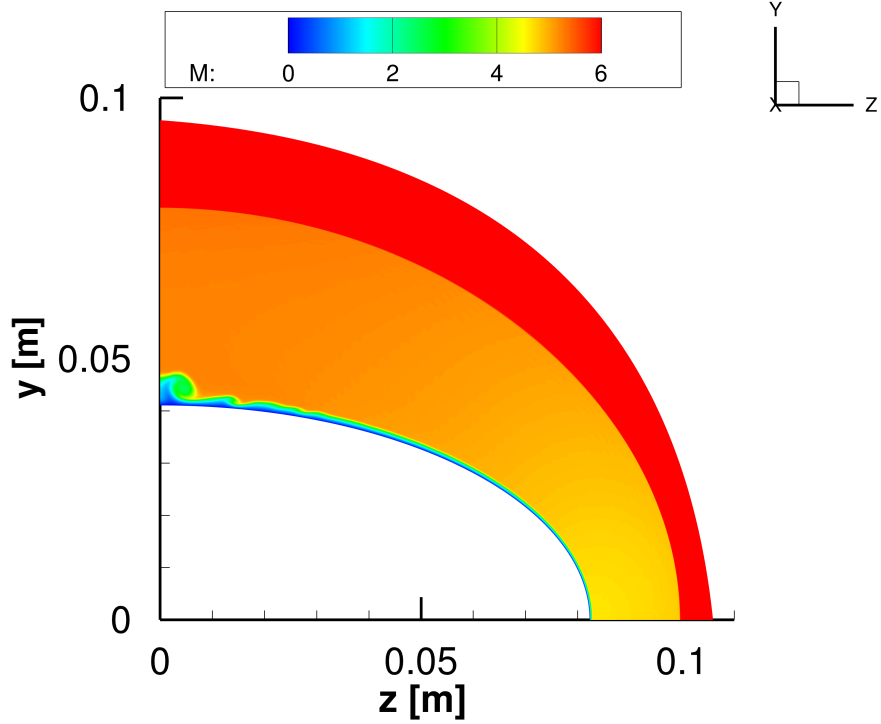
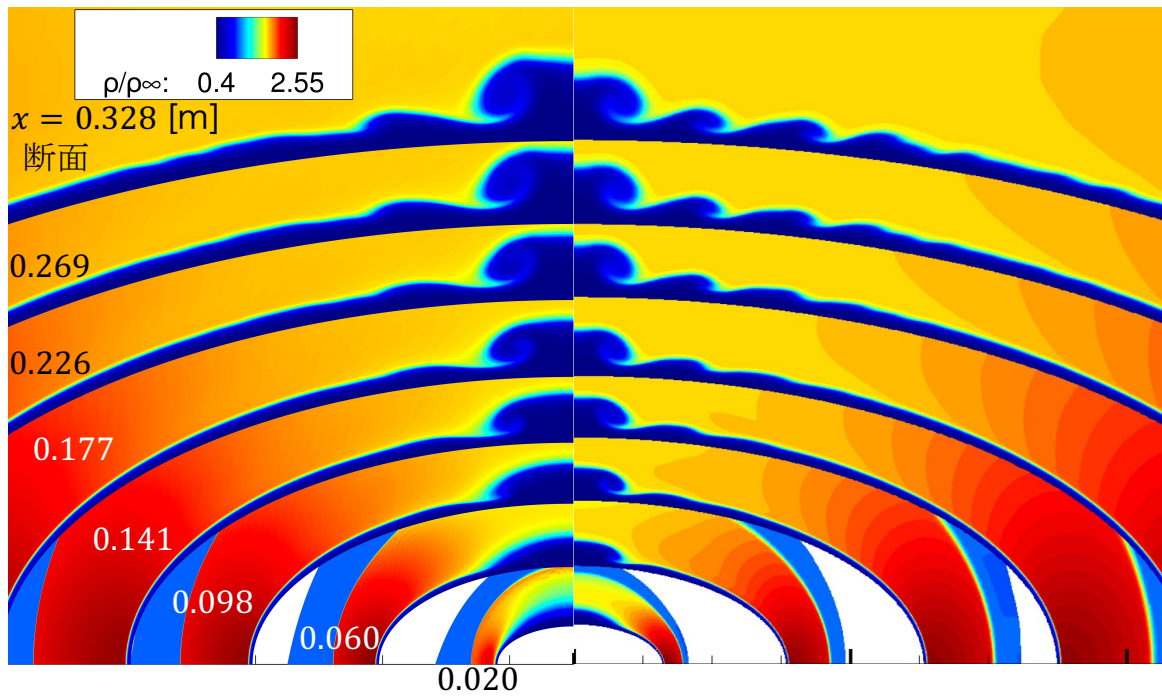


図 2.8 流出面におけるマッハ数分布



(a) 本研究における計算結果 (b) D. J Dinzl らによる DNS を用いた計算結果[47]

図 2.9 各断面における ρ/ρ_∞ 分布

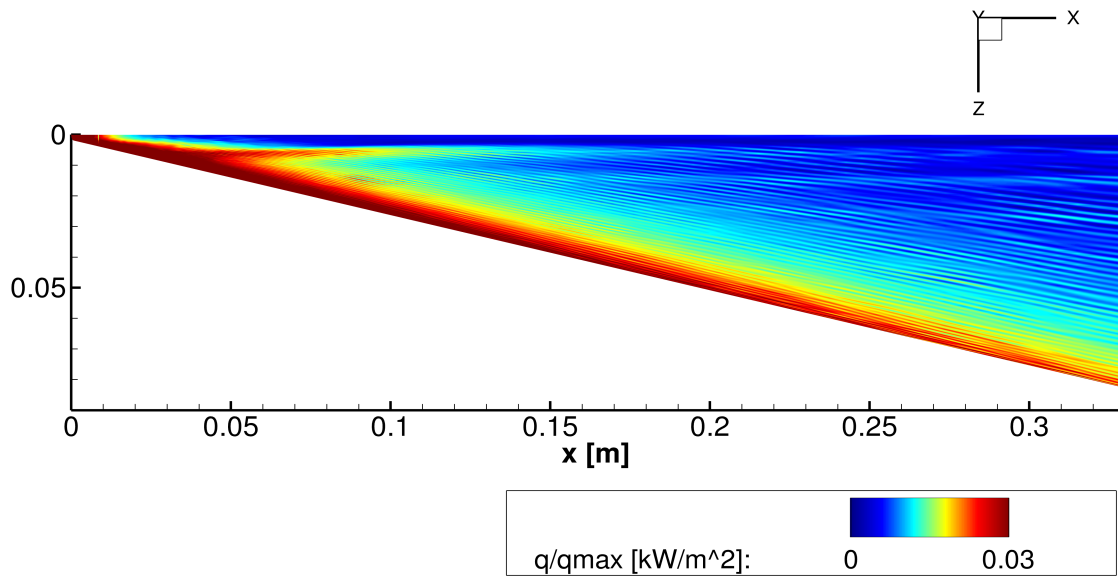


図 2.10 壁面熱流束 q/q_{\max} 分布

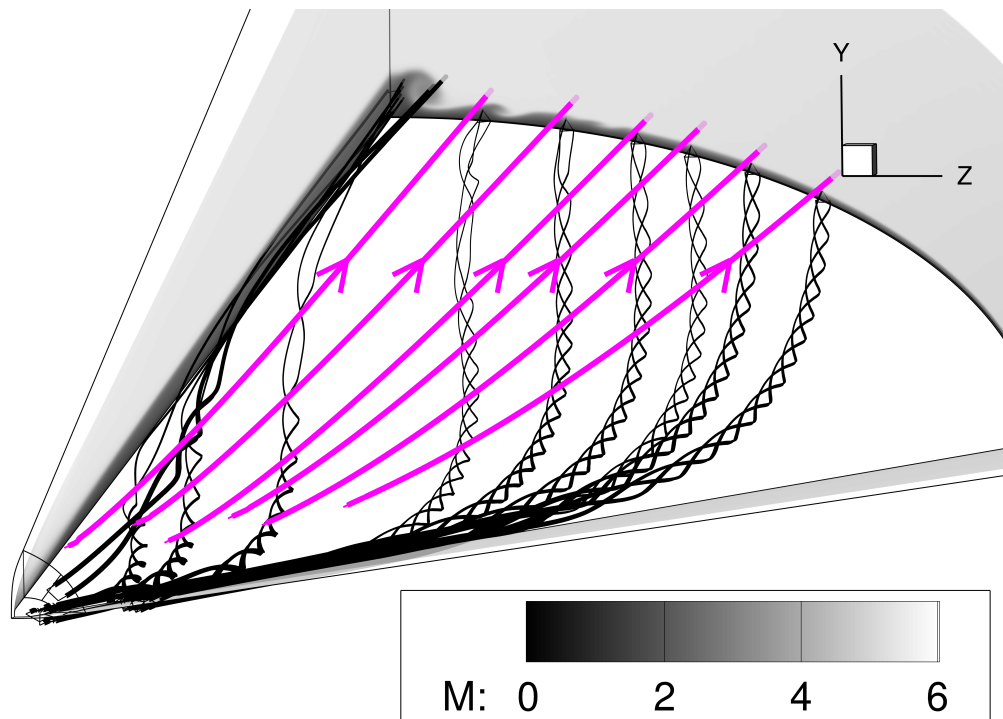


図 2.11 境界層内部のストリームリボンと境界層外部の流線

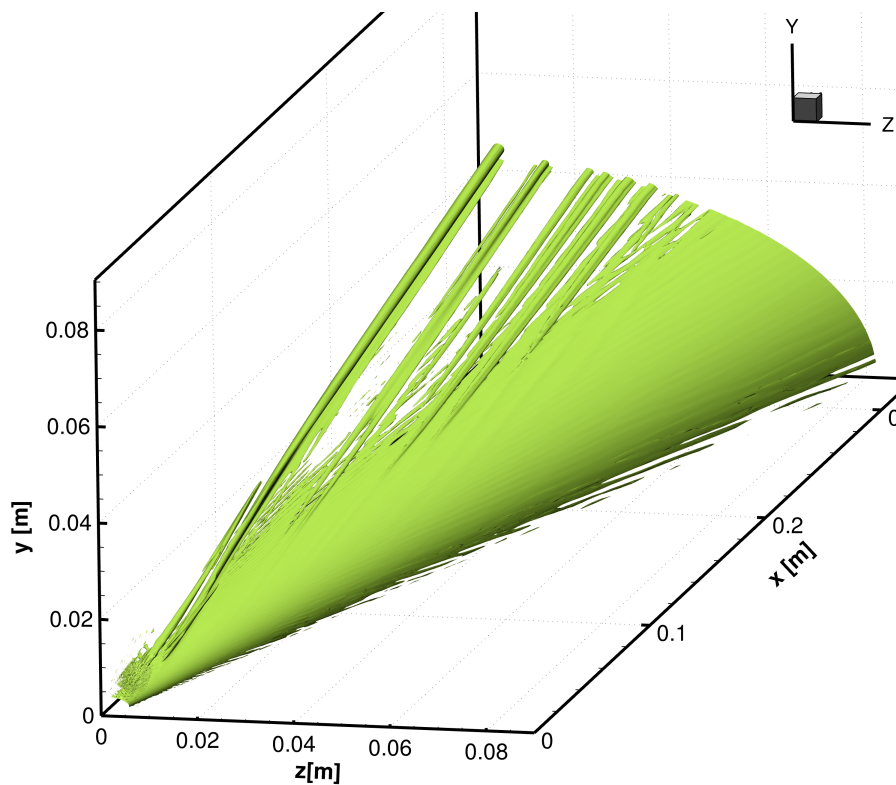


図 2.12 模型周りの境界層内における Q 値分布

2.5 全体安定性解析の解析結果

2.5.1 固有値分布

全体安定性解析では流れ場の保存量ベクトルで構成される大規模行列を Arnoldi 法により近似行列で表現する。保存量ベクトルで構成される近似行列と原始変数ベクトルで構成される近似行列の固有値分布を図 2.12 に示す。得られた固有値の実部は固有モードの成長率を表し、虚部は時間に対する振動を表す。保存量に対する全ての固有値の実部は正なので流れ場が不安定であることがわかる。原始変数に対する固有値の実部が負になっている 2 つの固有値を除き、全て正である。また保存量と原始変数のどちらの実最大固有値も虚部を持たず実軸上に位置するため、固有モードは振動せずに増幅していく。

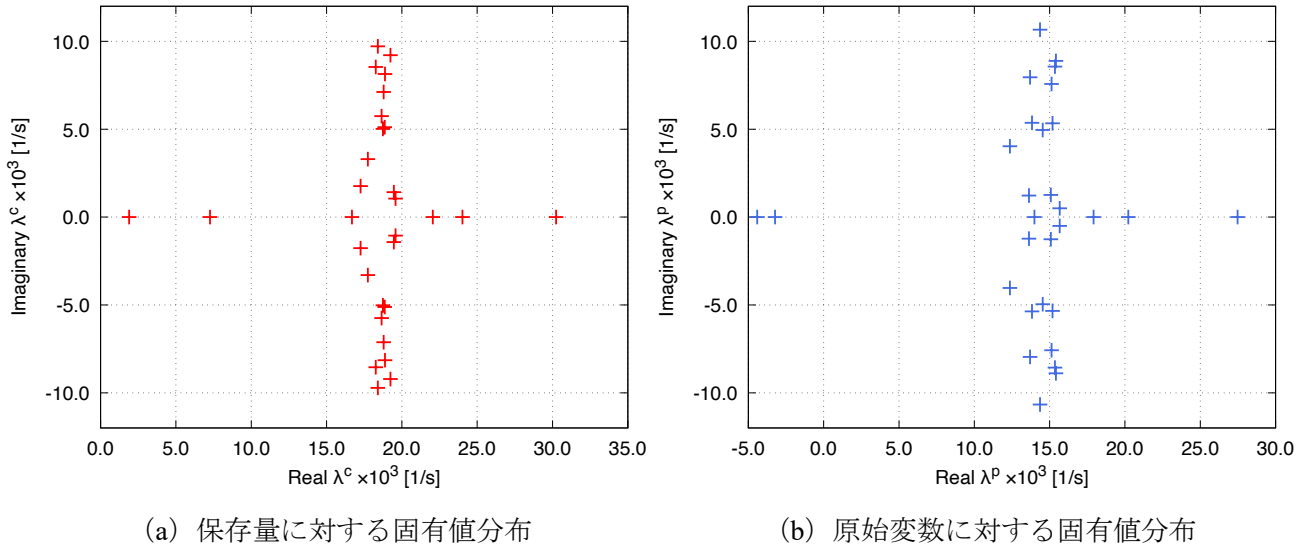


図 2.12 固有値 λ^4 の分布

2.5.2 最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布

図 2.13 に全体安定性解析による最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布の全体図を示す。全体安定性解析における図の見方としては、固有モード値が大きい箇所では付加した擾乱が増幅するような不安定な流れ場であることを示し、逆に固有モード値が小さい箇所では付加した擾乱が減衰するような安定な流れ場であることを示す。図 2.7 と 2.9 に示した、模型先端付近から伸びる縦渦や図 2.10 に示した高加熱率ストリークに沿って下流へ向かうにつれて、擾乱増幅していることがわかる。

図 2.14 に流出面における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布を示す。擾乱の振幅が比較的大きいのは、境界層内部や衝撃波背後である。特に境界層内の振幅は衝撃層における増幅よりも大きいことが確認できる。擾乱の時間発展を解く際、衝撃波面に格子寄せした適合格子をなるべく波面と平行になるよう調整し、一方で、数値流束の評価にはやや散逸的な AUSM-DV を用いた。そのため、衝撃波面に起因するカーバクルのような数値的な擾乱の発生と成長は抑制的で、少なくとも境界層内の擾乱成長よりは劣ることがわかる。全体安定性解析に含まれる Arnoldi 法のアルゴリズムの通り、最大固有値に対する固有モードの分布を抽出することも合わせて考えると、物理的に意味のある温度擾乱の振幅成長が境界層内で生じることは明らかである。本研究では楕円錐模型周りの境界層内における安定性に着目する。全体安定性解析結果は流れ場の境界層内部の特徴によって大きく 3つの場所に分けて考えることができる。以降、短径側境界面におけるキノコ雲状縦渦付近の領域を **Centerline** 部と呼称し、**Crossflow** が顕著で実験においてストリーク状の高加熱分布が計測された領域を **Crossflow** 部、そして長径側のより境界層が薄い高加熱領域を **Attachment line** 部と呼ぶこととする。

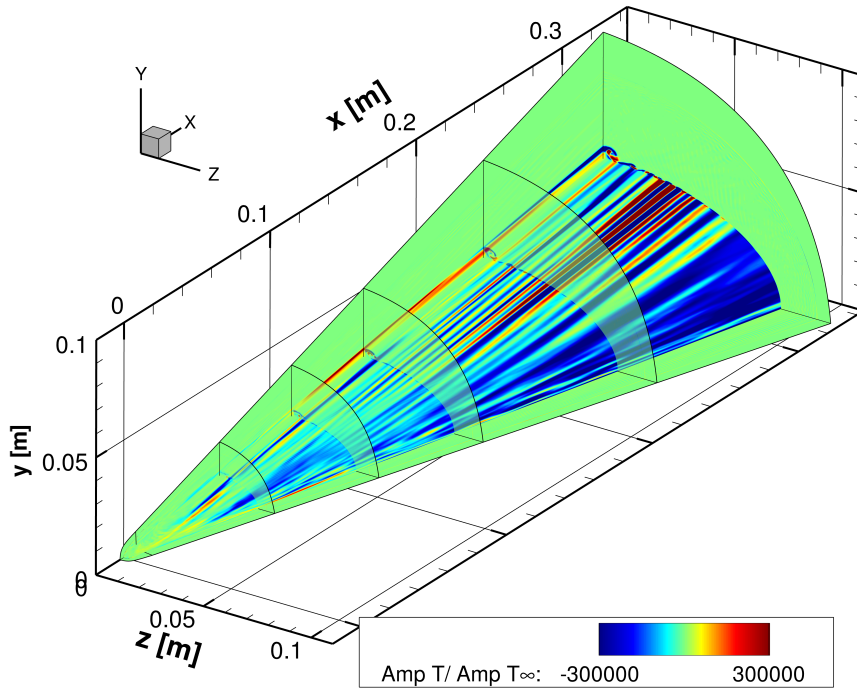


図 2.13 実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布（全体）

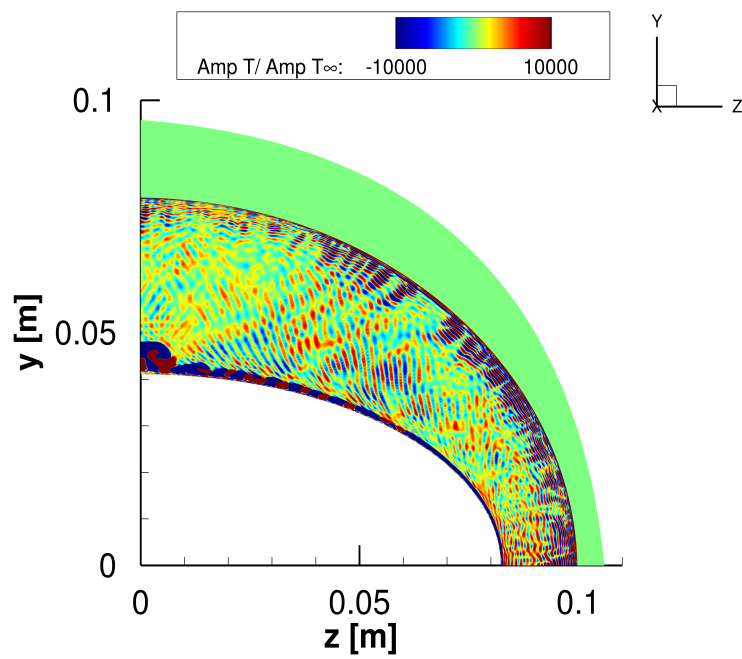


図 2.14 流出面における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布

2.5.3 Crossflow 部における各擾乱の固有モード分布

図 2.15 (a) に境界層厚さ約90%位置での最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布を示す。また図 2.15 (b) には、T. J. Juliano と S. P. Schneider によって行われた TSP による表面温度変化の計測で結果を示した。まずストリーク形状分布については、双方とも類似した位置、形状となっていることが確認できる。またその実験では、上流側から伸びるストリークが横軸 $x = 255$ [mm] 付近から乱れ始め、 $x = 275$ [mm] 付近にて崩壊し、以降乱流へと遷移している。

ストリーク分布の乱れ始めの位置座標 $(x_t, z_t) = (255 \text{ mm}, 30 \text{ mm})$ を通過する流線を描き、その流線上での温度擾乱、各方向速度擾乱の固有モード値を抽出し、図 2.16 と図 2.17 に示す。まず、乱れ始め位置 (x_t, z_t) から壁面垂直方向に境界層厚さ δ を CFD から算出する。得られた δ を 0.1δ 刻みで 10 分割し、各点を通過する流線を描く。その流線の始点は一様主流中の点である。また図の横軸は模型先端付近の $x = 10$ [mm] から模型全長の $x = 328$ [mm] までである。各曲線で実線は擾乱成長、一点破線は安定化したものを表す。温度擾乱固有モード分布より、乱れ開始点において境界層厚さ 40–70% 位置を通過した後、遷移点 $x = 275$ [mm] 付近で温度擾乱が増幅されていることがわかる。方や壁面近傍から 30% δ までは粘性が支配的で流れが安定化し擾乱成長が小さく、さらに 80–100% δ の境界層外縁でも擾乱成長が小さいことが確認できる。

速度擾乱の固有モードの中で最も増幅が大きい擾乱が x 方向速度擾乱であることがわかる。そのうち、境界層厚さ 40–80%位置を通過する際に増幅していることがわかる。これは境界層中程度位置を流れる x 方向の擾乱が、速度擾乱の中で最も大きい可能性があると考えられる。 y 方向速度擾乱の固有モードについて、他の方向速度擾乱の固有モード分布と同様に、境界層厚さ 70% δ で最大の増幅値が確認できる。一方で、乱れ開始位置以降では流れ場の安定化と不安定化が大きい振幅で交互に繰り返す箇所が発生していることがわかる。これは Crossflow の壁面に向かう速度成分と離れる速度成分による擾乱増減が影響しているものと考えられる。 z 方向速度擾乱の固有モードは、境界層厚さ 60–80% δ が増幅しており、特に 70–80% δ の増幅は、顕著である。これは Crossflow の横滑り成分の擾乱が増幅している可能性が考えられる。以上より、まず粘性が支配的な壁面近傍から 30% δ までの低層では、各擾乱に対して安定化している。また、90–100% δ の境界層外縁でも Crossflow は弱体化し、境界層外部の模型形状に沿う流れが優位となり、擾乱成長が抑制されている可能性がある。乱れ開始位置における境界層中程度位置では速度擾乱が成長し、一方で温度擾乱は安定化する。その後、遷移点では速度擾乱が 80% δ を通過した流線が極大値を取り、対照的に温度擾乱は極小となる。つまり、境界層中程度を通過した Crossflow の渦度変化によって、粘性散逸に伴う温度の擾乱成長を誘起したと考えられる。また、80% δ では、渦の散逸が乏しく温度擾乱は安定化し、対流項が支配的な不安定成長となる。

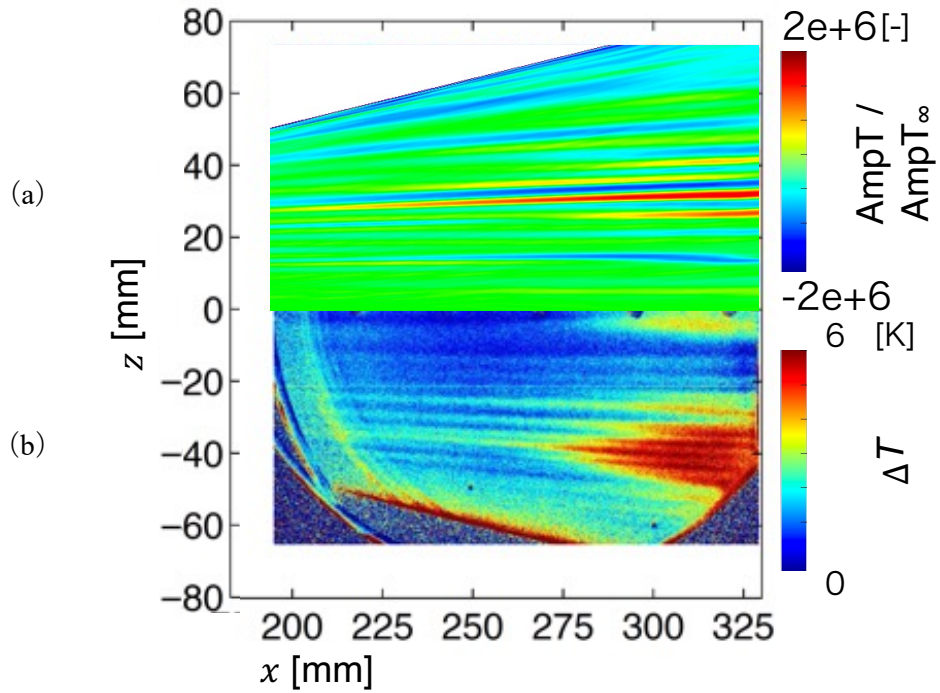


図 2.15 (a) 境界層厚さ約 90%位置における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布

(b) T. J. Juliano と S. P. Schneider らによる表面温度変化の計測結果[16]

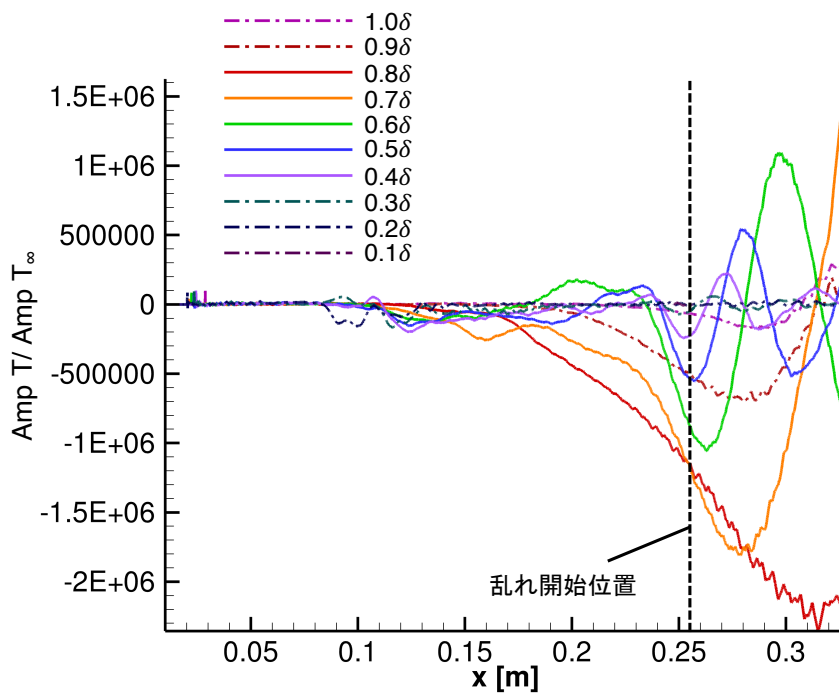
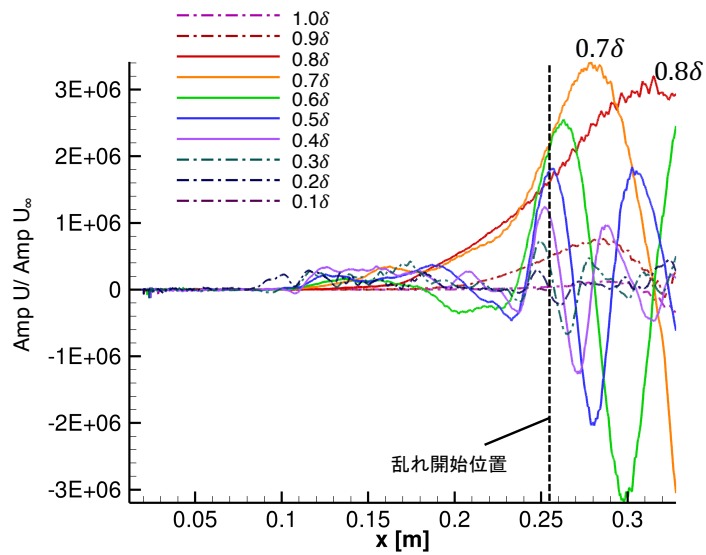
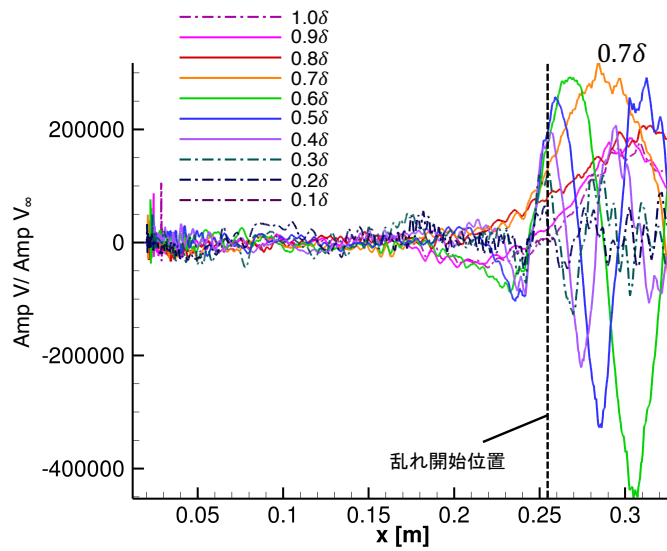


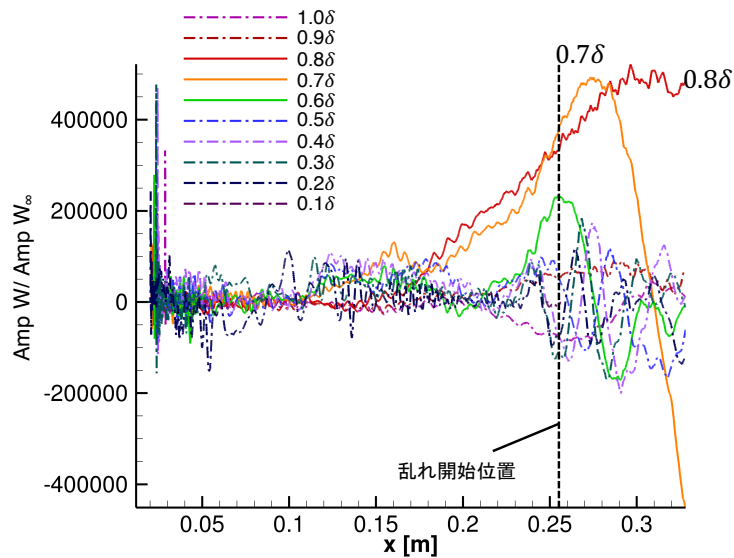
図 2.16 乱れ開始点を通過する流線上での実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布



(a) x 方向速度



(b) y 方向速度



(c) z 方向速度

図 2.17 乱れ開始点を通る流線上での実最大固有値に対する各方向速度擾乱の固有モード

2.5.4 模型先端部, Attachment line 側の固有モード分布

図 2.18 に Attachment line 側の境界層厚さ約 10%位置における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布を示す。Attachment line 側 ($y = 0$ [mm] 面) に温度擾乱が増幅する箇所と減衰する箇所が交互に現れるような分布構造となっている。また, この特徴的な分布が発生し始める模型先端付近を拡大したものを図 2.19 に示す。 $x = 12$ [mm] 付近から 22 [mm] まで擾乱の増幅を示す赤い箇所と中立安定の分布が交互に位置していることが確認できる。このような特徴的な分布が見られる位置において, 境界層外縁付近に相当する厚さ位置でのマッハ数分布と圧力分布を図 2.20 に示す。全体安定性解析で増幅と中立安定が交互に現れる特徴的な分布構造が見られ始めた $x = 12$ [mm] 付近でマッハ数や圧力も大きくなり始め, 境界層が薄くなっていることも確認できる。さらに, $x = 23$ [mm] 付近から擾乱の減衰を示す分布も増幅箇所の中に現れ始めることがわかる。この増幅と減衰が交互に位置する分布は後流へ行くにつれ, y 軸正方向にも広がっている。これは模型の 3 次元性により Attachment line 付近を流れる流体が, 徐々に Crossflow へと変化しているためと考えられる。またこの辺りから Centerline 側 ($z = 0$ [mm] 面) へ向かう流れと Attachment line に沿う流れが分岐する箇所にもなっており, Crossflow 部でストリーク状の大きな増幅が見られた箇所を通過する流線の上流部にもなっている。

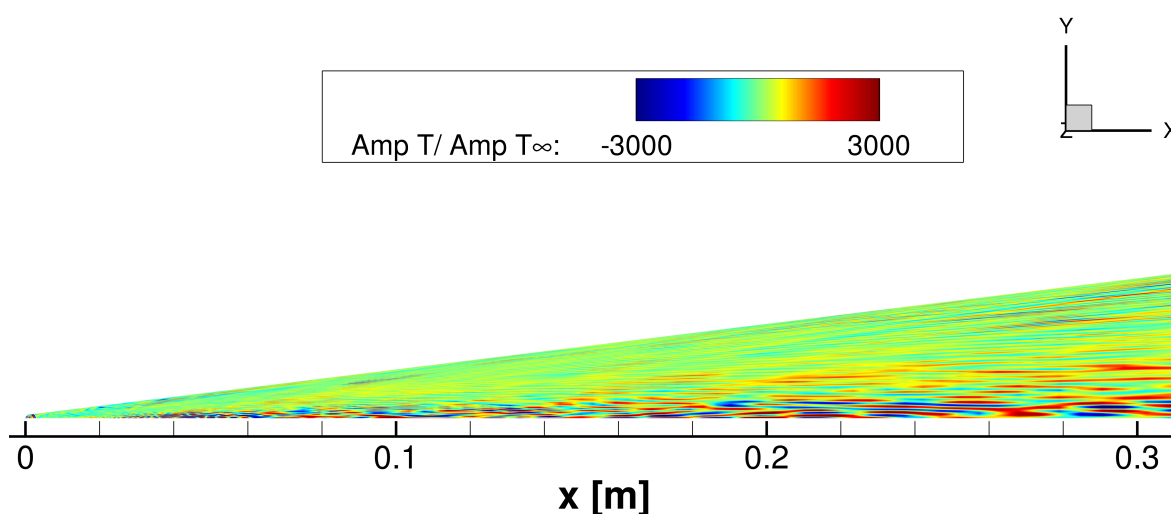


図 2.18 Attachment line 側における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布

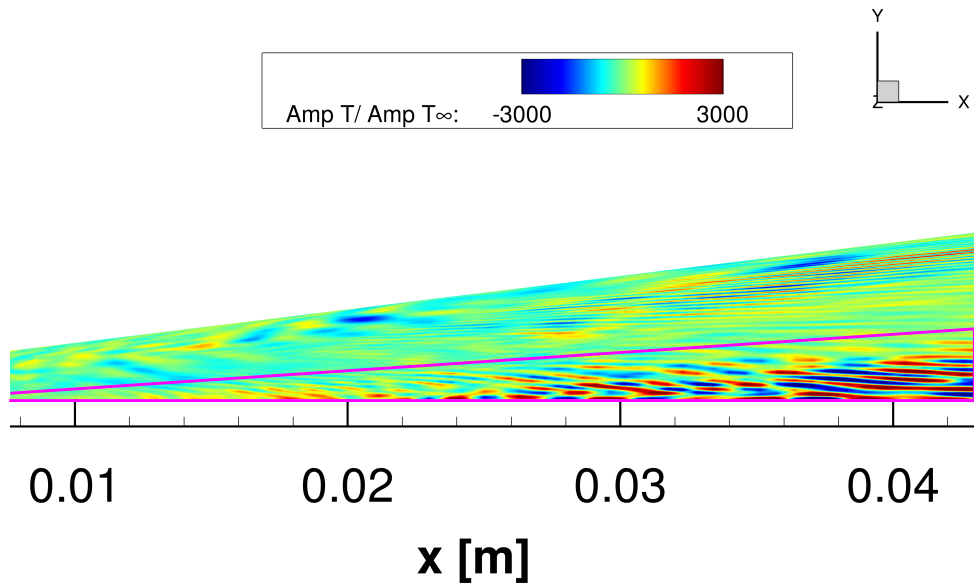
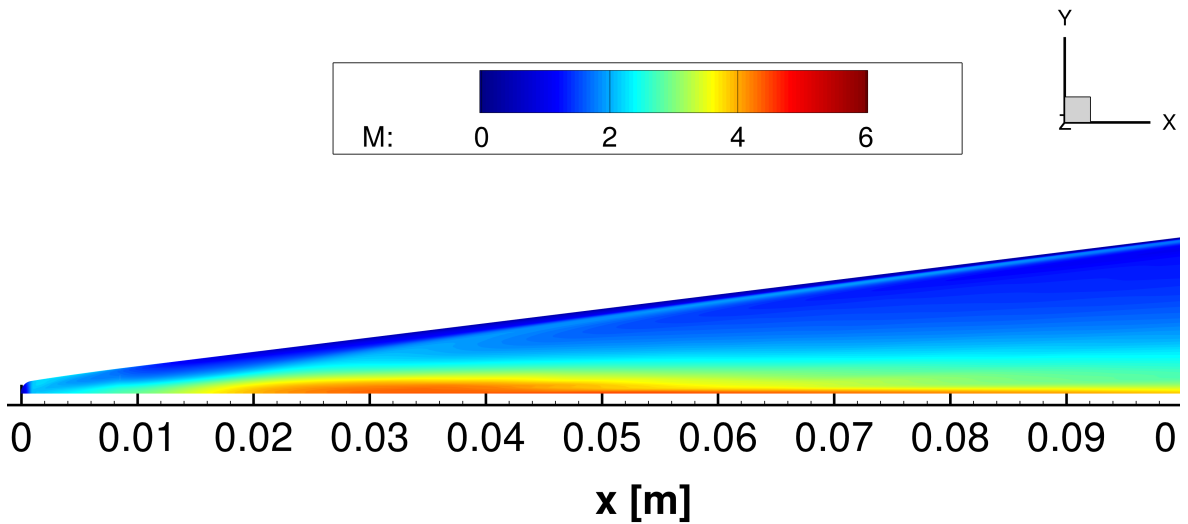
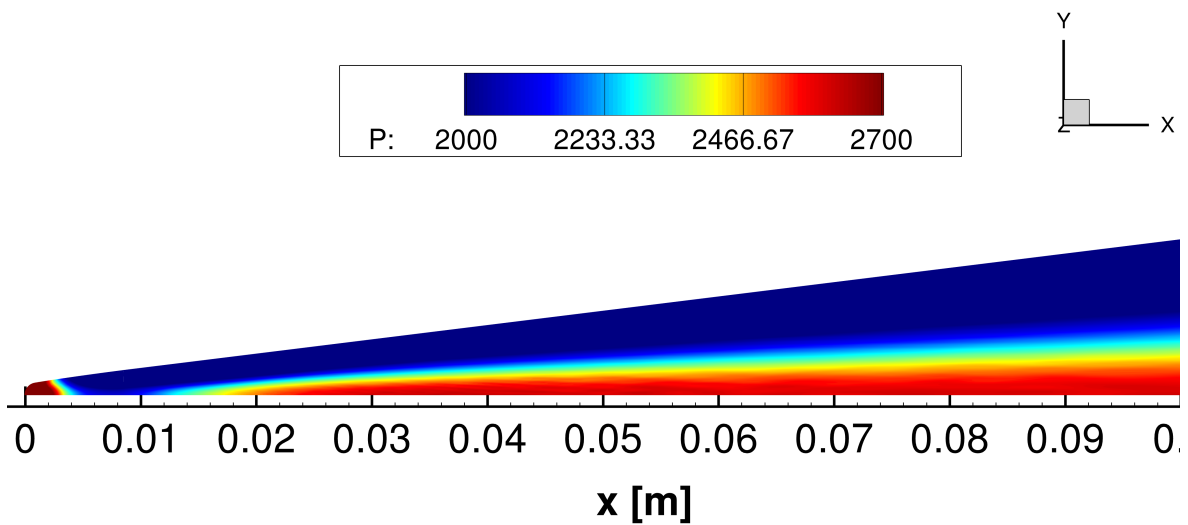


図 2.19 模型先端付近の Attachment line 部における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布



(a) マッハ数分布



(b) 圧力分布

図 2.20 模型先端部付近の Attachment line 部における平均流結果

2.5.5 低レイノルズ主流条件での全体安定性解析

T. J. Juliano と L. A. Paquin ら実験において乱流遷移しなかった主流条件[48]で全体安定性解析を行った結果を示す。主流条件を表 2.2 に示す。乱流遷移した表 2.1 の主流と比べてレイノルズ数が 2/3 程度である。図 2.21 に境界層中程度位置を流れる流体と境界層外部を流れる流体をストリームリボンと流線を使って可視化したものを示す。表 2.1 の主流条件を用いた平均流と同様に流線が曲がっており、境界層内で **Crossflow** が形成されている。しかしストリームリボンについて図 2.11 と比較するとリボンのねじれが弱いことから、低レイノルズ主流条件の場合、流線上における各々の位置での渦度ベクトルが小さいと判断できる。また図 2.22 に、この平均流結果を用いた全体安定性解析による実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布と T. J. Juliano と L. A. Paquin らによる TSP を用いた表面温度変化の計測結果を示す。実験による計測結果と同様にストリーク分布が弱まり、図 2.12 の主流条件の安定性解析結果と比較して、安定化していることが確認できた。これは主流レイノルズ数が小さくなったことで、境界層内において粘性の影響が大きくなり、ストリーク分布箇所における **Crossflow** が弱まったことによるものと考えられる。レイノルズ数の数 10%程度の変化に対しても、全体安定性解析は **Crossflow** 不安定性による擾乱の線形成長段階を適切に記述可能な解析手法である。

表 2.2 低 Re 数主流条件

Parameters	Values
Re , [1/m]	8.1×10^6
M , [-]	6.0
U_∞ , [m/s]	850.5
T_∞ , [K]	52.3
T_{wall} , [K]	300.0

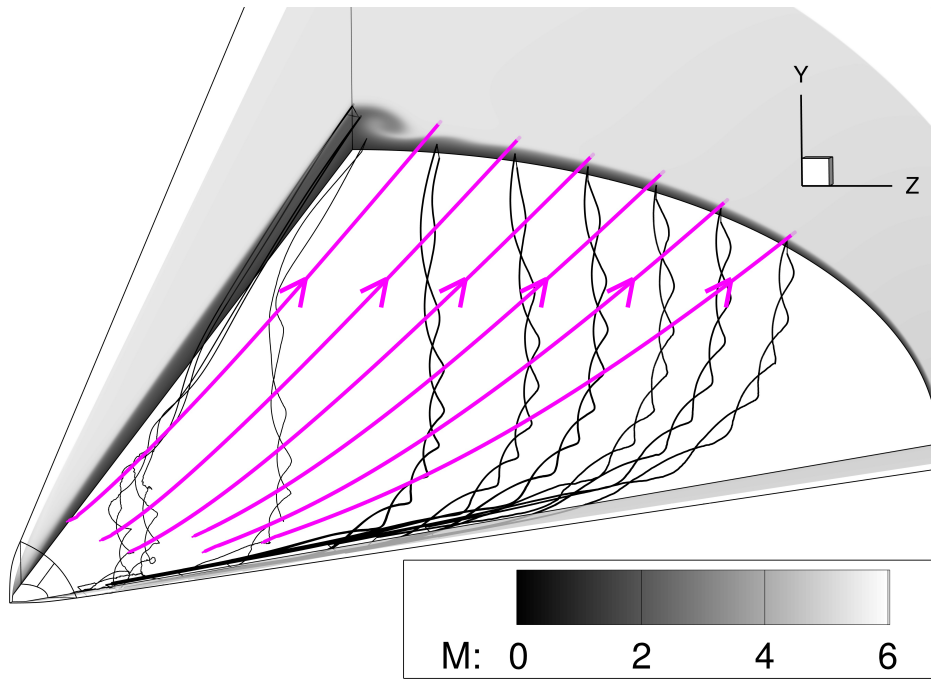


図 2.21 低 Re 主流条件での境界層内部のストリームリボンと境界層外部の流線

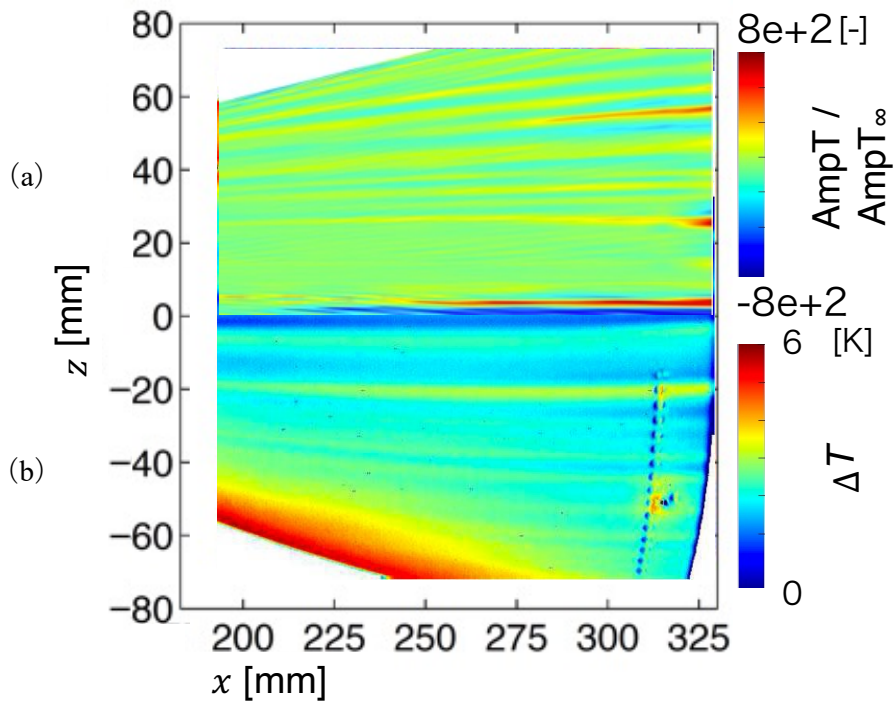


図 2.22 (a) 境界層厚さ約 90%位置における実最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布

(b) T. J. Juliano と L. A. Paquin らによる表面温度変化の計測結果[48]

第3章

線形安定性理論（Linear parallel Stability Theory : LST）と線形放物型安定方程式（Linear Parabolized Stability Equations : LPSE）に基づく安定性解析

3.1 はじめに

前章では全体安定性解析によって、流れ場の空間分布に対して近似を施さず模型周りにおける不安定なモードなどの特徴的な構造や強さを解析した。しかし、全体安定性解析において、流れ場の固有値と固有ベクトルを求める際に、計算コスト削減のため Arnoldi 法を用いて近似行列を作成し、その近似行列に対する固有値と固有ベクトルを算出した。よって Arnoldi 法で求めた近似固有値に対する結果の物理的解釈が困難であるという側面も持つ。そこで、全体安定性解析によって得られた不安定モード分布を含む平均流を2次元データとして抽出し、その平面内で LST と LPSE に基づく安定性解析[49]を実施する。本章では、Attachment line 側の断面内の流れと、ストリークが乱れ始める位置を通過する断面に着目をして、LPSE 解析を用いて調査し擾乱成長過程を調べることで、前章の全体安定性解析による最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布で得られた、模型の Crossflow 部における境界層 90%でいくつかのストリーク状の特徴的な分布の物理機構を解き明かす。

3.2 安定方程式の導出

3.2.1 線形攪乱方程式

本研究で用いた線形安定方程式（LST と LPSE）の導出方法について示す。一般に非圧縮粘性流れに対して行う安定性解析には Orr-Sommerfeld 方程式が用いられる。しかしながら、本研究で対象とする流れ場については流体の圧縮性について考慮する必要がある。そこで3次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式の式 (2.1) から得られる安定方程式により解析を行う。3次元境界層内の攪乱を支配する方程式は連続の式、運動方程式、エネルギー方程式、理想気体の状態方程式であり、それぞれ以下で与えられる。

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + F \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* u^*) + \kappa^* F \rho^* v^* + \frac{\partial}{\partial y^*} (\rho^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (\rho^* w^*) = 0, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \rho^* \left\{ F \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \kappa^* u^* v^* \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right\} \\ &= -F \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + F \frac{2}{3} \frac{\partial \mu^*}{\partial x^*} \left(2F \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + 2\kappa^* F v^* - \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \\ &+ \frac{\partial \mu^*}{\partial y^*} \left(F \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} - \kappa^* F u^* \right) + \frac{\partial \mu^*}{\partial z^*} \left(F \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \\ &- \mu^* \frac{4}{3} y^* \frac{\partial \kappa^*}{\partial x^*} F^3 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \mu^* \frac{7}{3} \kappa^* F^2 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \mu^* \kappa^{*2} F^2 u^* \\ &+ \mu^* \frac{4}{3} \frac{\partial \kappa^*}{\partial x^*} F^3 v^* + \mu^* \kappa^* F \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + \mu^* \frac{4}{3} \kappa^* F^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \mu^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \\ &+ \mu^* \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\mu^* F}{3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^* \partial y^*} + \frac{\mu^* F}{3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^* \partial z^*}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \rho^* \left\{ F \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \kappa^* u^{*2} \right) + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right\} \\ &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} - \mu^* \frac{\partial \kappa^*}{\partial x^*} F^3 u^* - \frac{4\mu^* \kappa^{*2} F^2}{3} v^* \\ &+ F \frac{\partial \mu^*}{\partial x^*} \left\{ F \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \kappa^* u^* \right) + \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right\} \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial \mu^*}{\partial y^*} \left(F \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2 \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \kappa^* F v^* \right) + \frac{\partial \mu^*}{\partial z^*} \left(F \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \\ &- \frac{7\mu^* \kappa^* F^2}{3} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - \mu^* y^* \frac{\partial \kappa^*}{\partial x^*} F^3 \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + \frac{4\mu^* \kappa^* F}{3} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\mu^* F}{3} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial y^*} \\ &+ \frac{\mu^*}{3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^* \partial z^*} + \mu^* F^2 \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{4\mu^*}{3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \mu^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \rho^* \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \rho^* \left\{ F u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right\} \\ &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + F \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + F \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial \mu^*}{\partial y^*} \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right) \\ &- \frac{2}{3} \frac{\partial \mu^*}{\partial y^*} \left(F \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} - 2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \kappa^* F v^* \right) \\ &- \mu^* y^* \frac{\partial \kappa^*}{\partial x^*} F^3 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + \mu^* \kappa^* F \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + \frac{\mu^* \kappa^* F}{3} \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \mu^* F^2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} \\ &+ \mu^* \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{4\mu^*}{3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\mu^* F}{3} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^* \partial z^*} + \frac{\mu^*}{3} \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^* \partial z^*}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
& \rho^* \frac{\partial}{\partial t^*} (C_p^* T^*) + \rho^* \left\{ F u^* \frac{\partial}{\partial x^*} (C_p^* T^*) + v^* \frac{\partial}{\partial y^*} (C_p^* T^*) \right. \\
& \quad \left. + w^* \frac{\partial}{\partial z^*} (C_p^* T^*) \right\} \\
& = \phi^* + \frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \left(F u^* \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial p^*}{\partial z^*} \right) \\
& \quad + F \frac{\partial}{\partial x^*} \left(F k^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \right) + \frac{\partial}{\partial y^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left(k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) \\
& \quad + k^* \kappa^* F \frac{\partial T^*}{\partial y^*}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$p^* = \rho^* R^* T^*. \tag{3.6}$$

“*”は有次元量であることを示す。また ϕ^* は散逸関数であり、

$$\begin{aligned}
\frac{\phi^*}{\mu^*} & = 2F^2 \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} - \frac{2}{3} \left(F \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \kappa^* F v^* + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 \\
& \quad + 2\kappa^{*2} F^2 (u^{*2} + v^{*2}) - \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - F \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right)^2 + 4\kappa^* F^2 \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} v^* - \frac{\partial u^*}{\partial x^*} u^* \right) \\
& \quad + 2 \left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right)^2 \right\} \\
& \quad - \left(\frac{\partial w^*}{\partial y^*} - \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} \right)^2 \right)^2, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

で与えられる。なお、式 (3.1) から式 (3.7) においては x 方向の壁面曲率の影響も含まれており、それらは、

$$\kappa^* = -\frac{d\theta}{dx^*}, \quad F = \frac{1}{1 + y^* \kappa^*}, \tag{3.8}$$

によって得られる。 θ は模型表面の角度を示す。またレイノルズ数については、

$$Re = \frac{\bar{\rho}_e \bar{U}_e \bar{\delta}_e}{\bar{\mu}_e}, \tag{3.9}$$

として算出した。ただし、添字“ e ”は境界層外縁における値であることを示し、境界層厚さ $\bar{\delta}_e$ は $U \approx 0.99\bar{U}$ となる値とした。式 (3.1) から式 (3.7) までの支配方程式における各物理量 \mathbf{q} を、CFD 計算により得られた準定常解の基本量 $\bar{\mathbf{q}}$ 、微小擾乱部 \mathbf{q}' としたとき、

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}', \tag{3.10}$$

と線形分解できる。次に準定常解 $\bar{\mathbf{q}}$ は自身で支配方程式を満たすとして差し引き、2 次以上の微小項を線形近似することで以下のような線形攪乱方程式が得られる。

$$\left(\mathbf{L}_t \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{L}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{L}_z \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{L}_{xx} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathbf{L}_{yy} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \mathbf{L}_{zz} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mathbf{L}_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \mathbf{L}_{yz} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \mathbf{L}_{zx} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{q}' = \mathbf{0}. \tag{3.11}$$

ただし、 $\mathbf{q}'(x, y, z, t) = (u', v', w', \rho', T')$ である。また、 $\mathbf{L}_t, \mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z, \mathbf{L}_{xx}, \mathbf{L}_{yy}, \mathbf{L}_{zz}, \mathbf{L}_{xy}, \mathbf{L}_{yz}, \mathbf{L}_{zx}$ は 5×5 の係数行列であり、境界層近似に基づく層流解の関数である。

3.2.2 局所平行流近似

LST を行う際、解析する基本流を定常で 2 次元の平行流れと仮定する局所平行流近似を行う。局所平行流近似とは平均流の解のうちオーダー $O[Re\delta_*^{-1}]$ の物理量を見捨てる近似であり、式 (3.11) の線形攪乱方程式に適用すると、係数行列は y のみの関数と考えることができる。また、この方程式は線形であるため、攪乱を次のような形で表すことができる。

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)} + c. c. \quad (3.12)$$

式 (3.12) の形で表される攪乱はノーマルモード (normal mode) と呼ばれ、 $\tilde{\mathbf{q}}$ は波の振幅関数、 α 、 β は x 、 z 方向の空間波数、 ω は波の周波数、 $c. c.$ は右辺第 1 項の複素共役を示す。安定方程式を得るために式 (3.11) の各係数行列においてオーダー $O[1]$ の項のみを残し、式 (3.12) を代入すると LST の安定方程式である、

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dy} + \mathbf{C}\frac{d^2\tilde{\mathbf{q}}}{dy^2} = \mathbf{0}, \quad (3.13)$$

が得られる。ただし、 $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\rho}, \tilde{T})^T$ であり、係数行列 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} はオーダー $O[1]$ の平均流と攪乱パラメータで構成される。さらに本研究において LST の安定方程式の壁面曲率項も非並行性と同じオーダーであると考え壁面曲率項も見捨てる。式 (3.13) を、壁面 ($y = 0$) と無限遠 ($y \rightarrow \infty$) における境界条件、

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = \tilde{T} = 0, \quad \text{at } y = 0 \quad (3.14)$$

$$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{T} \rightarrow \infty, \quad \text{at } y \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

を課すことで局所平行流近似を施した境界層内の微小攪乱分布を式 (3.13) の解として得ることができる。

3.2.3 弱非平行流近似 (PSE 近似)

前節では流れ場を局所平行流とみなして近似を施し安定方程式を得たが、本節ではその近似を行わない場合の安定方程式を導出する。LPSE で用いる非平行流に対する擾乱は一般に次の形で仮定される。

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(x, y)e^{i(\int_{x_0}^x \alpha dx + \beta z + \omega t)} + c. c. \quad (3.16)$$

また、PSE の解析では、 $\tilde{\mathbf{q}}$ に対しては、

$$\left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} \right|_{y=y|\tilde{\mathbf{q}}_{\max}|} = 0, \quad (3.17)$$

を満たすよう制約し、式 (3.16) の指数部の α で擾乱の変化をみる。加えて $\tilde{\mathbf{q}}$ 、 α は x 方向に緩やかに変化し、境界層理論における非平行のオーダー $O[Re\delta_*^{-1}]$ と同じ程度に仮定する。このように $\tilde{\mathbf{q}}$ 、 α の x に関する 2 階導関数を省略することで行われる近似を PSE 近似と呼ぶ。攪乱の式 (3.16) を式 (2.11) に代入し、PSE 近似を施すと、

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y} + \mathbf{C}\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{q}}}{\partial y^2} + \mathbf{D}\frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

式 (3.11) において, \mathbf{q}' の 2 階導関数の係る項は全て粘性項から派生する. 本研究では, 参考論文[49]と同様に簡素で重要な粘性項のみを取り上げるため, $\mathbf{O}[1]$ の項のみを残した. 壁面曲率項については, $\delta^*\kappa^*$ が微小であるから,

$$F = \frac{1}{1 + y\delta^*\kappa^*} \approx 1 - y\delta^*\kappa^*, \quad (3.19)$$

として $\delta^*\kappa^*$ の 2 次以上の項を省略した. 境界条件は局所平行流近似で用いた式 (3.14), 式 (3.15) と同様のものを用いた. 一点下流の $x + \Delta x$ における実質的な擾乱の成長波数 α_{LPSE} は,

$$\alpha_{\text{LPSE}} = \alpha - i \frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x}, \quad (3.20)$$

で与えられる. 以上より, LPSE における擾乱成長率 σ は,

$$\sigma = -\alpha_i + \left(\frac{1}{\bar{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x} \right)_r \quad (3.21)$$

で与えられる. 一般的に LPSE 解析における, 成長率の定義として,

$$\sigma_{(\rho u)} = -\alpha_i + \left[\left\{ \frac{1}{\rho \tilde{u} + u \tilde{\rho}} \frac{\partial (\rho \tilde{u} + u \tilde{\rho})}{\partial x} \right\}_{y=y_m} \right]_r \quad (3.22)$$

とすることが多く, 本研究でもこれを採用した.

3.3 計算の流れ

LPSE の流れを図 3.1 に示す. LPSE を行う際, 計算開始位置 ($x = x_0$) における擾乱成長率が既知でなければならない. しかしながら PSE 解析において擾乱成長率は x の関数となっている. そこで計算開始位置で LST を行い, 初期値として固有ベクトルと擾乱成長率を得る. この初期値と計算開始位置より 1 点下流の平均流の解から LPSE の安定方程式を解き, 固有ベクトルから擾乱成長率を算出する. ここまでの過程を計算終了位置 ($x = x_{\text{end}}$) まで繰り返す. 最後に計算開始位置から計算終了位置までの擾乱成長率を上流から積分することで擾乱の振幅増幅の度合いを見積もることができる.

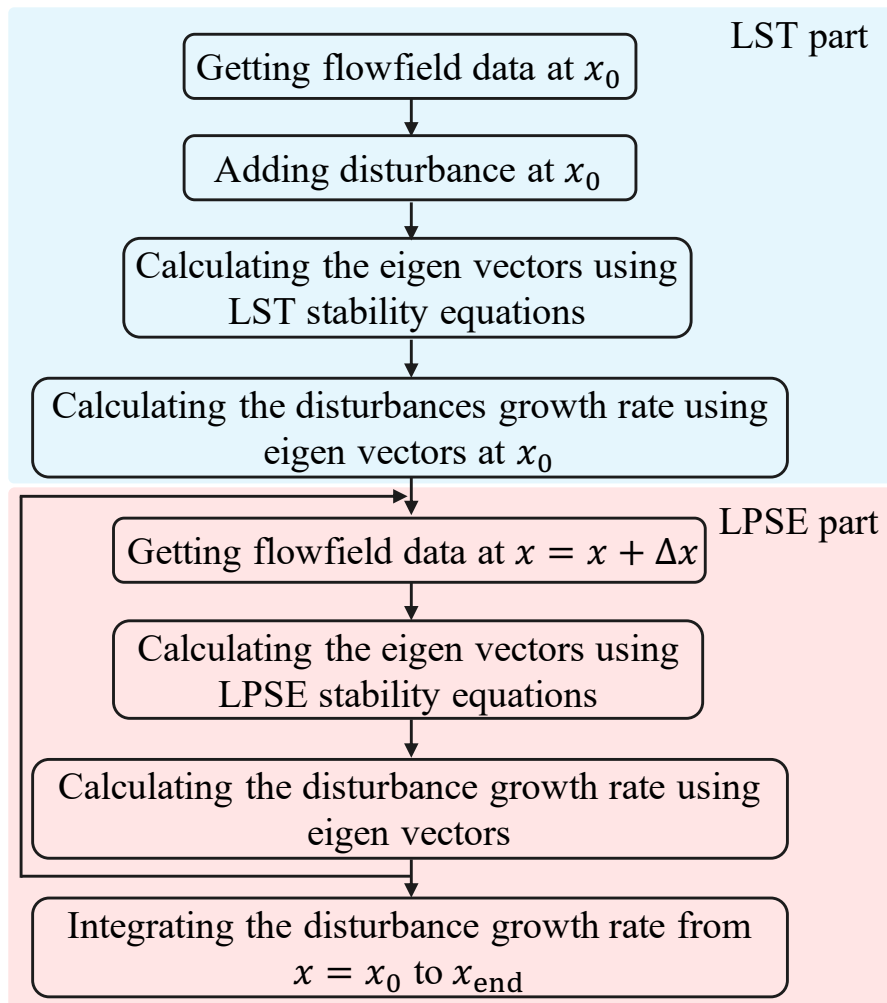


図 3.1 LPSE 解析の流れ

3.4 Attachment line 部における LPSE 解析

3.4.1 解析領域

図 3.2 に、全体安定性解析から得られた境界層内の温度擾乱に関する結果と、Attachment line 側対称境界面付近における壁面垂直断面内の境界層部分における平均流の流速分布を示す。図 3.3 には壁面垂直断面を真横から見た、断面上でのマッハ数分布を示す。断面内において壁面から境界層までを含む 70 点、先端から流出位置までを含む主流方向に 193 点を取り出し、LPSE 解析を行った。境界層厚さ δ は衝撃層内の主流速度 \bar{U} に対して、 $0.99\bar{U}$ となる高さとした。また模型先端部を $x = 0$ [mm] としたとき、計算開始位置 x_0 は、 $x_0 = 8.5$ [mm] とした。

図 3.4 にストリーク分布の乱れ始め位置 $(x_t, z_t) = (255\text{mm}, 30\text{mm})$ で境界層内を通過する流線と抽出した壁面垂直断面との位置関係を示す。 (x_t, z_t) において境界層内を通過する流体は上流において、模型先端部の Attachment line 側に集約されている。

また図 3.4 から乱れ開始位置を境界層内で通過する流体は上流側において、Attachment line 側の $x = 37.6 - 53.7$ [mm] へ集約される流れとなっており、乱れ開始位置で遷移について考える上で重要な領域となっている。付近における流線については、模型前方から流入した主流が境界層へ入り込んでいる箇所となっている。そして、乱れ始め位置で境界層の外縁側を流れる流体から、より模型前方で Crossflow となって Attachment line 側を離れるように流れることが確認できる。 $x = 103$ [mm] 付近で乱れ始め位置の境界層内を流れる流体は全て Crossflow となる。

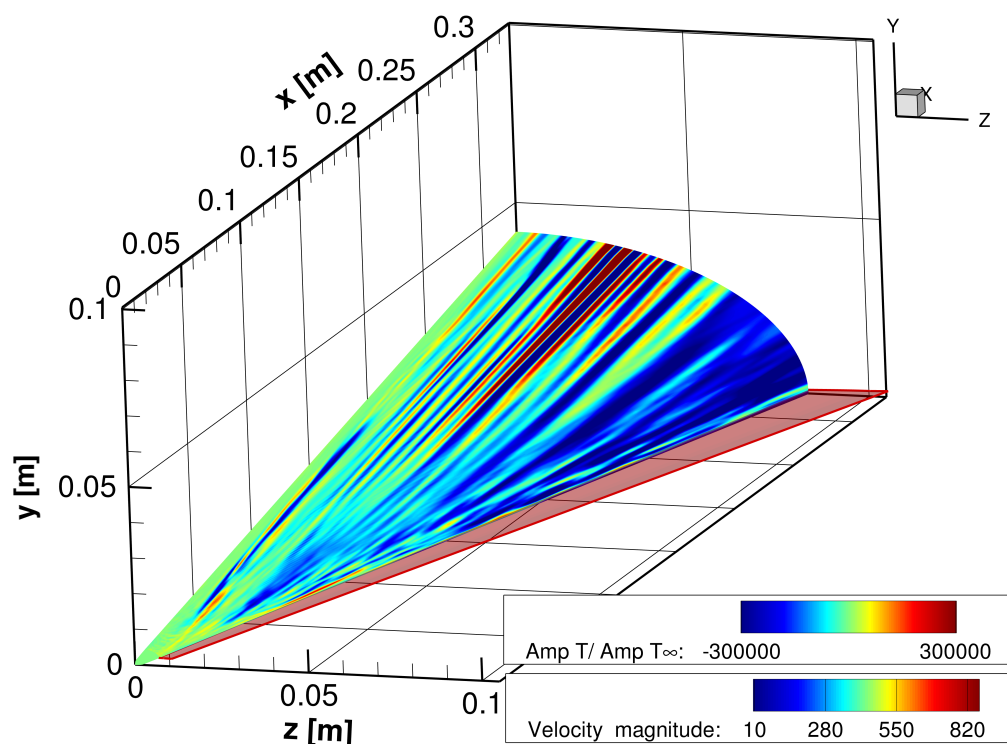


図 3.2 Attachment line 部における LPSE 解析領域

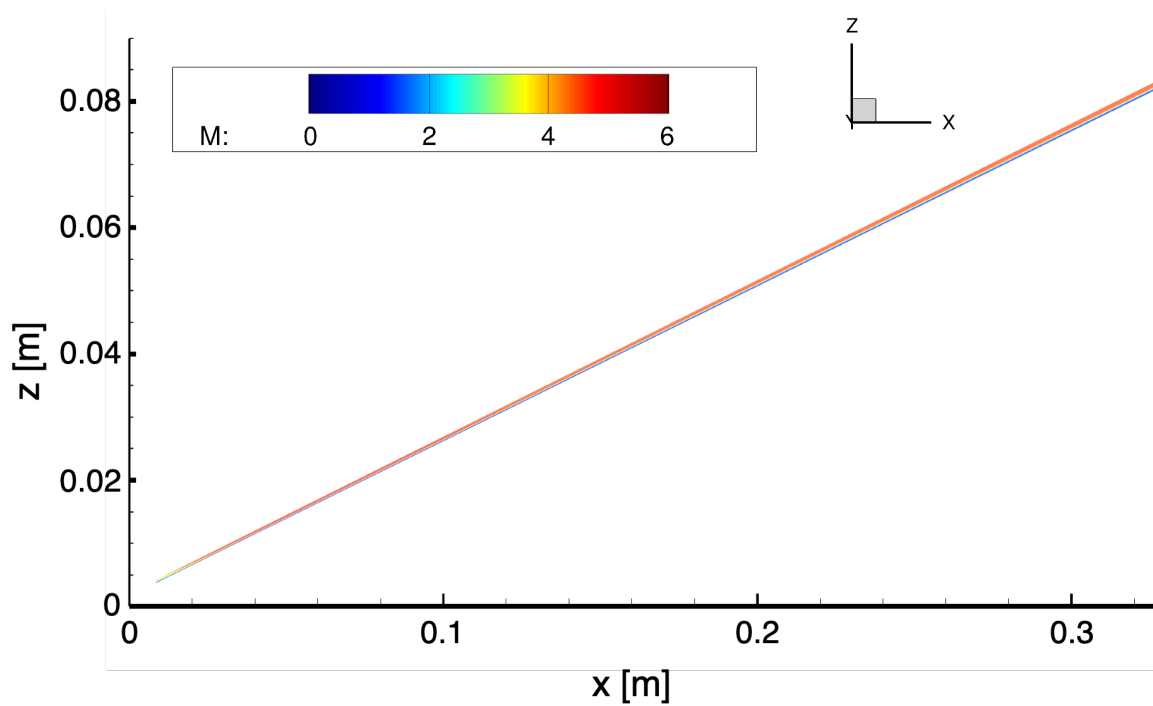


図 3.3 抽出断面における境界層部分のマッハ数分布

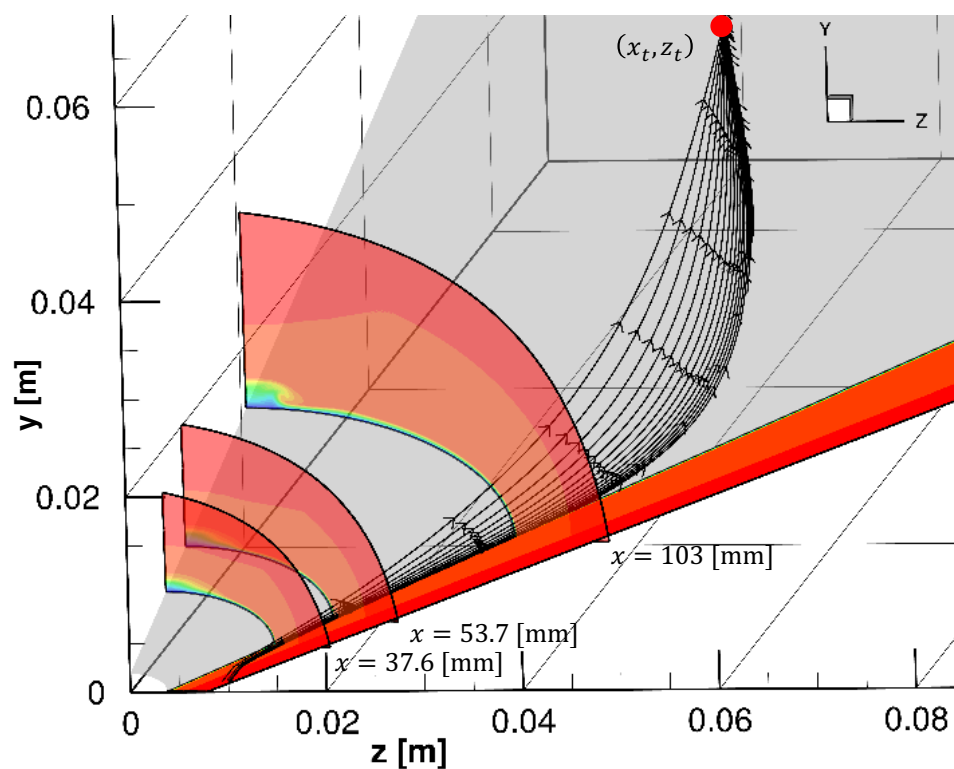


図 3.4 ストリーク分布の乱れ始め位置 (x_t, z_t) で境界層内を通過する流線と Attachment line 側模型先端部との位置関係

3.4.2 T-S 波を想定した低周波擾乱の導入

Mack らの研究[24]による 1st モードに相当する T-S 波を模擬した擾乱を抽出断面内の流れに付加する。加えて、擾乱は流線に沿って下流へ伝播していくものとみなす。乱れ開始位置 (x_t, z_t) を通過する流線の上流部に相当する $x = 37.6 - 53.7$ [mm] 付近を通過する流線は、抽出した壁面垂直断面の主流方向に沿うように流れるため、擾乱の伝播角度は 0.0 [deg] と仮定した。また T-S 波の特性周波数は実験から約 10 [kHz] 程度である[50]ため、 10 [kHz] の周波数で増幅する流れ方向波長 α_{re} を $\alpha_{re} = 0.1 - 50$ [mm] の範囲で変化させて LPSE 解析を行い、擾乱成長率を解析する。図 3.5 に 10 [kHz] の周波数を持つ擾乱を付加した際の増幅しやすい波長を示す。 $x = 37.6$ [mm] までは増幅を示す正の成長率を示している。初期擾乱 $\alpha_{re} = 80 - 83$ [mm] の場合、模型先端部において増幅のピークが確認できた。また初期擾乱が $\alpha_{re} = 50$ [mm] 以降の場合、模型先端部から流線群が抽出断面から完全に離れ Crossflow となる $x = 103$ [mm] では比較的擾乱の増幅傾向がみられる。これは模型先端部から流入した流体が Crossflow の影響が小さく平行流れとみなせる先端部ほど T-S 波が増幅したと考えられる。さらに下流へ流れると徐々に Crossflow が支配的となり、擾乱を受容した流体が Attachment line 側から離れる流体が増えたことで、本解析断面上において約 $x = 100$ [mm] より下流は模型先端部ほど増幅が見られなかったと考えられる。

一方で、得られたピーク波数を $\alpha_{peak} = 80$ [mm] として初期擾乱を与え、擾乱の周波数を $1 - 50$ [kHz] の間で LPSE 解析を行った結果を図 3.6 に示す。約 17 [kHz] において擾乱が上流から成長し、実験で得られた T-S 波による圧力値の振動周波数[29]と近い。

また模型先端付近、Attachment line 側の全体安定性解析結果、図 2.19 において示した境界層厚さ約 10%位置での最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布で示された特徴的な分布構造以外に不安定箇所が存在しなかったことも合わせて考えると、この付近における不安定領域は境界層厚さ約 10%位置における T-S 波由来の不安定モードが存在する可能性が高い。

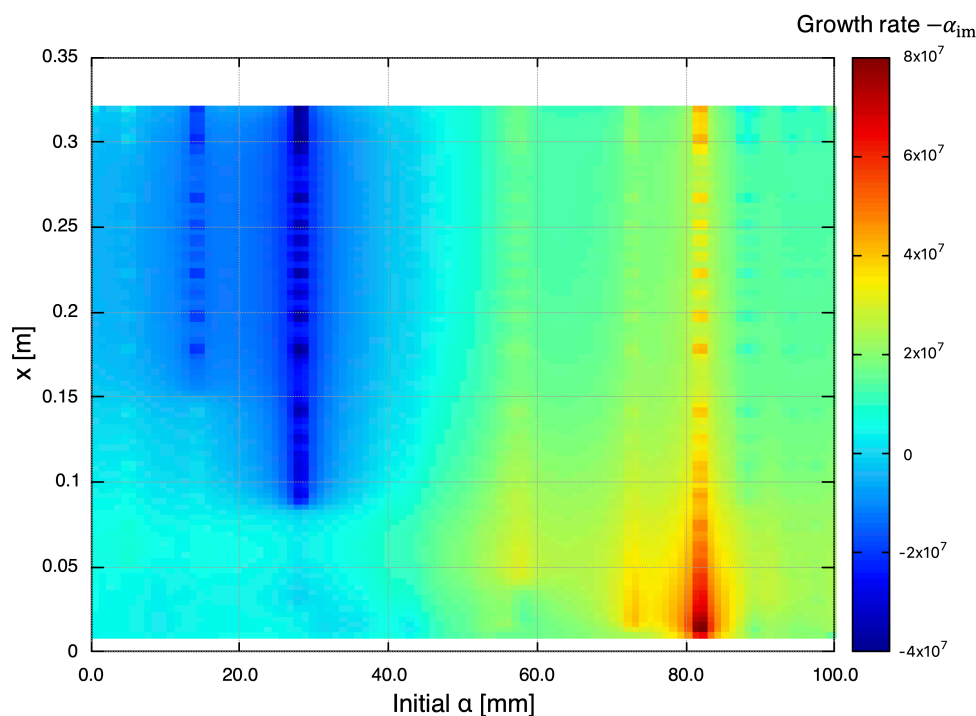


図 3.5 T-S 波を想定した初期擾乱 α_{re} に対する擾乱成長率

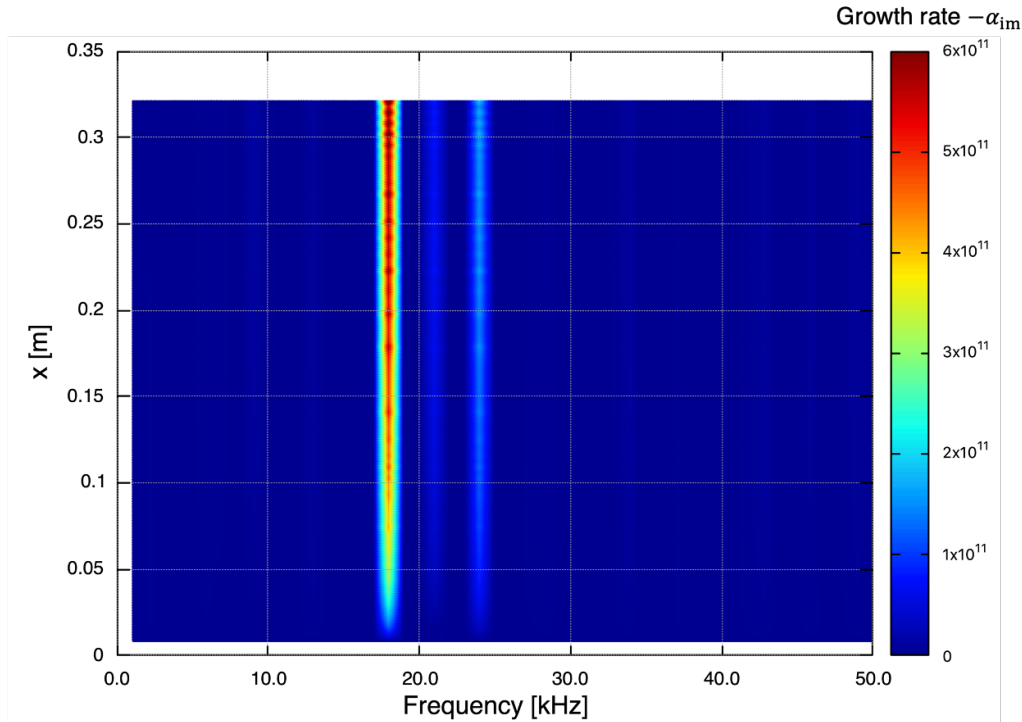


図 3.6 α_{peak} を初期擾乱として導入した際の各周波数に対する擾乱の成長率の積分値

3.4.3 Mack 波を想定した高周波擾乱の導入

次に Mack らの研究による 2nd モードに相当する初期擾乱を導入し、擾乱成長率を算出する。Mack モードは圧縮性境界層付近において 100 [kHz] – 1 [MHz] 程度の不安定モードであるとされ[51]、2 次元平板や迎角のない軸対称形状にて支配的となることがある。本解析領域の模型先端付近、Attachment line 側では前で示したように、抽出断面に沿うよう流体が流れていることから模型周りの流れの中で 2 次元流れに近い。擾乱は同一平面内で下流に伝播すると仮定した。極超音速境界層における Mack モードの流れ方向波長 α_{re} は、境界層厚さの約 2 倍であると知られている[52]。本解析領域において、最も境界層が薄い、 $x = 23$ [mm] での $\delta = 0.22$ [mm] を採用し、 $\alpha_{re} = 2\delta = 0.44$ [mm] を与えた。以上の初期擾乱の下で LPSE 解析を行った結果を図 3.7 に示す。z 軸は流れ方向の擾乱成長率の積分値である。約 280 [kHz] をピークとして擾乱が大きく成長していることがわかる。しかし、下流へと擾乱成長率の積分値を追っても、急激に増加するような結果は得られなかった。約 280 [kHz] の擾乱は既に計算開始位置で増幅していることから、計算開始位置の LST では増幅があったものの、LPSE を用いて下流へ擾乱成長を計算すると成長が見られない。

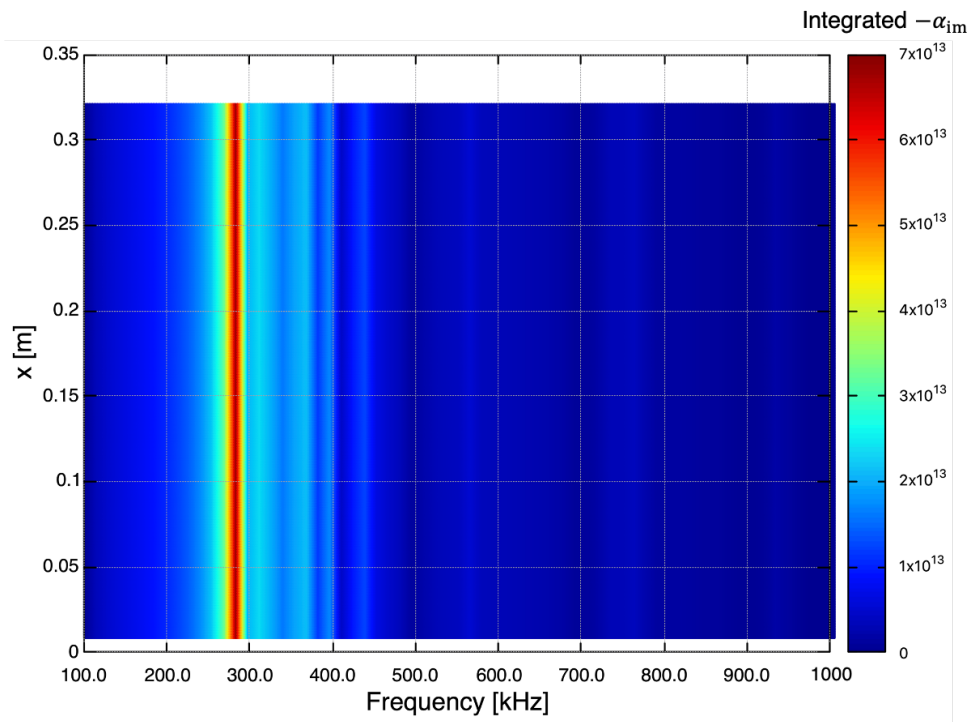


図 3.7 Mack 波を想定した初期擾乱に対する擾乱成長率の積分値

3.5 ストリークを通過する断面内の LPSE 解析

3.5.1 解析領域

図 3.8 に全体安定性解析から得られた境界層内の温度擾乱に関する結果と、ストリークの乱れ開始位置 $(x_t, z_t) = (255 \text{ mm}, 30 \text{ mm})$ を通過する壁面垂直断面内の平均流の流速分布を示す。また図 3.9 に壁面垂直断面を真横から見た図を示す。前節と同様、断面内において壁面から境界層までを含む 70 点、先端から流出位置までを含む主流方向に 193 点を取り出し、LPSE 解析を行った。境界層厚さ δ は衝撃層内の主流速度 \bar{U} に対して、 $0.99\bar{U}$ となる高さとした。

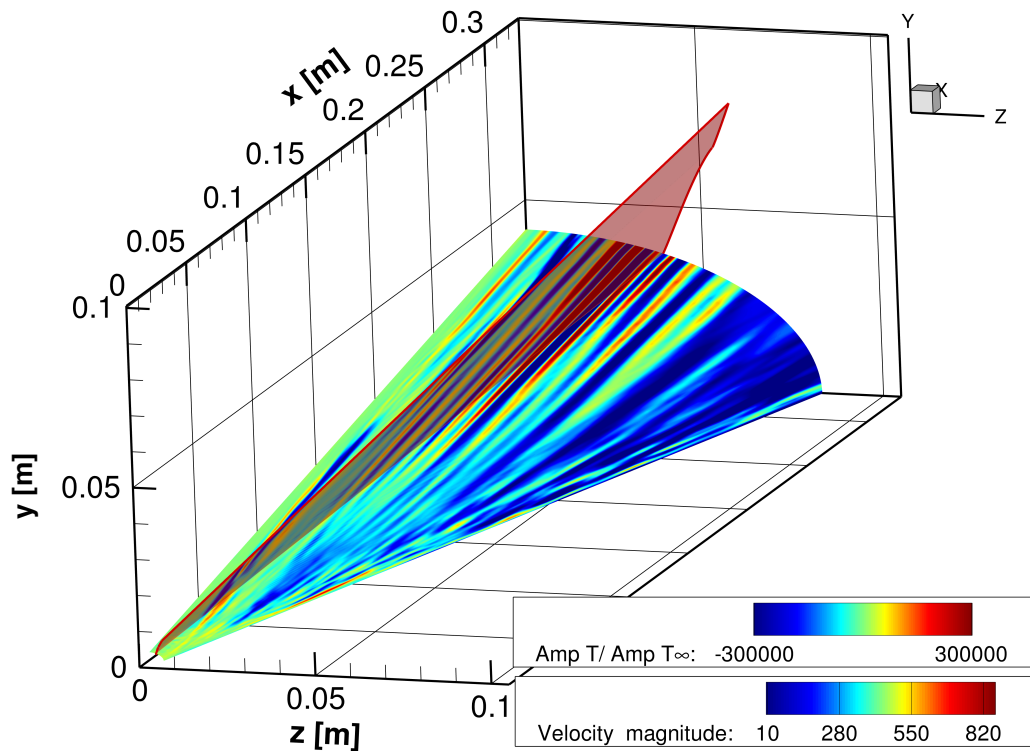


図 3.8 Crossflow 部における LPSE 解析領域

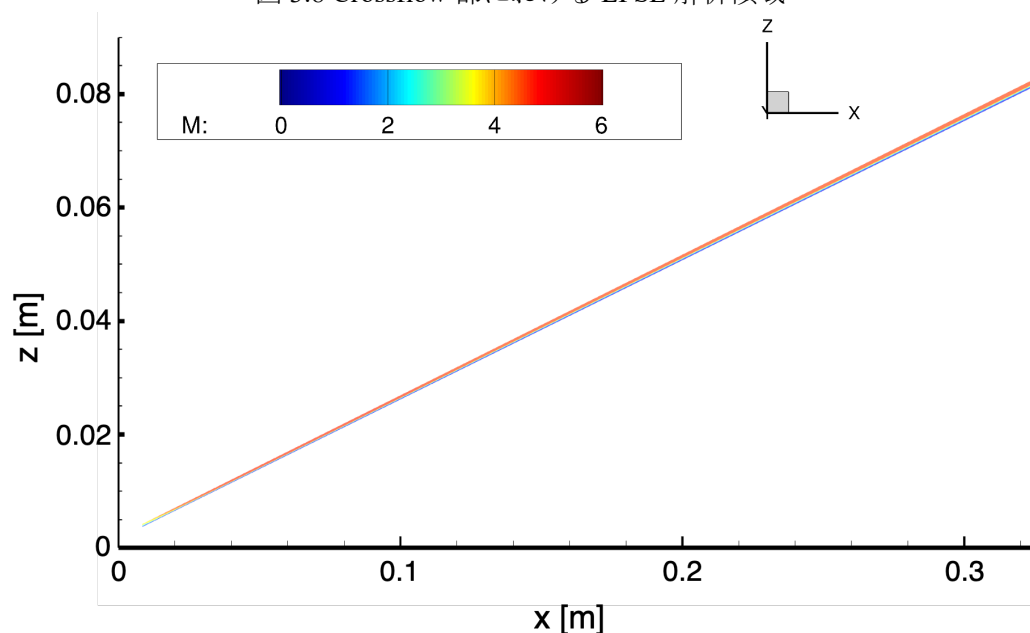


図 3.9 抽出断面における境界層部分のマッハ数分布

3.5.2 Stationary crossflow 波を想定した擾乱の導入

Crossflow 波は主に Crossflow が形成されている箇所で発生する不安定波の一つで、大きく Stationary crossflow 波と Traveling crossflow 波の2つに分けることができる。本節では Stationary crossflow 波について考察する。Stationary crossflow 波は主に壁面粗さと主流内に含まれる乱れによって引き起こされ、Traveling crossflow 波よりも高周波帯で観測されることがわかっている。図 3.10 に R. L. Kimmel らによって計測された模型周りの Stationary crossflow の可視化実験の結果[53]を示す。オイルフロー実験[54]より、波長は約 3.5 [mm] であるため、流れ方向波長を $\alpha_{re} = 3.5$ [mm] とし、Stationary crossflow 波の振動周波数帯を含む 150 – 400 [kHz] の範囲で LPSE 解析を行った。

まず擾乱波の周方向への伝播がないと仮定して擾乱を与え、LPSE 解析を行った。図 3.11 に擾乱波の伝播角度 0 [deg] の場合の擾乱成長率の積分値を示す。約 230 または 325 [kHz] の周波数を持つ擾乱はどの位置においても増幅したまま推移している。Stationary crossflow 波の振動周波数は 200 – 350 [kHz]と計測されており[55]、本解析でも同様の不安定波が解析された可能性が高い。しかし積分値の増幅傾向が見られないことから、周方向擾乱を受容したまま中立となる可能性がある。

次に擾乱波の周方向への伝播も考慮した LPSE 解析を行った。乱れ開始位置において境界層中程度位置を流れる流線と抽出断面のなす角は約 10 [deg] で、擾乱波も流線に沿って伝播すると仮定し伝播角度を 10 [deg] と設定した。図 3.12 に擾乱成長率の積分値を示す。図 3.11 にてピークがあった約 230 [kHz] の増幅は確認できない。約 310 [kHz] の周波数での擾乱の増幅については $x = 50$ [mm] 付近から擾乱が後流へ伝わるにつれ成長していることが確認でき、ストリーク分布乱れ始め位置 $(x_t, z_t) = (255 \text{ mm}, 30 \text{ mm})$ では計算開始位置での成長率と比較しても大幅に増幅していることがわかる。また、成長率の積分値が周方向への伝播を考えない時と比較し、 $0[10^2]$ 程度大きく、流線と同様の方向へ伝播する Stationary crossflow 波が支配的である。

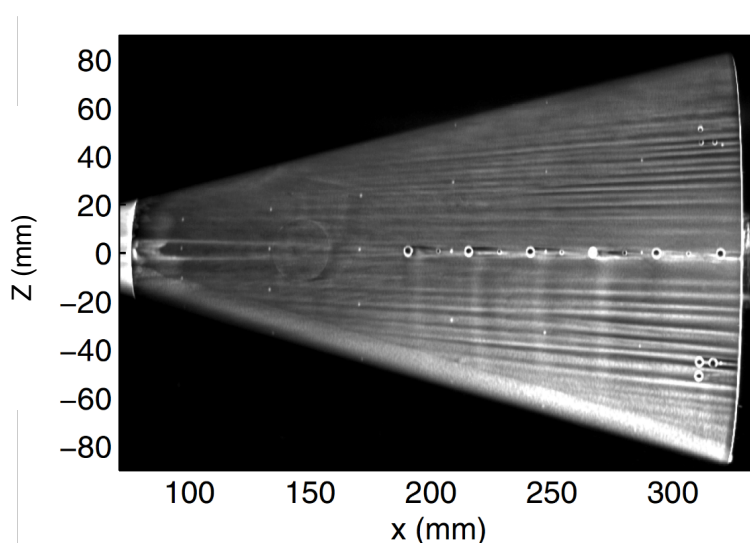


図 3.10 模型周りにおける Stationary crossflow のオイルフロー可視化実験
(主流 Re 数 = 7.5×10^6 [/m]) [53]

以上より、ストリークを含む断面内の Stationary crossflow 波による不安定性の増加は、境界層中程度位置を通過し流線方向に伝播する 310 [kHz] 程度の周波数を持つ擾乱の成長による影響が大きいと考えられる。

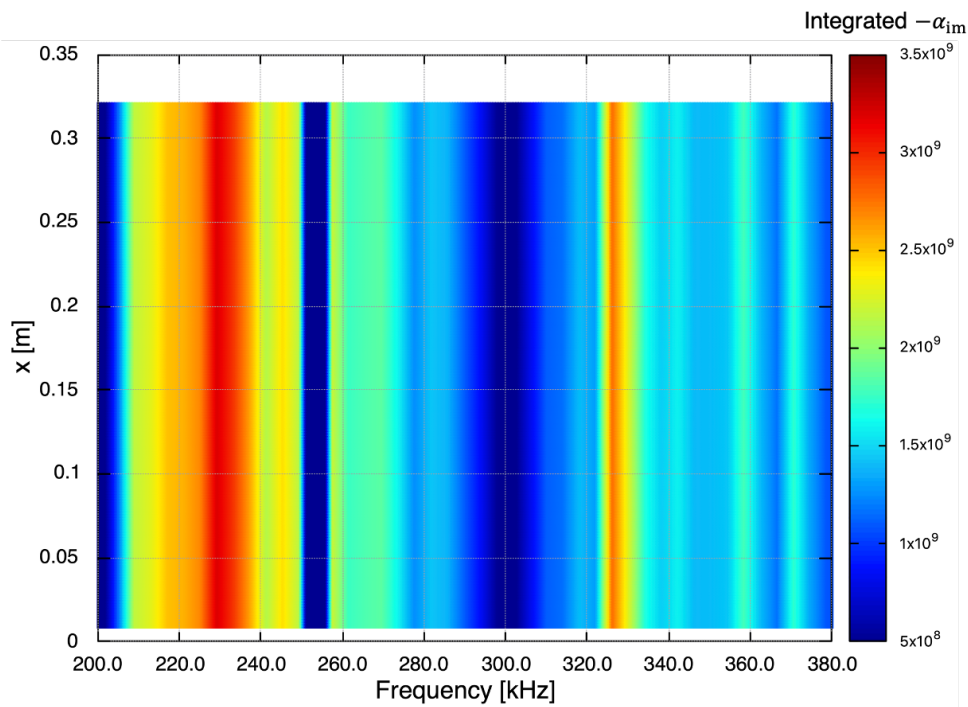


図 3.11 周方向の伝播を考慮しない Stationary crossflow 波の LPSE 解析

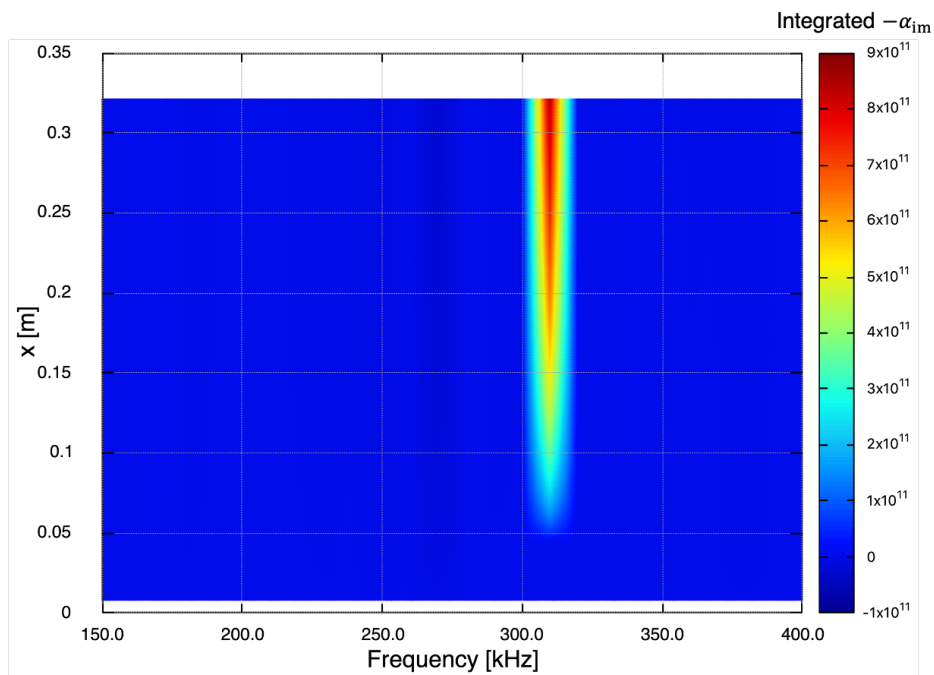


図 3.12 伝播角度 10 deg とした Stationary crossflow 波の LPSE 解析

3.5.3 Traveling crossflow 波を想定した擾乱の導入

Traveling crossflow 波を想定した擾乱を付加しストリークを通過する断面内における擾乱成長を調査する。Traveling crossflow 波は、風洞実験において境界層内で擾乱が生成されることで発生することが確認されており、この不安定波が HIFiRE-5 の風洞実験で観測された境界層の乱流遷移の引き金になる[56, 57]との報告もある。この擾乱波の特性周波数は約 40 – 60 [kHz] [53]といわれているため、30 – 70 [kHz] の範囲で LPSE 解析を行った。まず、抽出断面に沿って擾乱が伝播する場合での擾乱成長率の積分値を図 3.13 に示す。約 45 – 48 [kHz] の周波数帯において若干の増幅が確認できる。またこの周波数帯よりも成長率が大きい、約 51 [kHz] の擾乱の急激な擾乱成長が確認でき、ストリーク分布の乱れ始め位置に相当する $x = 255$ [mm] 付近での成長率の積分値は計算開始位置での積分値よりも $O[10^1]$ 程度増幅していることが確認できる。また、51 [kHz] の擾乱が主流に沿って流れていると仮定すると、

$$\text{伝播速度 [m/s]} = \text{周波数 [kHz]} \times \text{波長 [mm]} \quad (3.23)$$

より、擾乱の伝播速度はおよそ 178.5 [m/s] である。これは、ストリーク分布の乱れ始めの位置 (x_t, z_t) において、境界層厚さ約 70%位置の平均流の流速と同程度で、この位置での擾乱成長の可能性が高い。

次に抽出断面と流線のなす角 10 [deg] を擾乱の伝播角度として導入するため周方向擾乱波長 β を与え、LPSE 解析を行った結果を図 3.14 に示す。約 62 – 63 [kHz] の周波数で擾乱成長が確認でき、成長率の積分値に対して、ストリーク分布の乱れ始め位置に相当する $x = 255$ [mm] では計算開始位置と比較して大幅な擾乱成長が確認できる。しかし、Traveling crossflow 波の特性周波数帯である 40 – 60 [kHz] では成長率の積分値が負の値を持つ周波数も多く、増幅は確認できないことから、抽出断面に対して流線方向へ伝播する Traveling crossflow 波 の影響は非常に小さいと考えられる。

最後に、 $(x_t, z_t) = (255 \text{ mm}, 30 \text{ mm})$ における境界層厚さ約 90% 位置の固有モード分布平面上の $x - z$ 平面内で乱れ開始位置を通過するストリークに対して直交する方向と抽出断面のなす角である 95 [deg] を擾乱の伝播角度として導入した。図 3.15 に擾乱成長率の積分値を示す。約 37 [kHz] で増幅が確認できるが、この不安定波の振動周波数が約 40 – 60 [kHz] であることから、Traveling crossflow 波 によるものであるか不明である。一方、約 57 [kHz] での成長に注目するため、図 3.16 に周辺の周波数帯での擾乱成長率の積分値の結果を示す。下流へと徐々に擾乱成長率が増幅していることが確認でき、乱れ開始位置 (x_t, z_t) では計算開始位置よりも $O[10^2]$ 程度の増幅が確認できる。

以上より、これらの Traveling crossflow 波の中で増幅率が大きく、下流に沿って増幅が確認できる条件として、スパン方向への伝播なしと伝播角度 95° が支配的となった。

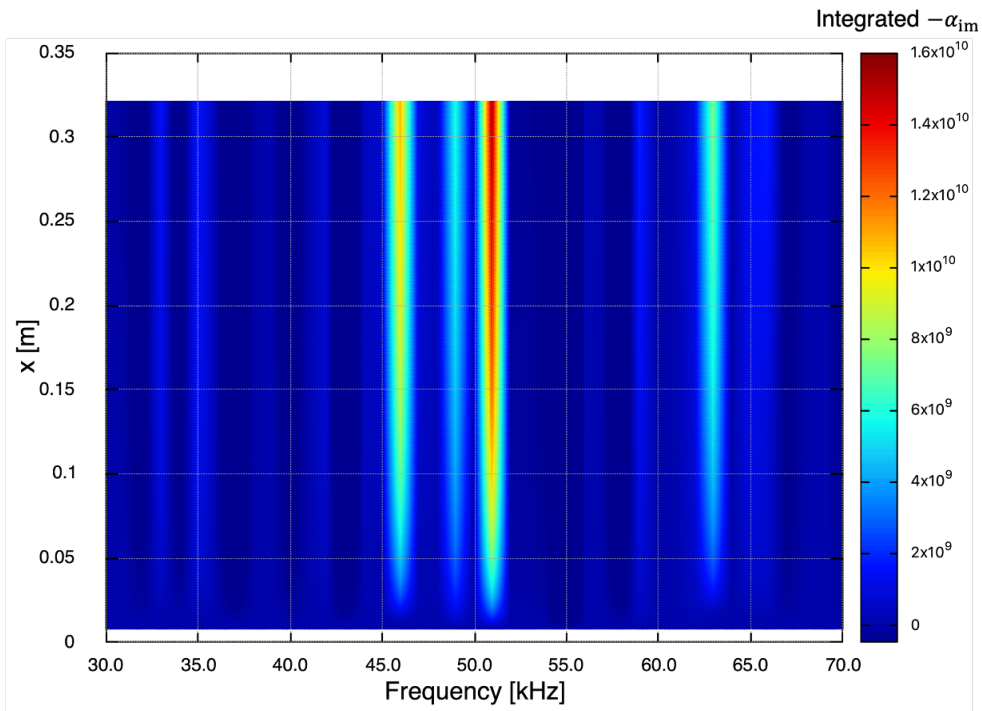


図 3.13 周方向の伝播を考慮しない Traveling crossflow 波の LPSE 解析

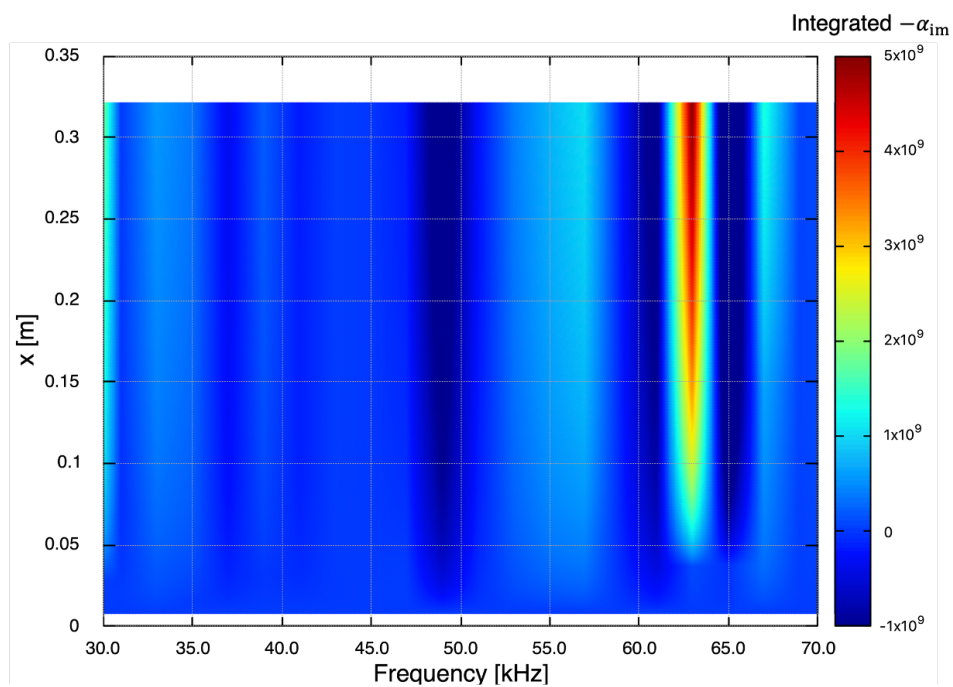


図 3.14 伝播角度 10° の Traveling crossflow 波を想定した LPSE 解析

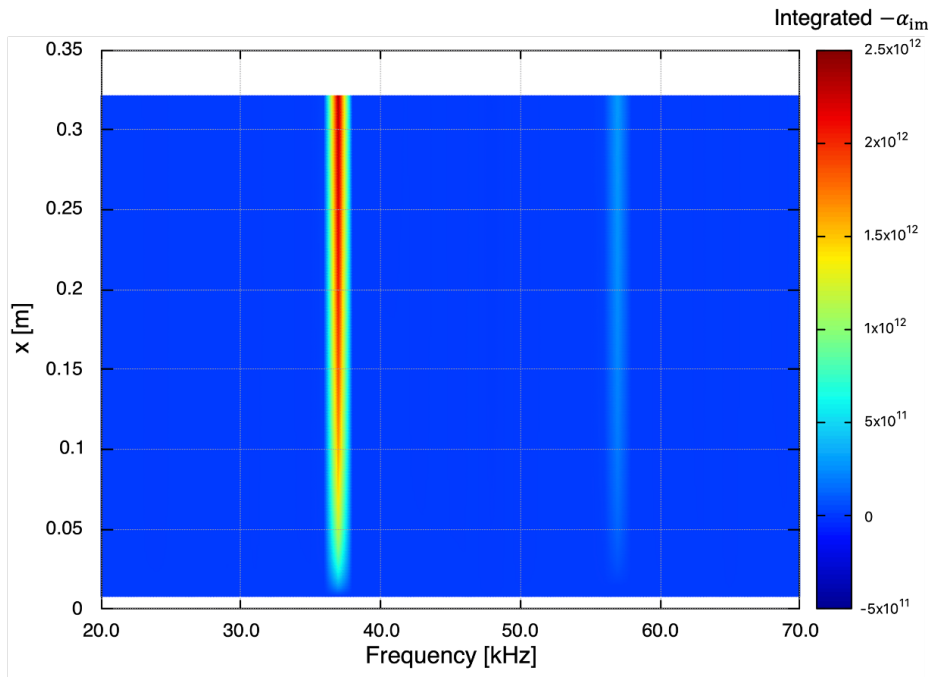


図 3.15 伝播角度 95° の Traveling crossflow 波を想定した LPSE 解析

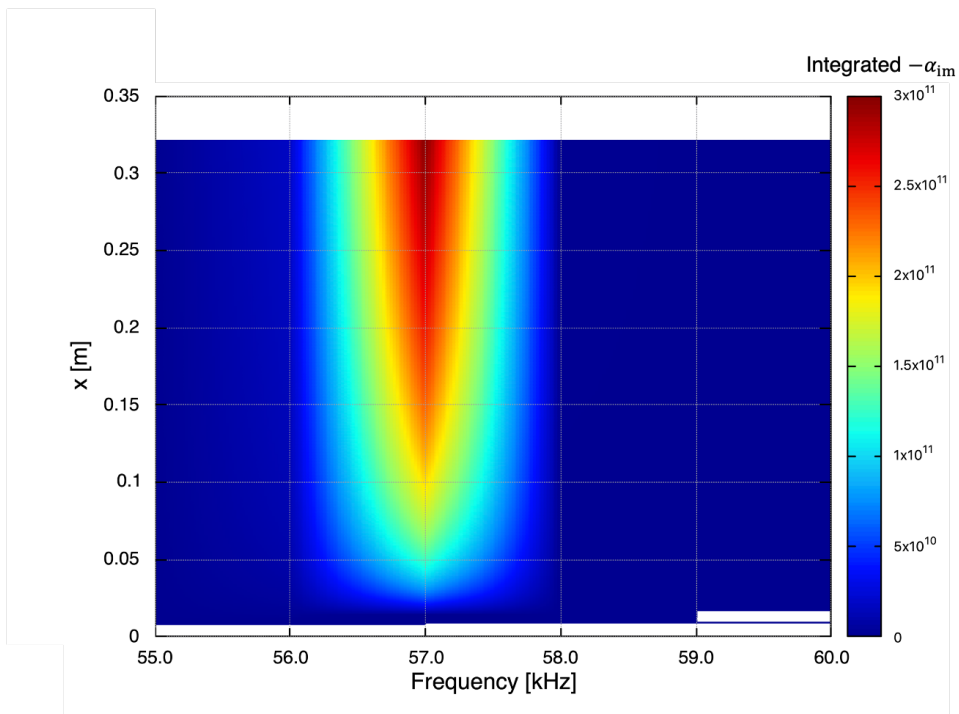


図 3.16 図 3.15 の 57 [kHz] 周辺の拡大図

3.5.4 Mack 波を想定した擾乱の導入

Mack らの研究による 2nd モードに相当する初期擾乱を導入する。擾乱成長率を算出する。初期 α_{re} は、境界層厚さの約 2 倍であることから $\alpha_{re} = 2\delta = 0.58$ [mm] とした。また、擾乱の伝播角度は抽出断面に沿って下流へ伝わり、周方向への伝播はないものと仮定した。LPSE 解析による擾乱成長率の積分値を図 3.17 に示す。約 470 [kHz] 付近から徐々に増幅する擾乱が現れ始め、約 710 – 920 [kHz] において成長率が大きい擾乱が頻繁に現れていることが確認できる。特に約 850 [kHz] の初期擾乱を導入した場合が最も下流で増幅している。また成長している擾乱はおおよそ計算開始位置より 5 – 10 [mm] 程度下流から増幅に転じている。その中で 470 – 560 [kHz] 付近で増幅している擾乱は増幅に転じた後、大きく増幅することなく一定の成長率を保っているが、約 710 – 920 [kHz] 付近で増幅している擾乱は、模型前半分側で急激に増幅している。

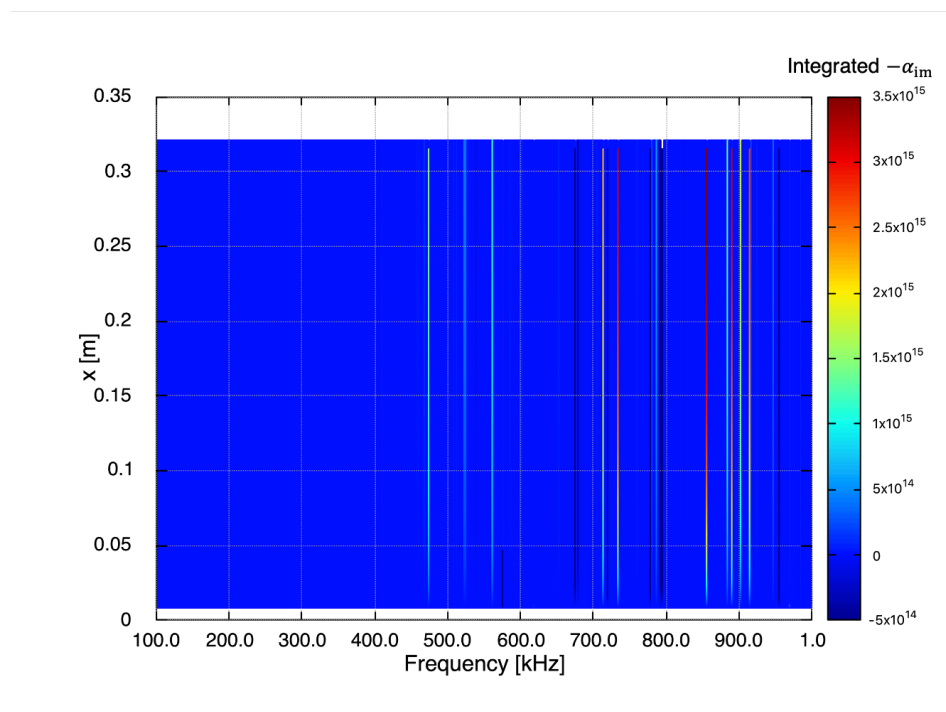


図 3.17 Mack 波を想定した初期擾乱に対する擾乱成長率の積分値

3.6 境界層内における不安定擾乱についての考察

本節では図 3.3 に示したストリーク乱れ始め位置 (x_t, z_t) を通過する流線に沿って流れる流体について考察する。

図 3.18 にここまでの LPSE 解析の考察結果についての位置関係を模式図で示す。主流は模型先端付近から流入し 3.4 節で示したように、Attachment line 側の $x = 37.6 - 53.7$ [mm] で約 17 [kHz] の T-S 波を想定した擾乱が大きく成長した。全体安定性解析の結果も合わせると、この T-S 波は境界層厚さ約 10% 位置で成長していた。その後、主流の乱れなどで成長しやすい Stationary crossflow 波は、2 次元平面波である T-S 波を乱れ成分として受容し、Crossflow によ

る不安定性によって **Stationary crossflow** 波も増幅しつつ速度ベクトルを変え下流へ流れる。そして、乱れ開始位置付近を通過する際に、下流に位置する乱れ開始位置付近で図 2.12 に示した縦渦の強い領域を通過する。渦度の高い箇所を通過する際に、**Traveling crossflow wave** が発生する[58]可能性が高いことと、LPSE 解析でも同不安定波の振動周波数の擾乱成長が得られた。周波数と伝播速度の関係から境界層厚さ約 70% 位置で増幅する。また、全体安定性解析の結果である境界層中程度位置における各方向速度擾乱に対する固有モード分布 (図 2.17) の振幅増加にも相当すると考えられる。このような過程で乱れ開始位置付近で不安定波が境界層中程度位置で発生した。そこへ上流から音波擾乱である **Mach** モードが境界層内を伝わり干渉すること[59]で、**Attachment line** 側から流れてきた **T-S** 波や **Stationary crossflow** 波を内在する流体が合流し干渉することで、乱れ開始位置における擾乱が急成長し、遷移点 $x = 275$ [mm] で乱流化したことで衝撃層内の高温流体が混合され壁面を加熱することで温度擾乱に対する固有モード値も増幅した可能性が考えられる。

また全体安定性解析で得られた温度擾乱に対する固有モード分布が縦渦に沿うようなストリーク状の分布が得られた理由として、縦渦の影響で衝撃層内の高温流体が境界層内へ入り込む線形的な物理過程によって得られたと考えられる。その縦渦が上記のようなプロセスで非線形干渉することによって乱流化し、渦が崩壊することで実験のようにストリーク分布が崩壊し高加熱分布が得られた可能性が考えられる。

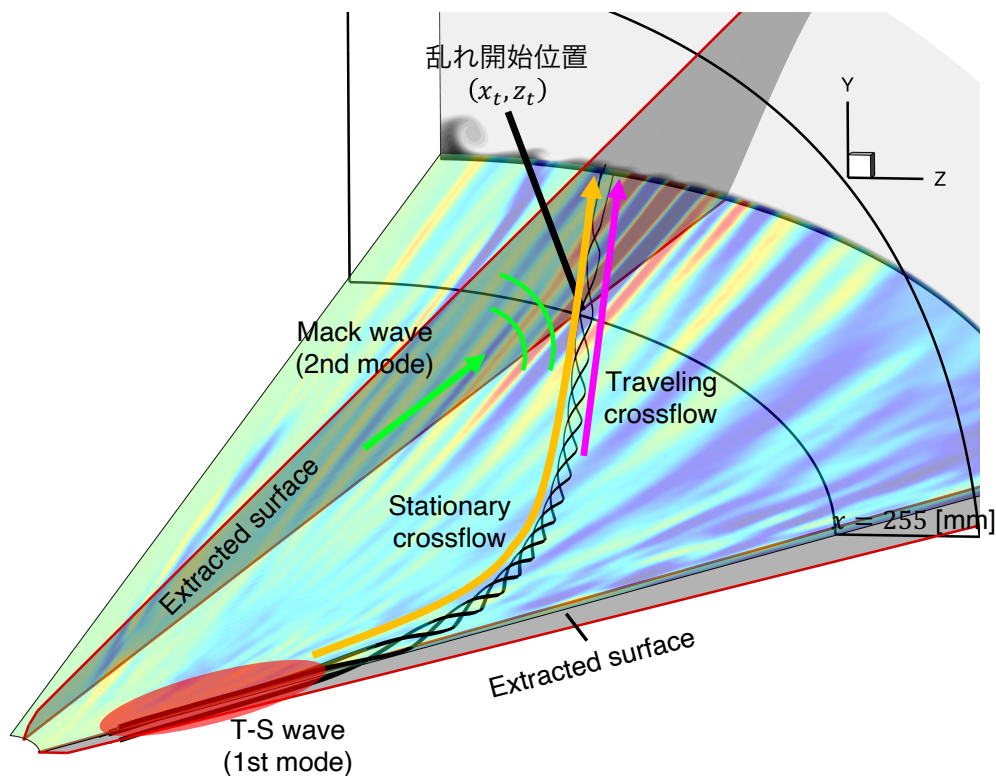


図 3.18 LPSE 解析から得られた不安定波の伝播経路の模式図

第4章

結論

本研究では極超音速流内における楕円錐模型周りの乱流遷移位置予測を目的とし、全体安定性解析と LPSE によってその物理機構の解明を目指した。

第2章では実験の主流条件を用いて平均流計算を行い、流れ場の計算結果から短径側対称境界面で形成されるキノコ状の縦渦やそれと並行する縦渦を比較的良好な解像度で解くことができた。また境界層内においては Crossflow が形成されていることが確認できた。壁面熱流束分布からは数本のストリーク分布が縦渦に沿う方向に伸びることを確認した。次に平均流に対して全体安定性解析を行ったところ、境界層厚さ約 90%位置での最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布で、縦渦に沿ったストリーク状の加熱分布が実験と同様の分布傾向となった。また、実験での乱れ開始位置と同じ場所での境界層厚さ約 40 – 70 % を通過する流線上では線形成長段階の範囲内で増幅する傾向が得られた。これは境界層中程度位置を通過した Crossflow の渦度変化によって、粘性散逸に伴う温度擾乱の成長を誘起した可能性が考えられる。一方で模型先端部における Attachment line 側の $x = 12$ [mm] 付近から Crossflow が形成され始め、Centerline 側へ向かう流体と Attachment line 側を流れる流体の分岐する箇所となっていた。この点にて境界層厚さ約 10%位置における最大固有値に対する温度擾乱の固有モード分布を見ると、 $x = 12$ [mm] 以降で擾乱の増幅と減衰が交互に位置する特徴的な分布となっていた。また実験で遷移が確認されなかった低レイノルズ主流を用いた際の乱れ開始位置を通過する流線上で全体安定性結果を見ると、境界層内における Crossflow が弱化したことで、実験による計測結果と同様にストリーク分布が弱まり、安定化していることが確認できた。

第3章では第2章までで得られた温度擾乱の固有モード値の増幅などの詳しい物理解釈を行うため、LPSE 解析を導入し、全体安定性解析で得られた結果がどのような物理過程で得られたのか、不安定波の伝播方向や周波数に着目し解析を行った。LPSE 解析は実験での乱れ開始位置を通過する断面と、Attachment line 側の境界層の平均流結果を抽出し、境界層内での擾乱成長率を追跡した。

Attachment line 側の抽出断面上での LPSE 解析より、模型先端部において抽出断面に沿う方向に約 17 [kHz] の T-S 波の振動周波数帯と一致する不安定波の増幅を確認した。乱れ開始位置を通過する流体はこの部分で初めて T-S 波により増幅した擾乱を潜在的に含んでいる可能性が考えられる。次にストリーク分布乱れ開始位置がある Crossflow 部における抽出断面上で LPSE 解析を行った。まず Stationary crossflow 波を想定し LPSE 解析を行ったところ、流線に沿う方向で下流へ流れるほど擾乱が増幅していることが確認できた。この不安定波については、上流で形成された T-S 波由来の主流の乱れが Stationary crossflow 波として、LPSE 解析上で算出された。次に Traveling crossflow 波を想定して LPSE 解析を行った結果、境界層厚さ約 70%位置で、この不安定波の振動周波数帯にある約 51[kHz] の擾乱が $x-z$ 平面上でストリークに対して直交する方向と抽出断面に沿う方向に伝播する擾乱の増幅が確認できた。さらにこの断面内で Mack モードの成長を解析した結果、約 860 [kHz] の高周波擾乱の擾乱成長が確認できた。

以上より、ここまで本論文で示してきた結果と考察から、遷移に到る物理機構について提言する。まず、先端部付近の境界層の低層で発達した T-S 波様の擾乱が、Crossflow に乗って楕円錐面上の境界層内中層を通過し成長しながら、平均流でも観測された複数の縦渦を横切ることによって干渉し乱れ開始位置に到達する。境界層内 70%位置にて得られた LPSE の速度擾乱の増幅は約 51 [kHz] の周波数を持ち、これは Traveling cross 波の実験計測結果とも辻褄の合う結果である。また全体安定性解析から得られた速度擾乱の成長も乱れ開始位置における境界層内 70 % 位置付近で生じており、計測された遷移点付近では速度擾乱の固有モード分布は極小となり安定化したが、同時に温度擾乱の急激な増幅を示した。以上の擾乱成長過程が引き金となり、ストリーク状の高加熱分布が乱流遷移によって崩壊へと至る物理機構である。

付録 A

高解像度格子を用いた平均流計算

HIFiRE-5 周りの流れは 3 次元性を持ち、複雑であるため高精度に計算を行う必要がある。ここでは模型周りの流れ場の細かい様子を調査することを目的とし、高解像度格子を用いて DNS を行った。図 A.1 に模型周りの計算格子を示す。格子点数は周方向に 513 点、主流方向に 642 点、壁面垂直方向に 513 点の約 1 億 7000 万点の構造格子を用いた。最小格子幅 Δx_{\min} は、 $\Delta x_{\min} = 0.1 \times 10^{-3}$ [mm] と設定し、境界層内には 150 点の格子が存在するように作成した。また事前計算によって衝撃波の位置を特定し、あらかじめ衝撃波付近で格子幅小さくなるように作成した。本計算は研究室所有の計算サーバを用いて行い、66 並列で約 316 日間かかった。図 A.2 に平均流計算における密度残差の履歴を示す。約 460 万ステップまでの密度残差が一定の値に収束するまで数値流束に AUSM-DV、時間積分法として 1 次精度 Euler 法、空間精度は 2 次精度 MUSCL 法を用いて平均流計算を行った。また 460 万ステップ以降はより詳細な流れ場を解くために、時間積分法に 3 次精度 TVD-Runge-Kutta 法、空間精度に 5 次精度 WENO 法を採用し再計算を行った。図 A.3 に最終的に得られた準定常解をマッハ数分布と壁面における圧力分布を用いて示す。図 2.7 と同様に境界層の薄い長径側での圧力が高くなっていることが確認できる。図 A.4 に壁面熱流束分布を示す。Crossflow 部において主流方向に伸びるストリーク状の加熱分布の本数が多いことが確認できる。これは DNS によって、より細かい縦渦を解くことができたことから縦渦に伴うストリーク状の加熱分布の本数が増えたと考えられる。図 A.5 に、 ρ/ρ_{∞} 分布を $x/L = 0.06, 0.18, 0.30, 0.43, 0.54, 0.69, 0.82, 0.98$ 位置の断面で表す。図 2.9(a) に本研究で行なった DNS の結果を示し、図 2.9(b) に D. J. Dinzl と G. V. Candler によって行われた DNS による計算結果[47]を再掲する。本章での計算結果と比較して、短径側 Centerline 付近に形成されるキノコ雲状の縦渦内での密度分布の違いも確認できるようになった。また本計算で新たに、対称境界面に位置するキノコ雲状の縦渦に続く複数の縦渦について詳細に解くことができた。図 A.4 のストリークの本数の増加と合わせて考えると、Crossflow 部における縦渦を、本計算によってより長径側まで解像することができたと言える。今後はこの DNS の結果を用いて全体安定性解析が行えるように、全体安定性解析コードの並列化効率の向上や使用メモリの低コスト化を図っていきたい。

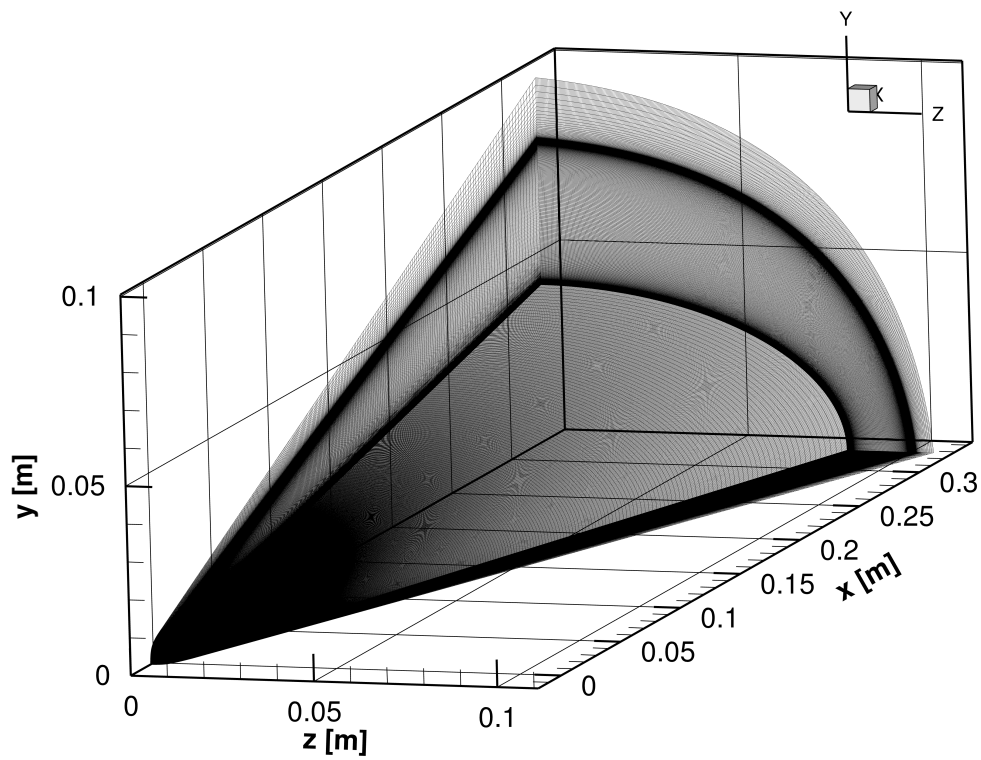


図 A.1 模型周りの計算領域と表面格子

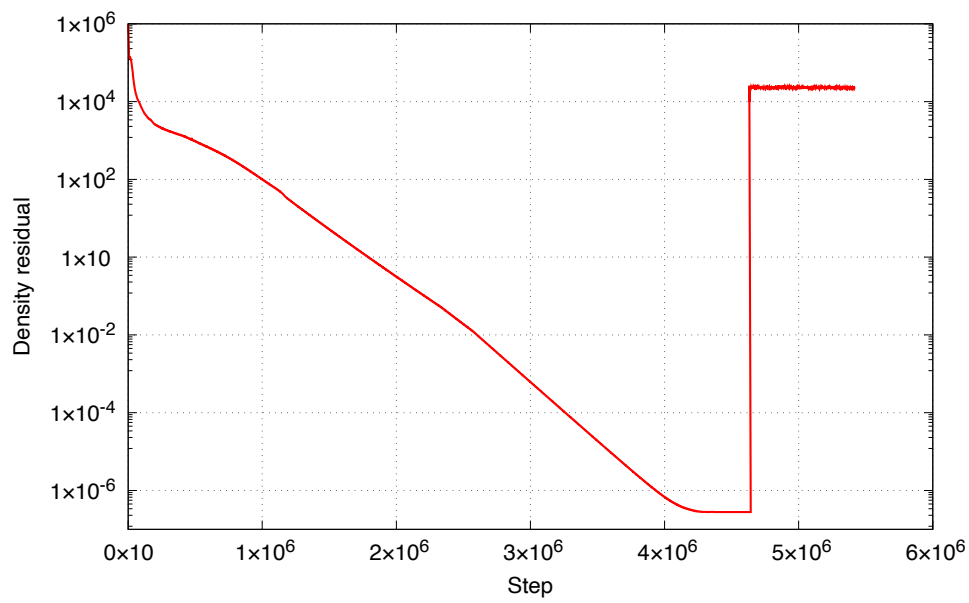


図 A.2 平均流計算における密度残差の時間履歴

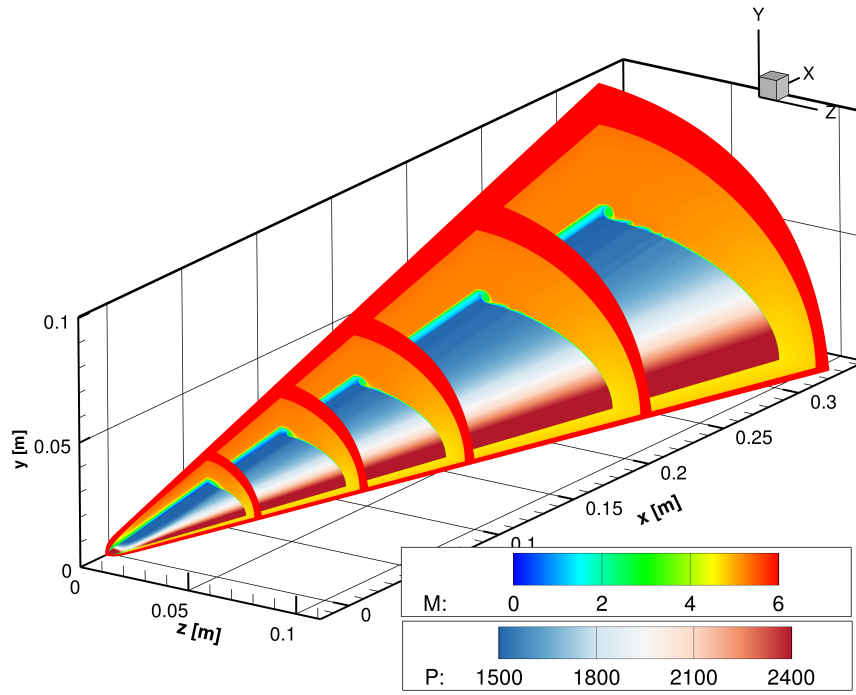


図 A.3 模型周りのマッハ数分布と壁面における圧力分布

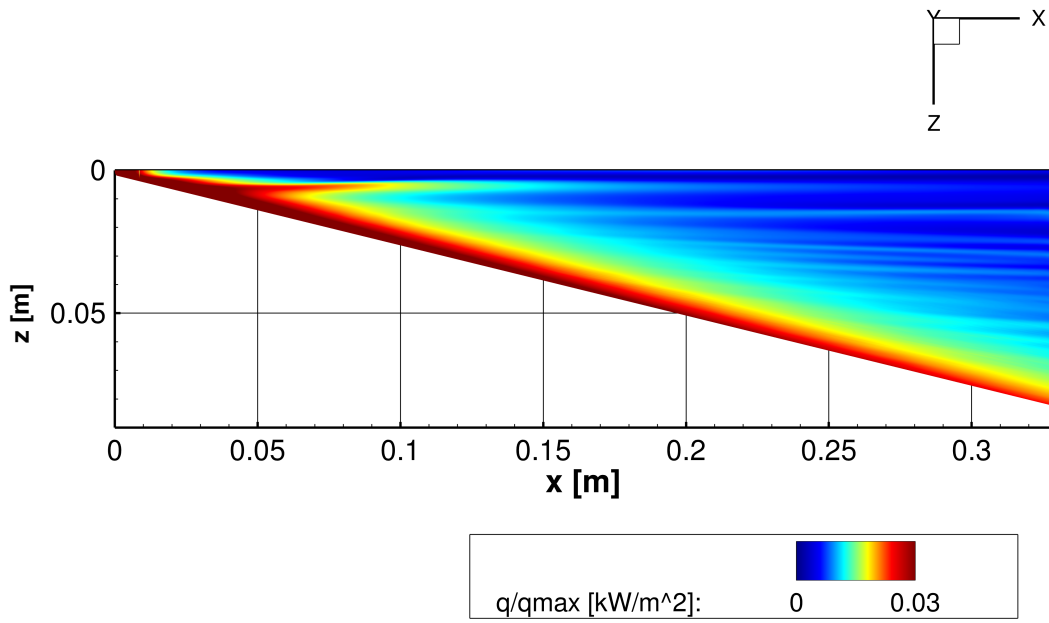
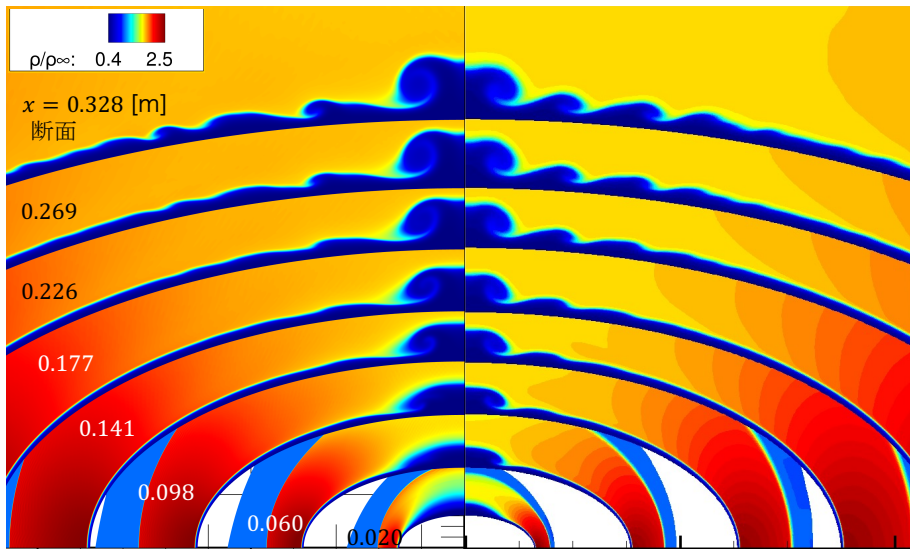


図 A.4 壁面熱流束 q/q_{\max} 分布



(a) 本研究における計算結果

(b) D. J. Dinzi らによる
DNS を用いた計算結果

図 A.5 各断面における ρ/ρ_∞ 分布

付録 B

B.1 LST の安定方程式における係数行列の要素

LST における安定方程式である式 (3.13) の各係数行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の要素は以下のように構成されている。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{35} \\ 0 & b_{42} & 0 & 0 & 0 \\ b_{51} & 0 & b_{53} & 0 & b_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}.$$

$$a_{11} = i\rho S + \frac{\mu}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{4}{3} \alpha^2 + \beta^2 \right), [S = -\omega + \alpha U + \beta W]$$

$$a_{12} = \rho \frac{dU}{dy} - \frac{i\alpha}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$a_{13} = \frac{\alpha\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{14} = \frac{i\alpha}{\gamma Ma^2} T$$

$$a_{15} = \frac{i\alpha}{\gamma Ma^2} \rho - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{d\mu}{dT} \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} \frac{dT}{dy} \frac{d^2\mu}{dT^2} \right)$$

$$a_{21} = \frac{2i\alpha}{3Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$a_{22} = i\rho S + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{23} = \frac{2i\beta}{3Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$a_{24} = \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{dT}{dy}$$

$$a_{25} = \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{d\rho}{dy} - \frac{i}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \left(\alpha \frac{dU}{dy} + \beta \frac{dW}{dy} \right)$$

$$a_{31} = \frac{\alpha\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{32} = \rho \frac{dW}{dy} - \frac{i\beta}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$a_{33} = i\rho S + \frac{\mu}{Re_{\delta^*}} \left(\alpha^2 + \frac{4}{3} \beta^2 \right)$$

$$a_{34} = \frac{i\beta}{\gamma Ma^2} T$$

$$a_{35} = \frac{i\beta}{\gamma Ma^2} \rho - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{d\mu}{dT} \frac{d^2 W}{dy^2} + \frac{dW}{dy} \frac{dT}{dy} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \right)$$

$$a_{41} = i\rho\alpha$$

$$a_{42} = \frac{d\rho}{dy}$$

$$a_{43} = i\rho\beta$$

$$a_{44} = iS$$

$$a_{52} = \rho \frac{dT}{dy} - \frac{i2Ec}{Re_{\delta^*}} \mu \left(\alpha \frac{dU}{dy} + \beta \frac{dW}{dy} \right), [Ec = (\gamma - 1)Ma^2]$$

$$a_{54} = -i \frac{EcT}{\gamma Ma^2} S$$

$$a_{55} = i\rho \left(1 - \frac{Ec}{\gamma Ma^2} \right) S + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{Re_{\delta^*} Pr} \mu - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \left[Ec \left\{ \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dy} \right)^2 \right\} + \frac{1}{Pr} \frac{d^2 T}{dy^2} \right] - \frac{1}{Re_{\delta^*} Pr} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \left(\frac{dT}{dy} \right)^2$$

$$b_{11} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$b_{12} = -\frac{i\alpha}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$b_{15} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dU}{dy}$$

$$b_{21} = -\frac{i\alpha}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$b_{22} = \frac{4}{3Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$b_{23} = -\frac{i\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$b_{24} = \frac{T}{\gamma Ma^2}$$

$$b_{25} = \frac{\rho}{\gamma Ma^2}$$

$$b_{32} = -\frac{i\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$b_{33} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$b_{35} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{dW}{dy}$$

$$b_{42} = \rho$$

$$b_{51} = \frac{2Ec}{Re_{\delta^*}} \mu \frac{dU}{dy}$$

$$b_{53} = \frac{2Ec}{Re_{\delta^*}} \mu \frac{dW}{dy}$$

$$b_{55} = \frac{2}{Re_{\delta^*} Pr} \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dy}$$

$$c_{11} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*}}$$

$$c_{22} = -\frac{4\mu}{3Re_{\delta^*}}$$

$$c_{33} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*}}$$

$$c_{55} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*} Pr}$$

B.2 LPSE の安定方程式における係数行列の要素

LST における安定方程式である式 (3.13) の各係数行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の要素は以下のように構成されている。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{35} \\ 0 & b_{42} & 0 & b_{44} & 0 \\ b_{51} & 0 & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} \\ 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ d_{41} & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix}.$$

$$a_{11} = i\rho S + \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{4}{3} \alpha^2 + \beta^2 \right), [S = -\omega + \alpha U + \beta W]$$

$$a_{12} = \rho \left(\frac{\partial U}{\partial y} + f_w \delta^* \kappa^* U \right) - f_w \frac{i\alpha}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$a_{13} = \frac{\alpha\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{14} = U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{1}{\gamma Ma^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} + iFT\alpha \right)$$

$$a_{15} = \frac{1}{\gamma Ma^2} \rho \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + iFT\alpha \right) - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{d\mu}{dT} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \right)$$

$$a_{21} = \frac{2i\alpha}{3Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y} - \delta^* \kappa^* \rho U$$

$$a_{22} = i\rho S + f_w \rho \frac{\partial V}{\partial y} + f_w \frac{\alpha^2 + \beta^2}{Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{23} = \frac{2i\beta}{3Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$a_{24} = \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial T}{\partial y} - \delta^* \kappa^* U^2$$

$$a_{25} = \frac{1}{\gamma Ma^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{i}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

$$a_{31} = \rho \frac{dW}{dx} + \frac{\alpha\beta}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$a_{32} = \rho \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{i\beta}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$a_{33} = i\rho S + \frac{\mu}{Re_{\delta^*}} \left(\alpha^2 + \frac{4}{3}\beta^2 \right)$$

$$a_{34} = U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{i\beta}{\gamma Ma^2} T$$

$$a_{35} = \frac{i\beta}{\gamma Ma^2} \rho - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)$$

$$a_{41} = \frac{\partial \rho}{\partial x} + iF\rho\alpha$$

$$a_{42} = f_w \delta^* \kappa^* \rho + \frac{\partial \rho}{\partial y}$$

$$a_{43} = i\rho\beta$$

$$a_{44} = iS + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$a_{51} = \rho \frac{\partial T}{\partial x} - Ec \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$a_{52} = \rho \frac{\partial T}{\partial y} - f_w \frac{i2Ec}{Re_{\delta^*}} \mu \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial y} + \beta \frac{\partial W}{\partial y} \right)$$

$$a_{54} = -i \frac{EcT}{\gamma Ma^2} S + \left(1 - \frac{Ec}{\gamma Ma^2} \right) \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$a_{55} = i\rho \left(1 - \frac{Ec}{\gamma Ma^2} \right) S + \frac{Ec}{\gamma Ma^2} \left(U \frac{\partial \rho}{\partial x} + V \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{Re_{\delta^*} Pr} \mu \\ - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \left[Ec \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] - \frac{1}{Re_{\delta^*} Pr} \frac{d^2 \mu}{dT^2} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2$$

$$b_{11} = \rho V - \frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$b_{12} = -f_w \frac{i\alpha}{3Re_{\delta^*}} \mu$$

$$b_{15} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}} \frac{d\mu}{dT} \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$b_{21} = -\frac{i\alpha}{3Re_{\delta^*}}\mu$$

$$b_{22} = f_w\rho V - f_w\frac{4}{3Re_{\delta^*}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$b_{23} = -\frac{i\beta}{3Re_{\delta^*}}\mu$$

$$b_{24} = \frac{T}{\gamma Ma^2}$$

$$b_{25} = \frac{\rho}{\gamma Ma^2}$$

$$b_{32} = -f_w\frac{i\beta}{3Re_{\delta^*}}\mu$$

$$b_{33} = \rho V - \frac{1}{Re_{\delta^*}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$b_{35} = -\frac{1}{Re_{\delta^*}}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$b_{42} = \rho$$

$$b_{44} = V$$

$$b_{51} = -\frac{2Ec}{Re_{\delta^*}}\mu\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$b_{53} = -\frac{2Ec}{Re_{\delta^*}}\mu\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$b_{54} = -\frac{EcT}{\gamma Ma^2}TV$$

$$b_{55} = \rho V\left(1 - \frac{Ec}{\gamma Ma^2}\right) - \frac{2}{Re_{\delta^*}Pr}\frac{d\mu}{dT}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$c_{11} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*}}$$

$$c_{22} = -f_w\frac{4\mu}{3Re_{\delta^*}}$$

$$c_{33} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*}}$$

$$c_{55} = -\frac{\mu}{Re_{\delta^*}Pr}$$

$$d_{11} = \rho U$$

$$d_{14} = \Omega_p\frac{T}{\gamma Ma^2}$$

$$d_{15} = \Omega_p\frac{\rho}{\gamma Ma^2}$$

$$d_{22} = f_w\rho U$$

$$d_{33} = \rho U$$

$$d_{41} = \rho$$

$$d_{44} = U$$

$$d_{54} = -\Omega_p \frac{Ec}{\gamma Ma^2} TU$$

$$d_{55} = \rho \left(1 - \Omega_p \frac{Ec}{\gamma Ma^2} \right) U$$

参考文献

- [1] D. E. Glass, "Ceramic matrix composite (CMC) thermal protection systems (TPS) and hot structures for hypersonic vehicles," AIAA Paper 2008-2682, 2008.
- [2] A. Gülhan, T. Thiele, F. Siebe, F. Klingenberg and R. Kronen, "Main Achievements of the Rocket Technology Flight Experiment ROTEX-T," 21st AIAA International Space Planes and Hypersonics Technologies Conference, AIAA Paper 2017-2208, 2017.
- [3] D. J. Dolvient, "Hypersonic international flight research and experimentation (HIFiRE) fundamental sciences and technology development strategy," AIAA Paper 2008-2581, 2008.
- [4] J. Odam, A. Paull, H. Alesi, D. Hunt, R. Paull and R. Pistsch, "HIFiRE-0 Flight Test Data," 16th AIAA/DLR/DGLR International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, AIAA Paper 2009-7293, 2009.
- [5] S. A. Stanfield, R. L. Kimmel and D. Adamczak, "HIFiRE-1 Data Analysis: Boundary Layer Transition Experiment During Reentry," 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA Paper 2012-1087, 2012.
- [6] F. Li, M. Choudhari, C. L. Chang, R. L. Kimmel, D. Adamczak and M. Smith, "Transition Analysis for the Ascent Phase of HIFiRE-1 Flight Experiment," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 52, No. 5, 2015, pp. 1283-1293.
- [7] M. P. Borg and R. L. Dolvient, "Ground Test of Transition for HIFiRE-5b at Flight-Relevant Attitudes," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 55, No. 6, 2018, pp. 1341-1355.
- [8] R. L. Kimmel, D. Adamczak, K. Berger, and Choudhari, "HIFiRE-5 flight vehicle design," AIAA Paper 2010-4985, 2010.
- [9] D. E. Grass, D. P. Capriotti, T. Reimer and M. Küttemeyer, "Testing of DLR C/CSiC for HIFiRE 8 scramjet Combustor," 7th European Workshop on Thermal Protection Systems and Hot Structures, 2014-3089, 2014.
- [10] R. Kimmel, D. Adamczak, D. Gationde, A. Rougeux and J. R. Hayes, "HIFiRE-1 Boundary Layer Transition Experiment Design," 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA Paper 2007-0537, 2007.
- [11] M. Choudhari, C. L. Chang, T. Hentink, F. Li, K. Berger, G. Candler and R. Kimmel, "Transition Analysis for the HIFiRE-5 Vehicle," 39th AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 2009-4056, 2009.
- [12] R. Kimmel, D. Adamczak, T. Juliano and A. Paull, "HIFiRE-5 Flight Test Preliminary Results," 51st Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, AIAA Paper 2013-0377, 2013.
- [13] T. J. Juliano, L. A. Paquin and M. P. Borg, "HIFiRE-5 Boundary-Layer Transition Measured in a Mach-6 Quiet Tunnel with Infrared Thermography," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol 57, No. 5, 2019, pp. 2001-2010.

- [14] P. Paredes and V. Theolis. “Spatial linear global instability analysis of the HIFiRE-5 elliptic cone model,” AIAA Paper 2013-2880, 2013.
- [15] F. Li, M. Choudhari, C. L. Chang, J. White, R. Kimmel, D. Adamczak, M. Borg S. Stanfield and M. Smith, “Stability Analysis for HIFiRE Experiments,” 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit, AIAA paper 2012-28, 2012.
- [16] T. J. Juliano and S. P. Schneider, “Instability and Transition on the HIFiRE-5 in a Mach-6 Quiet Tunnel,” AIAA Paper 2010-5004, 2010.
- [17] T. J. Juliano, D. Adamczak and R. Kimmel, “HIFiRE-5 Flight Test Heating Analysis,” 52nd Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 2014-0076, 2014.
- [18] D. J. Dinzl and G. V. Candler, “Direct Numerical Simulation of Crossflow Instability Excited by Microscale Roughness on HIFiRE-5,” 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 2016-0353, 2016.
- [19] D. J. Dinzl and G. V. Candler, “Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5 using Direct Numerical Simulation,” AIAA Paper 2015-0279, 2015.
- [20] M. P. Borg and R. L. Kimmel, “Ground Test Measurements of Boundary-Layer Instabilities and Transition for HIFiRE-5 at Flight-Relevant Attitudes,” 47th AIAA Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 2017-3135, 2017.
- [21] Lord Kelvin, “On a Disturbing Infinity in Lord Rayleigh’s Solution for Waves in a Plane Vortex Stratum,” *Nature*, Vol. 8, pp. 45-46, 1880.
- [22] Lord Rayleigh, “On the Stability or Instability of Certain Fluid Motions,” *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. s1-11, 1879, pp. 57-72.
- [23] L. D. Landau, “On the problem of turbulence,” *Collected Papers of L. D. Landau*, 1965, pp. 387-391.
- [24] N. Itoh, “Instability of Three-Dimensional Boundary Layers due to Streamline Curvature,” *Fluid Dynamics Research*, Vol. 14, 1994, pp. 353-366.
- [25] P. Graziosi and G. L. Brown, “Experiments on stability and transition at Mach 3,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 472, 2002, pp. 83-124.
- [26] M. V. Morkovin, “On the Many Faces of Transition,” *Viscous Drag Reduction*, 1969, pp. 1-31.
- [27] L. M. Mack, “Boundary-layer linear stability theory,” *Special Course on Stability and Transition of Laminar Flow*, AGARD Report No. 709, Part 3, 1984, pp. 1-150.
- [28] T. Herbert, “Parabolized Stability Equations,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 29, 1997, pp. 245-283.
- [29] K. Itoh and H. Tanno, “Resonant growth of surface pressure fluctuation in hypersonic boundary layer in shock tunnel,” AIAA Paper 2017-1462, 2017.
- [30] L. J. Melander, A. Knutson, J. D. Reinert and G. V. Candler, “Stability Analysis of HIFiRE 1 with Flight Wall Temperatures,” AIAA Paper 2020-3026, 2020.
- [31] F. Li, M. Choudhari, C. Chang, R. L. Kimmel, D. Adamczak and M. Smith, “Transition Analysis for the HIFiRE-1 Flight Experiment,” AIAA Paper 2011-3414, 2011.
- [32] 宇田惟一朗, “極超音速境界層における非線形擾乱成長に関する数値的研究,” 東北大学大学院修士学位論文, 2020.

- [33] Y. Ohmichi and K. Suzuki, “Fundamental study on numerical methods of global stability analysis for compressible flows with shock wave,” AIAA Paper 2013-3206, 2013.
- [34] V. Theofilis, “Advances in Global Linear Instability of Nonparallel and Three-Dimensional Flows,” *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 39, No. 4, 2003, pp. 249–315.
- [35] 松瀬裕二, “円錐形状周りにおける極超音速流れの全体安定性,” 東北大学大学院修士学位論文, 2016.
- [36] H. Tanno, T. Komuro and K. Sato, “Measurement of hypersonic boundary layer transition on cone models in the free-piston shock tunnel HIEST,” AIAA Paper 2009-0781, 2009.
- [37] S. Gottlieb and C. W. Shu, “Total Variation Diminishing Runge- Kutta Schemes,” ICASE Report No. 96-50, 1996.
- [38] Y. Wada and M. S. Liou, “A Flux Splitting Scheme with High-Resolution and Robustness for Discontinuities,” AIAA Paper 94-0083, 1994.
- [39] X. D. Liu, S. Osher and T. Chen, “Weighted Essentially Nonoscillatory Schemes,” *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, 1994, pp. 200-212.
- [40] W. E. Arnoldi, “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem,” *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 9, No. 1, 1951, pp. 17-29.
- [41] 千葉賢, “円柱を過ぎる流れの全体不安定性に関する研究,” 日本流体力学会会誌「流れ」, Vol. 15, 1996, pp. 295-307.
- [42] V. Theofilis, “Global linear instability,” *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 43, No. 10, 2011, pp. 319-352.
- [43] 河端恭平, “楕円錐周りの極超音速クロスフロー不安定の数値的研究,” 高知工科大学大学院修士学位論文, 2018.
- [44] 宇田唯一朗, 高橋聖幸, 大西直文, “極超音速流中を伝播する不安定モードの数値解析,” 第 50 回流体力学講演会, JSASS-2018-2148, 2018.
- [45] 久保田弘敏, 鈴木宏二郎, 綿貫忠晴, 宇宙飛行体の熱気体力学, 東京大学出版会, 2002, pp. 256-257.
- [46] 青景壮真, “極超音速流れにおける境界層内の不安定流体挙動の数値的考察,” 高知工科大学卒業論文, 2020.
- [47] D. J. Dinzi and G. V. Candler, “Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5 using Direct Numerical Simulation,” AIAA Paper 2015-0279, 2015.
- [48] T. J. Juliano, L. A. Paquin and M. P. Borg, “HIFiRE-5 Boundary-Layer Transition Measured in a Mach-6 Quiet Tunnel with Infrared Thermography,” *AIAA Journal*, Vol. 57, No. 5, 2019-2514, 2019.
- [49] 井手優紀, “超音速 3 次元境界層の遷移予測法の高精度化に関する研究,” 東京大学大学院, 博士学位論文, 2016.
- [50] K. Itoh and H. Tanno, “Resonant Growth of Surface Pressure Fluctuation in Hypersonic Boundary Layer in Shock Tunnel,” 55th AIAA Aerospace Sciences Meeting, AIAA Paper 2017-1462, 2017.
- [51] L. M. Mack, “Boundary-layer stability theory,” Jet Propulsion Laboratory Report 900-277, Rev. A, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1969.
- [52] S. J. Laurence, A. Wagner, H. Ozawa, J. M. Schramm and K. Hannemann, “Visualization of a hypersonic

- boundary-layer transition on a slender cone,” 19th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference, AIAA Paper 2014-3110, 2014.
- [53] M. P. Borg and R. L. Kimmel, “Traveling Crossflow Instability for the HIFiRE-5 Elliptic Cone,” *AIAA Journal*, Vol. 52, 2015-2514, 2015.
- [54] M. W. Tufts, R. C. Gosse and R. L. Kimmel, “Parabolized Stability Equation Analysis of Crossflow Instability on HIFiRE-5b Flight Test,” *Journal of Spacecraft and Rockets, AIAA Journal*, Vol. 55, No. 6, 2018-2514, 2018.
- [55] J. B. Edelman and S. P. Schneider, “Secondary Instabilities of Hypersonic Stationary Crossflow Waves,” *AIAA Journal*, Vol. 56, 2018-2514, 2018.
- [56] H. Deyhle and H. Bippes, “Disturbance Growth in an Unstable Three-Dimensional Boundary Layer and Its Dependence on Environmental Conditions,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 316, 1996, pp. 73-113.
- [57] E. White, W. Saric, R. Gladden and P. Gabet, “Stage of Swept-Wing Transition,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 525, 2005, pp. 275-308.
- [58] H. Bippes, “Basic Experiments on Transition in Three-Dimensional boundary Layers Dominated by Crossflow Instability,” *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 35, No. 4, 1999, pp. 363-412.
- [59] Y. C. Kim and E. J. Powers, “Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions,” *IEEE Transactions on Plasma Science*, Vol. 7, 1979, pp. 120-131.
- [60] R. L. Kimmel and J. M. Kendall, “Nonlinear disturbances in a hypersonic laminar boundary layer,” AIAA Paper, 1991-0320, 1991.

謝辞

本研究を行うにあたり、高知工科大学大学院の荻野 要介 講師には多大なる御指導や御支援を賜りました。研究や論文の執筆内容などに厳しくかつ的確な御意見を頂くことも多々ありました。初めての英語論文の執筆の際には休日にも関わらず何度も添削して頂きました。研究に対する姿勢の他にも、毎週の報告会や研究相談にお伺いをした際、伝え方が拙いにも関わらず理解をしてくださり御助言を頂きました。学部生の時以上に充実した研究生活を送ることができました。荻野先生の懇切丁寧な御指導に深く感謝申し上げます。また仙台への研究発表の際に牛タンをはじめ、沢山の美味しい料理をご馳走になりました。とても美味しく忘れられない味となりました。心より感謝いたします。

高知工科大学の野崎 理 教授には全体報告会等を通じて、多大なる御指導、御助言を頂きました。また私の就職活動においてエントリーシートの添削や面接練習を行って下さいました。丁寧なフィードバックがとても分かりやすく、自信にも繋がっていきました。深謝申し上げます。

研究室 OB の廣原 和希 様には就職活動の進め方やエントリーシートの添削など、お忙しい中幾度もお世話になりました。また遠方からわざわざ研究室へ足を運んでいただき激励を送って頂いたことや、夜遅くにも関わらず電話で相談にも乗っていただきました。深く感謝いたします。

航空エンジン超音速流研究室の超音速班メンバーの安部 翔太 君、板谷 匠海 君、笠石 丈二 君、浅井 友彰 君、岩田 雄太郎 君、久保田 佑弥 君、磯部 拓海 君、橋爪 見奈 さんには普段から大変親しく接して頂き、楽しく研究室生活を送ることができました。ありがとうございました。

そして同期の濱中 峻匡 君、廣田 知大 君には日々刺激をもらっていました。一方で夜研究室に同期だけになった時、たわいもない話をして大笑いしたり、悩みや相談を聞いて下さいました。楽しく充実した時間を過ごすことができました。心より感謝申し上げます。

最後に充実した学生生活を送らせていただきました両親と弟には深く感謝申し上げます。