

加振周波数の変動範囲を考慮した動吸振器の設計法*

井上喜雄^{*1}, 芝田京子^{*2}A Design Method for Dynamic Vibration Absorbers
Considering Excitation Frequency RangeYoshio INOUE^{*3} and Kyoko SHIBATA^{*3} Department of Intelligent Mechanical Systems Engineering, Kochi University of Technology,
185 Miyanokuchi, Tosayamada-cho, Kami-shi, Kochi, 782-8502 Japan

A new optimum design method of dynamic vibration absorbers is proposed for the cases when the primary system has some uncertainty in dynamic characteristics and excitation frequency fluctuates in small range. When the excitation frequency is constant, it is well known that an undamped dynamic vibration absorber is very effective to attenuate the vibration amplitude of the primary system. However, when the excitation frequency fluctuates in small range, such an undamped absorber does not always suppress the vibration amplitude. In this paper, we find out that upper limit of the vibration amplitude of the primary system can be estimated easily by using the imaginary part of the dynamic stiffness of the absorber. We derive very simple equations which give the optimum natural frequency and damping ratio of the absorber for given excitation frequency range. Calculation results of the frequency response for some examples designed by the proposed method are demonstrated and they show the usefulness of the proposed method.

Key Words: Dynamic Absorber, Damping, Forced Vibration, Optimal Design, Dynamic Stiffness, Robust Design

1. まえがき

正弦波加振を受ける機械や構造物のなかには、運転中に姿勢、運転条件が変化することにより固有振動数が大きく変化する場合があります。また、同じ機種でも異なった場所に設置する場合には、架台系や支持構造の固有振動数変化に起因して思わぬ共振が発生する場合もある。加振周波数が一定でも固有振動数の変化の幅が大きければ、一般的に固有振動数を加振周波数から十分離すことが困難になることが多い。そのような場合でも応答倍率が大きくならないようにする方法の一つとして、加振周波数と同一の固有振動数を有し減衰のない動吸振器を加振力が存在する場所に付加する方法が古くから知られており、反共振を利用して応答振幅を理論的にはゼロにすることができる。この場合には、主系の特性に関係なく、加振周波数と動吸振器の固有振動数の関係のみを考えればよいことから設計法も非常に簡単であり、同期電動機駆動の回転軸系のように回転数が変化しない系のアンバランス振動を抑える場合などには非常に有効な手段となる。

しかし、誘導モータのように負荷の変動に伴い回転数が若干変動する場合や、運転条件として回転数が限定された範囲で変動する場合には、加振周波数の変動が問題となる。そのような場合には加振周波数と動吸振器の固有振動数がずれることにより、振動をねらい通りに抑制することができなくなる場合がある。また、加振周波数は一定でも、動吸振器に製作誤差が存在する場合や経年変化などにより動吸振器の固有振動数が変化する場合には、加振周波数と動吸振器の固有振動数がずれることになり、加振周波数が変化する場合と同様の状況となる。主系のパラメータが一定で、加振周波数が大きく変化する場合については Den Hartog らにより広められた定点理論⁽¹⁾をはじめ多くの研究⁽²⁾⁻⁽⁴⁾が報告されているが、パラメータが大きく変化する主系に付加する動吸振器の設計で加振周波数の変動を考慮した研究はあまり見当たらない。

そこで、本研究では、主系の固有振動数が大きく変化する系において、加振力の周波数が限られた範囲で変化する場合に対する最適な動吸振器の設計法について検討する。一般的な構造物の動剛性の虚部が負にならないことに着目し、動吸振器の動剛性の虚部から応答の上限値を計算する式を導出し、それを用いて動吸振器の最適なパラメータを求める方法について示す。

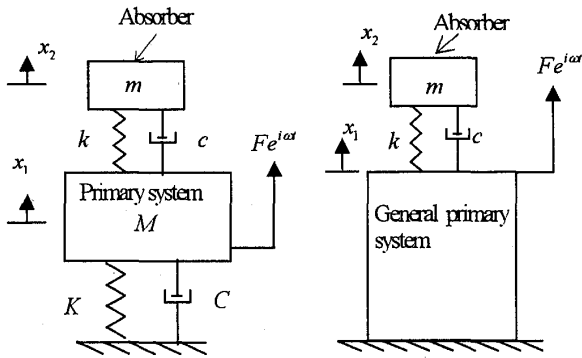
* 原稿受付 2007年6月11日。

^{*1} 正員, フェロー, 高知工科大学工学部(〒782-8502 香美市土佐山田町宮の口185)。^{*2} 正員, 高知工科大学工学部。

E-mail: inoue.yoshio@kochi-tech.ac.jp

2. 問題の設定

動吸振器の設計法は、一般的に、1自由度系で表現された主系に1自由度の動吸振器が付加された図1(a)のような2自由度系で扱われる場合が多いが、ここでは、主系は図1(b)のように一般的な構造物として議論する。ただし、動吸振器は標準的な1自由度系であるとする。



(a) 2-degree-of-freedom system (b) General system

Fig. 1 Primary system with dynamic vibration absorber

また、主系は、姿勢や運転条件、あるいは機械の設置条件などにより固有振動数が大きく変化する系であると、固有振動数の変化は、質量の変化による場合、剛性の変化による場合、その組み合わせなど、あらゆる場合を想定する。なお、主系の減衰についても特性が変動することを想定しているが、動吸振器が用いられるのは、一般的には減衰が非常に小さい系であると考えられる。

主系に加わる加振力 f は、限定された範囲で周波数が変動する正弦波外力で

$$f = Fe^{i\omega t} \quad (1)$$

で表現する。加振角振動数 ω は、中心角振動数を ω_0 、 $r = \omega / \omega_0$ 、 λ を1より大きい定数として

$$1/\lambda \leq \omega / \omega_0 = r \leq \lambda \quad (2)$$

なる範囲で変化するものとする。加振力の振幅 F は、回転軸系のアンバランス振動を想定し、角振動数の2乗に比例すると考え、

$$F(r) = F_0 r^2 \quad (3)$$

で定義する。なお、 F_0 は、 $\omega = \omega_0$ の時の加振力の振幅である。

振動応答の評価は、回転軸系でよく用いられる速度振幅で行なう。すなわち、主系の固有振動数が変化する系に式(1)~(3)で定義した加振力が加わる場合に、速度振幅を最小にする動吸振器のパラメータの設計

法について検討する。ただし、動吸振器の質量 m は与えられるものとして、最適な固有振動数 ω_n と減衰比 ζ を求める。なお、固有振動数に関するパラメータとしては、固有角振動数 ω_n と中心周波数 ω_0 の比

$$\alpha = \omega_n / \omega_0 \quad (4)$$

を用いる。

3. 動剛性虚部と消散エネルギー

次章以下では、サブシステムの動剛性の虚部を用いて動吸振器の最適設計式を導いているが、その時には一般的な構造物の動剛性の虚部は常にゼロ以上であることを用いている。本章では、消散エネルギーとの関係を用いて、動剛性虚部がゼロ以上であることを示す。

一般的な構造物の任意の点で変位入力

$$x = Xe^{i\omega t} \quad (5)$$

を与えた場合に、それに必要な加振力を

$$f = Fe^{i\omega t} \quad (6)$$

とする。ここでは、変位と力の比について検討するので、一方を実数と仮定しても一般性は損なわれないことから、変位振幅 X は実数で、構造物に加わる力の振幅 F は複素数で

$$F = F_R + iF_I \quad (7)$$

と表現する。構造物に1サイクルあたり流入するエネルギー E_a は、

$$E_a = \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}[f(t)] \text{Re}[\dot{x}(t)] dt \\ = \pi F_I X \quad (8)$$

である。構造物の1サイクル当たりの消散エネルギーを E_b とすれば、定常振動では系への流入エネルギーと消散エネルギーは等しくなるので

$$E_b = E_a = \pi F_I X \quad (9)$$

となる。上式を変形すれば

$$\frac{F_I}{X} = \frac{1}{\pi} \frac{E_b}{X^2} = \frac{\varepsilon}{\pi} \quad (10)$$

となる。 F_I / X は加振点での動剛性の虚部であるので、動剛性の虚部は、1サイクル当たり、単位変位入力当たりの消散エネルギー ε に比例する値であることがわかる。減衰を含む構造物であれば消散エネルギーは正であり、減衰がなければ消散エネルギーはゼロである。したがって、一般的な構造物の動剛性の虚部は常にゼロ以上であることがわかる。

4. 動剛性の虚部による応答の上限値の評価

本章では、特性が大きく変化する主系に動吸振器を付加する場合に、動吸振器の動剛性の虚部に着目してパラメータの応答の上限値を評価する方法について示す。

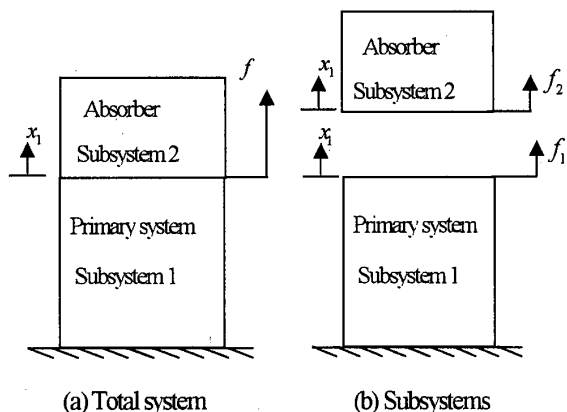


Fig. 2 Primary system and absorber

ここでは、主系、動吸振器系を図2のような一般的なサブシステムと考え、動剛性虚部と主系の応答の関係について議論を進める。

式(1)で表現される加振力が主系に加えらるる場合に、加振力を受ける位置に、サブシステムとしての動吸振器が取り付けられているとする。加振位置での応答変位 x_1 を複素振幅 X_1 を用いて

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t} \quad (11)$$

と置き、 S を加振点における系全体の動剛性（複素数）とすれば、 X_1 は

$$X_1 = \frac{F}{S} \quad (12)$$

で表現できる。その絶対値である変位振幅 D は

$$D = |X_1| = \frac{F}{|S|} \quad (13)$$

速度振幅 I' は

$$I' = \omega |X_1| = \frac{\omega F}{|S|} \quad (14)$$

となる。

図2(a)のような主系に動吸振器が付加された系を、図2(b)のように主系と動吸振器に対応するサブシステムにわけ、加振位置から主系および動吸振器を加振した場合の動剛性をそれぞれ、 S_1 、 S_2 とすれば、系全体の動剛性 S は、各サブシステムに対する動剛性の和で表現され

$$S = S_1 + S_2 \quad (15)$$

となる。また、複素数である系全体およびそれぞれの動剛性を実部と虚部に分けて、実部に添え字 R 、虚部に添え字 I をつけ、虚数単位を i として表現すれば、

$$S = S_R + iS_I = (S_{1R} + S_{2R}) + i(S_{1I} + S_{2I}) \quad (16)$$

となる。

前章で示したように、一般的な構造物としてのサブシステムの動剛性の虚部は、常に正またはゼロである。したがって

$$S_I = S_{1I} + S_{2I} \geq S_{2I} \geq 0 \quad (17)$$

となり、 S_{1I} が大きく変動したとしても、 S_I は必ず S_{2I} 以上となる。したがって、主系の応答変位振幅 D について次式のような関係が得られる。

$$D = \frac{F}{|S|} = \frac{F}{\sqrt{S_R^2 + S_I^2}} \leq \frac{F}{S_I} \leq \frac{F}{S_{2I}} \quad (18)$$

したがって、 D は F/S_{1I} 、 F/S_{2I} を超えることはないことがわかる。系全体の動剛性の実部 S_R は

$$S_R = S_{1R} + S_{2R} \quad (19)$$

で表現されるが、各サブシステムの実部は、正負の両方の値をとり得るので、主系の特性が大きく変動する場合には、どの周波数においても S_{1R} と S_{2R} の和がゼロになる可能性がある。その場合には、応答振幅は

$$D = \frac{F}{S_I} \quad (20)$$

となり、加振力の振幅と S_I のみで表現できる。さらに主系に減衰がなければ

$$D = \frac{F}{S_{2I}} \quad (21)$$

となる。ここで、

$$D_U = \frac{F}{S_{2I}} \quad (22)$$

と定義すれば、 D は D_U を超えることはなく、かつ条件によっては D_U と一致することになる。したがって、 D_U はある周波数における D の上限値であるといえる。上限値として F/S_{1I} を用いることも考えられるが、一般的に動吸振器を用いるのは主系の減衰が小さい場合であると考えられること、本研究では主系のパラメータの変動を考えていることから、主系に減衰がない場合を最悪の条件と考え、主系のパラメータによらない上限値として D_U を用いる。同様に、応答速度振幅 I' の上限値 I'_U を

$$I'_U = \omega D_U = \frac{\omega F}{S_{2I}} \quad (23)$$

で定義する。

応答速度振幅の上限値 V_U の周波数範囲内の最大値を V_M とすれば、主系の特性、加振周波数が変化しても、応答速度振幅 V は V_M を超えることはない。したがって、本研究では、 V_M を最小にするパラメータが動吸振器の最適パラメータであるとして設計を行なう。 V_M は動吸振器の特性と加振力の情報のみで与えられるので、パラメータの最適化は主系の情報を用いずに行なうことができる。

5. 標準的な動吸振器の動剛性虚部と
応答の上限値

図3に示す1自由度のばね、質量、減衰からなる標準的な動吸振器を用いる場合の動剛性虚部と主系の速度振幅の上限値について検討する。図3のような系を主系側から加振した時の主系の変位を x_1 、動吸振器と主系の相対変位 $x_2 - x_1$ を x 、動吸振器の諸パラメータを m, c, k をとした場合の動吸振器系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{x}_1 \tag{24}$$

となる。 X_1 を実数、 X を複素数と仮定し、主系の変位 x_1 、動吸振器質量と主系質量の相対変位 x を

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}, \quad x = X e^{i\omega t} \tag{25}$$

と置き、 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 、 $\zeta = c/(2\sqrt{mk})$ 、 $R = \omega/\omega_n$ を用いて式(24)を整理すれば、振幅比 $\gamma (= X/X_1)$ 、動吸振器の動剛性の実部 S_{2R} 、虚部 S_{2I} は、以下のように表現できる。

$$\gamma = \frac{X}{X_1} = \frac{-R^2}{-R^2 + 2R\zeta i + 1} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} S_{2R} &= -k \operatorname{Re}[\gamma] + c\omega \operatorname{Im}[\gamma] \\ &= m\omega_0^2 \times \frac{\alpha^2(R^2 - 1 - 4\zeta^2 R^2)}{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2} \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} S_{2I} &= -k \operatorname{Im}[\gamma] - c\omega \operatorname{Re}[\gamma] \\ &= m\omega_0^2 \times \frac{2\alpha^2 \zeta R^3}{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2} \end{aligned} \tag{28}$$

また γ の絶対値は次式で与えられる。

$$|\gamma| = |X/X_1| = \frac{R}{\sqrt{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2}} \tag{29}$$

式(28)の S_{2I} 、式(3)で表現される F 、式(4)で定義される α を式(24)に適用すれば、任意の主系に質量 m 、

固有振動数 ω_n 、減衰比 ζ の動吸振器を付加した場合の主系の応答変位振幅の上限値 D_U は

$$D_U = \frac{F_0 r^2}{S_{2I}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \times \frac{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2}{2\zeta R} \tag{30}$$

となる。また、 V_U は

$$V_U = \frac{\omega F_0 r^2}{S_{2I}} = \frac{F_0}{m\omega_0} \times \frac{\alpha\{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2\}}{2\zeta} \tag{31}$$

で表現できる、 $F_0/(m\omega_0)$ で除して無次元化すれば

$$v_U = \frac{\alpha\{(1/R - R)^2 + 4\zeta^2\}}{2\zeta} \tag{32}$$

となる。したがって、 α, ζ が与えられれば、無次元速度振幅の上限値 v_U は、 R の関数で表現できる。

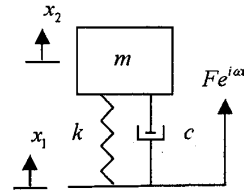


Fig.3 Typical dynamic vibration absorber

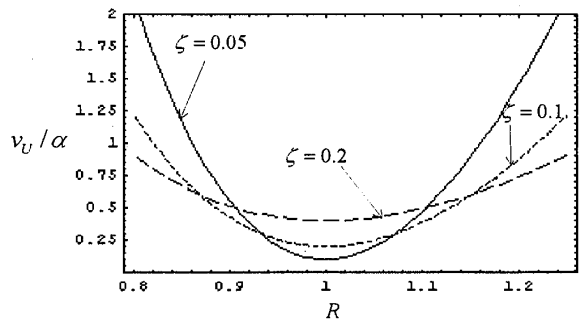


Fig.4 Effect of R on v_U/α

6. 最適調整

ここでは、周波数範囲内の v_U の最大値 v_M を最小にする動吸振器のパラメータの設計法について示す。まず、周波数範囲内のどの周波数で v_U が最大になるかについて検討し、次に、与えられた周波数において v_U を最小にする減衰比 ζ_d を求める式を導く。さらに、それらの検討結果を用いて v_M を最小にする α および ζ の設計式を導出する。

6・1 応答の上限値が最大となる周波数 図4に式(32)で表現される R に対する v_U の変化の例を示す。図では v_U/α を示しているが、 v_U は ζ の大きさによらず $R=1$ で最小で R が1から離れるにしたがって大

きくなっていることがわかる。 v_U の R に対する傾きは、式(32)より

$$\frac{\partial v_U}{\partial R} = \frac{\alpha(R-1/R^3)}{\zeta} \quad (33)$$

で与えられる。上式より、 v_U の R に対する傾きは、 $R < 1$ では負、 $R = 1$ でゼロ、 $R > 1$ では正になることがわかる。したがって、周波数範囲の下限における R を R_1 、上限における R を R_2 とすれば、周波数範囲 $R_1 \leq R \leq R_2$ のなかでの v_U の最大値 v_M は、周波数範囲の両端の v_U の大きい方、すなわち

$$v_M = \max \{v_U(R_1), v_U(R_2)\} \quad (34)$$

で与えられることがわかる。

次に、 α の値によって、 $v_U(R_1)$ 、 $v_U(R_2)$ の大小関係がどのようになるかを調べる。式(32)より

$$v_U(R) = v_U(1/R) \quad (35)$$

また式(4)による α の定義より

$$R_1 = 1/(\alpha\lambda), \quad R_2 = \lambda/\alpha \quad (36)$$

したがって、

$$v_U(R_1) = v_U(\alpha^2 R_2) \quad (37)$$

となる。これらの関係式を用いれば $\alpha = 1$ の場合には

$$v_M = v_U(R_1) = v_U(R_2) = v_U(\lambda) \quad (38)$$

となることがわかる。 $\alpha > 1$ の場合には

$$v_U(R_1) = v_U(\alpha^2 R_2) > v_U(R_2) \quad (39)$$

であることから

$$v_M = v_U(R_1) = v_U(\alpha\lambda) \quad (40)$$

となる。同様に、 $\alpha < 1$ の場合には

$$v_U(R_1) = v_U(\alpha^2 R_2) < v_U(R_2) \quad (41)$$

であることから

$$v_M = v_U(R_2) = v_U(\lambda/\alpha) \quad (42)$$

となる。したがって、 α が与えられれば、周波数範囲内のどの周波数で v_U が最大になるかがわかる。

6・2 応答の上限値を最小にする減衰比 v_M を最小とするパラメータの検討を行なう前に、 α 、 R が与えられた場合に、 v_U を最小にする減衰比 ζ_d を求める式を導出する。式(32)を ζ で偏微分すれば、

$$\frac{\partial v_U}{\partial \zeta} = \frac{\alpha}{2} \left\{ -\frac{(1/R-R)^2}{\zeta^2} + 4 \right\} \quad (43)$$

となる。上式の右辺をゼロにする ζ が v_U を最小にすることから、 v_U を最小にする減衰比 ζ_d は次式で表現

できる。

$$\zeta_d = |1/R - R|/2 \quad (44)$$

その時の v_U である v_{Ud} は

$$v_{Ud} = 2\alpha|1/R - R| = 4\alpha\zeta_d \quad (45)$$

となる。また、 $\zeta = \zeta_d$ の時の動吸振器動剛性の虚部 S_{2id} は

$$S_{2id} = m\omega_0^2 \alpha^2 \times \frac{R^3}{2|1/R - R|} \quad (46)$$

となる。

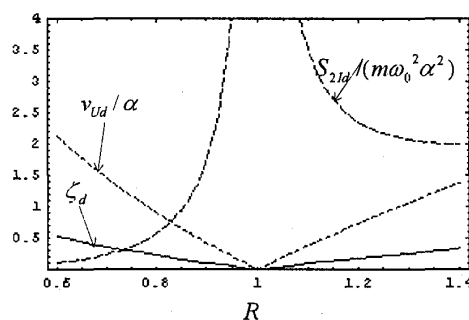


Fig. 5 Effect of R on ζ_d , v_{Ud} and $S_{2id}/(m\omega_0^2 \alpha^2)$

図5に ζ_d 、 v_{Ud}/α 、 $S_{2id}/(m\omega_0^2 \alpha^2)$ が R によってどのように変化するかを示している。図より R が1に近づくにしたがって、すなわち、加振周波数が動吸振器の固有振動数に近づくにしたがって、 ζ_d 、 v_{Ud} が小さくなって行くことがわかる。一方、式(46)で表現される S_{2id} は、共振点近傍で R が1に近づくにしたがって大きくなっている。すなわち、動吸振器の共振に近いほど、小さい減衰で大きい S_{2id} 、すなわち大きい単位入力変位あたりの消散エネルギー ε_2 が得られることを意味している。式(31)に示すように S_{2id} は v_U を求める式の分母であるので、 S_{2id} が大きくなれば速度振幅の上限値が小さくなる。

6・3 最適パラメータ ここでは、式(44)、(45)で表現される ζ_d 、 v_d と式(38)、(40)、(42)の関係を用いて v_M を最小にする動吸振器の最適パラメータ α_{opt} 、 ζ_{opt} の設計式を導出する。

$\alpha = 1$ の場合には $v_M = v_U(\lambda)$ であるので、 $R = \lambda$ を式(44)、(45)に代入すれば、 v_M を最小にする ζ およびその時の v_M は

$$\zeta_d = (\lambda - 1/\lambda)/2 \quad (47)$$

$$v_{Md} = 2(\lambda - 1/\lambda) \quad (48)$$

となる。同様に、 $\alpha > 1$ の場合には $v_M = v_U(\alpha\lambda)$ であるので、 $R = \alpha\lambda$ を式(44)、(45)に代入すれば

$$\zeta_d = \{\alpha\lambda - 1/(\alpha\lambda)\}/2 \quad (49)$$

$$v_{Md} = 2\{\alpha^2\lambda - 1/\lambda\} > 2(\lambda - 1/\lambda) \quad (50)$$

となる。また、 $\alpha < 1$ の場合には $v_M = v_U(\alpha/\lambda)$ であるので、 $R = \alpha/\lambda$ を式(44), (45)に代入すれば

$$\zeta_d = (\lambda/\alpha - \alpha/\lambda)/2 \quad (51)$$

$$v_{Md} = 2(\lambda - \alpha^2/\lambda) > 2(\lambda - 1/\lambda) \quad (52)$$

が得られる。式(48), (50), (52)より $\alpha = 1$ の場合に v_{Md} が最小なることがわかる。したがって、 v_M を最小にする動吸振器の最適パラメータ α_{opt} , ζ_{opt} は

$$\alpha_{opt} = 1 \quad (53)$$

$$\zeta_{opt} = (\lambda - 1/\lambda)/2 \quad (54)$$

となる、その時の v_M である v_{Mopt} は

$$v_{Mopt} = 2(\lambda - 1/\lambda) \quad (55)$$

で ζ_{opt} の 4 倍になる。以上のように最適パラメータ α_{opt} , ζ_{opt} およびその時の無次元速度振幅の最大値 v_{Mopt} を非常に簡単な式形で表現できる。また α_{opt} は 1 であり、 ζ_{opt} , v_{Mopt} ともに周波数範囲のパラメータ λ のみの関数で与えられており、定点理論では最適減衰比や無次元応答振幅が質量比のみによって決まることとは大きく異なっている。

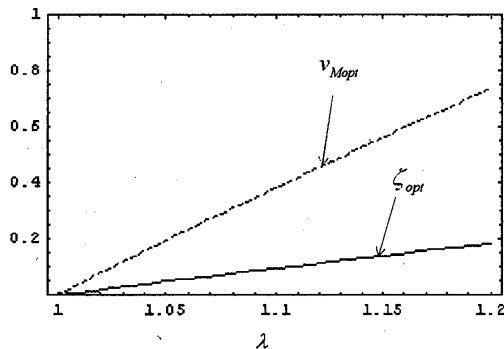


Fig. 6 Effect of λ on ζ_{opt} and v_{Mopt}

図6に λ を横軸に、 ζ_{opt} (実線) および v_{Mopt} (点線) の変化を示しているが、両者とも λ が大きくなるにしたがって大きくなっている。このことから、周波数の変動範囲が狭いほど、減衰最適は小さくなり、また主系の速度振幅を小さくすることが可能であることがわかる。

周波数範囲が小さい場合には

$$\lambda = 1 + \beta \quad (56)$$

と置き、 $\beta \ll 1$ であるとすれば

$$\zeta_{opt} = \{1 + \beta - 1/(1 + \beta)\}/2 \cong \beta \quad (57)$$

$$v_{Mopt} \cong 4\beta \quad (58)$$

が導かれ、 β に比例して ζ_{opt} , v_{Mopt} が大きくなることがわかる。

なお、 $\lambda = 1$ では ζ_{opt} および v_{Mopt} がゼロとなる。したがって、式(49)および式(50)は、周波数の変動がない場合に減衰のない動吸振器が最適でかつ応答速度振幅がゼロになるという従来理論も含むことになる。

v_{Mopt} に対応する速度振幅を V_{Mopt} とすると、

$$V_{Mopt} = \frac{2F_0}{m\omega_0}(\lambda - 1/\lambda) \quad (59)$$

となり、 V_{Mopt} は動吸振器の質量 m および中心角振動数 ω_0 に逆比例することがわかる。また、周波数変動幅が小さい場合には、

$$V_{Mopt} \cong \frac{4\beta F_0}{m\omega_0} \quad (60)$$

となる。例えば、周波数範囲が 2 倍に広がれば、動吸振器の質量を 2 倍にすることにより V_{Mopt} を元の値と同等に抑えることができることなどが、式(60)から容易に理解できる。

動吸振器の設計には、ばねの強度も重要な問題である。強度を評価するには、ばねのたわみ、すなわち動吸振器と主系の相対変位の振幅の最大値が必要である。ばねのたわみの上限値 δ_U は、式(29), (30), (53), (54) および $R = r$ より

$$\begin{aligned} \delta_{Uopt} &= |X|_{Uopt} = D_{Uopt} |\gamma| \\ &= \frac{F_0}{m\omega_0^2} \times \sqrt{\left(\frac{r-1/r}{\lambda-1/\lambda}\right)^2 + 1} \end{aligned} \quad (61)$$

となる。 δ_{Uopt} は両端で最大になるので、その最大値を δ_{Mopt} とすれば δ_{Mopt} は λ によらず

$$\delta_{Mopt} = \sqrt{2} \times \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad (62)$$

という簡単な式で与えられる。

以上のように、非常に簡単な式により最適パラメータ、および、速度振幅、ばねのたわみの最大値の計算が可能となる。

なお、最適減衰を用いた場合の周波数領域内の各点における v_{Uopt} は、式(32)に $\alpha = 1$, $\zeta = \zeta_{opt}$ を代入すれば

$$v_{Uopt} = (\lambda - 1/\lambda) \left\{ \left(\frac{r-1/r}{\lambda-1/\lambda} \right)^2 + 1 \right\} \quad (63)$$

となる。

7. 手法の妥当性, 有用性の検討

提案する設計法は主系が一般的な構造物の場合でも適用できるが, 本章では, 主系が減衰のない1自由度系である場合を例として取り上げ, 計算により手法の妥当性および有用性を示す.

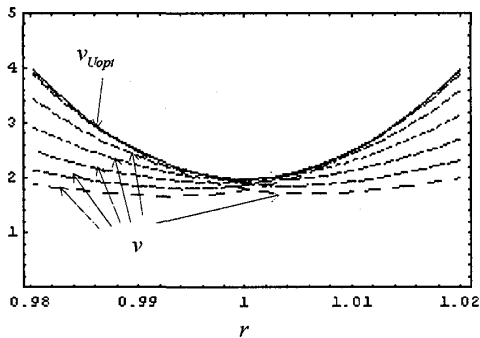


Fig. 7 Calculation results of v_{Uopt} and v
($\lambda=1.02$, $\mu=0.02$, $\Omega_n/\omega_0=0.88-1.12$)

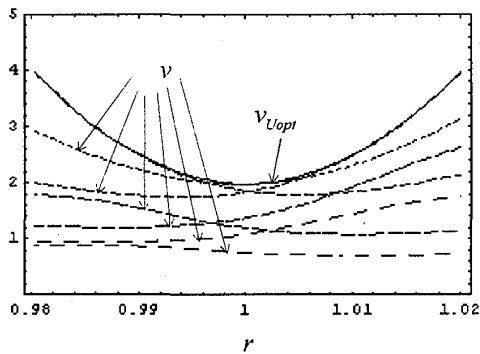


Fig. 8 Calculation results of v_{Uopt} and v
($\lambda=1.02$, $\mu=0.02$, $\Omega_n/\omega_0=0.5-1.6$)

図7に周波数範囲を表すパラメータ $\lambda=1.02$, 質量比 $\mu=m/M=0.02$ の場合について, 提案する設計式により最適調整された系の無次元速度振幅の上限値 v_{Uopt} , ならびに, 2自由度系の周波数応答計算により求めた主系の特性を変化させた場合の無次元応答速度振幅 v を示す. 式(54)より計算される ζ_{opt} は0.0198で $\beta (=0.02)$ に近い値となっている, 主系の固有振動数は, 質量比は固定し, ばね定数 K を変更することにより変化させた. 固有振動数の変化の範囲は, 図7では $\Omega_n/\omega_0=1$ を中心に $\Omega_n/\omega_0=0.88\sim 1.12$ とした. 図7では, v_{Uopt} を実線, v を点線で示しているが, この例の主系の固有振動数変化の範囲内では, 系全体の動剛性の実部 S_r がゼロになる周波数が加振周波数の変動の範囲内にあり, また, 主系には減衰が存在しないことから, どの v の曲線も v_{Uopt} の曲線に接している. 図8には, 同様の条件で, 主系の固有振動数の変化の

範囲を $\Omega_n/\omega_0=0.5\sim 1.6$ に広げた場合の v_{Uopt} ならび v を示している. この場合には, 曲線によっては, 加振周波数の変動範囲内に $S_r=0$ となる周波数が存在せず, v の曲線が v_{Uopt} の曲線に接するのではなく v_{Uopt} よりもかなり小さい値になっている場合があるが, いずれの場合にも v は v_{Uopt} を超えていない.

同様に, 図9に $\lambda=1.16$, $\mu=0.05$ で, 主系の固有振動数を $\Omega_n/\omega_0=0.88\sim 1.12$ の範囲で, ばね定数を変更することによって変化させた場合, 図10に $\lambda=1.04$ の場合の v_{Uopt} , ならびに, ばね定数 K は固定しておき質量 M を変更することにより主系の固有振動数を $\Omega_n/\omega_0=0.5\sim 2.0$ の範囲で変化させた場合の v を示している. 図10の場合には, $\Omega_n/\omega_0=1$ のときに質量比が0.05となるように設定し, その値を基準値として主系の質量を変化させた. ζ_{opt} は $\lambda=1.04$ の場合には0.0392, $\lambda=1.16$ の場合には0.150であり, λ が大きくなるにしたがって, ζ_{opt}/β が1から離れていっている. これらの図についても, 図7, 8の場合と同様に v は v_{Uopt} を超えることはなく, また, S_r がゼロになる条件を整えば v が v_{Uopt} に接しており, v_{Uopt} が上限値となっていることが確認できる.

次に, 加振周波数が一定として従来理論で設計された減衰のない動吸振器が付加された系において, もし, 加振周波数が小さい範囲で変動すれば, どのように応答が変化するかを調べ, その結果と同じ条件で提案する方法により設計した場合の結果との比較を行なう.

提案する手法による動吸振器を用いるかわりに減衰のない動吸振器を用いること以外は, 図8と全く同じ条件である場合について検討する. 図11に減衰のない動吸振器を付加した場合の無次元応答速度振幅 v を提案する手法で計算した v_{Uopt} とあわせて示している. $r=1$, すなわち $\omega=\omega_n$ の場合には, v は主系のばね定数が大きく変化しても, 常に応答振幅がゼロとなっており, 動吸振器の本来の役割を十分果たしていることが確認できる. しかし, $\lambda=1.02$ というわずかな範囲でも加振周波数が変化すれば, 主系のばね定数の大きさによっては共振が発生し, 無次元応答速度振幅 v が提案する手法による上限値 v_{Uopt} とくらべて非常に大きくなっていることがわかる. 減衰のない動吸振器は, 固有振動数を加振周波数に精度よくあわせれば, 小さい質量比でも振幅を抑制することができる非常に効率的な制振装置である一方, わずかな振動数のずれでも応答が非常に大きくなる危険性があることがわかる.

一方, 提案する手法を用いた場合の v は, 図7, 8に示したように上限値 v_{Uopt} を超えることはないので, 安心して設計することができる.

以上のように、提案する手法を用いれば、加振周波数が限られた範囲で変化し、主系の特性が大きく変化する場合においても、加振周波数範囲にあわせて動吸振器を最適調整すれば、確実に周波数範囲に応じた振幅以下に抑制することが可能であることが確認できた。

8. まとめ

本研究では、主系の特性が大きく変化する系に、限定された範囲で加振周波数が変化し、かつ、振幅が周波数の2乗に比例する加振力が加わる場合に、主系の速度振幅の最大値を最小にする動吸振器の最適設計法について検討した結果、以下の結論を得た。

(1) 一般的な構造物の動剛性の虚部は常にゼロ以上であることを用いて、主系の応答の上限値は動吸振器の動剛性虚部のみで評価できることを示した。

(2) 与えられた周波数範囲内での速度振幅の上限値は、周波数領域のどちらかの境界で最大になること、任意の加振周波数における主系の応答の上限値を最小にする減衰比は、加振周波数と動吸振器の固有振動数との比のみで表現できることを示し、それらの結果を用いて、動吸振器の最適パラメータを計算する式を導出した。

(3) 最適振動数比 α_{opt} は1、最適減衰比 ζ_{opt} は周波数範囲を示すパラメータ λ のみの関数という非常に簡単な形で表現できることを示した。また、その時の、速度振幅や動吸振器ばねの変位振幅も簡単な式で表現できることも示した。

(4) 提案する手法の最適パラメータは、加振周波数が一定の場合に従来から広く用いられている減衰のない動吸振器の最適パラメータも含むことを確認した。

(5) 計算により、手法の妥当性、有用性を示した。

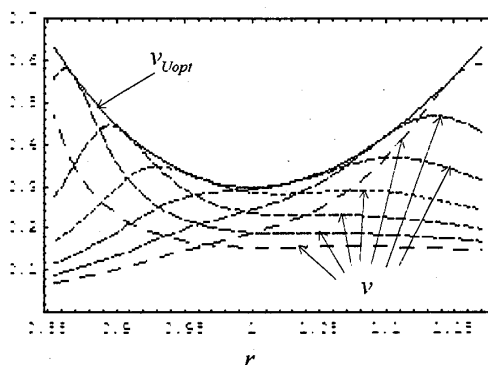


Fig. 9 Calculation results of v_{Uopt} and v
($\lambda = 1.16$, $\mu = 0.05$, $\Omega_n / \omega_0 = 0.88-1.12$)

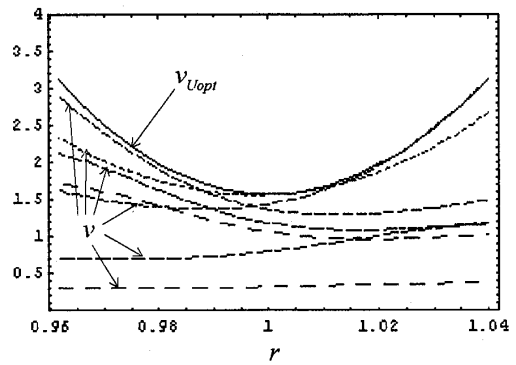


Fig. 10 Calculation results of v_{Uopt} and v
($\lambda = 1.04$, $K = \text{const}$, $\Omega_n / \omega_0 = 0.5-2.0$)

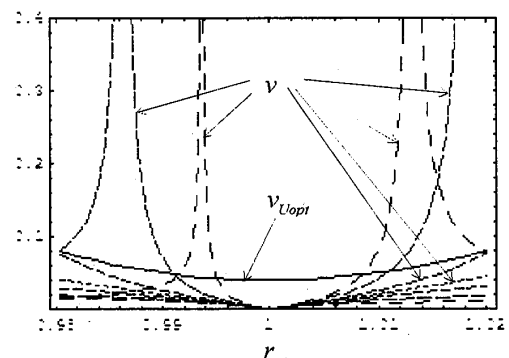


Fig. 11 Calculation results of v with undamped
dynamic vibration absorber
($\lambda = 1.02$, $\mu = 0.02$, $\Omega_n / \omega_0 = 0.5-1.6$)

文献

- (1) Den Hartog, J.P., Mechanical Vibrations, (1956), 87, McGraw-Hill.
- (2) Nishihara, O., Matsuhisa, H., Design of a Dynamic Vibration Absorber for Minimization of Maximum Amplitude Magnification Factor (Derivation of Algebraic Exact Solution) Ultraprecision Micromilling Technology, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.63, No.614 (1997), pp.3438-3445.
- (3) Asami, T., Nishihara, O., Baz, A.M., Analytical solution to H ∞ and H $_2$ optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems, *Trans. of ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.124, No.2, (2002.4), pp.284-295.
- (4) Yasuda, M., Pan, G., Optimization of Two Mass Dynamic Vibration Absorber and Its Vibration Control Performance *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.69, No.688 (2003), pp.3175-3182.