

## 欠陥対消滅が誘起する液晶流動\*

(第1報, 配向状態と計算精度の関係)

黒岩正寛<sup>\*1</sup>, 蝶野成臣<sup>\*2</sup>, 辻 知宏<sup>\*2</sup>Liquid Crystal Flow Induced by Annihilation of a Pair of Defects  
(1st Report, Relationship between Orientation State and Computation Accuracy)Masahiro KUROIWA, Shigeomi CHONO<sup>\*3</sup> and Tomohiro TSUJI<sup>\*3</sup> Department of Intelligent Mechanical Systems Engineering, Kochi University of Technology,  
Tosayamada-cho, Kami-shi, Kochi, 782-8502 Japan

As the first report of liquid crystal flow induced by annihilation of a pair of defects, we have studied the relationship between orientation state of molecules and computation accuracy using the Doi theory, in which the orientation state is described with the orientation distribution function. Computation of the function is a huge task, so that we have approximated the function with a series of spherical harmonic functions in order to reduce the task. The computation accuracy is assumed to depend strongly on both the nematic potential intensity and shear rate. It is found from the numerical results that many terms of spherical harmonic functions are required for the high potential intensity and shear rate because the function becomes steep. In addition, we propose diagrams from which we can easily obtain the necessary number of terms as a function of the potential intensity and shear rate.

**Key Words:** Numerical Analysis, Non-Newtonian Fluid, Liquid Crystal, Generation of Flow, Defect, Doi Theory, Orientational Distribution Function, Computation Accuracy

## 1. 緒 言

ネマティック液晶を偏光顕微鏡下で観察すると、液晶分子が偏光方向に対して平行または垂直に配向している領域では暗視野に、 $\pm 45^\circ$  方向に配向している領域では明視野となり、他の方向に配向している領域ではグレーとなる。図1は代表的な低分子液晶である *N*-(*p*-methoxybenzylidene)-*p*-butyl-aniline (MBBA) の等方相から液晶相への相転移直後の写真であり、液晶特有のシュリーレン組織が観察されている。図1中に黒色の帯状組織が交差する箇所がいくつか存在するが、これらは欠陥<sup>①</sup>と呼ばれ、ここを中心に分子配向場の空間的歪みが発生している。図2(a), (b)は欠陥の代表的配向状態である。図中の細長い楕円は液晶分子、円は欠陥核である。欠陥核では配向方向が不連続に変化しており、ここは配向特異点となる。

液晶製品の製造工程において欠陥はしばしば発生し、これが生産性や製品性能の低下の一因となっている。そのため欠陥の抑制あるいは除去を目的とした研究<sup>②</sup>

が行われた。一方、図2(a), (b)に示すような異なった分子配向をもつ欠陥同士は互いに引き合い、最終的に消滅することが実験的に知られている<sup>③</sup>。この欠陥対消滅過程では、当然のことながら分子配向が変化するので流動が発生が予想される<sup>④</sup>。従って任意の場所に

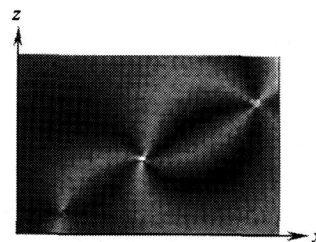


Fig. 1 Liquid crystalline defect structures

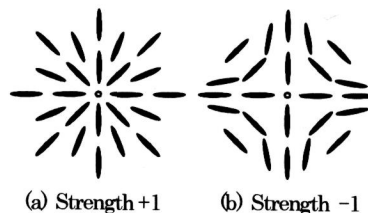


Fig. 2 Molecular orientation configurations of defects

\* 原稿受付 2007年1月15日。

<sup>\*1</sup> 正員, 高知工科大学大学院工学研究科(〒782-8502 香美市土佐山田町)。<sup>\*2</sup> 正員, 高知工科大学知能機械システム工学科。

E-mail: chono.shigeomi@kochi-tech.ac.jp

人為的に欠陥を発生させれば (欠陥領域の秩序度は低いので熱エネルギーの印加が欠陥発生に繋がる), そこに必然的に流動が誘起されるので, 熱エネルギーを運動エネルギーに変換する新しいタイプのマイクロアクチュエータを開発できる。

液晶流動の構成方程式はいくつか提案されており, 各々長短所を有している。主なものを列挙すると以下となる。

- ・ Transversely Isotropic Fluid (TIF) 理論<sup>46)</sup>
- ・ Leslie-Ericksen (L-E) 理論<sup>47)</sup>
- ・ 土井理論<sup>48)</sup>
- ・ Beris 理論<sup>49)</sup>
- ・ Tsuji-Rey 理論<sup>10)</sup>
- ・ 土井理論+Marrucci-Greco ポテンシャル<sup>12)</sup>

配向挙動を満足に記述するためには, 分子間の長距離秩序効果, 短距離秩序効果, および流動効果が織り込まれた理論が必要である。この観点から, 流動効果のみの TIF 理論, 長距離秩序効果と流動効果の L-E 理論, 短距離秩序効果と流動効果の土井理論は除外される。残り3種類の理論の中で Beris 理論と Tsuji-Rey 理論は配向状態を2階のテンソルで表現している。既報<sup>10)</sup>で明らかにしたように, 2階テンソルによる構成方程式は, そのままでは液晶特有のせん断挙動であるタンブリング (tumbling) 挙動やワギング (waging) 挙動, アライニング (aligning) 挙動に対応できず, 物理的意味を有しないフィッティングパラメータを導入する必要がある。さらに応力の結果がかなり不満足であるため, 既知の速度場の基で配向場のみを扱う場合には問題ないが, 速度場を運動方程式から求める場合には適用が困難である。

土井理論に用いられている Maier-Saupe ポテンシャルは短距離秩序効果のみを有しているが, Marrucciらはこれを短距離秩序効果と長距離秩序効果の両者を有した形に拡張し<sup>12)</sup>, 土井理論の原型に適用した<sup>44)</sup>。この新しい理論は配向分布関数で記述されていることから closure 近似と呼ばれる数学的近似は排除されており, 上述のテンソル型方程式が有している問題点はない。近年, Feng ら<sup>45)</sup>が応力式を提案し, 液晶の構成方程式として完成されるに至った。

本研究の目的は, 構成方程式として上述の新しい理論を用いて, 一対の欠陥が対消滅する過程で発生する流動を確認するとともに, その大きさを見積もることである。Toth ら<sup>44)</sup>は Beris 理論<sup>49)</sup>を用いて欠陥対消滅時の液晶流動について数値解析を行っている。しかし上述したように Beris 理論は分子配向状態を2階のテンソルで表現しており, 結果の信頼性は低い。ま

た彼らはアクチュエータとしての応用を目指しておらず, 液晶流動よりも欠陥の移動に主眼を置いている。

既報<sup>13,17)</sup>では, 単純せん断流中における物理空間1点の配向分布関数を差分法で離散化した結果, 多大な計算時間を要することがわかった。本研究のように物理空間の多数の位置で配向分布関数を計算するには, 精度と計算時間の両者を考慮しなければならない。そこで本報では, 長距離秩序効果を有しない土井理論を基礎式として, 配向分布関数を球面調和関数の級数で近似し, 配向状態と必要とされる最小の展開項数の関係を明らかにすることを目的とする。なお, 欠陥対消滅過程での流動については次報で報告する。

## 2. 基礎式および数値計算

**2.1 基礎式** 配向分布関数の時間発展方程式は次式で表される。

- ・ 配向分布関数

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \bar{D} \nabla_u \cdot \left( \nabla_u f + \frac{\nabla_u V}{kT} \right) - \nabla_u \cdot \{ f(\kappa \cdot u - \kappa : uuu) \} \quad (1)$$

- ・ 回転拡散係数

$$\bar{D} = D \left( 1 - \frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{-2} \quad (2)$$

- ・ 秩序パラメータテンソル

$$\mathbf{S} = \int_{|u|=1} \left( uu - \frac{\delta}{3} \right) f d\Omega \equiv \left\langle uu - \frac{\delta}{3} \right\rangle \quad (3)$$

- ・ ネマティック Maier-Saupe ポテンシャル

$$V = -\frac{3}{2} U k T \mathbf{S} : uu \quad (4)$$

上式において  $t$  は時間,  $u$  は着目した液晶分子に平行な単位ベクトル,  $f(t, u)$  は  $u$  の配向分布関数,  $\nabla_u$  は単位球面上での微分演算子,  $k$  はボルツマン定数,  $T$  は絶対温度,  $\kappa$  は速度こう配テンソル,  $D$  は等方状態における回転拡散係数,  $\delta$  は単位テンソル,  $U$  は無次元のネマティックポテンシャル強度である。また式(3)中の

$$\int_{|u|=1} (\dots) d\Omega$$

は単位球面上での面積分である。

**2.2 数値計算** 本報では図3に示すような  $x-z$  平面内の単純せん断流を考える。流れ方向を  $x$  軸, 速度こう配方向を  $z$  軸, それらに垂直な方向を  $y$  軸とし, 単位ベクトル  $u$  の天頂角を  $\theta$ ,  $x$  軸を基準とした方位角を  $\phi$  とする。図3に示した速度場では, 式(1)中の速度こう配テンソル  $\kappa$  および式(3)の秩序パラメー

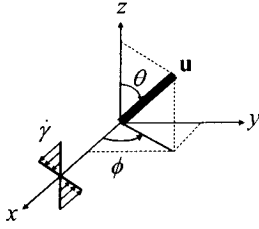


Fig. 3 Coordinate system

タテンソル  $\mathbf{S}$  は以下のように成分表示される.

$$\mathbf{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{xx} & 0 & S_{xz} \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ S_{zx} & 0 & S_{zz} \end{pmatrix} \quad (6)$$

ただし  $\dot{\gamma}$  はせん断速度の大きさである. 式(5), (6)を式(1)に代入し配向分布関数  $f$  を求める. 本研究では  $f$  を球面調和関数  $Y_{lm}(\mathbf{u})$  の有限級数で次式のように近似する<sup>(8)-(9)</sup>.

$$f(t, \mathbf{u}) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l C_{lm}(t) Y_{lm}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

式中の  $C_{lm}(t)$  は係数,  $l_{\max}$  は方位量子数の最大値で級数解の項数を決定するパラメータである. 液晶分子に頭尾の区別はないので

$$f(t, \mathbf{u}) = f(t, -\mathbf{u}) \quad (8)$$

であり, 球面調和関数の性質

$$Y_{lm}(-\mathbf{u}) = (-1)^l Y_{lm}(\mathbf{u}) \quad (9)$$

を用いると  $(-1)^l = 1$  となるので  $l$  は偶数に限定される. 式(1)を時間に関して  $1/D$  で無次元化した後, 両辺に  $Y_{lm}$  の複素共役  $Y_{lm}^*$  ( $=(-1)^m Y_{lm}$ ) を掛け単位球面上で積分し, 球面調和関数の直交性<sup>(9)</sup>

$$\int_{|\mathbf{u}|=1} Y_{lm} Y_{l'm'}^* d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (10)$$

を用いれば,  $C_{lm}$  の時間に関する常微分方程式を得る. 積分には4次精度の Runge-Kutta 法を用いた. 時刻幅は  $\Delta t^* = 1/(1000\dot{\gamma}^*)$  とし,  $t^* = 80$  まで計算した. ただし  $t^*$  ( $=tD$ ) は無次元時間,  $\dot{\gamma}^*$  ( $=\dot{\gamma}/D$ ) は無次元せん断速度である.

**2.3 初期値**  $C_{lm}$  の初期値  $C_{lm}(0)$  を以下の方法で求めた. 式(7)の両辺に  $Y_{lm}^*$  を掛け単位球面上で積分し, さらに式(10)を用いると次式のようになる.

$$C_{lm}(0) = \int_{|\mathbf{u}|=1} f(0, \mathbf{u}) Y_{lm}^*(\mathbf{u}) d\Omega \quad (11)$$

$f$  は  $t^* = 0$  で平衡状態 ( $\dot{\gamma}^* = 0$ ) にあるとすれば,

$$f(0, \mathbf{u}) = \exp\left(-\frac{V}{kT}\right) / \int_{|\mathbf{u}|=1} \exp\left(-\frac{V}{kT}\right) d\Omega \quad (12)$$

となる<sup>(8)</sup>. 上式の分母は  $f$  を正規化するために用いている. 流動および外場が存在しなければ  $f$  は一軸対称となるので, 秩序パラメータテンソルは

$$\mathbf{S} = S \left( \mathbf{nn} - \frac{\delta}{3} \right) \quad (13)$$

と表される.  $S$  は配向の程度を 0 (ランダム配向) ~ 1 (完全配向) で表現する秩序パラメータ,  $\mathbf{n}$  は液晶分子の平均的配向方向 (主配向方向) を単位ベクトルで表すディレクタである. 式(4), (13)を式(12)に代入すると

$$f(0, \mathbf{u}) = \frac{\exp\left\{\frac{3}{2} US(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2\right\}}{\int_{|\mathbf{u}|=1} \exp\left\{\frac{3}{2} US(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2\right\} d\Omega} \quad (14)$$

と変形される. 上式の  $\exp\{\dots\}$  をべき級数展開し,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$  のべき乗を球面調和関数で表せば

$$\begin{aligned} \exp\left\{\frac{3}{2} US(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2\right\} &= 4\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p)!}{p!} \left(\frac{3}{2} US\right)^p \\ &\times \sum_{r=0}^p \frac{1}{(2p-2r)!!(2p+2r+1)!!} \\ &\times \sum_{m'=-2r}^{2r} Y_{2r m'}^*(\mathbf{n}) Y_{2r m'}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\int_{|\mathbf{u}|=1} \exp\left\{\frac{3}{2} US(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})^2\right\} d\Omega \\ &= 4\pi \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} US\right)^p \frac{1}{(2p+1)p!} \end{aligned} \quad (16)$$

となる<sup>(2)</sup>. ただし

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 \\ (2n+1)!! &= (2n+1)(2n-1)\cdots 3 \cdot 1 \\ 0!! &= 1 \end{aligned}$$

である ( $n$  は 0 または正の整数). 式(15), (16)を代入した式(14)を式(11)に代入すると,

$$C_{lm}(0) = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2} US\right)^p (2p)!}{p!(2p-l)!!(2p+l+1)!!} Y_{lm}^*(\mathbf{n})}{\sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2} US\right)^q}{(2q+1)q!}} \quad (17)$$

を得る。  $t^*=0$  でディレクタ  $\mathbf{n}$  は  $x$  軸方向に配向していると仮定し  $\theta_m = \pi/2$ ,  $\phi_m = 0$  とした。ただし  $\theta_m$ ,  $\phi_m$  は  $\mathbf{n}$  の天頂角と方位角である。また平衡状態の  $S$  は無次元ポテンシャル強度  $U$  のみの関数である<sup>(17)</sup>。

### 3. 結果および考察

**3.1 主配向角と秩序パラメータ** 図3よりディレクタ  $\mathbf{n}$  は  $x$ - $z$  平面内に存在するので、ディレクタの方位角  $\phi_m$  は常に  $0^\circ$  となる。天頂角  $\theta_m$  とスカラーの秩序パラメータ  $S$  は、秩序パラメータテンソル  $\mathbf{S}$  を用いて

$$\tan 2\theta_m = 2S_{xz} / (S_{zz} - S_{xx}) \quad (18)$$

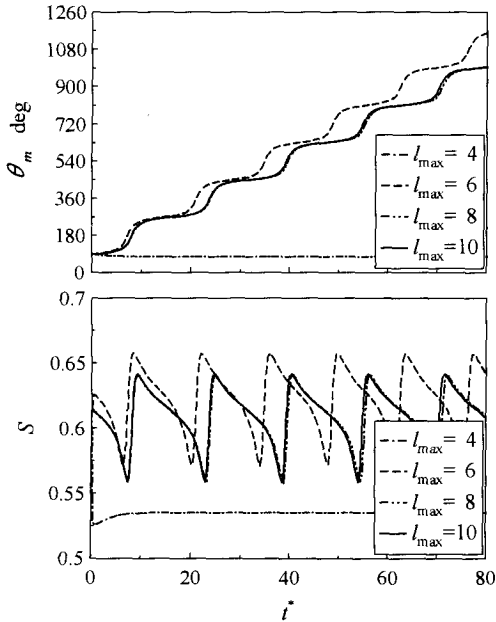
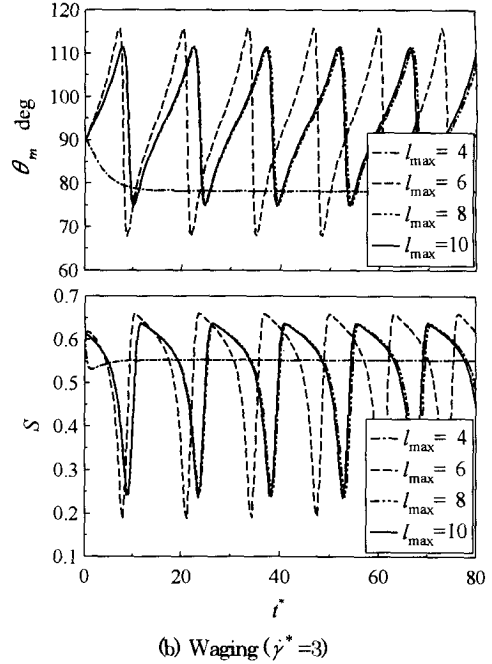
$$S = \sqrt{3S : S} / 2 \quad (19)$$

で求められる。

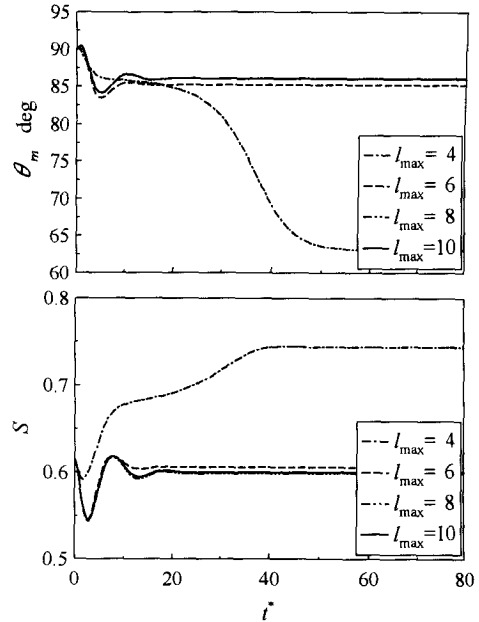
図4は  $l_{\max} = 4 \sim 10$  の場合の  $\theta_m$  と  $S$  の時間変化である。ポテンシャル強度として液晶性の最も低い  $U = 5$  を選択した<sup>(17)</sup>。図4(a)は  $\dot{\gamma}^* = 1$  の場合で  $\theta_m$  はタンプリング挙動を示す。すなわち、ディレクタが  $x$  軸と平行になる  $\theta_m = (n+1/2)\pi$  ( $n$  は整数) 付近では、せん断流の影響が最小になるので  $\theta_m$  の傾きは小さく、ディレクタが  $x$  軸と垂直になる  $\theta_m = n\pi$  付近では、せん断流の影響が最大になるため  $\theta_m$  の変化は大きい。 $l_{\max} = 8$  と  $10$  の挙動はほぼ一致し、 $l_{\max} = 6$  は  $l_{\max} \geq 8$  の挙動と比較すると回転周期が短い。 $l_{\max} = 4$  ではタ

ンプリング挙動を示さずアライニング挙動となっている。 $S$  は平衡状態の値 (0.618) をほぼ中心として振動している。 $l_{\max}$  の影響は  $\theta_m$  の場合と同様である。

図4(b)は  $\dot{\gamma}^* = 3$  の場合でワギング領域である。図4(a)と同様、 $\theta_m$ ,  $S$  とともに  $l_{\max} = 8$  と  $10$  の挙動はほ



(a) Tumbling ( $\dot{\gamma}^* = 1$ )



(c) Aligning ( $\dot{\gamma}^* = 40$ )

Fig. 4 Transient behavior of preferred angle and order parameter for  $U = 5$

ば一致し、 $l_{\max}=6$ は $l_{\max} \geq 8$ の挙動と比較すると振動周期が短く、且つ振幅が大きい。 $l_{\max}=4$ の挙動は全く異なり、 $\theta_m$ 、 $S$ ともに振動挙動を示さない。

図4(c)は $\dot{\gamma}^*=40$ の場合でアライニング領域である。図4(a), (b)で示したように $l_{\max}=4$ はタンブリング領域およびワギング領域でもアライニング挙動を示したので、図4(c)では低 $l_{\max}$ でも有用であると推測した。しかし $l_{\max}=4$ では定常に至る挙動を示すが、途中の変化および定常値は他の $l_{\max}$ と大きく異なっていることがわかる。 $l_{\max}=8$ と10の挙動はほぼ一致し、 $l_{\max}=6$ は $l_{\max} \geq 8$ の挙動と比較すると定常値にやや差異がみられる。

以上のことから、図示したポテンシャル強度とせん断速度領域では、 $l_{\max}=4$ は配向挙動を定性的にも表現できず使用不可と言える。一方 $l_{\max} \geq 8$ は定量的に満足であり、両者の中間である $l_{\max}=6$ は定性的に十分である。従って計算精度を優先するなら $l_{\max}=8$ 、計算時間を優先するなら $l_{\max}=6$ と結論づけられる。なお $l_{\max}=2$ では計算が発散した。

$U$ の影響を検討するため、図4(c)において $U$ を6.5に変更した結果を図5に示す。 $l_{\max}=2 \sim 6$ では計算が発散した。このポテンシャルとせん断速度領域では $\theta_m$ はワギング挙動を示す。 $l_{\max}=10$ と12の挙動はほぼ一致し、 $l_{\max}=8$ は $l_{\max} \geq 10$ の挙動と比較すると振動周期が長い。 $S$ についても $\theta_m$ と同

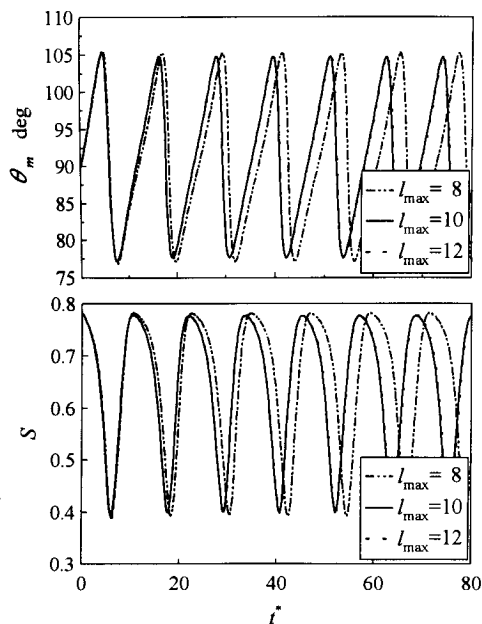


Fig. 5 Transient behavior of preferred angle and order parameter for  $U = 6.5$ ,  $\dot{\gamma}^* = 40$

様である。従って $U = 6.5$ ,  $\dot{\gamma}^* = 40$ では、計算精度を優先するなら $l_{\max}=10$ 、計算時間を優先するなら $l_{\max}=8$ となり、図4(c)と比較して高い $l_{\max}$ が要求される。

次に $\dot{\gamma}^*$ の影響を検討するため、図4において $\dot{\gamma}^*$ を90に変更した結果を図6に示す。 $l_{\max}=2$ では計算が発散した。このせん断速度領域では $\theta_m$ はアライニング挙動を示す。 $l_{\max}=10$ と12の挙動は一致し、 $l_{\max}=6$ と8は $l_{\max} \geq 10$ の挙動と比較すると定常値が異なる。 $l_{\max}=4$ の場合、本計算範囲内では定常値に至らず振動挙動を示している。従って計算精度を優先するなら $l_{\max}=10$ 、計算時間を優先するなら $l_{\max}=6$ となり、図4と比べて定量的精度の要求のみが高くなった。

以上のことから、配向分布関数を近似するために必要な展開項数はポテンシャル強度とせん断速度の大きさに依存する。そこで $U = 5.0 \sim 7.5$ ,  $\dot{\gamma}^* = 1 \sim 300$ について、図4~6と同様、 $\theta_m$ と $S$ の時間変化図から著者らが目視によって判断した結果を図7, 8に示す。両図の縦軸は $U$ 、横軸は $\dot{\gamma}^*$ であり、図中の×印は計算点を表す。図7は定性的に満足な項数を、図8は定量的に満足な項数を与える線図である。図より $U$ および $\dot{\gamma}^*$ の増加とともにより多くの球面調和関数の展開項数が必要とされることが確認できる。これは、 $U$ および $\dot{\gamma}^*$ が増加すると配向分布関数が急峻になり、

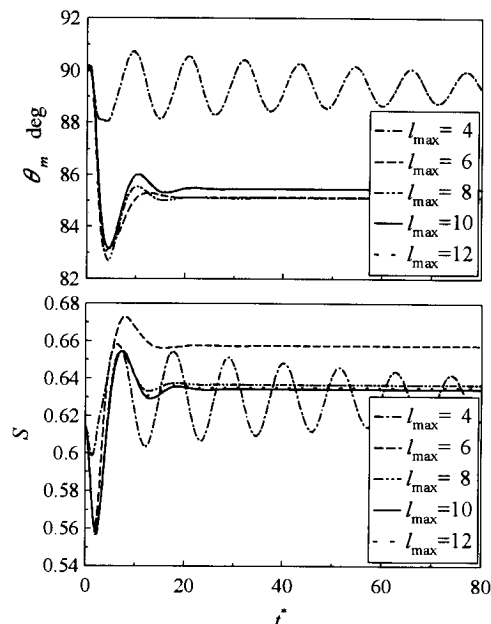
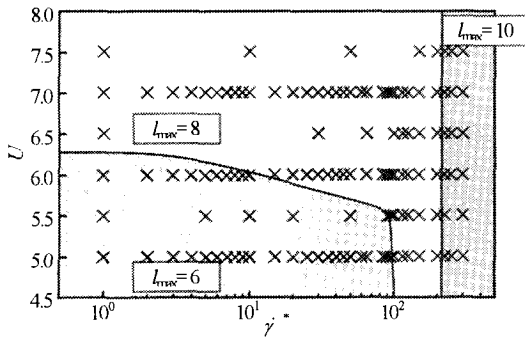
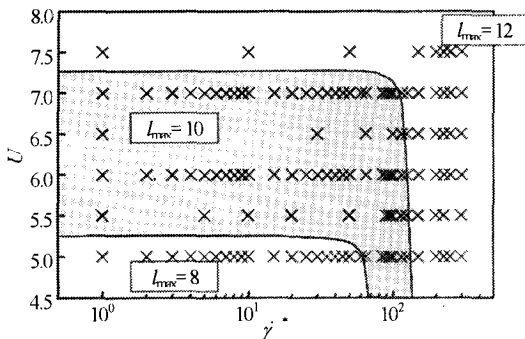
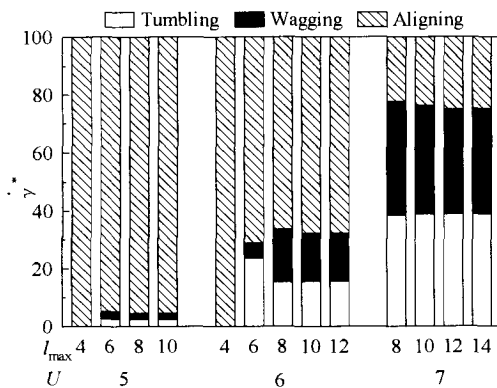


Fig. 6 Transient behavior of preferred angle and order parameter for  $U = 5$ ,  $\dot{\gamma}^* = 90$

Fig. 7 Values of  $l_{\max}$  for qualitative accuracyFig. 8 Values of  $l_{\max}$  for quantitative accuracyFig. 9 Critical shear rates as a function of  $l_{\max}$  for  $U=5, 6$  and  $7$ 

いわゆる高周波成分がより増大し、且つ一軸非対称となるためと推察される。

**3.2 遷移せん断速度** 図9はタンブラリング、ワギング、アライニング挙動の発生する遷移せん断速度から計算精度を検討した結果である。図の縦軸は $\dot{\gamma}^*$ 、横軸は各 $U$ における $l_{\max}$ である。 $U=5$ では、 $l_{\max}=8$ と10で各挙動が発生する遷移せん断速度

度はほぼ一致しているが、 $l_{\max}=6$ ではワギング領域が若干長い。また $l_{\max}=4$ ではアライニング挙動のみとなっている。従って定性的には $l_{\max}=6$ 、定量的には $l_{\max}=8$ であり、これは図7, 8の結果と一致する。

$U=6$ の場合、 $l_{\max}=10$ と12はよく一致し、 $l_{\max}=8$ ではわずかにワギング領域が長く、 $l_{\max}=6$ では逆に短い。従って定量的精度としては $l_{\max}=10$ と断定できるが、定性的精度は $l_{\max}=6$ または8のいずれかとなり、やはり図7, 8の結果と整合する。

$U=7$ では $l_{\max} \leq 6$ で計算が発散しており、 $l_{\max}=8$ が定性的、 $l_{\max}=10$ が定量的の精度となり、図7, 8の結果と合う。

本研究の $l_{\max}$ はテンソル理論で用いられているテンソルの階数に相当することが明らかにされている<sup>(23)(24)</sup>。図7, 8で示したように定性的に満足な解でも $l_{\max}$ は6以上必要であり、従って2階や4階の配向テンソルで構築された理論には根本的に無理があると言える。従って、緒言で言及したようにテンソル理論に導入されている closure 近似には、本来、2階や4階テンソルが表現できない内容を補足する役割が含まれていると考えられる。

#### 4. 結 言

配向分布関数を球面調和関数による級数で近似した場合の打ち切り項数と計算精度について検討するため、土井理論を基礎式として数値解析を行った。得られた結果を以下に示す。

(1) ポテンシャル強度とせん断速度を与えれば、定性的および定量的に満足な展開項数を読み取ることができる線図を作成した。

(2) ポテンシャル強度またはせん断速度が増加すると、配向分布関数が急峻、且つ、一軸非対称となるので、配向分布関数の近似にはより多くの球面調和関数の展開項数が求められる。

終わりに、本研究は平成17年度科学研究費補助金[基盤研究(B), 課題番号17360084, 特定領域研究, 課題番号17040025]の補助を受けたことを記し謝意を表す。また、計算と作図にご協力いただいた大学院学生の下田修君に感謝する。

#### 参考文献

- (1) Editors for handbook of liquid crystals. *Handbook of liquid crystals*. (2000). 68. Maruzen.
- (2) Tsuji, T. and Chono, S. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B*. Vol. 68. (2002). 3012.

- (3) Chono, S. and Tsuji, T., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* Vol. 72, (2006), 656.
- (4) Ericksen, J. L., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 4 (1960), 231.
- (5) Ericksen, J. L., *Trans. Soc. Rheol.*, 5 (1961), 23.
- (6) Leslie, F. M., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 28 (1968), 265.
- (7) Leslie, F. M., *Adv. Liq. Cryst.*, 4 (1979), 1.
- (8) Doi, M., *J. Polym. Sci., Polym. Phys. Ed.*, 19 (1981), 229.
- (9) Doi, M. and Edwards, S. F., *The Theory of Polymer Dynamics* (1986), Oxford Univ. Press.
- (10) Beris, A. N. and Edwards, B. J., *Thermodynamics of Flowing Systems*, (1994), Oxford Univ. Press.
- (11) Tsuji, T. and Rey, A. D., *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 73 (1997), 127.
- (12) Marrucci, G. and Greco, F., *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, 206 (1991), 17.
- (13) Tsuji, T. and Chono, S., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* Vol. 71, (2005), 1775.
- (14) Shimada, T., Doi, M. and Okano, K., *J. Chem. Phys.*, 88 (1988), 7181.
- (15) Feng, J. J., Sgalari, G. and Leal, L. G., *J. Rheol.*, 44, (2000), 1085.
- (16) Tóth, G., Denniston, C. and Yeomans, J. M., *Phys. Rev. Lett.*, 88, 10 (2002), 105504-1.
- (17) Chono, S. and Tsuji, T., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series B* Vol. 62, (1996), 600.
- (18) Doi, M. and Edwards, S. F., *J. Chem. Soc. Faraday Trans., II*, 74 (1978), 918.
- (19) Larson, R. G., *Macromolecules*, 23 (1990), 3983.
- (20) Larson, R. G. and Ottinger, H. C., *Macromolecules*, 24, (1991), 6270.
- (21) Sasaki, R., *Physical Mathematics*, (1996), 298, Baifukan.
- (22) Moriguchi, S. et al., *Formulae for Mathematics III*, (1998), 103, Iwanami Shoten.
- (23) Van Gorp, M., *J. Rheol.*, 42, (1998), 1269.
- (24) Chandrasekhar, S., *Liquid Crystals, 2nd Ed.*, (1992), 48, Cambridge Univ. Press.