高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2002年度版)
Series **A**
No. **1**

内容

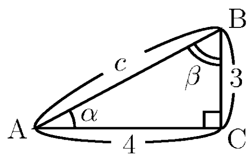
◎ 文字式

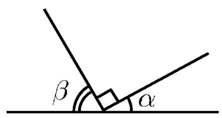
◎ 整式

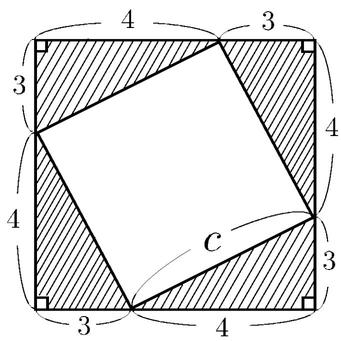
◎ 2次方程式

◎ 因数分解

◎ 累乗根







電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< 省略記号の変更 >

1. 積の記号 $\times$ は省略する

文字式の場合、積の記号 $\times$ は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 $\times$ を省略する。例えば $x + x = 2 \times x$ を $2x$ と略記する。また $x \times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例 $x + x + x = 3x$, $2 \times x + 5 \times x = 7x$, $a \times b \times c = abc$

$4 \times x \times x - 7 \times x \times x = -3x^2$, $a \times (a + b) = a^2 + ab$

$5 \times x \times x \times x \times 7 \times y \times y = 35x^3y^2$, $a \times 2 \times a \times 4 \times a \times 5 = 40a^3$

(注) (1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で $\mathscr{abc}$ のように続けて書いてはならない。$a \times b \times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $\mathscr{a}\ \mathscr{b}\ \mathscr{c}$ と書く。

問 1 次の式を積の記号 $\times$ を省略して簡単にせよ。

(1) $3\times x+x+x$ (2) $2\times x\times x\times 3\times y\times y\times y\times y\times y$

(3) $a \times a \times (a - 3 \times b)$ (4) $3 \times x \times x \times (x \times 4 - 3 \times y)$

2. プラス記号は省略しない (帯分数は使わない)

帯分数の $1\frac{1}{2}$ は本来は $1 + \frac{1}{2}$ という意味であるから、間のプラスが省略されている。積の記号を省略するので、まぎらわしいから、今後は帯分数を使用してはならない。$1\frac{1}{2}$ を表したいときは、$1 + \frac{1}{2}$ かまたは仮分数 $\frac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\frac{7}{2}$ を $3 + \frac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問 2 次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\frac{1}{3}$ (2) $3\frac{3}{4}$ (3) $4\frac{1}{5}$ (4) $6\frac{2}{3}$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。
文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を
分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 ÷ 使わない。このようなきまりをまとめると

〈文字式のきまり〉	1. 文字式では積の記号×は省略する。 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。 3. 同じ文字の積は指数を使う。 4. 文字式では割り算を分数で表す。 5. ＋, −より×, ÷を優先する。

となる。

(注) 1. 積の記号 × は通常は省略するが、$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような
素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では
$a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4b^2c$ のように × を全て省略する。

2. アルファベットの積は a^4b^2c のようにアルファベットの順に a ,b ,c $\cdots$,x ,y ,z に従って左側から書いていく。

3. 積の記号 × のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように
書く場合もあるが

$$2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6 \quad , \qquad 2.3 = 2 + 0.3$$

のように小数点と混同するので使用しない方が良い。

4. 数の計算と同様に文字の計算でも和 (+), 差 (−) より, 積 (×) や商 (÷) を優先する。
たとえば

$$a \times b + c - d \div e \times f = (a \times b) + c - (d \div e \times f) = ab + c - \frac{df}{e}$$

例 1 $5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

(注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算と
ちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例 2 $(4a^2b) \div (6ab^2) = \dfrac{4a^2b}{6ab^2} = \dfrac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \dfrac{2a}{3b}$

(注) 最後の式 $\dfrac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times b \times 2 \times b$

(2) $5(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $6 \times x \times y \times y \div (x \times y \times 5 \times x \times 3)$

(4) $21ab^3 \div 28a^2b$

(5) $(5xy^2) \times (9x^3y^2) \div (15x^2y^3)$

(6) $(3ab^2c) \div (2a^2bc^3) \times (6abc^2)$

＜ 通分 ＞

例 1 $\dfrac{5}{6}$ と $\dfrac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の 6 と 4 の最小公倍数である 12 を共通分母にして

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 2}{6\times 2}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{10}{12}+\frac{21}{12}=\frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数 12 を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分する方が簡単である。

$$\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{5\times 4}{6\times 4}+\frac{7\times 6}{4\times 6}=\frac{20}{24}+\frac{42}{24}=\frac{62}{24}=\frac{31}{12}$$

例 2

$$\frac{7}{6}+\frac{5}{8}=\frac{7\times 8}{6\times 8}+\frac{5\times 6}{8\times 6}=\frac{56+30}{48}=\frac{86}{48}=\frac{43}{24}$$

例 3

$$\frac{8}{9}-\frac{7}{12}=\frac{8\times 12}{9\times 12}-\frac{7\times 9}{12\times 9}=\frac{96-63}{9\times 12}=\frac{33}{9\times 12}=\frac{11}{3\times 12}=\frac{11}{36}$$

例 4

$$\frac{x}{6}-\frac{y}{8}=\frac{x\times 8}{6\times 8}-\frac{y\times 6}{8\times 6}=\frac{8x-6y}{48}=\frac{4x-3y}{24}$$

最後の式 $\dfrac{4x-3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例 5

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2\times y}{x\times y}+\frac{3\times x}{y\times x}=\frac{2y+3x}{xy}=\frac{3x+2y}{xy}$$

最後の式 $\dfrac{3x+2y}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例 6

$$\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3\times(b\times c)}{a\times(b\times c)}+\frac{2\times(a\times c)}{b\times(a\times c)}+\frac{1\times(a\times b)}{c\times(a\times b)}=\frac{3bc+2ac+ab}{abc}=\frac{ab+2ac+3bc}{abc}$$

最後の式 $\dfrac{ab+2ac+3bc}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次式を通分せよ。

(1) $\dfrac{7}{6}-\dfrac{7}{8}$　(2) $\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{12}$　(3) $\dfrac{5}{4}-\dfrac{7}{8}$

(4) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}$　(5) $\dfrac{a}{12}-\dfrac{b}{8}$　(6) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{6}$

(7) $\dfrac{y}{x}-\dfrac{a}{3}$　(8) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}$　(9) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$

＜分数の簡略化＞

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい (約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

例

(1) $$\frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1\times 3}{\frac{2}{3}\times 3} = \frac{3}{2}$$

(2) $$\frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right)\times(6\times 4)} = \frac{7\times 4}{5\times 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

(3) $$\frac{1-\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)\times(6\times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right)\times(6\times 5)} = \frac{3\times 6}{7\times 5} = \frac{18}{35}$$

(4) $$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1\times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right)\times ab} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b} = \frac{ab}{a+b}$$

最後の式 $\frac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

(5) $$\frac{\frac{z}{2}+\frac{w}{5}}{\frac{x}{4}-\frac{y}{6}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \frac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right)\times(12\times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right)\times(12\times 10)}$$

$$= \frac{(5z+2w)\times 12}{(3x-2y)\times 10} = \frac{(5z+2w)\times 6}{(3x-2y)\times 5} = \frac{30z+12w}{15x-10y}$$

最後の式 $\frac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{1}{\frac{7}{5}}$

(2) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$

(3) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}$

(4) $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

(5) $\dfrac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$

(6) $\dfrac{1}{\frac{zw}{xy}}$

(7) $\dfrac{1}{\frac{y}{x}+\frac{w}{z}}$

(8) $\dfrac{\frac{1}{ac}}{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}$

(9) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$

< 等式の変形 >

等号 $=$ で結ばれる文字式を**等式**という。等式は次の法則がある。

1. 両辺に同じ数を足しても等式は成立する。
2. 両辺から同じ数を引いても等式は成立する。
3. 両辺に同じ数を掛けても等式は成立する。
4. 両辺を (0 以外の) 同じ数で割っても等式は成立する。
5. 両辺を入れ替えても等式は成立する。

例 等式

$$2x = 4a + 3b - 5 \quad \cdots\cdots \ (1)$$

を考える。両辺を 2 で割ると

$$x = \frac{4a + 3b - 5}{2} \quad \cdots\cdots \ (2)$$

となる。(1) の両辺に $5 - 3b$ を足して 4 で割り、左辺と右辺を入れかえると

$$a = \frac{2x + 5 - 3b}{4} \quad \cdots\cdots \ (3)$$

となる。(1) の両辺に $5 - 4a$ を足して 3 で割り、左辺と右辺を入れかえると

$$b = \frac{2x + 5 - 4a}{3} \quad \cdots\cdots \ (4)$$

となる。(1) 式から (2) 式の形にすることを「x について解く」といい、(3) 式の形にすることを「a について解く」といい、(4) 式の形にすることを「b について解く」という。

問 次の等式を指定された形になおせ。

(1) $E = IR$, $R =$

(2) $S = \pi r^2$, $r^2 =$

(3) $E = \dfrac{1}{2}(a + b)\,h$, $h =$

(4) $P = \dfrac{TN}{9.74 \times 10^5}$, $N =$

(5) $\sigma = \alpha E\,(t - \tau)$, $\alpha =$

(6) $G = \dfrac{E}{2\,(1 + \mu)}$, $E =$

(7) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$,

$a =$

(8) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$,

$R =$

< 単位の計算1 >

< **長さ** > 長さの単位を示す。

1km (キロメートル)	1m (メートル)	1dm (デシメートル)	1cm (センチメートル)	1mm (ミリメートル)	1μm (マイクロメートル)	1nm (ナノメートル)	1 Å (オングストローム)
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例 1 3.5km = 3500m , 2.4m = 240cm , 1m = 10^{10} Å

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 123m = $\boxed{\quad}$ km　　(2) 7500mm = $\boxed{\quad}$ m　　(3) 1mm = $\boxed{\quad}$ Å

例 2 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか？」という問題では

740m = 0.74km だから

12.5km + 0.74km = <u>13.24km</u>

(注) 12.5km + 740m と書いてはならない。計算するときは必ず単位をそろえてする。

問 2 (1) 1050cm と 2.4m を足すと何 m になるか？

(2) 2km から 140m を引くと何 m になるか？

< **時間** > 1h(時間) = 60min(分) , 1min(分) = 60s(秒) で計算する。

例 3 1h = 60min , 1min = $\frac{1}{60}$h

1min = 60s , 1s = $\frac{1}{60}$min

4h = 4×60min = 240min

150min = 150×$\frac{1}{60}$h = $\frac{5}{2}$h = 2.5h

例 4 1.3 時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10} \times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より <u>(答) 78 分</u>

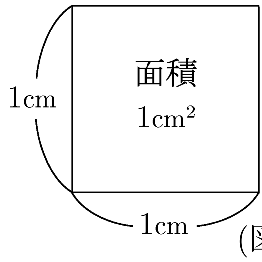
問 3 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) 0.6min = $\boxed{\quad}$ s　　(2) 36s = $\boxed{\quad}$ h　　(3) 1h = $\boxed{\quad}$ s

(4) 156s = $\boxed{\quad}$ min　　(5) 2.3h = $\boxed{\quad}$ min　　(6) 15min = $\boxed{\quad}$ h

< 単位の計算2 >

< **面積** >



(図 1)

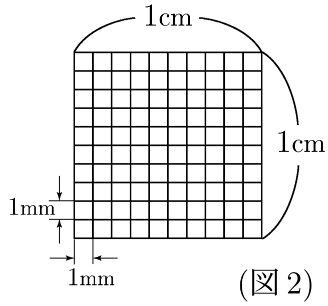
$1\mathrm{km}^2$ (1 平方キロメートル) = 1 辺が 1km の正方形の面積

$1\mathrm{m}^2$ (1 平方メートル) = 1 辺が 1m の正方形の面積

$1\mathrm{cm}^2$ (1 平方センチメートル) = 1 辺が 1cm の正方形の面積

$1\mathrm{mm}^2$(1 平方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の正方形の面積

(注) $1\mathrm{km}^2 = 1\mathrm{km} \times 1\mathrm{km}$, $1\mathrm{m}^2 = 1\mathrm{m} \times 1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^2 = 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^2 = 1\mathrm{mm} \times 1\mathrm{mm}$ と考える。



(図 2)

例 1 図 1 は $1\mathrm{cm}^2$ を表す正方形であり、縦と横を 10 等分したものが図 2 である。図 2 の小正方形の 1 個の面積は $1\mathrm{mm}^2$ であり、それが 100 個あるから $1\mathrm{cm}^2 = 100\mathrm{mm}^2$ となる。これを式で表すと

$$1\mathrm{cm}^2 = 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} = 10\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} = 100\mathrm{mm}^2$$

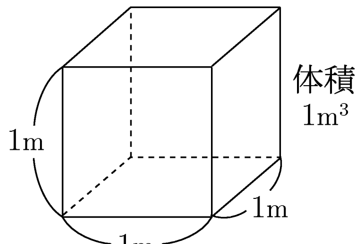
例 2 $7.5\mathrm{m}^2 = 7.5\mathrm{m} \times 1\mathrm{m} = 750\mathrm{cm} \times 100\mathrm{cm} = 75000\mathrm{cm}^2$

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\mathrm{m}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{cm}^2$　　(2) $1\mathrm{km}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^2$

(3) $0.5\mathrm{cm}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{mm}^2$　　(4) $600\mathrm{mm}^2 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^2$

< **体積** >



(図 3)

$1\mathrm{m}^3$ (1 立方メートル) = 1 辺が 1m の立方体の体積 (図 3)

$1\mathrm{cm}^3$ (1 立方センチメートル) = 1 辺が 1cm の立方体の体積

$1\mathrm{mm}^3$ (1 立方ミリメートル) = 1 辺が 1mm の立方体の体積

(注) $1\mathrm{m}^3 = 1\mathrm{m} \times 1\mathrm{m} \times 1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^3 = 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^3 = 1\mathrm{mm} \times 1\mathrm{mm} \times 1\mathrm{mm}$ と考える。

例 3 $6.4\mathrm{cm}^3 = 6.4\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} \times 1\mathrm{cm} = 64\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} \times 10\mathrm{mm} = 6400\mathrm{mm}^3$

問 2 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\mathrm{cm}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{mm}^3$　　(2) $1\mathrm{m}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{cm}^3$

(3) $1\mathrm{m}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{mm}^3$　　(4) $0.001\mathrm{km}^3 = \boxed{\qquad}\ \mathrm{m}^3$

＜単位の計算3＞

＜**速度**＞ 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

$$1\mathrm{km/h}（時速 1\mathrm{km}）= \frac{1\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = 1 時間に 1\mathrm{km} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/min}（分速 1\mathrm{m}）= \frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = 1 分間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{m/s}（秒速 1\mathrm{m}）= \frac{1\mathrm{m}}{1\mathrm{s}} = 1 秒間に 1\mathrm{m} 移動する速度$$

$$1\mathrm{cm/s}（秒速 1\mathrm{cm}）= \frac{1\mathrm{cm}}{1\mathrm{s}} = 1 秒間に 1\mathrm{cm} 移動する速度$$

などがよく使われる。

例1 27km/h（時速 27km）を分速になおすと

$$27\mathrm{km/h} = \frac{27\mathrm{km}}{1\mathrm{h}} = \frac{27000\mathrm{m}}{60\mathrm{min}} = \frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = 450\mathrm{m/min}（分速 450\mathrm{m}）$$

であり、秒速になおすと

$$450\mathrm{m/min} = \frac{450\mathrm{m}}{1\mathrm{min}} = \frac{450\mathrm{m}}{60\mathrm{s}} = \frac{7.5\mathrm{m}}{1\mathrm{s}} = 7.5\mathrm{m/s}（秒速 7.5\mathrm{m}）$$

となる。ここで 7.5m=750cm より、7.5m/s=750cm/s（秒速 750cm）としてもよい。

問1 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れよ。

$$18\mathrm{km/h} = \boxed{}\ \mathrm{m/min} = \boxed{}\ \mathrm{m/s}$$

問2 5m を 6 秒で走る速度を時速になおせ。

例2 「2km/min（分速 2km）のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では、

$$2\mathrm{km/min} = \frac{2\mathrm{km}}{1\mathrm{min}} = \frac{2000\mathrm{m}}{60\mathrm{s}} = \frac{100\mathrm{m}}{3\mathrm{s}}$$

より (答) 100m を 3 秒で走る

問3 54km を 1 時間 39 分で走る速度では、100m を何秒で走るか？

< 文字式の展開1 >

例 1 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

を計算で示すには

$$\begin{aligned}(a+b)\times(c+d) &= a\times(c+d) + b\times(c+d)\\ &= a\times c + a\times d + b\times c + b\times d\\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを**展開する**という。

例 2 $(a+b)^2$ を展開する。

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) &= a\times(a+b) + b\times(a+b)\\ &= a\times a + a\times b + b\times a + b\times b\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

例 3

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\times(a-b) + b\times(a-b)\\ &= a\times a - a\times b + b\times a - b\times b\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)^2$

(2) $(a+b)(a+c)$

(3) $(a+b)(a-c)$

(4) $(a-b)(a-c)$

(5) $(a+b)(-a+b)$

(6) $(a+b+c)^2$

(7) $(a+b-c)^2$

(8) $(a-b-c)^2$

＜ 文字式の展開2 ＞

例1 $(a-b)\,(a^2+ab+b^2)$

$= a\times(a^2+ab+b^2)-b\times(a^2+ab+b^2)$

$= a\times a^2+a\times ab+a\times b^2-b\times a^2-b\times ab-b\times b^2$

$= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$= a^3-b^3$

例2 $(a+b)^3=(a+b)\times(a+b)\times(a+b)=(a+b)\times(a+b)^2$

$= (a+b)\times(a^2+2ab+b^2)$

$= a\times(a^2+2ab+b^2)+b\times(a^2+2ab+b^2)$

$= a\times a^2+a\times 2ab+a\times b^2$
$\quad + b\times a^2+b\times 2ab+b\times b^2$

$= a^3+2a^2b+ab^2$
$\quad + a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) $(a-b)^3$

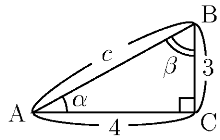
(3) $(a-b)(a+b)^2$

(4) $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

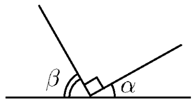
(5) $(a-b)^2(a+b)^2$

< ピタゴラスの定理 >

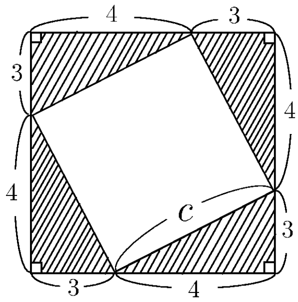
例 図 1 のような底辺 4(cm)、高さ 3(cm) の直角三角形 ABC の斜辺の長さ c を求めたい。∠BAC=α、∠ABC=β とおくと $\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ$ より $\alpha+\beta=90^\circ$ となる。従って図 2 のように直線上に角 α と角 β をおけば残った角度は 90° となる。そこで図 1 の三角形 ABC を 4 個用意して、図 3 のようにおく。図 3 の大きい正方形 (一辺 $3+4$ の正方形) から斜線部分を除いた部分は (図 2 の性質より) 一辺 c の正方形になる。よって図 3 の面積を斜線部分とそれ以外に分けると



(図1)



(図2)



(図3)

$$\underbrace{(3\times4)^2}_{\text{全体の面積}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times3\times4\right)\times4}_{\text{斜線部分の面積}} + c^2$$

これから

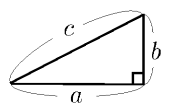
$$c^2=(3+4)^2-\frac{1}{2}\times3\times4\times4=3^2+2\times3\times4+4^2-2\times3\times4=3^2+4^2=25$$

よって $c=5$ (cm) である。

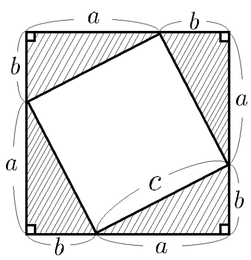
問 底辺 a、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とする (図 4)。例を参考にして

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

であることを証明せよ。この関係式を **ピタゴラスの定理** または **三平方の定理** という。
(ヒント $\cdots$ 9 ページ 例 2)



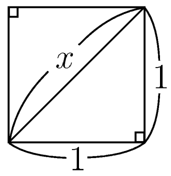
(図4)



(図5)

＜平方根1＞

例1 一辺の長さが1の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356\cdots$$

となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は2つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は**無理数** (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は2乗すれば2になる数であり、2の**平方根**と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2乗して a になる正の数を a の平方根と呼び $\sqrt{a}$ で表す。この記号 $\sqrt{\ }$ を**根号**という。

例2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

などは無理数ではない。

問1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

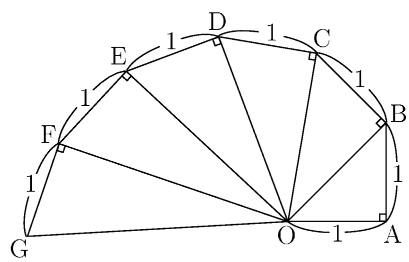
(1) $\sqrt{16}$　　(2) $\sqrt{256}$

(3) $\sqrt{\dfrac{36}{49}}$　　(4) $\sqrt{0.25}$

例3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より

$$(\mathrm{OC})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{BC})^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから OC= $\sqrt{3}$ である。



問2 右図で OD,OE,OF,OG の長さを求めよ。(単位不要)

＜ 平方根2 ＞

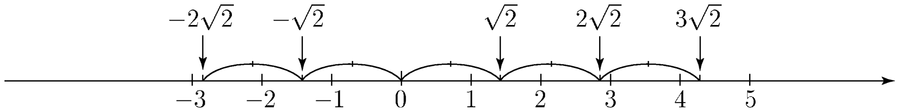
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7320508 \quad , \quad \sqrt{5} \fallingdotseq 2.2360679 \quad , \quad \sqrt{6} \fallingdotseq 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。$3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例1 文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問1 次式を計算せよ。

(1) $(6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$　　(2) $(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$

(3) $3(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$　　(4) $5(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 3(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$

例2 (1) $(-\sqrt{7})^2 \ = \ (\sqrt{7})^2 \ = \ 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} \ = \ \sqrt{49} \ = \ 7$

問2 次を計算せよ。

(1) $(-\sqrt{11})^2$　　(2) $\sqrt{(-5)^2}$　　(3) $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2$　　(4) $\sqrt{(-0.12)^2}$

例3 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その 2 乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問3 次を計算せよ。

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{5} \times \sqrt{7}$　　(3) $\sqrt{4} \times \sqrt{11}$　　(4) $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$

＜平方根3＞

前ページ例 3 から一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a}\times\sqrt{b} \;=\; \sqrt{ab}}$$

が成り立つ。

例 1 (1) $\sqrt{12} \;=\; \sqrt{4\times 3} \;=\; \sqrt{4}\times\sqrt{3} \;=\; 2\times\sqrt{3} \;=\; 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} \;=\; \sqrt{9\times 5} \;=\; \sqrt{9}\times\sqrt{5} \;=\; 3\times\sqrt{5} \;=\; 3\sqrt{5}$

問 1 次の平方根を例 1 のようになおせ。

(1) $\sqrt{18}$ (2) $\sqrt{40}$ (3) $\sqrt{75}$ (4) $\sqrt{80}$ (5) $\sqrt{147}$

例 2 $\sqrt{8}\times\sqrt{18} \;=\; \sqrt{8\times 18} \;=\; \sqrt{144} \;=\; 12$

(別解)

$\sqrt{8}\times\sqrt{18} \;=\; (2\sqrt{2})\times(3\sqrt{2}) \;=\; 6\times(\sqrt{2})^2 \;=\; 6\times 2 \;=\; 12$

問 2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$ (2) $\sqrt{7}\times\sqrt{63}$ (3) $\sqrt{21}\times\sqrt{84}$

例 3 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

より $x=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ よって $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ がなりたつ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;=\; \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。

例 4 $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} \;=\; \sqrt{\dfrac{54}{3}} \;=\; \sqrt{18} \;=\; 3\sqrt{2}$

問 3 次を簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ (2) $\dfrac{\sqrt{405}}{\sqrt{15}}$ (3) $\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

<平方根4>

例 1 $\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 + 2\times\sqrt{5}\times\sqrt{10} + \left(\sqrt{10}\right)^2$

$= 5 + 2\sqrt{50} + 10$

$= 15 + 2\times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}$

(注) ここで文字式の展開式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いた。

問 1 15 ページを参考にして次の計算をせよ。

(1) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$　(3) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

(4) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2$　(5) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$　(6) $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

例 2 (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$, (2) $\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{6\times\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

このように変形することを「分母を**有理化**する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(3) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$　(4) $\dfrac{4}{\sqrt{12}}$　(5) $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

例 3 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1 \quad\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

(1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(3) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

< 数の表示 1 >

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は 60 進法であり、
コンピューターは 2 進法で計算する。ここでは 8 進法を紹介する。
10 進法で 3 桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10 進法の数 (=**10 進数**という）であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し 8 進法で三桁目が 4, 二桁目が 5, 一桁目が 7 である
数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8 進法で表される数を **8 進数**という。$4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = 303$ より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 ① $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

② $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$

③ $(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$

④ $(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$

問 1 次の 8 進数を 10 進数になおせ。

① $(12)_8$　② $(33)_8$　③ $(234)_8$　④ $(707)_8$　⑤ $(2001)_8$

例 2 ① $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

② $215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$ より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の 10 進数を 8 進数になおせ。

① $(21)_{10}$　② $(45)_{10}$　③ $(79)_{10}$　④ $(156)_{10}$

例 3 ① $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{9}{10^2}$

② $(4.57)_8 = 4 + \dfrac{5}{8} + \dfrac{7}{8^2}$

問 3 次の小数を例 3 のように分数で表せ。

① $(3.14)_{10}$　② $(1.5)_8$　③ $(5.73)_8$

< 数の表示 2 >

例題 3 桁の 10 進数で各桁の数の和が 9 の倍数になっているもの、たとえば

$(162)_{10}$, $(414)_{10}$, $(738)_{10}$

等はいずれも 9 の倍数である。一般に 3 桁の 10 進数

$(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$

に対して

$a + b + c = 9$ の倍数

であれば $(abc)_{10}$ は 9 の倍数であることを証明せよ。

(証明) $a + b + c$ は 9 の倍数だから $a + b + c = 9n$(n は自然数) とおく。

$$(abc)_{10} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$$
$$= 9\,(11a + b) + 9n = 9\,(11a + b + n)$$

より $(abc)_{10} = 9 \times (11a + b + n)$ は 9 の倍数になる。(証明終)

問 1 3 桁の 10 進数 $(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ に対して

$a + b + c = 3$ の倍数

であれば $(abc)_{10}$ は 3 の倍数であることを証明せよ。

(証明)

問 2 3 桁の 8 進数 $(abc)_8 = a \times 8^2 + b \times 8 + c$ に対して

$a + b + c = 7$ の倍数

であれば $(abc)_8$ は 7 の倍数であることで証明せよ。

(証明)

＜ 整式 1 ＞

10 進法で 2 桁、3 桁の整数は

2 桁 $\cdots (ab)_{10} = a \times 10 + b$, 3 桁 $\cdots (abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$

となる。一般に x 進法で 2 桁、3 桁の整数は

2 桁 $\cdots (ab)_x = ax + b$, 3 桁 $\cdots (abc)_x = ax^2 + bx + c$

となる。このように x 進法で整数を表す式を「x に関する**整式**」という。

これに対し、$(2.37)_{10} = 2 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を「x に関する**分数式**」という。

問 1 x 進法で 4 桁の整数 $(abcd)_x$ を x の式で表せ。

$(abcd)_x =$

整数は式の形で区別する。

x に関する 1 次式 $\cdots ax + b$ の形

x に関する 2 次式 $\cdots ax^2 + bx + c$ の形

x に関する 3 次式 $\cdots ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

x に関する整式では、x 以外の文字 $(a, b, c, d$ 等$)$ を**定数**という。

ax^3 の a, bx^2 の b, cx の c のように x との積になっている定数を**係数**という。

(注 1) x の整式は "x 進法" よりもっと広い意味で使われる。a, b, c 等の定数は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

(注 2) $2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ のように x の整式は x の次式 (指数) の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順**に並べる」という。

(注 3) 整式の計算 (和, 差, 積 等) は文字式の計算と同様であり、最後に降べきの順に並べる。

例 $(3 + 2x)(4 - x) = 3(4 - x) + 2x(4 - x) = 12 - 3x + 8x - 2x^2 = -2x^2 + 5x + 12$

問 2 次式を計算せよ。

(1) $2(3x - 4x^2 + 1) + 3(x - 5 + 2x^2)$　　(2) $(3x - 1)(4 - 5x)$

< 整式 2 >

例 1 (1) $(3 - x + 2x^2) + (4x + 5 + 3x^2)$

$= (2x^2 - x + 3) + (3x^2 + 4x + 5)$

$= (2x^2 + 3x^2) + (-x + 4x) + (3 + 5)$

$= 5x^2 + 3x + 8$

筆算では

$$\begin{array}{rrrr} & 2x^2 - & x & + 3 \\ +) & 3x^2 + & 4x & + 5 \\ \hline & 5x^2 + & 3x & + 8 \end{array}$$

(2) $(-4x + 3 + 5x^2) - (7 - 2x)$

$= (5x^2 - 4x + 3) - (-2x + 7)$

$= 5x^2 + (-4x - (-2x)) + (3 - 7)$

$= 5x^2 - 2x - 4$

筆算では

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^2 & - 4x & + 3 \\ -) & & - 2x & + 7 \\ \hline & 5x^2 & - 2x & - 4 \end{array}$$

(3) $(2x - 3)(4x + 5)$

$= (2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5$

$= 8x^2 - 12x + 10x - 15$

$= 8x^2 - 2x - 15$

筆算では

$$\begin{array}{rrrrl} & & 2x & - 3 & \\ \times) & & 4x & + 5 & \\ \hline & & 10x & - 15 & \cdots\cdots (2x-3)\times 5 \\ +) & 8x^2 & - 12x & & \cdots\cdots (2x-3)\times 4x \\ \hline & 8x^2 & - 2x & - 15 & \end{array}$$

(注) 整数の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 1 次の計算をせよ。

(1) $(3x - x^2 + 4) + (2x^2 - 1 + 2x)$

(2) $(1 - x^2) - (4 + x^2 - 3x)$

(3) $(x - 3)(2 + x)$

(4) $(4x - 3)(6 - 5x)$

例 2 $(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab$

(注) x の係数 $(a + b)$ は 1 つにまとめる。

例 3 $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x + abc$

問 2 次式を展開せよ。

(1) $(x + a)^2$

(2) $(x - a)^2$

(3) $(x - a)(x + a)$

(4) $(x - a)(x - b)$

(5) $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$

(6) $(x + a)^3$

< 整式の除法 >

例 1　136 を 11 で割ると商が 12 で余り 4 である。
これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

$$\begin{array}{r@{\,}r}
 & 12 \\ \cline{2-2}
11 \,) & 136 \\
 & 11 \\ \cline{2-2}
 & 26 \\
 & 22 \\ \cline{2-2}
 & 4
\end{array}$$

となる。整式の除法も同様で
x^2+3x+6 を $x+1$ で割ると商が
$x+2$ で余りが 4 である。これを式で
書くと

$$x^2+3x+6 = (x+2)(x+1)+4$$

かまたは

$$\frac{x^2+3x+6}{x+1} = x+2+\frac{4}{x+1}$$

となる。

$$\begin{array}{r@{\,}rl}
 & x+2 & \\ \cline{2-2}
x+1 \,) & x^2+3x+6 & \\
 & x^2+\ x & \cdots\ (x+1)\times x \\ \cline{2-2}
 & 2x+6 & \\
 & 2x+2 & \cdots\ (x+1)\times 2 \\ \cline{2-2}
 & 4 &
\end{array}$$

例 2　右の筆算より

$$\frac{4x^3-2x^2+6x-1}{2x+3} = 2x^2-4x+9-\frac{28}{2x+3}$$

$$\begin{array}{r@{\,}rl}
 & 2x^2-4x+9 & \\ \cline{2-2}
2x+3 \,) & 4x^3-2x^2+6x-1 & \\
 & 4x^3+6x^2\qquad\qquad & \cdots\ (2x+3)\times 2x^2 \\ \cline{2-2}
 & -8x^2+6x\qquad & \\
 & -8x^2-12x\qquad & \cdots\ (2x+3)\times(-4x) \\ \cline{2-2}
 & 18x-1 & \\
 & 18x+27 & \cdots\ (2x+3)\times 9 \\ \cline{2-2}
 & -28 &
\end{array}$$

問　次の割り算を実行し、例の分数式の
右辺の形にせよ。

(1) $\dfrac{x^2+3x}{x+1}$

(2) $\dfrac{x^2+3x+5}{x-2}$

(3) $\dfrac{2x^2-3x-1}{x-1}$

(4) $\dfrac{x^3-5x^2+7x-2}{x-3}$

＜方程式と恒等式＞

文字 x に関する等式には 2 種類ある。

例 1 (1) 等式 $3x-10=2$ を満たす数 x は $x=4$ だけである。

(2) 等式 $x^2-9=0$ を満たす数 x は $x=3$ または $x=-3$ の 2 個しかない。

例 2 (1) 等式 $2(x-1)+3(x+4)=5x+10$ は x がどんな数でも成り立つ。

(2) 等式 $(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例 1 のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。例 1 の (1) を未知数 x に関する 1 次方程式、例 1 の (2) を未知数 x に関する 2 次方程式という。

これに対し、例 2 は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を（常に成り立つ等式という意味で）**恒等式**（こうとう）という。例 2 の (2) のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問 1 例 2 の (2) を確かめたい。以下の x の値を代入して、$(x+2)\times(x+3)$ と x^2+5x+6 の式の値をそれぞれ求めよ。

(1) $x=0$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(2) $x=1$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(3) $x=2$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(4) $x=3$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

(5) $x=4$ のとき $(x+2)(x+3)=$, $x^2+5x+6=$

問 2 次の式を展開せよ。

(1) $(x+\alpha)^2$　(2) $(x-\alpha)^2$

(3) $(x+\alpha)(x-\alpha)$　(4) $(x+\alpha)(x+\beta)$

(5) $(x-\alpha)(x-\beta)$　(6) $(x+\alpha)(x-\beta)$

問 3 次の等式は恒等式か方程式か判定せよ。

(1) $3x-1=2(2x-1)+x$　(2) $3(x+1)-1=2(x+1)+x$

(3) $(x+3)(x+1)=x^2+4x+3$　(4) $(x-2)(x-1)=x^2-4x-3$

< 2次式の因数分解 1 >

例 169 を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10 + 3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1 + 3)^2$$
$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2 + 3)^2$$
$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3 + 3)^2$$
$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4 + 3)^2$$
$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5 + 3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \qquad \cdots\cdots(1)$$

が成り立つ。すなわち (1) は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の (1) 式のように x を使って表せ。

(1)
$$1^2 + 4 \times 1 + 4 = (1 + 2)^2$$
$$2^2 + 4 \times 2 + 4 = (2 + 2)^2$$
$$3^2 + 4 \times 3 + 4 = (3 + 2)^2$$
$$4^2 + 4 \times 4 + 4 = (4 + 2)^2$$

(2)
$$2^2 - 10 \times 2 + 25 = (2 - 5)^2$$
$$4^2 - 10 \times 4 + 25 = (4 - 5)^2$$
$$6^2 - 10 \times 6 + 25 = (6 - 5)^2$$
$$8^2 - 10 \times 8 + 25 = (8 - 5)^2$$

(3)
$$5^2 - 9 = (5 + 3) \times (5 - 3)$$
$$6^2 - 9 = (6 + 3) \times (6 - 3)$$
$$7^2 - 9 = (7 + 3) \times (7 - 3)$$
$$8^2 - 9 = (8 + 3) \times (8 - 3)$$

(4)
$$1^2+5\times1+6 = (1+2)\times(1+3)$$
$$2^2+5\times2+6 = (2+2)\times(2+3)$$
$$3^2+5\times3+6 = (3+2)\times(3+3)$$
$$4^2+5\times4+6 = (4+2)\times(4+3)$$

＜ 2次式の因数分解 2 ＞

前ページより
$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$
$$x^2+4x+4=(x+2)^2$$
$$x^2-10x+25=(x-5)^2$$
$$x^2-9=(x+3)(x-3)$$
$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。
たとえば、最後の式は

$$\begin{aligned}\text{右辺} = (x+2)(x+3) &= (x+2)\times x+(x+2)\times 3\\ &= x^2+2x+3x+6\\ &= x^2+5x+6\\ &= \text{左辺}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & x+2 & \\ \times) & x+3 & \\ \hline & 3x+6 & \cdots\ (x+2)\times 3\\ +) & x^2+2x & \cdots\ (x+2)\times x\\ \hline & x^2+5x+6 & \end{array}$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x=10$ のときは

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (10+2)(10+3)\\ &= (10+2)\times 10+(10+2)\times 3\\ &= 10^2+2\times 10+3\times 10+2\times 3\\ &= 10^2+5\times 10+6=\text{左辺}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrl} & 12 & \\ \times) & 13 & \\ \hline & 36 & \cdots\ 12\times 3\\ +) & 120 & \cdots\ 12\times 10\\ \hline & 156 & \end{array}$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。
この式を

$$\text{左辺}=x^2+(2+3)x+2\times 3=(x+2)(x+3)=\text{右辺}$$

と考え、2 と 3 のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。
すなわち

$$\boxed{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 21 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

(1) $x^2+2\alpha x+\alpha^2$

(2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

(3) $x^2-\alpha^2$

(4) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

(5) $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta$

＜ 2次式の因数分解3 ＞

前ページの結果から任意の数 $\alpha,\ \beta$ に対して次の因数分解の公式が得られた。

(Ⅰ)	$x^2+2\alpha x+\alpha^2=(x+\alpha)^2$
(Ⅱ)	$x^2-2\alpha x+\alpha^2=(x-\alpha)^2$
(Ⅲ)	$x^2-\alpha^2=(x+\alpha)(x-\alpha)$
(Ⅳ)	$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

例 1 上の公式 (Ⅰ), (Ⅱ) の例をあげる。

(1) $x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$

(2) $x^2-12x+36=x^2-2\times6\times x+6^2=(x-6)^2$

例 2 上の公式 (Ⅲ) の例をあげる。

(1) $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

(2) $x^2-3=x^2-(\sqrt{3})^2=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

例 3 上の公式 (Ⅳ) の例をあげる。

(1) $x^2+4x+3=x^2+(3+1)x+3\times1=(x+3)(x+1)$

(2) $x^2+7x+10=x^2+(5+2)x+5\times2=(x+5)(x+2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+6x+9

(2) $x^2-10x+25$

(3) $x^2+12x+36$

(4) x^2-9

(5) x^2-8

(6) x^2-1

(7) x^2+3x+2

(8) x^2+5x+6

(9) $x^2+7x+10$

(10) $x^2+7x+12$

＜2次式の因数分解4＞

前ページの (IV) の式

$$\boxed{\text{(IV)}\quad x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)}$$

の β のかわりに $-\beta$ を代入すると

$$\boxed{\text{(V)}\quad x^2+(\alpha-\beta)x+\alpha(-\beta)=(x+\alpha)(x-\beta)}$$

が得られ、さらに α のかわりに $-\alpha$ を代入すると

$$\boxed{\text{(VI)}\quad x^2+(-\alpha-\beta)x+(-\alpha)(-\beta)=(x-\alpha)(x-\beta)}$$

が得られる。

例1 (V) の例をあげる。

(1) $x^2+3x-10=x^2+(5-2)x+5\times(-2)=(x+5)(x-2)$

(2) $x^2+x-20=x^2+(5-4)x+5\times(-4)=(x+5)(x-4)$

(3) $x^2-2x-15=x^2+(3-5)x+3\times(-5)=(x+3)(x-5)$

(4) $x^2-x-6=x^2+(2-3)x+2\times(-3)=(x+2)(x-3)$

例2 (VI) の例をあげる。

(1) $x^2-7x+12=x^2+(-3-4)x+(-3)\times(-4)=(x-3)(x-4)$

(2) $x^2-7x+6=x^2+(-6-1)x+(-6)\times(-1)=(x-6)(x-1)$

(3) $x^2-5x+6=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)=(x-3)(x-2)$

問 次式を因数分解せよ。

(1) x^2+5x-6

(2) x^2+x-6

(3) $x^2+2x-15$

(4) x^2-3x-4

(5) x^2-4x-5

(6) x^2-2x-8

(7) x^2-6x+5

(8) x^2-4x+3

(9) x^2-9x+8

(10) x^2-6x+8

＜ 2次方程式1 ＞

「x の 2 次式 $=0$」の形の式を **2 次方程式** という。2 次方程式をみたす数 x を 2 次方程式の **解** という。2 次方程式の解は通常は 2 個ある。

例 1 $x^2-5=0$ は $x^2=5$ と同じである。

$$\left(\sqrt{5}\right)^2=5 \quad , \quad \left(-\sqrt{5}\right)^2=5$$

より解は $\underline{x=\sqrt{5} \ \text{ または } \ x=-\sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x=\pm\sqrt{5}}$ と書く。

例 2 $(x-1)^2-5=0$ は $(x-1)^2=5$ と同じである。

$$(x-1)^2=5 \quad \Rightarrow \quad x-1=\pm\sqrt{5}$$

より解は $\underline{x=1+\sqrt{5} \ \text{ または } \ x=1-\sqrt{5}}$ である。これを略して $\underline{x=1\pm\sqrt{5}}$ と書く。

例 3 $(x-1)^2-4=0$ は $(x-1)^2=4$ と同じである。

$$(x-1)^2=4 \quad \Rightarrow \quad x-1=\pm 2$$
$$x-1=+2 \quad \text{のとき} \quad x=1+2=3$$
$$x-1=-2 \quad \text{のとき} \quad x=1-2=-1$$

より解は $\underline{x=3 \ \text{ または } \ x=-1}$ である。これを略して $\underline{x=3 \ \text{ または } \ -1}$ と書く。

問 次の 2 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^2-4=0$

(2) $x^2-8=0$

(3) $(x-2)^2-5=0$

(4) $3-(x+2)^2=0$

(5) $(x-3)^2-9=0$

(6) $4-(x+1)^2=0$

＜ 2次方程式2 ＞

例1 $x^2+6x+5=0 \implies x^2+6x=-5$

$$\implies x^2+2\times 3\times x=-5 \implies x^2+2\times 3\times x+3^2=3^2-5$$

$$\implies (x+3)^2=4 \implies x+3=\pm 2$$

$$\implies x=-3+2 \quad \text{または} \quad x=-3-2 \implies \underline{(\text{答})\ \ x=-1 \quad \text{または} \quad -5}$$

(注) $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$ の形になるよう式変形する。

例2 $x^2-5x-3=0 \implies x^2-5x=3$

$$\implies x^2-2\times\frac{5}{2}x=3 \implies x^2-2\times\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+3$$

$$\implies \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{37}{4} \implies x-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{37}{4}}$$

$$\implies x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} \implies x-\frac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$$

$$\implies \underline{(\text{答})\ \ x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}}$$

(注) $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$ の形になるよう式変形する。

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2+6x+8=0$

(2) $x^2-10x+16=0$

(3) $x^2+8x-11=0$

(4) $x^2-4x+1=0$

(5) $x^2-3x+1=0$

(6) $x^2+5x-2=0$

＜ 2 次方程式 3 ＞

例 2 次方程式 $3x^2+11x+5=0$ を次のように解く。

$$3x^2+11x+5=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{11}{3}x+\frac{5}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{11}{3}x=-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\quad x^2+2\times\frac{11}{2\times 3}x=-\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad x^2+2\times\frac{11}{2\times 3}x+\left(\frac{11}{2\times 3}\right)^2=\left(\frac{11}{2\times 3}\right)^2-\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\quad \left(x+\frac{11}{2\times 3}\right)^2=\left(\frac{11}{2\times 3}\right)^2-\frac{5}{3} \quad\Rightarrow\quad \left(x+\frac{11}{2\times 3}\right)^2=\frac{11^2-4\times 3\times 5}{4\times 3^2}$$

$$\Rightarrow\quad x+\frac{11}{2\times 3}=\pm\sqrt{\frac{11^2-4\times 3\times 5}{4\times 3^2}} \quad\Rightarrow\quad x=-\frac{11}{2\times 3}\pm\frac{\sqrt{11^2-4\times 3\times 5}}{2\times 3}$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{-11\pm\sqrt{11^2-4\times 3\times 5}}{2\times 3}=\frac{-11\pm\sqrt{61}}{6}$$

問 $a\neq 0$, $b^2-4ac\geqq 0$ のとき 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を例を参考にして導け。(途中の式変形を書くこと)

(問) $ax^2+bx+c=0$

(答) $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

＜ 2 次方程式と因数分解 1 ＞

一般の係数 $a,\ b,\ c$ に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解の公式は前ページより

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

である。

例 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

の解を求める。$a = 1,\ b = -5,\ c = 6$ を解の公式にあてはめると

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$\dfrac{5+1}{2} = 3,\quad \dfrac{5-1}{2} = 2$ より (答) $x = 3$ または $x = 2$

(別解)

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

と因数分解されるから

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \times (x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ または } x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 2 \text{ または } x = 3}$$

問 次の 2 次方程式を解け。

(1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(2) $x^2 - 8x + 7 = 0$

(3) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(4) $x^2 + x - 12 = 0$

(5) $x^2 - x - 2 = 0$

(6) $x^2 + 5x + 4 = 0$

(7) $x^2 - 5 = 0$

(8) $x^2 + x - 1 = 0$

＜ 2 次方程式と因数分解 2 ＞

前ページの例のように 2 次方程式の解と因数分解の関係は

$$x^2+\square x+\triangle=0 \text{ の解が } \alpha \text{ と } \beta \iff x^2+\square x+\triangle=(x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。

例 1 $x^2+2x-3=0$ の解は $\underline{x=-3 \ \text{と} \ x=1}$ であるから

$$x^2+2x-3=\big(x-(-3)\big)(x-1)=(x+3)(x-1)$$

と因数分解できる。

例 2 $x^2-x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2-x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問 1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

例 3 $2x^2+4x-6=2\left(x^2+2x-3\right)=2(x+3)(x-1)$

この式は例 1 の結果を使った。

(注) $2x^2+4x-6=0$ の解と $x^2+2x-3=0$ の解は同じ。

一般に

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \ \text{ の解が } \ x=\alpha \ \text{ または } \ x=\beta} \cdots(1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)} \cdots(2)$$

と因数分解できる。逆に (2) であれば (1) がわかる。

問 2 次式を因数分解せよ。

(1) x^2-2x-3

(2) x^2+3x-4

(3) x^2-3

(4) x^2-x-4

(5) $2x^2-6x-20$

(6) $3x^2+3x-18$

(7) $9x^2+6x+1$

(8) $3x^2-5x-2$

＜ 因数定理 ＞

例 1 2 次式 $f(x) = x^2 - 7x + 10$ を因数分解したい。$x = 2$ を代入すると

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 2) \times (x + \square)$$

の形であれば $f(2) = 0$ となる。そこで $x - 2$ で割ると右の筆算より

$$\begin{array}{r} x - 5 \\ x - 2 \,\big)\, \overline{x^2 - 7x + 10} \\ \underline{x^2 - 2x } \\ -5x + 10 \\ \underline{-5x + 10} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = x - 5$$

となるから

$$\underline{f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \times (x - 5)}$$

例 2 3 次式 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ を因数分解したい。$x = 1$ を代入する。

$$f(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 23 \times 1 - 15 = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + \triangle\, x + \square)$$

の形であれば $f(1) = 0$ となる。そこで $x - 1$ で割ると右の筆

$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 15 \\ x - 1 \,\big)\, \overline{x^3 - 9x^2 + 23x - 15} \\ \underline{x^3 - x^2 } \\ -8x^2 + 23x \\ \underline{-8x^2 + 8x } \\ 15x - 15 \\ \underline{15x - 15} \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x - 1} = x^2 - 8x + 15$$

より

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1) \times (x^2 - 8x + 15)$$

となる。2 次式 $x^2 - 8x + 15$ をさらに因数分解すると $(x - 3)(x - 5)$ となるから

$$\underline{x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1)(x - 3)(x - 5)}$$

一般に関数 $f(x)$ が n 次の整式のとき、$x = a$ を代入して $f(a) = 0$ となれば $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる。すなわち

$$\boxed{f(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x - a) \times \Big((n-1)\ \text{次の整式}\Big)} \qquad \text{(因数定理)}$$

と表される。これを**因数定理**という。

問 次の 3 次式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(2) $x^3 - 6x + 5$

＜ 3 次方程式 ＞

例 1 3 次方程式

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

を考える。前ページより因数分解すると

$$(x-1)(x-3)(x-5) = 0$$

より (1) の解は $\underline{x = 1 \text{ または } x = 3 \text{ または } x = 5}$ である。

例 2 3 次方程式

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \qquad \cdots \qquad (2)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-1)(x-2)^2 = 0$$

より (2) の解は $\underline{x = 1 \text{ または } x = 2}$ である。

$$\begin{array}{r|r}
 & x^2 - 4x + 4 \\ \hline
x - 1 & x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \\
 & x^3 - x^2 \qquad\qquad \\ \hline
 & -4x^2 + 8x \quad\;\; \\
 & -4x^2 + 4x \quad\;\; \\ \hline
 & 4x - 4 \\
 & 4x - 4 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

例 3 3 次方程式

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \qquad \cdots \qquad (3)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-2)^3 = 0$$

より (3) の解は $\underline{x = 2}$ である。

$$\begin{array}{r|r}
 & x^2 - 4x + 4 \\ \hline
x - 2 & x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \\
 & x^3 - 2x^2 \qquad\qquad \\ \hline
 & -4x^2 + 12x \quad\;\; \\
 & -4x^2 + 8x \quad\;\; \\ \hline
 & 4x - 8 \\
 & 4x - 8 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

問 次の 3 次方程式の解を求めよ。

(1) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

(2) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$

(3) $x^3 - 3x + 2 = 0$

(4) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

＜ 数列 ＞

ある規則に従って並んでいる数の列を数列という。数列の各数を項といい、最初の項から順に、**第 1 項、第 2 項、・・・、第 n 項**と呼ぶ。特に、第 1 項を**初項**という。

例 次の数列

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$$

は初項が 1、第 2 項が 4、第 3 項が 9 であるが、これを

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \cdots$$

と書き直すと、第 n 項は n^2 であることがわかる。

第 n 項が n についての式で書けるとき、これを**一般項**という。
第 n 項が a_n である数列を $\{a_n\}$ のように表す。

例題 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 2n - 4$　　(2) $a_n = 3 \times 2^n$

(解) (1) $a_1 = 2 \times 1 - 4 = -2,$　　$a_2 = 2 \times 2 - 4 = 0$
$a_3 = 2 \times 3 - 4 = 2,$　　$a_4 = 2 \times 4 - 4 = 4$

(2) $a_1 = 3 \times 2^1 = 6,$　　$a_2 = 3 \times 2^2 = 12$
$a_3 = 3 \times 2^3 = 24,$　　$a_4 = 3 \times 2^4 = 48$

問 数列 $\{a_n\}$ が以下の場合に、初項から第 4 項までを求めよ。

(1) $a_n = 3n - 5$

(2) $a_n = 3n^2$

(3) $a_n = (-1)^n$

(4) $a_n = \dfrac{1}{9} \times 3^n$

(5) $a_n = 8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

< 等差数列 >

数列の各項と 1 つ前の項との差が一定の数の場合に、その数列を
等差数列といい、前の項との差を**公差**という。

例 1 奇数列

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots$$

は初項 1、公差 2 の等差数列である。

例 2 数列

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ \cdots$$

は初項 4、公差 3 の等差数列である。一般項を a_n とすると

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = 13, \quad a_5 = 16$$

であるが、

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 + 3 \\ a_3 &= 4 + 3 \times 2 \\ a_4 &= 4 + 3 \times 3 \\ a_5 &= 4 + 3 \times 4 \end{aligned}$$

と考えると、一般項は $a_n = 4 + 3 \times (n - 1) = 3n + 1$ である。

問 1 初項が a、公差が d の等差数列

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問 2 例 1 の一般項 a_n を求めよ。

問 3 等差数列

$$1, \quad 8, \quad 15, \quad 22, \quad 29, \quad 36,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

＜ 等比数列 1 ＞

数列の各項と一つ前の項との比が一定の数のとき、その数列を**等比数列**といい、前の項との比を**公比**という。

例 1　数列

$$5\ ,\ 10\ ,\ 20\ ,\ 40\ ,\ 80\ ,\ 160\ ,\ \cdots$$

は、前の項を 2 倍してできる数列であるから、公比が 2 , 初項が 5 の等比数列である。

例 2　数列

$$4\ ,\ 2\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{8}\ ,\ \cdots$$

は初項が 4 , 公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

問 1　次の等比数列の初項と公比を求めよ。

(1)　$1\ ,\ 3\ ,\ 9\ ,\ 27\ ,\ 81\ ,\ \cdots$

(2)　$256\ ,\ 64\ ,\ 16\ ,\ 4\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(3)　$\frac{1}{9}\ ,\ -\frac{1}{3}\ ,\ 1\ ,\ -3\ ,\ 9\ ,\ \cdots$

(4)　$-1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ 1\ ,\ -1\ ,\ \cdots$

問 2　次の数列が等比数列になるように $\boxed{}$ に適当な数を入れよ。

(1)　$2\ ,\ 6\ ,\ \boxed{}\ ,\ 54\ ,\ \boxed{}$

(2)　$18\ ,\ -6\ ,\ \boxed{}\ ,\ \boxed{}\ ,\ \frac{2}{9}$

＜ 等比数列2 ＞

例 数列

$$3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48\ ,\ 96\ ,\ \cdots$$

は初項 3、公比 2 の等比数列で、一般項を a_n とすると、

$a_1 = 3,\quad a_2 = 3 \times 2,\quad a_3 = 3 \times 2^2,\quad a_4 = 3 \times 2^3,\quad a_5 = 3 \times 2^4,\quad \cdots$

であるから、

$$a_n = 3 \times 2^{(n-1)}$$

になる。

(注) 次のページで説明するが、$2^0 = 1$(ゼロ乗 $= 1$) と約束する。
一般の数 r に対し $\boxed{r^0 = 1}$ と定める。
このように定めると、上の例の場合 $n = 1$ のとき $a_1 = 3 \times 2^0 = 3$
となって、一般項 a_n の式が全ての自然数 n に対して成立する。

問1 初項 a, 公比 r の等比数列

$$a\ ,\ ar\ ,\ ar^2\ ,\ ar^3\ ,\ ar^4\ ,\ \cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

問2 次の等比数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ \cdots$

(2) $4\ ,\ 12\ ,\ 36\ ,\ 108\ ,\ 324\ ,\ \cdots$

(3) $81\ ,\ 27\ ,\ 9\ ,\ 3\ ,\ 1\ ,\ \cdots$

(4) $8\ ,\ -4\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ \dfrac{1}{2}\ ,\ \cdots$

< 整数指数 >

例 1 自然数 n と m に対し、$n > m$ ならば

(∗) $\boxed{2^n \div 2^m = 2^{n-m}}$

が成り立つ。今 $n = m$ のとき (∗) の左辺は 1 であり、右辺は 2^0 となる。そこで

$\boxed{2^0 = 1}$ (ゼロ乗=1)

と定めることにする。(∗) 式で $n = 0$ のとき左辺は $\dfrac{1}{2^m}$ であり、
右辺は 2^{-m} であるから

$$\boxed{2^{-m} = \frac{1}{2^m}}$$

と定めると、全ての整数 n と m に対して (∗) 式が成り立つ。

一般に正の数 a と自然数 m に対し

$$\boxed{a^0 = 1 \ (\text{ゼロ乗=1}) \quad , \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

と定めることにする。このように決めると全ての整数 n と m に対し

$$\boxed{a^n \div a^m = a^{n-m}}$$

が成り立つ。

例 2 $5^0 = 1 \quad , \quad 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$$3^5 \times 9^{-2} = 3^5 \times \frac{1}{9^2} = \frac{3^5}{3^4} = 3$$

$$(2^3)^{-2} = \frac{1}{(2^3)^2} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

問 次の値を求めよ。

(1) 2^0

(2) 1^{-1}

(3) 2^{-2}

(4) 3^{-3}

(5) 6×4^{-3}

(6) $3^6 \times 27^{-2}$

(7) $(2^2)^{-1}$

(8) $(3^{-1})^2$

(9) $(5^{-1})^{-2}$

＜累乗根 1 ＞

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m = 1$ のときは $\dfrac{n}{1} = n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。

$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例 1 面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2 = 2}$ である。

このxは無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の**2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x = \sqrt{2}}$ と書く。

例 2 体積が 2 である立方体のいっぺんの長さを x とすると $\boxed{x^3 = 2}$ である。

このxは無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の**3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x = \sqrt[3]{2}}$ と書く。

例 3 $x = \sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4 = 2}$ である。

x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 の**4 乗根**といい $\boxed{x = \sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して、n 乗すると a になる正の数を x とする。

つまり $\boxed{x^n = a}$ $(x > 0)$ である。この x を a の***n* 乗根**といい $\boxed{x = \sqrt[n]{a}}$ と書く。

平方根、立方根、n 乗根等をまとめて **累乗根**（るいじょうこん） という。

また記号 $\sqrt{}$、$\sqrt[3]{}$、$\sqrt[n]{}$ をまとめて**根号**という。

(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$ と書く。

例 4 累乗根は常に無理数とは限らない。たとえば

$$\sqrt{49} = 7, \quad \sqrt[3]{0.125} = 0.5, \quad \sqrt[4]{81} = 3, \quad \sqrt[5]{32} = 2$$

は無理数ではない。

問 次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{169}$　　(2) $\sqrt[3]{8}$　　(3) $\sqrt[3]{125}$

(4) $\sqrt[4]{256}$　　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$　　(6) $\sqrt[5]{3125}$

＜ 累乗根2 ＞

例1 $\sqrt[3]{2}$ は3乗して2になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ がなりたつ。

例2 $x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$

より $x = \sqrt[3]{10}$ つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ がなりたつ。

例3 $y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ がなりたつ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ がなりたつ。

(注) $\sqrt[n]{}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または0(ゼロ)) がはいる。

負の数は根号の中に入れない。

例4 (1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{15}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

＜ 累乗根3 ＞

例 1 (1) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8 \times 5} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{5} = 2 \times \sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \times 2} = \sqrt[4]{2^4} \times \sqrt[4]{2} = 2 \times \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{54}$　(2) $\sqrt[4]{112}$　(3) $\sqrt[5]{64}$

例 2 $x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3 = \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$

$$= \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 \times \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5 \times 5 = 5^2$$

よって $x^3 = 5^2$ より $x = \sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x = \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 = \sqrt[3]{5^2}$$

がなりたつ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式がなりたつ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

例 3 (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(5^2\right)^3} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

(2) $\sqrt[3]{8^4} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4 = 16$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^2$　(2) $\left(\sqrt[9]{27}\right)^3$

(3) $\sqrt[4]{16^2}$　(4) $\sqrt[6]{25^3}$