高知工科大学

基礎数学ワークブック

（2002年度版）

Series **A**

$No.$ **4**

内容

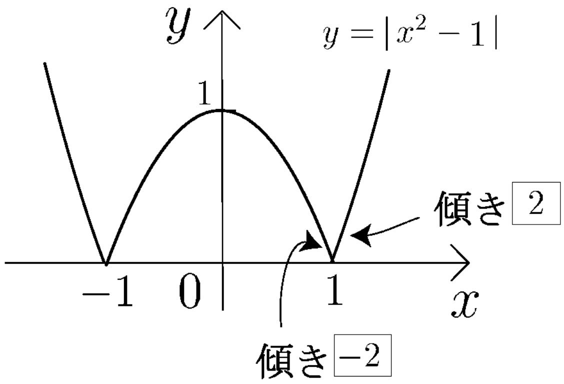
◎　二項定理

◎　数列の極限

◎　関数の極限

◎　三角関数の導関数

◎　対数関数の導関数



電子・光システム工学科

井上　昌昭　著

＜等差数列の和＞

例題　1 から 100 までの和を求めよ。

(解)　$S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ を逆に並べて、加えると 101 が 100 個できる。

$$\begin{array}{rrl} & S = & 1 + \quad 2 + \cdots + \quad 99 + 100 \\ +) & S = & 100 + \quad 99 + \cdots + \quad 2 + \quad 1 \\ \hline & 2S = & 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 = 101 \times 100 \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{101 \times 100}{2} = 5050$　である。

問 1　1 から 1000 までの和

$$S = 1 + 2 + \cdots + 999 + 1000$$

を求めよ。

問 2　1 から n までの和

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

を求めよ。

問 3　偶数列の第 50 項までの和

$$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 96 + 98 + 100$$

を求めよ。

問 4　奇数列の第 50 項までの和

$$S = 1 + 3 + 5 + \cdots + 95 + 97 + 99$$

を求めよ。

< 等比数列の和 >

例題　初項 5、公比 3 の等比数列の第 100 項までの和

$$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99}$$

を求めよ。

(解)S に公比 3 をかけて、S から引くと、最初の項と最後の項が残る。

$$\begin{array}{rcl} S & = & 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots\cdots + 5 \times 3^{98} + 5 \times 3^{99} \\ -)3S & = & \qquad 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots\cdots \ + 5 \times 3^{99} + 5 \times 3^{100} \\ \hline -2S & = & 5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \times 3^{100} \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{5 - 5 \times 3^{100}}{-2} = \dfrac{5(3^{100} - 1)}{2}$

問 1　例題と同じ数列で、第 n 項までの和
$S = 5 + 5 \times 3 + 5 \times 3^2 + \cdots + 5 \times 3^{n-2} + 5 \times 3^{n-1}$
を求めよ。

問 2　初項 a, 公比 r の等比数列の第 n 項までの和
$S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$
を求めよ。ただし $r \neq 1$ とする。

問 3　次の数列の和
$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1}$
を求めよ。

問 4　次の数列の和

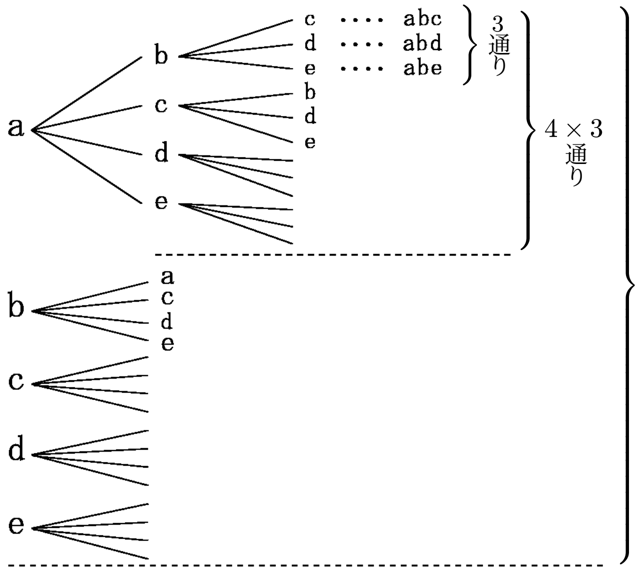
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

を求めよ。

＜ 順列 ＞

例 1　5 個のアルファベット a,b,c,d,e から 3 個えらんで 1 つの単語を作る。
3 文字で表される単語は何通りできるか?　(ただし aab のように同じ文字を 2 回以上は使わない。)

(解)　1 文字目　2 文字目　3 文字目　単語

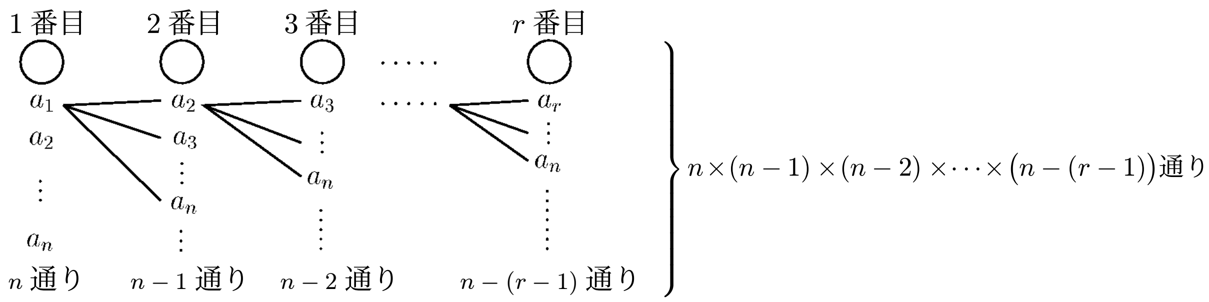


左の図 (樹形図という) から 1 文字目が 5 通り、2 文字目が 4 通り、3 文字目が 3 通りだから

(答)　$5 \times 4 \times 3 = 60$ (通り)

(注)　abc, abd などの単語を 5 個のものから 3 個とり出して一列に並べた**順列**という。この場合順列の総数は $5 \times 4 \times 3$ である。

一般に n 個の文字 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ から r 個とり出して一列に並べた順列の総数を ${}_nP_r$ とすると、総数 ${}_nP_r$ は r 個の積で表される。



図より

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}$$
(n 個から r 個とった**順列**の総数)

また ${}_nP_n$ を ***n* の階乗**といい

$$\boxed{n! = {}_nP_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$
(**階乗**)

という記号で表す。

例 2　${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$,　${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4$,　$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$,　$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

問 1　(1) ${}_{10}P_3 =$　　　　, (2) ${}_6P_4 =$　　　　, (3) $5! =$　　　　, (4) $6! =$

問 2　1, 2, 3, 4 の 4 個の数学を使って 3 桁の数を作る。以下の場合に 3 桁の数は何通りできるか?
(1) 同じ数字は 1 回しか使えない場合 (123〜432)　　(2) 同じ数字を何回使ってもよい場合 (111〜444)

＜組合せ 1＞

例 1　5 個のアルファベット a, b, c, d, e から 3 個えらんで 1 つの組を作る。このとき
$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,e\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,d,e\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\}$, $\{c,d,e\}$
の計 10 組できる。一方並べる順も考えると以下のように 60 通りできる。

$$\underbrace{\left.\begin{array}{cccccccccc} abc, & abd, & abe, & acd, & ace, & ade, & bcd, & bce, & bde, & cde \\ acb, & adb, & aeb, & adc, & aec, & aed, & bdc, & bec, & bed, & ced \\ bac, & bad, & bae, & cad, & cae, & dae, & cbd, & cbe, & dbe, & dce \\ bca, & bda, & bea, & cda, & cea, & dea, & cdb, & ceb, & deb, & dec \\ cab, & dab, & eab, & dac, & eac, & ead, & dbc, & ebc, & ebd, & ecd \\ cba, & dba, & eba, & dca, & eca, & eda, & dcb, & ecb, & edb, & edc \end{array}\right\} 3! = 6\text{ 通り}}_{}$$

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{通り})$$

従って並べる順を考えない組の総数は

$$\frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10(\text{組})$$

になる。

一般に n 個のものから r 個とり出して 1 つの組にしたものの総数を ${}_nC_r$ と書くと

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 1}} \quad \left(\begin{array}{l} n\text{ 個のものから } r \text{ 個とった} \\ \text{組合せの総数} \end{array}\right)$$

となる。

問 1　10 人から 4 人のリレー走者を選ぶ。

(1) 走る順番を考えると何通りできるか？

(2) 走る順を考えないで、ただ 4 人の組を作るときは何組できるか？

組合せの意味から常に $\boxed{{}_nC_0 = {}_nC_n = 1}$ である。

問 2　次の値を求めよ。

(1) ${}_1C_0 =$ 　　　, ${}_1C_1 =$

(2) ${}_2C_0 =$ 　　　, ${}_2C_1 =$ 　　　, ${}_2C_2 =$

(3) ${}_3C_0 =$ 　　　, ${}_3C_1 =$ 　　　, ${}_3C_2 =$ 　　　, ${}_3C_3 =$

(4) ${}_4C_0 =$ 　　　, ${}_4C_1 =$ 　　　, ${}_4C_2 =$ 　　　, ${}_4C_3 =$ 　　　, ${}_4C_4 =$

(5) ${}_5C_0 =$ 　　　, ${}_5C_1 =$ 　　　, ${}_5C_2 =$ 　　　, ${}_5C_3 =$ 　　　, ${}_5C_4 =$ 　　　, ${}_5C_5 =$

＜組合せ 2＞

例題 7 を 3 個、8 を 2 個使って 5 桁の数字を作る。全部で何通りあるか。

解 1 桁目から 5 桁目までの場所に 7 を 3 個、8 を 2 個おく場合の数を求めればよい。

5 桁目	4 桁目	3 桁目	2 桁目	1 桁目

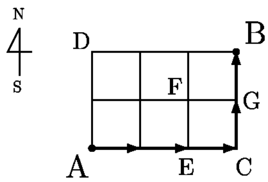
5 桁目	4 桁目	3 桁目	2 桁目	1 桁目	8 の場所
7	7	7	8	8	⋯⋯ $\{1,2\}$
7	7	8	7	8	⋯⋯ $\{1,3\}$
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	
8	8	7	7	7	⋯⋯ $\{4,5\}$

この場合は 8 を 2 個おく場所を決めれば (残りは 7 がはいるので) 良い。
すなわち 1 から 5 までの中から (8 をおく場所) 2 個をえらぶ。
$\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\cdots$, $\{4,5\}$ は 5 個の数字から 2 個とった組合せだから

(答) ${}_5C_2 = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} = 10$ (通り)

問 1 以下の場合の数を求めよ。
(1) 7 を 2 個、8 を 3 個使って 5 桁の数字を作る。(2) 7 を 3 個、8 を 3 個使って 6 桁の数字を作る。

例 図 1 のような道がある町で A 地点から B 地点へいたる最短経路は何通りあるかを考える。
A から B へ行くには東へ 3 区画、北へ 2 区画進まねばならない。その経路は 5 枚のカード $\boxed{東}$ $\boxed{東}$ $\boxed{東}$ $\boxed{北}$ $\boxed{北}$ の並びで表される。



(図1)

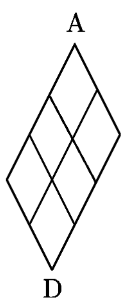
${}_5C_2$ 通り

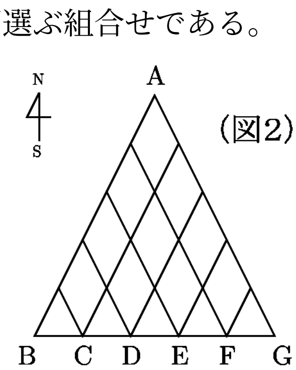
東	東	東	北	北	⋯ A→C→B の道順
東	東	北	東	北	⋯ A→E→F→G→B の道順
		⋮			
北	北	東	東	東	⋯ A→D→B の道順

5 枚のカードの並ぶ場所 $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ ($\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$) の中から $\boxed{北}$ の場所を 2 ヶ所選ぶ場合の数である。つまり $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ の中から 2 個選ぶ組合せである。
よって最短距離は ${}_5C_2 = 10$ 通り。

問 2 図 2 のような道で A 地点から出発し、南へ進む。B から G の各地点へいたる最短経路は何通りあるか。それぞれの地点について計算し、B から G の記号の下に “ 何通り” かを記せ。

(ヒント:D へ行く場合は左図の経路を考える)





(図2)

＜ 二項定理 1 ＞

$(a+b)^n$ の展開式を計算する。

(パスカルの三角形)

$n=0$ ………………… $(a+b)^0 = 1$ ………………………………… 1

$n=1$ ……………… $(a+b)^1 = a \ + \ b$ ………………………… 1　1　　(図1)

$n=2$ ………… $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ …………………… 1　2　1

$n=3$ ……… $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ……………… 1　3　3　1

$n=4$ …… $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ ……… 1　4　6　4　1

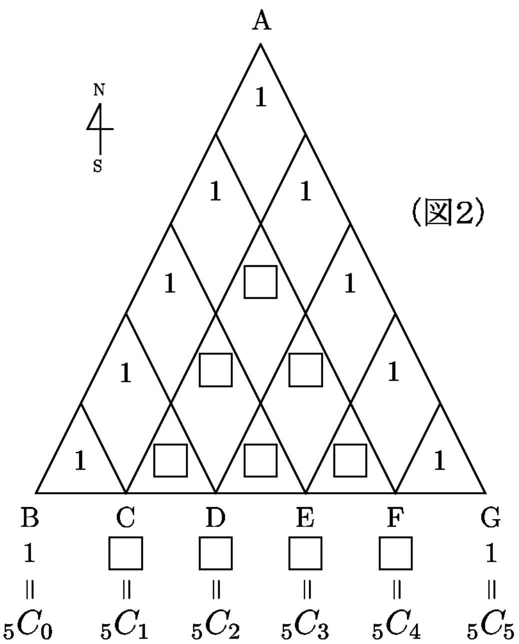
$n=5$ … $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ … 1　5　10　10　5　1

図 1 のように展開した各項の係数を三角形状に並べたものを**パスカルの三角形**という。

問 1　パスカルの三角形は上の段がわかれば下の段がわかる。この法則を発見し、以下の $\boxed{}$ の中に $(a+b)^6$ の展開式の係数を記入せよ。

$$(a+b)^6 = \boxed{}\, a^6 + \boxed{}\, a^5b + \boxed{}\, a^4b^2 + \boxed{}\, a^3b^3 + \boxed{}\, a^2b^4 + \boxed{}\, ab^5 + \boxed{}\, b^6$$

問 2　前ページ問 2 の問題を考える。図 2 の $\boxed{}$ の中に、その $\boxed{}$ の上部の分岐点へ行く最短経路の場合の数を記入せよ。



(図2)

問 3　以下の $\boxed{}$ の中に $(a+b)^5$ の展開式の係数を記入したい。この係数を組合せの記号 ${}_5C_r$ を用いて記入せよ。

$$(a+b)^5 = {}_5C_0\ a^5b^0 + \boxed{}\ a^4b^1 + \boxed{}\ a^3b^2 + \boxed{}\ a^2b^3 + \boxed{}\ a^1b^4 + {}_5C_5\ a^0b^5$$

問 4　以下の $\boxed{}$ の中に $(a+b)^n$ の展開式の係数を記入せよ。

$$(a+b)^n = {}_nC_0\ a^nb^0 + \boxed{}\ a^{n-1}b^1 + \boxed{}\ a^{n-2}b^2 + \cdots + \boxed{}\ a^1b^{n-1} + {}_nC_n\ a^0b^n$$

＜二項定理 2＞

前ページの結果より

$$\boxed{(a+b)^n = {}_nC_0a^nb^0 + {}_nC_1a^{n-1}b^1 + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}a^1b^{n-1} + {}_nC_na^0b^n}$$

となる。この公式を**二項定理**という。

問 1　${}_nC_1$, ${}_nC_2$, ${}_nC_{n-1}$ を n の式で表せ。

${}_nC_1 =$ 　　　　　　　　, ${}_nC_2 =$ 　　　　　　　　　　, ${}_nC_{n-1} =$

問 2　${}_nC_0 = {}_nC_n = 1$, $a^0 = b^0 = 1$ と問 1 の結果を用いて上の公式を簡単にせよ。

$(a+b)^n =$

問 3　${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!}$, ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ より

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

である。${}_nC_{n-r}$ を階乗の記号！を使って表せ。

${}_nC_{n-r} =$

(注) 上の式 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ で $r = n$ のときは ${}_nC_n = \dfrac{n!}{n!0!}$ となる。

一方組合せの意味から ${}_nC_n = 1$ となるので

$$\boxed{0! = 1}$$

と定める。

問 4　二項定理で $a = 1$, $b = h$ のときに、問 2 の式を使って次式を展開せよ。

$(1+h)^n =$

問 5　h が正 $(h > 0)$ のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$(1+h)^n \geqq 1 + nh$

＜数列の極限１＞

項がかぎりなく続く数列

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \cdots\ ,\ a_n\ \cdots$$

を**無限数列**という。この無限数列において、a_n を第 n 項または一般項といい、上の無限数列を、単に $\{a_n\}$ と表す。

数列 $\{a_n\}$ の極限のようす、つまり n をかぎりなく大きくしていくとき、項 a_n の値がどのようになっていくかを調べてみよう。

n をかぎりなく大きくすることを、$n \to \infty$ と表す。

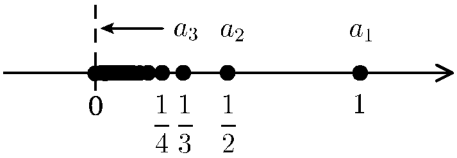
（注） 記号 ∞ は「無限大」と読む。

例 $a_n = \dfrac{1}{n}$ のときこの無限数列は

$$\frac{1}{1}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \cdots$$

となり、n を限りなく大きくすると第 n 項 $\dfrac{1}{n}$ は限りなく 0 に近づく。

このようなとき数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ は **0 に収束する**といい、これを



$$n \to \infty \text{ のとき } \frac{1}{n} \to 0$$

または

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

と表す。

一般に数列 $\{a_n\}$ について、n を限りなく大きくすると、第 n 項が限りなく一定の値 α に近づくとき、数列 $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ **に収束する**といい、これを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と表す。このとき α を数列 $\{a_n\}$ の**極限値**という。

問 例の $a_n = \dfrac{1}{n}$ に対して次の値を求めよ。

(1) $a_{10} =$, (2) $a_{100} =$, (3) $a_{1000} =$, (4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n =$

＜数列の極限 2＞

前ページの結果より

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$$

である。この結果の応用例を示す。

例 1 (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}2\times\frac{1}{n}=2\times 0=0$

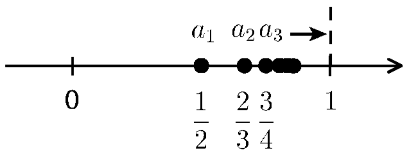
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2+0=2$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}=0\times 0=0$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}=\sqrt{0}=0$

例 2 数列 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ は

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \cdots$$



となりしだいに 1 に近づくことがわかる。
これを計算式で求めるには、分母と分子を n で割って

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

とすればよい。

例 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{0}{2-0}=0$

例 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n+4}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{4}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+4}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n-5}{3n^2-2n+4}$

＜数列の極限 3＞

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき、数列 $\{a_n\}$ は**発散する**という。

例 1 $a_n = 2n-1$ のとき

$$1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ \cdots\ ,\ 2n-1\ ,\ \cdots$$

となり、n を限りなく大きくするとき第 n 項 $a_n = 2n-1$ は限りなく大きくなる。このようなとき

$$\lim_{n\to\infty}(2n-1) = \infty$$

と表す。

一般に数列 $\{a_n\}$ において、n を限りなく大きくするとき、a_n が限りなく大きくなるならば、数列 $\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**という。

これを

$$n\to\infty \text{ のとき } a_n\to\infty$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

と表す。

例 2 $a_n = 0.01n = \dfrac{n}{100}$ のとき、数列は

$$\frac{1}{100}\ ,\ \frac{2}{100}\ ,\ \frac{3}{100}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{n}{100}\ ,\ \cdots$$

となり、なかなか大きくならないが、n がさらに大きな数になると

$n = 100$ のとき $a_n = \dfrac{100}{100} = 1$

$n = 100^2$ のとき $a_n = \dfrac{(100)^2}{100} = 100$

$n = 100^3$ のとき $a_n = \dfrac{(100)^3}{100} = 100^2$

のようになるので、n が限りなく大きくなると $a_n = \dfrac{n}{100}$ も限りなく大きくなる。従って

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0.01n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100} = \infty$$

である。

一般に次の定理が成り立つ。

[**定理**] $\boxed{\text{正の数 } h>0 \text{ に対し } \lim_{n\to\infty} h\times n = \infty}$ (チリも積れば山となる)

この定理は h がどんなに小さな数でもなりたつ。この定理を「チリも積れば山となる定理」と呼ぶことにする。

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.0001n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10000} =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+0.001n} =$

＜数列の極限 4＞

例 1 等比数列 $a_n = 2^n$ は

$a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$, $a_5 = 32$, $\cdots$

のように n が大きくなるにつれて a_n の値は限りなく大きくなるので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$$

がわかる。

例 2 等比数列 $a_n = (1.01)^n$ は

$a_1 = 1.01$, $a_2 = 1.0201$, $a_3 = 1.030301$, $a_4 = 1.04060401$, $\cdots$

のようになかなか大きくならない。$n \to \infty$ のときの極限はどうなるか?

問 1 9 ページ問 5 の結果より、正の数 h $(h > 0)$ に対して

$$\boxed{(1+h)^n \geqq 1 + nh} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

がなりたつ。ここで $h = 0.01$ とすると

$$(1.01)^n = (1+0.01)^n \geqq 1 + n \times \boxed{}$$

が成り立つ。□の中に適当な数字を入れよ。

問 2 前ページの「チリも積れば山となる定理」によって

$$\lim_{n\to\infty} n \times 0.01 = \infty$$

であることがわかる。これと問 1 の結果を用いて次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} (1.01)^n = \lim_{n\to\infty} (1+0.01)^n =$$

問 3 正の数 h $(h > 0)$ に対して次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} (1+h)^n =$$

問 4 次の極限値を求めよ。(ただし $a > 0,\ r > 1$ とする)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{99}\right)^n =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3 \times (1.1)^n =$

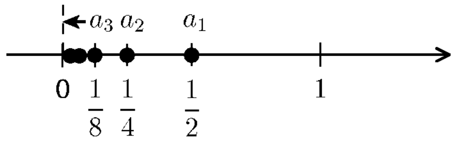
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 4 \times (1.5)^{n-1} =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n =$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^n =$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} =$

＜数列の極限 5＞



例 1 等比数列 $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ を考える。

$a_1 = \dfrac{1}{2} = 0.5$, $a_2 = \dfrac{1}{4} = 0.25$, $a_3 = \dfrac{1}{8} = 0.125$, $a_4 = \dfrac{1}{16} = 0.0625$, $\cdots$

このように分母が限りなく大きくなるので a_n は 0 に収束する。

つまり

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$$

(注) 分子が一定で、分母が無限大になる分数列の極限は常に 0 に収束する。これを $\boxed{\dfrac{1}{\infty} = 0}$ と覚えるとわかりやすい。

例 2 等比数列 $a_n = (0.99)^n$ を考える。

$a_1 = 0.99$, $a_2 = 0.9801$, $a_3 = 0.970299$, $\cdots$

$n \to \infty$ のときの極限はどうなるのであろうか？

問 1 $0.99 = \dfrac{99}{100} = \dfrac{1}{\frac{100}{99}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{99}}$ であるから

$$\boxed{(0.99)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{99}\right)^n}}$$

となる。前ページの結果を用いて、次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{99}\right)^n =$, (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{99}\right)^n} =$, (3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(0.99)^n =$

問 2 正の数 h に対し次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+h)^n} =$$

問 3 $0 < r < 1$ とする。

(1) $h = \dfrac{1}{r} - 1$ とおくと h は正の数である。r を h で表せ。

$r =$

(2) (1) と問 2 の結果を用いて次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n$

＜絶対値＞

実数 a に対し、プラス・マイナスの符号をとった値を $|a|$ と書き、 a の**絶対値**という。

例 1　$|2| = 2$, $|1.5| = 1.5$, $|0| = 0$, $|-1.2| = 1.2$, $|-3| = 3$

問 1　次の値を求めよ。

(1) $|4.5| =$　　　　(2) $|13.4| =$　　　　(3) $|-0.5| =$　　　　(4) $|-3.7| =$

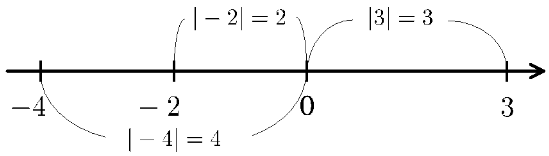
問 2　$|3| = 3$, $|-2| = 2 = -(-2)$ である。この例を参考にして下の□内に a または $-a$ のどちらかを入れよ。

(1) $a > 0$ のとき $|a| = \boxed{\quad\quad}$

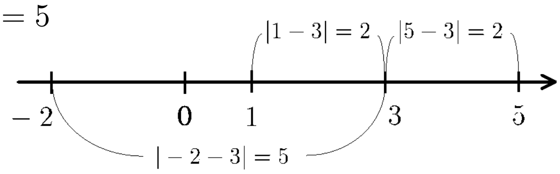
(2) $a = 0$ のとき $|a| = 0$

(3) $a < 0$ のとき $|a| = \boxed{\quad\quad}$

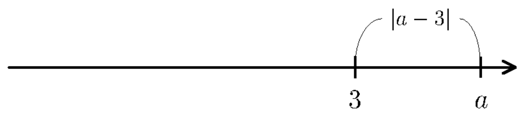
例 2　右図のように $|a|$ は a と原点 0 との距離を示す。



問 3　$|5-3| = 2$, $|1-3| = 2$, $|-2-3| = 5$ である。この例を参考にして以下の□内に $a-3$ または $3-a$ のどちらかを入れよ。

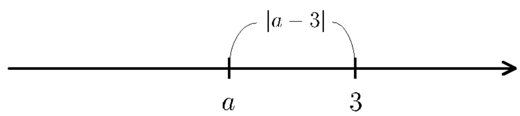


(1) $a > 3$ のとき $|a-3| = \boxed{\quad\quad}$



(2) $a = 3$ のとき $|a-3| = 0$

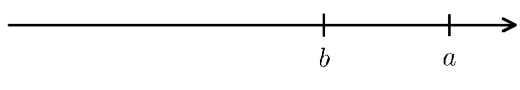
(3) $a < 3$ のとき $|a-3| = \boxed{\quad\quad}$



(注) $|a-3|$ は a と 3 との距離を示す。

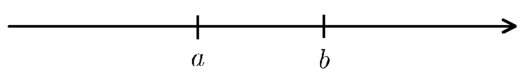
問 4　実数 a, b に対し以下の□の内に適当な文字式を入れよ。

(1) $a > b$ のとき $|a-b| = \boxed{\quad\quad}$



(2) $a = b$ のとき $|a-b| = 0$

(3) $a < b$ のとき $|a-b| = \boxed{\quad\quad}$



問 5　数直線上に実数 a と b がある。$|a-b|$ は何を意味するか答えよ。

＜数列の収束・振動＞

数列 a_n が実数 α に収束するということは、a_n と α との距離 $|a_n-\alpha|$ が限りなく 0 に近づくことを同じである。

$$a_n \to \alpha \;\Leftrightarrow\; a_n \text{ と } \alpha \text{ との距離 } \to 0 \;\Leftrightarrow\; |a_n-\alpha| \to 0$$

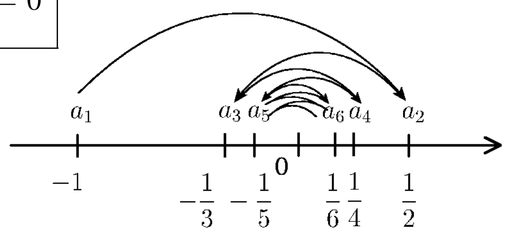
従って

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |a_n-\alpha| = 0}$$

となる。特に $\alpha=0$ のときは

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0}$$

である。



例　数列 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ は

$a_1=-1$, $a_2=\dfrac{1}{2}$, $a_3=-\dfrac{1}{3}$, $a_4=\dfrac{1}{4}$, $\cdots$

となってプラス・マイナスが交互にくるが、その絶対値をとると

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n\to\infty \text{ のとき})$$

より

$$\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0 \text{ だから } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$

問 1　次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-0.99)^n =$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-3)^n} =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{4^n} =$

問 2　等比数列 $a_n=r^n$ を考える。11, 12 ページを参考にして、以下の□の中に極限値を記入せよ。

(1) $r>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(2) $r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1^n = \boxed{}$

(3) $0<r<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(4) $r=0$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0^n = \boxed{}$

(5) $-1<r<0$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} r^n = \boxed{}$

(注)　$r=-1$ のときは $a_n=(-1)^n$ であるから

$a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=1$, $a_5=-1$, $a_6=1$, $\cdots$

となって -1 と $+1$ が交互に表われる。従ってこの場合は収束しない。このような場合 $\{a_n\}$ は**振動する**という。

＜ 正・負の無限大 ＞

例 1 数列 $a_n = -n^2$ を考える。

$a_1 = -1$, $a_2 = -4$, $a_3 = -9$, $a_4 = -16$, $a_5 = -25$, $\cdots$

このように a_n は常にマイナスであり、その絶対値は限りなく大きくなる。
このようなとき数列 $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい

$$n \to \infty \text{ のとき} \qquad a_n \to -\infty$$

または

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く。

例 2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$ であるが負の無限大 $(-\infty)$ と区別するために

$$\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

と書くことがある。$+\infty$ を**正の無限大**という。

例 3 $a_n = n - n^2$ は

$a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_{10} = 10 - 100 = -90$, $a_{100} = 100 - 10000 = -9900$, $\cdots$
のようになるので $a_n \to -\infty$ と考えられる。実際

$$a_n = n - n^2 = n^2 \times \left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

となるので n が十分大きいときは $\dfrac{1}{n} \fallingdotseq 0$ と考えると

$$a_n \fallingdotseq n^2 \times (-1)$$

であり

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n - n^2) = -\infty$$

がわかる。

(注) (1) $\boxed{+\infty \times (-1) = -\infty}$ として、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n-n^2) = \lim_{n\to\infty} n^2 \times \left(\frac{1}{n} - 1\right) = +\infty \times (0-1) = -\infty$
と考えてもよい。

(2) n と n^2 を比較すると例 3 は n より n^2 の方が早く大きくなることを意味している。

例 4 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3 - n^2) = \lim_{n\to\infty} n^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \times (1-0) = +\infty$

例 5 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2^n - 3^n) = \lim_{n\to\infty} 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = +\infty \times (0-1) = -\infty$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^3 - n^4) =$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n^5 - n^4) =$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 3^n) =$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(4^n - 5^n) =$

< 無限級数 >

数列 $\{a_n\}$ の各項を順に加えていった式

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$

を**無限級数**という。数列 $\{a_n\}$ について、

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を初項から第 n 項までの**部分和**という。部分和を作る数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

が収束して、その極限値が S (つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$) のとき、無限級数 (1) は S に**収束する**といい、

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$$

と書いて、S を**無限級数の和**という。

例 無限級数

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

の部分和を S_n とすると

$$\begin{array}{rrl}
 & S_n = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} \\
-\big) & \dfrac{1}{2}S_n = & \qquad \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^{n+1}} \\
\hline
 & \dfrac{1}{2}S_n = & \dfrac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{1}{2^{n+1}}
\end{array}$$

より

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$n \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{2^n} \to 0$ だから

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

(注) この例のように数列が等比数列の場合に、この無限級数を**無限等比級数**という。

問 次の無限級数の和 S を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{1}{3^n} + \cdots$

< 無限等比級数 >

問 1　$-1 < r < 1$ とする。

(1)　14 ページ問 2(3)〜(5) を参考にして次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n =$　　　　　　　　　　　　　　, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^{n+1} =$

(2)　$S_n = r + r^2 + \cdots + r^n$ とおく。以下の□に適当な文字式または数字を入れよ。

$$\begin{array}{rl} S_n = & r + r^2 + \cdots + r^n \\ -)\ rS_n = & \square + \square + \cdots + \square \\ \hline (\square - \square)\, S_n = & \square \quad - \quad \square \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad S_n = \frac{\square - \square}{\square - \square}$$

(3)　等比級数の和 $S = r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots$ を S_n の極限として求めよ。

$S = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n =$

問 2　$-1 < r < 1$ とする。任意の実数 a に対して以下の問に答えよ。

(1)　次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} ar^n =$

(2)　$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$ とおく。上の問 1(1) を参考にして S_n を a と r で表せ。

$S_n =$

(3)　等比級数の和 $S = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ を求めよ。

$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots =$

問 3　問 2 の結果を用いて以下の等比級数の和を求めよ。

(1)　$\frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots =$

(2)　$\frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \frac{1}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^4 + \cdots + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + \cdots =$

(3)　$4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots =$

＜循環小数１＞

分数は有限小数かまたは循環する無限小数で表される。

例 1 $\dfrac{1}{8} = 0.125$, $\dfrac{1}{25} = 0.04$, $\dfrac{3}{40} = 0.075$

(注) 分母が 2 または 5 の積の場合は必ず有限小数で表される。
それ以外の場合は必ず循環する無限小数になる。これは
小数を 10 進法で表しているからである。

例 2 $\dfrac{1}{3} = 0.33333333\cdots$, $\dfrac{1}{6} = 0.166666\cdots$

$\dfrac{7}{12} = 0.583333\cdots$, $\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123123\cdots$

$$\begin{array}{r@{\,)\,}l}
 & 0.3\,6\,3\,6 \\
11 & 4\,0 \\
 & 3\,3 \\
 & 7\,0 \\
 & 6\,6 \\
 & 4\,0 \\
 & 3\,3 \\
 & 7\,0 \\
 & 6\,6 \\
 & 4
\end{array}$$

このように同じ数が無限に繰り返さ
れる小数を**循環小数**という。
限りなく続くことをあらわすために、
繰り返される最初と最後の数の
上にドット (黒丸) を付けて表す。
例えば

$\dfrac{1}{3} = 0.3333\cdots = 0.\dot{3}$

$\dfrac{1}{6} = 0.16666\cdots = 0.1\dot{6}$

$\dfrac{7}{12} = 0.58333\cdots = 0.58\dot{3}$

$\dfrac{4}{11} = 0.363636\cdots = 0.\dot{3}\dot{6}$

$\dfrac{853}{1665} = 0.5123123123\cdots = 0.5\dot{1}2\dot{3}$

等で表す。

$$\begin{array}{r@{\,)\,}l}
 & 0.5\,1\,2\,3\,1\,2\,3 \\
1665 & 8\,5\,3\,0 \\
 & 8\,3\,2\,5 \\
 & \boxed{2\,0\,5\,0} \\
 & 1\,6\,6\,5 \\
 & 3\,8\,5\,0 \\
 & 3\,3\,3\,0 \\
 & 5\,2\,0\,0 \\
 & 4\,9\,9\,5 \\
 & \boxed{2\,0\,5\,0} \\
 & 1\,6\,6\,5 \\
 & 3\,8\,5\,0 \\
 & 3\,3\,3\,0 \\
 & 5\,2\,0\,0 \\
 & 4\,9\,9\,5 \\
 & \boxed{2\,0\,5\,0}
\end{array}$$

問 次の分数を小数になおせ。

(1) $\dfrac{11}{16} =$ (2) $\dfrac{3}{125} =$ (3) $\dfrac{31}{80} =$

(4) $\dfrac{5}{12} =$ (5) $\dfrac{4}{33} =$

(6) $\dfrac{15}{37} =$

＜循環小数 2＞

前ページで分数を有限小数または循環小数になおした。このページでは逆に循環小数を分数になおす。このとき 17 ページで得られた等比級数の和の式

$$\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-r}} \qquad (-1 < r < 1)$$

を用いる。

例 (1) $0.\dot{3} = 0.3333\cdots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \cdots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} + \cdots$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \cdots$$

より初項 $a = \dfrac{3}{10}$, 公比 $r = \dfrac{1}{10}$ の等比級数の和であるから

$$0.\dot{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2) $0.\dot{3}\dot{6} = 0.36363636\cdots = 0.36 + 0.0036 + 0.000036 + 0.00000036 + \cdots$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000} + \frac{36}{100000000} + \cdots$$

$$= \frac{36}{100} + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{36}{100} \times \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{36}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$$

問　次の循環小数を分数になおせ。

(1)$0.\dot{5} = 0.5555\cdots =$

(2)$0.\dot{9} = 0.9999\cdots =$

(3)$0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\cdots =$

(4)$0.\dot{4}\dot{3} = 0.434343\cdots =$

(5)$0.0\dot{9} = 0.09999\cdots =$

＜小数の表示＞

例 1　前ページの結果より以下の等式が成り立つ。

(1)　$0.\dot{9} = 0.9999\cdots = 1$

(2)　$$0.0\dot{9} = 0.09999\cdots = 0.09 + 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + \cdots$$
$$= 0.09 + 0.09 \times \frac{1}{10} + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.09 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$
$$= \frac{0.09}{1 - \dfrac{1}{10}} = \frac{0.09}{\dfrac{9}{10}} = \frac{0.9}{9} = 0.1$$

例 2　$$0.00\dot{9} = 0.009999\cdots = 0.009 + 0.0009 + 0.00009 + 0.000009 + \cdots$$
$$= 0.009 + 0.009 \times \frac{1}{10} + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 0.009 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots$$
$$= \frac{0.009}{1 - \dfrac{1}{10}} = 0.01$$

問 1　次の循環小数を有限小数になおせ。

(1) $0.000\dot{9} =$　　　　(2) $0.0000\dot{9} =$

例 3　(1)　$1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 1 + 0.9999\cdots = 1 + 0.\dot{9} = 1 + 1 = 2$

(2)　$2.4\dot{9} = 2.4 + 0.0\dot{9} = 2.4 + 0.1 = 2.5$

(3)　$3.13\dot{9} = 3.13 + 0.00\dot{9} = 3.13 + 0.01 = 3.14$

問 2　次の循環小数を整数または有限小数になおせ。

(1) $9.\dot{9} =$　　　　(2) $0.1\dot{9} =$

(3) $2.78\dot{9} =$　　　　(4) $5.0123\dot{9} =$

上記の結果より以下の等式が成立する。

$$0.9 = 0.9999\cdots = 1 = 1.000\cdots = 1.\dot{0}$$
$$1.\dot{9} = 1.9999\cdots = 2 = 2.000\cdots = 2.\dot{0}$$
$$2.4\dot{9} = 2.4999\cdots = 2.5 = 2.5000\cdots = 2.5\dot{0}$$
$$3.13\dot{9} = 3.13999\cdots = 3.14 = 3.14000\cdots = 3.14\dot{0}$$

これらの式の右辺のように有限小数は小数の途中から 0 が続く循環小数とも考えられる。有限小数は循環小数によって 2 通りに表すことができる。

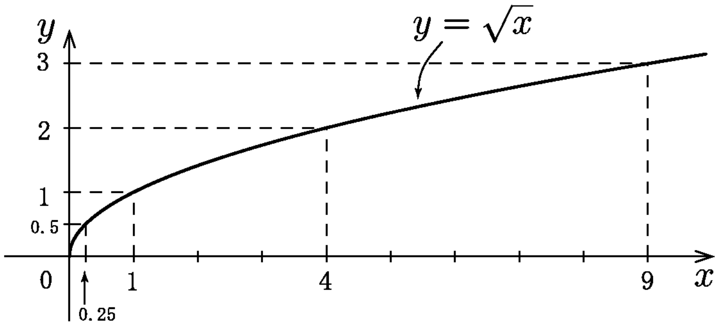
＜無理関数 1＞

$\sqrt{}$ のついた関数を通常**無理関数**という。

例 1 $y=\sqrt{x}$ のグラフを描きたい。
$\sqrt{}$ の中は負になってはいけないので x は 0 以上の数を考える。

x と y の対応表

x	0	0.25	1	4	9
y	0	0.5	1	2	3



よりグラフは右図のようになる。無理関数の場合は「$\sqrt{}$ の中が負になってはいけない」という制限が自動的につく。このような x の範囲 $(x \geqq 0)$ を**定義域**という。なお $\sqrt{}$ の値は常に 0 以上だから y の範囲は $y \geqq 0$ となる。y の範囲を**値域**という。

例 2 無理関数 $y=\sqrt{x+1}$ を考える。
$\sqrt{}$ の中は 0 以上だから

$$x+1 \geqq 0 \ \Rightarrow \ x \geqq -1$$

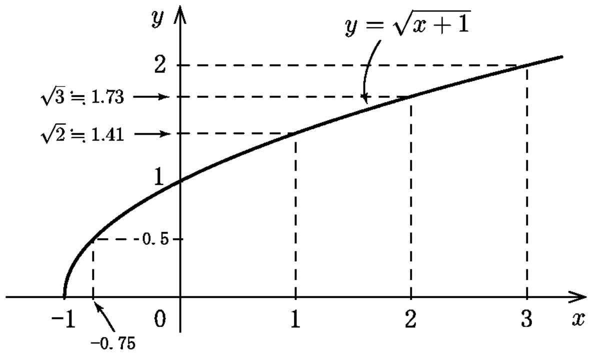
より

$\boxed{\text{定義域：} x \geqq -1}$

であり、値域は $\sqrt{} \geqq 0$ だから

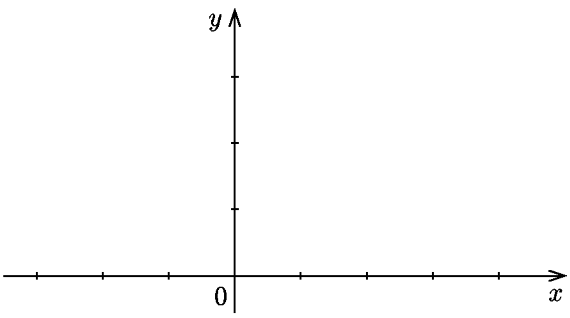
$\boxed{\text{値域：} y \geqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



問 以下の無理関数の定義域と値域を求め、対応表を完成し、グラフを描け。

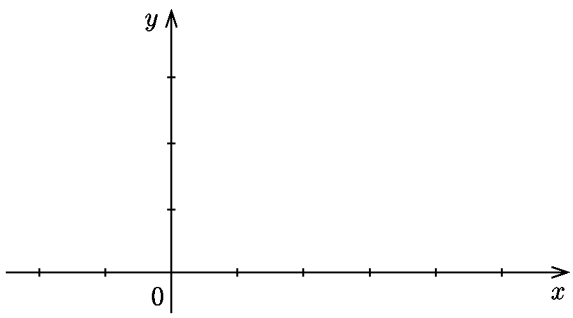
(1) $y=\sqrt{x+2}$



x	-2	-1	0	2
y				

定義域： , 値域：

(2) $y=\sqrt{x-1}$



x	1	1.25	2	5
y				

定義域： , 値域：

＜無理関数 2＞

例 1　無理関数 $y = \sqrt{3-x}$ を考える。

$\sqrt{}$ の中は 0 以上だから

$3 - x \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \geqq x$

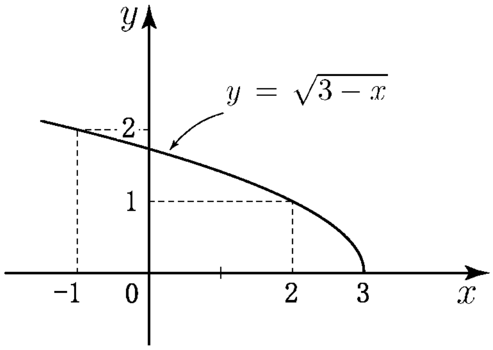
より

$\boxed{\text{定義域} \ : \ x \leqq 3}$

また $\sqrt{} \geqq 0$ より

$\boxed{\text{値域} \ : \ y \geqq 0}$

である。グラフは右図のようになる。



例 2　無理関数 $y = -\sqrt{x-1}$ を考える。

$\sqrt{}$ の中は 0 以上だから

$x - 1 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geqq 1$

より

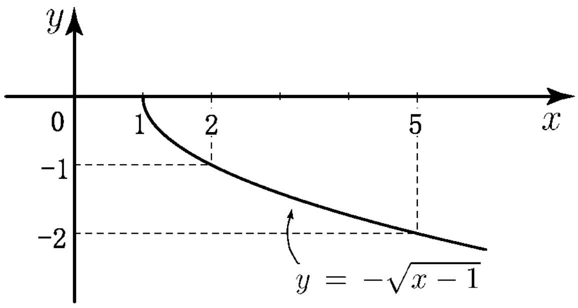
$\boxed{\text{定義域} \ : \ x \geqq 1}$

また $\sqrt{} \geqq 0$ より $-\sqrt{} \leqq 0$

だから

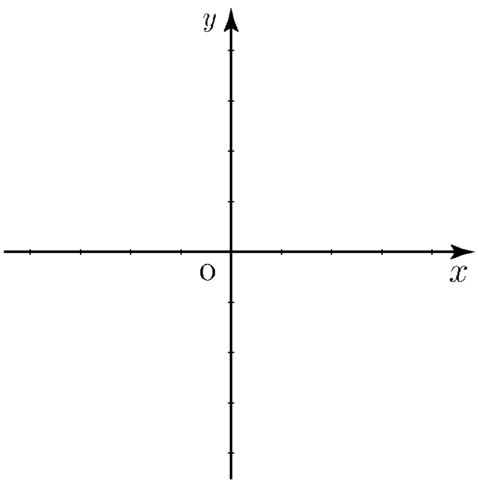
$\boxed{\text{値域} \ : \ y \leqq 0}$

となる。グラフは右図のようになる。



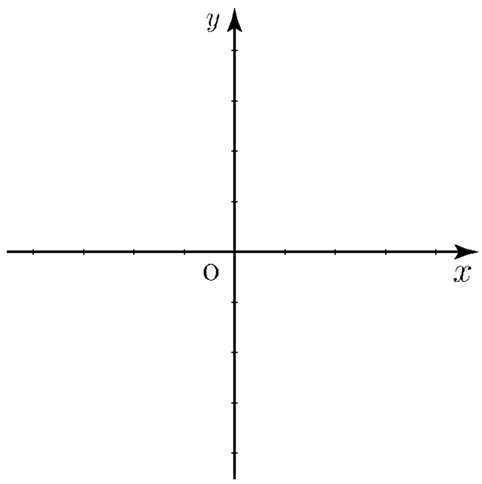
問　以下の無理関数の定義域と値域を求め、グラフを書け。

(1)　$y = \sqrt{-x+1}$



定義域：　　　　　, 値域：

(2)　$y = -\sqrt{x+2}$



定義域：　　　　　, 値域：

＜分数関数 1 ＞

例 1 分数関数 $\dfrac{1}{x}$ を考える。

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$x = 0$ のときは分母が 0 になるから定義できない。従って定義域は 0 以外の全ての実数となる。

$$\boxed{\text{定義域}：x \neq 0}$$

$y = \dfrac{1}{x}$ を変形すると

$$xy = 1$$

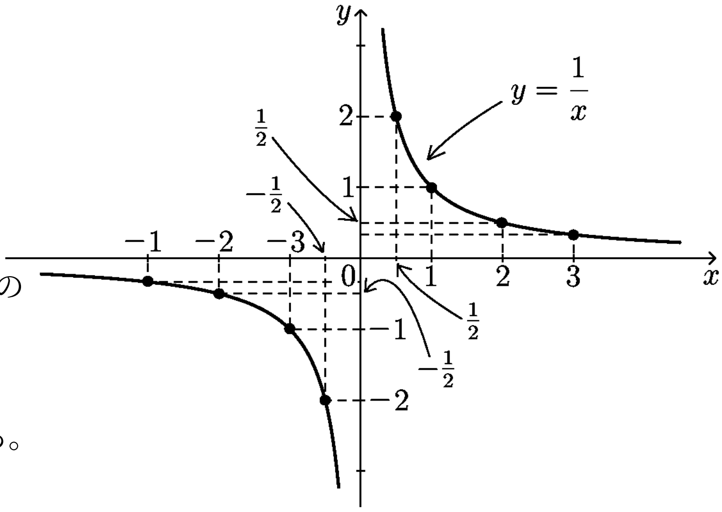
より y は 0 にはならない。結局

$$y = \frac{1}{x} \neq 0$$

となり、y は 0 以外のすべての実数の値を取る。

$$\boxed{\text{値域}：y \neq 0}$$

となり、グラフは右図のようになる。



例 2 分数関数 $y = \dfrac{1}{x-2}$ を考える。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	╳	2	1	$\frac{1}{2}$

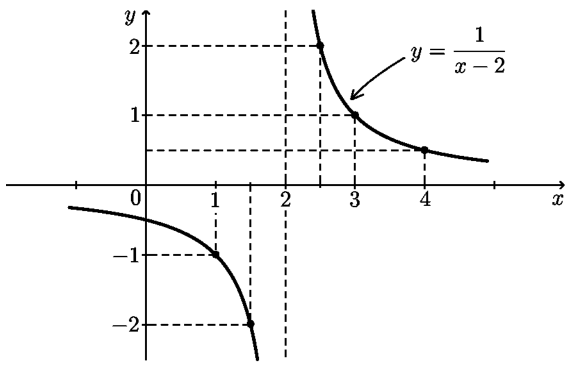
分母が 0 になってはならないので
$x - 2 \neq 0$ より

$$\boxed{\text{定義域}：x \neq 2}$$

となり、値域は上と同様に

$$\boxed{\text{値域}：y \neq 0}$$

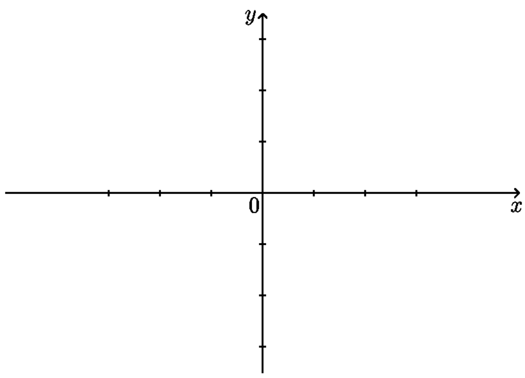
であり、グラフは右図のようになる。
このグラフは $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に $+2$ だけ平行移動したものである。



問 分数関数 $y = \dfrac{1}{x+1}$ の定義域と値域を求め、対応表を作り、右にグラフを描け。

x	-3	-2	-1.5	-1	-0.5	0	1
y				╳			

定義域：　　　　　　　　, 値域：



＜分数関数 2 ＞

例 分数関数 $y = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ を考える。

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
$x-2$	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2		2	1	$\frac{1}{2}$
y	2.5	2	1		5	4	3.5

定義域は分母 $\neq 0$ より

$\boxed{\text{定義域：} x \neq 2}$

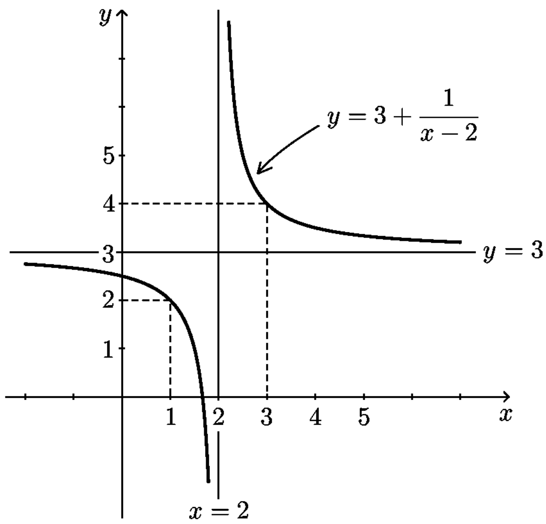
である。一方逆数 $\dfrac{1}{\ } \neq 0$ より

$$y - 3 = \frac{1}{x-2} \neq 0$$

であるから $y - 3 \neq 0$ より

$\boxed{\text{値域：} y \neq 3}$

となる。このグラフは右図のように $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフを x 軸方向に +2、y 軸方向に +3 だけ平行移動したものである。



このグラフは x の値が 2 に近づくほど直線 $x = 2$ に近づき、x の値が 2 から遠ざかるほど直線 $y = 3$ に近づく。

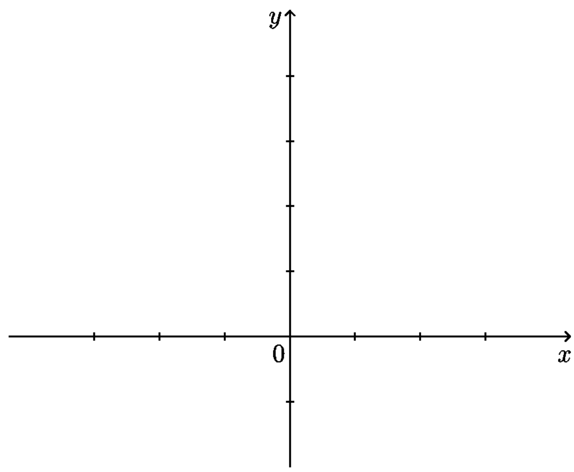
この 2 直線 $x = 2$, $y = 3$ を分数関数 $y = 3 + \dfrac{1}{x-2}$ の **漸近線**（ゼンキンセン） という。

問 分数関数 $y = 2 + \dfrac{1}{x+1}$
定義域と値域および漸近線を求め、右にそのグラフを描け。(漸近線のグラフも描く。)

定義域：＿＿＿＿＿＿

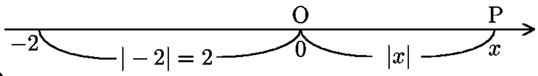
値域：＿＿＿＿＿＿

漸近線：$x =$ ＿＿＿＿ , $y =$ ＿＿＿＿



＜絶対値のグラフ 1 ＞

問 1 実数 x の数直線上の位置を点 $\mathrm{P}(x)$ とする。
原点 $\mathrm{O}(0)$ からの距離 OP を x の絶対値といい、



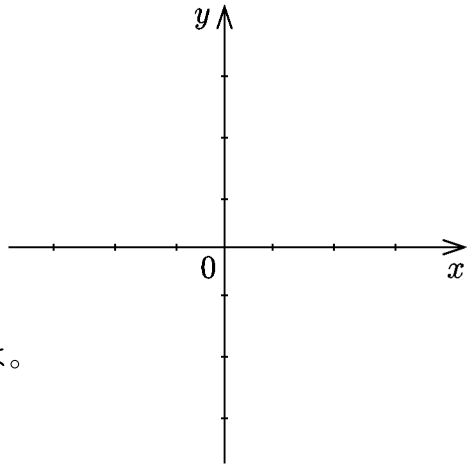
$$\mathrm{OP}=|x|$$

と表す。例えば $|2|=2$、$|-2|=2$ である。ここで、

$$y=|x|$$

とおいて、表を完成し、グラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							



また、以下の文章の $\boxed{\quad}$ の中に適当な文字式を入れよ。

「右のグラフより、$y=|x|$ のグラフは

$x \geqq 0$ の範囲では、直線 $y=\boxed{\quad}$ であり

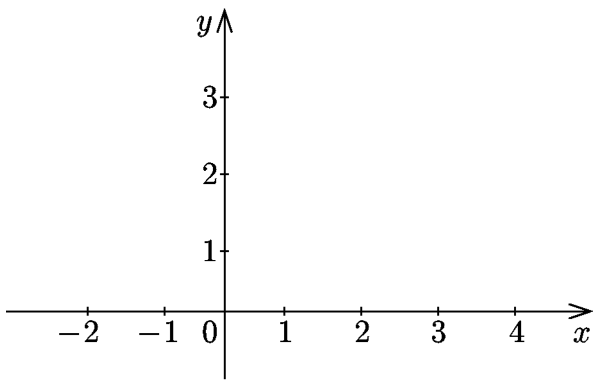
$x<0$ の範囲では、直線 $y=\boxed{\quad}$ であることから、

$$y=|x|=\begin{cases}\boxed{\quad} & (x \geqq 0)\\ \boxed{\quad} & (x<0)\end{cases}$$ が分かる。」

問 2 関数 $y=|x-1|$ を考える。

(1) 表を完成し、グラフを描け。

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								



(2) 以下の $\boxed{\quad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

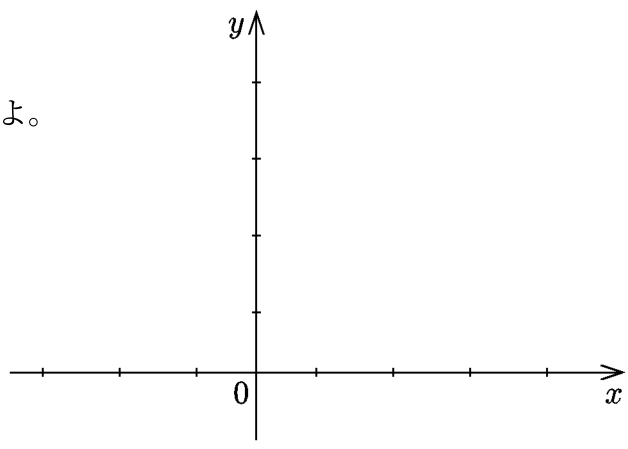
$x \geqq 1$ のとき　$|x-1|=\boxed{\quad}$

$x<1$ のとき　$|x-1|=\boxed{\quad}$

問 3 関数 $y=|x+1|$ のグラフを描き、
以下の $\boxed{\quad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

$x \geqq -1$ のとき　$|x+1|=\boxed{\quad}$

$x<-1$ のとき　$|x+1|=\boxed{\quad}$



＜絶対値のグラフ 2＞

問 1　関数 $y = |x^2 - 1|$ を考える。

(1) 表を完成せよ。

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y							

(2) 以下の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

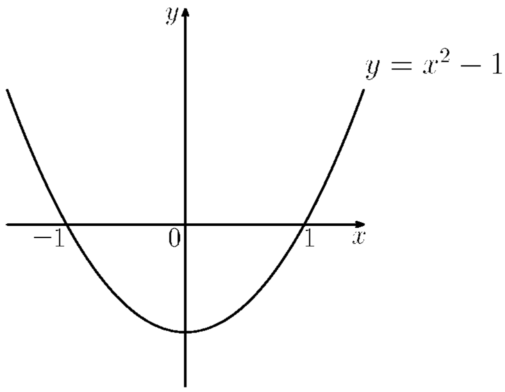
$x \geqq 1$　　のとき　$|x^2 - 1| = \boxed{}$

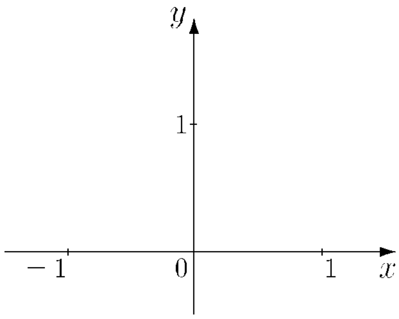
$-1 < x < 1$ のとき $|x^2 - 1| = \boxed{}$

$x < -1$　のとき　$|x^2 - 1| = \boxed{}$

(3) $y = x^2 - 1$ のグラフを参考にして

$y = |x^2 - 1|$ のグラフを右に描け。





問 2　関数 $y = |x^2 - 3x|$ を考える。

(1) 表を完成せよ。

x	-1	0	1	2	3	4
y						

(2) 以下の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

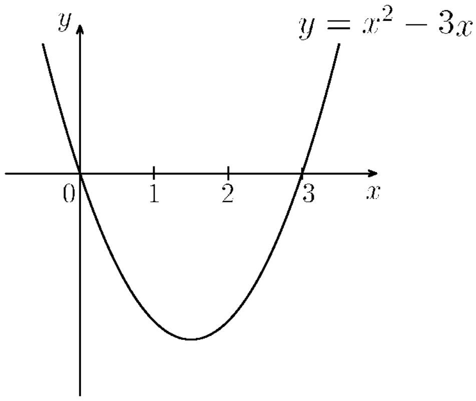
$x \geqq 3$　のとき　$|x^2 - 3x| = \boxed{}$

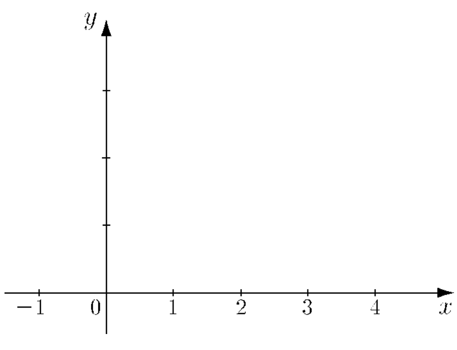
$0 < x < 3$ のとき $|x^2 - 3x| = \boxed{}$

$x \leqq 0$　のとき　$|x^2 - 3x| = \boxed{}$

(3) $y = x^2 - 3x$ のグラフを参考にして

$y = |x^2 - 3x|$ のグラフを右に描け。





問 3　関数 $y = \dfrac{|x|}{x}$　$(x \neq 0)$ を考える。

(1) 表を完成せよ。

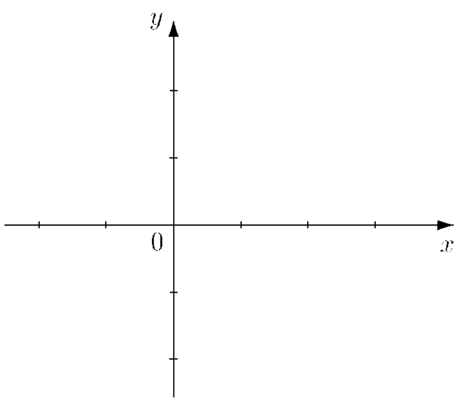
x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2
y							

(2) 以下の $\boxed{}$ 内に適当な数字を入れよ。

$x > 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{}$

$x < 0$ のとき $\dfrac{|x|}{x} = \boxed{}$

(3) 右に $y = \dfrac{|x|}{x}$ のグラフを描け。



＜ ガウス記号 ＞

実数 x に対して、 x を超えない最大の整数を n とすると

$$n \leqq x < n+1, \quad n \text{ は整数}$$

の関係がある。この整数 n は x によって決まるので

$$n = [x]$$

と表す。この記号 $[x]$ を **ガウス記号** という。

例　$[1.5] = 1$,　$[2.76] = 2$

$[3.024] = 3$,　$[4.8196] = 4$

$[0.135] = 0$,　$[-0.52] = -1$

$[-1.23] = -2$,　$[-2.746] = -3$

問１　次の値を求めよ。

(1) $[1.23] =$　(2) $[9.87] =$　(3) $[\ 0.9999\ ] =$

(4) $[-0.1] =$　(5) $[-3.69] =$　(6) $[-9.5\ ] =$

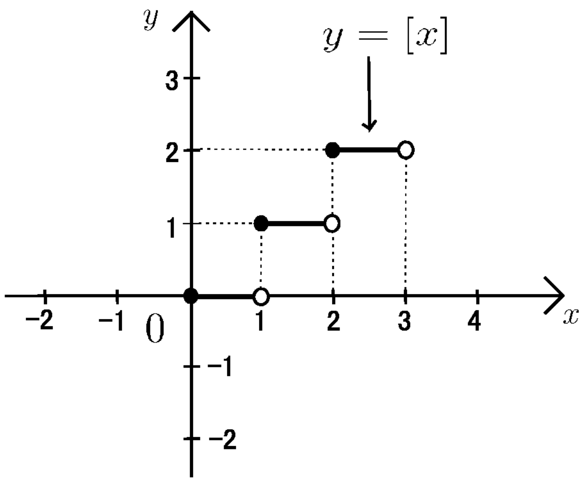
問２　関数 $f(x) = [x]$ のグラフを描きたい。

$0 \leqq x < 1$ のとき $[x] = 0$

$1 \leqq x < 2$ のとき $[x] = 1$

$2 \leqq x < 3$ のとき $[x] = 2$

だから $0 \leqq x < 3$ の範囲では、 $y = [x]$ のグラフは右図のようになる。このグラフを $-2 \leqq x < 4$ の範囲まで拡張せよ。



＜関数の極限＞

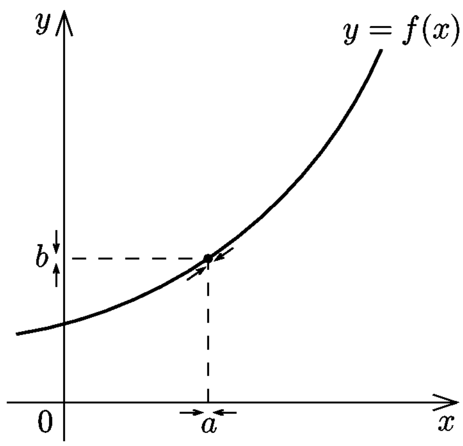
関数 $f(x)$ の定義域内で、x が a と異なる値をとりながら、a に限りなく近づくとき、どのように近づいても $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば、これを

$x \to a$ のとき $f(x) \to b$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

と表し、b を、x が a に限りなく近づくときの $f(x)$ の**極限値**という。



例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{3^2 + 2 \times 3} = \sqrt{9 + 6} = \sqrt{15}$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} = 3$

例 3 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2$

(注) 例 3 の場合 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ は $x = 1$ では定義されていない。無理に代入すると $f(1) = \dfrac{0}{0}$ の形で計算できないので、分子を因数分解して代入できる形になおしてから $x = 1$ を代入する。

例 4 $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x + 1} = \lim_{x \to -1}(x - 2) = -1 - 2 = -3$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \sqrt{x + 1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \cos x$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \sin x$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{1}{2}} \log_2 x$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(6) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

(7) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

(8) $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$

< 左極限・右極限 1 >

1. < 左表現・右表現 >

20 ページの結果より 1 を循環小数によって 2 通りに表すことができる。

$1 = 0.\dot{9} = 0.99999\cdots$ (左表現)

$1 = 1.\dot{0} = 0.00000\cdots$ (右表現)

この場合に $0.\dot{9}$ を 1 の **左表現** , $1.\dot{0}$ を 1 の **右表現** ということにする。

(注) この用語「左表現」「右表現」は数学で一般的に使われる用語ではなく、
ワークブックだけで便宜上用いる言葉である。

例 1 (1) 3 の左表現 = $2.\dot{9}$, 3 の右表現 = $3.\dot{0}$

(2) 2.5 の左表現 = $2.4\dot{9}$, 2.5 の右表現 = $2.5\dot{0}$

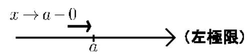
問 1 (1) 10 の左表現 = , 10 の右表現 =

(2) 5.3 の左表現 = , 5.3 の右表現 =

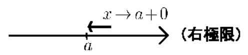
2. < 左極限・右極限 >

変数 x が a に近づくとき、

(1) a より小さい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a-0}$



(2) a より大きい値をとりながら a に近づく場合に $\boxed{x \to a+0}$



と表し、(1) を a への**左側からの極限 (左極限)**、(2) を a への**右側からの極限 (右極限)** という。

例 2 $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$ を考える。

$\boxed{x \to 2-0}$とは $x = 1.9,\ \ x = 1.99,\ \ x = 1.999, \cdots$

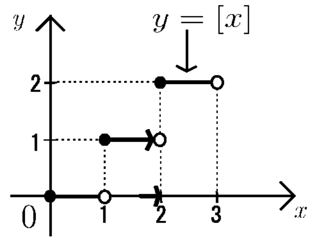
というふうに 2 より小さい値をとりながら 2 に近づく極限である。

ガウス記号 $[x]$ の定義より

$[1.9] = 1\ ,\ \ [1.99] = 1\ ,\ \ [1.999] = 1\ , \cdots$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2-0}[x] = 1}$$



例 3 $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}[x]$ を考える。

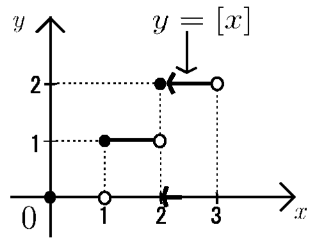
$\boxed{x \to 2+0}$とは $x = 2.1,\ \ x = 2.01,\ \ x = 2.001, \cdots$

というふうに 2 より大きい値をとりながら 2 に近づく極限である。

$[2.1] = 2\ ,\ \ [2.01] = 2\ ,\ \ [2.001] = 2\ , \cdots$

より

$$\boxed{\lim_{x\to 2+0}[x] = 2}$$



問 2 次の極限値を求めよ。

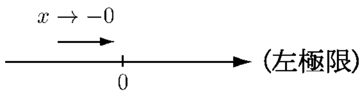
(1) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}[x] =$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 1+0}[x] =$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3-0}[x] =$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 3+0}[x] =$

< 左極限・右極限 2 >

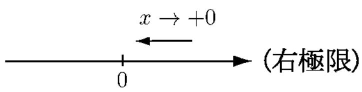
(1) 0 への左極限 $x \to 0-0$ を略して $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{x \to -0}$ とは $x=-0.1$, $x=-0.01$, $x=-0.001$, $\cdots$ というふうに 0 より小さい値をとりながら 0 に近づく極限である。



(2) 0 への右極限 $x \to 0+0$ を略して $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{x \to +0}$ とは $x \to 0.1$, $x=0.01$, $x=0.001$, $\cdots$ というふうに 0 より大きい値をとりながら 0 に近づく極限である。

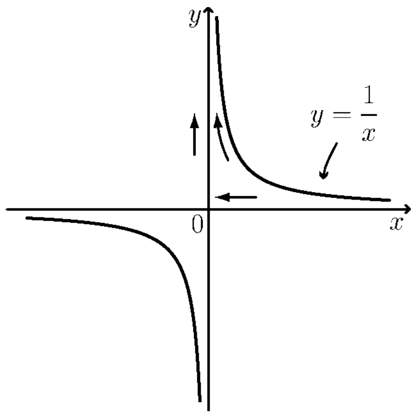


問 1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to -0}[x] =$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to +0}[x] =$

例 1 (1) $\displaystyle\lim_{x \to +0}\frac{1}{x}$ を考える。x と $\dfrac{1}{x}$ の対応

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	0.000001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10000	100000	1000000



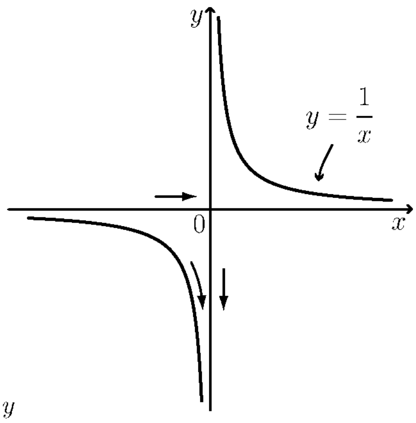
より $x \to +0$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は限りなく大きくなる。

従って

$$\boxed{\lim_{x \to +0}\frac{1}{x} = +\infty}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -0}\frac{1}{x}$ を考える。x と $\dfrac{1}{x}$ の対応

x	−0.1	− 0.01	− 0.001	− 0.0001	−0.00001
$\frac{1}{x}$	− 10	− 100	− 1000	−10000	− 100000



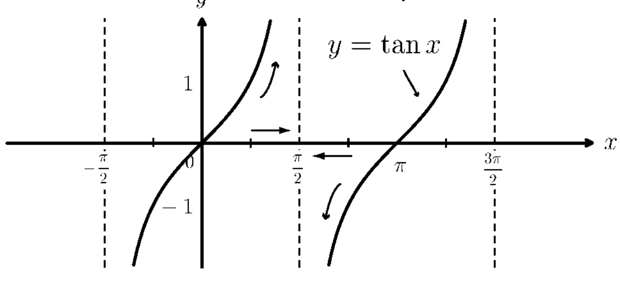
より

$$\boxed{\lim_{x \to -0}\frac{1}{x} = -\infty}$$

例 2 右図より

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0}\tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0}\tan x = -\infty$$



問 2 23 ページを参考にして次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2+0}\frac{1}{x-2}$ (2) $\displaystyle\lim_{x \to 2-0}\frac{1}{x-2}$

＜左極限・右極限 3 ＞

関数 $f(x)$ が「 $x \to a$ のとき $f(x) \to b$ に収束する $\left(= \lim_{x\to a} f(x) = b\right)$」ということは、 x が a 以外の値をとりながら、 a に限りなく近づくとき、<u>どのように近づいても</u> $f(x)$ の値が一定の値 b に近づくという意味である。従って左極限 $\left(\lim_{x\to a-0} f(x)\right)$ および、右極限 $\left(\lim_{x\to a+0} f(x)\right)$ も共に b に収束する。逆に左極限と右極限が共に b に収束すれば $\lim_{x\to a} f(x) = b$ が成り立つ。すなわち、

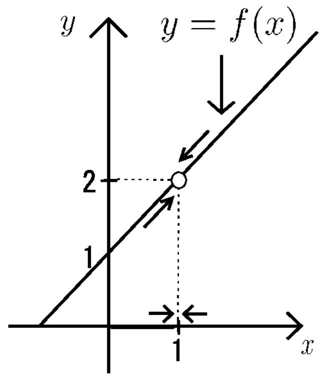
[定理] $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = b \quad \text{かつ} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = b}$

が成り立つ（証明略）。

例 1 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ の場合、$y = f(x)$ のグラフは右図のようになるので

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = 2$$

より $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = 2}$



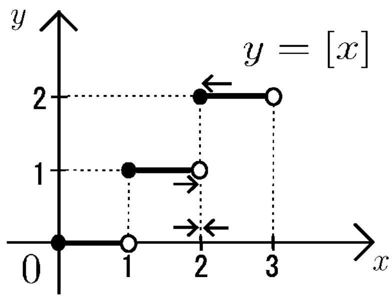
が成り立つ。これは 38 ページ例 3 をより正確に表現したものである。

(注) この例 1 のように $x = 1$ の値が定義されてなくても $\lim_{x\to 1} f(x)$ が定まるときがある。

例 2 $f(x) = [x]$ の場合、29 ページより

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} f[x] = 1$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} f[x] = 2$$



であるから左極限と右極限の値が違うので <u>極限 $\lim_{x\to 2} f(x)$ は定まらない。</u>

問 $f(x)$ が以下の場合について、次の左極限と右極限を求め、両方が一致した場合は、$\lim_{x\to a} f(x) = b$ の形で書け。

(1) $\lim_{x\to -0} |x| \quad =$ $\qquad\qquad$, $\quad \lim_{x\to +0} |x| \quad =$

(2) $\lim_{x\to -0} \dfrac{|x|}{x} =$ $\qquad\qquad$, $\quad \lim_{x\to +0} \dfrac{|x|}{x} =$

＜左微分係数・右微分係数＞

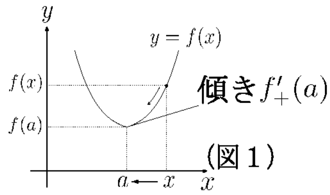
関数 $f(x)$ の微分係数の定義 $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ において、 $x = a + h$ とおくと $h \to 0$ のとき $x \to a$ だから、微分係数は

$$\boxed{f'(a) \;=\; \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad (x = a \text{ における微分係数})$$

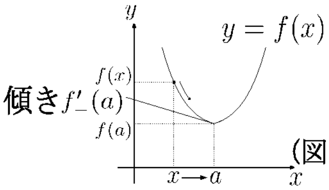
と表すことができる。この極限 $x \to a$ の右極限と左極限を

$$\boxed{f'_+(a) \;=\; \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad (\text{右微分係数})$$

$$\boxed{f'_-(a) \;=\; \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \qquad (\text{左微分係数})$$



(図1)



(図2)

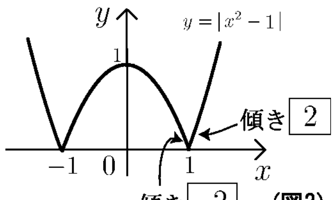
と書き、 $f(x)$ の $x = a$ における **右微分係数** および **左微分係数** という。

この左右の微分係数が一致する $(f'_+(a) = f'_-(a))$ とき、$f(x)$ は $x = a$ で**微分可能**という。

例　$f(x) = |x - 1|$ の場合に、$x = 1$ における左右の微分係数を求めたい。
26 ページ問 1 より

$x > 1$ のとき　　　$|x^2 - 1| = x^2 - 1$
$-1 < x < 1$ のとき　　$|x^2 - 1| = 1 - x^2$

だから



(図3)

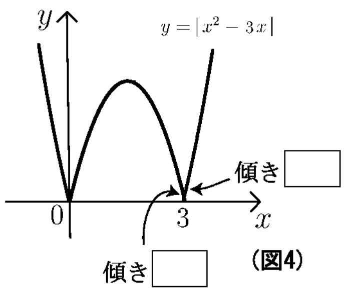
$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{|x^2 - 1| - |0|}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1+0} (x + 1) = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{|x^2 - 1| - |0|}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{1 - x^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1-0} (-x - 1) = -2$$

これは図 3 において、$x = 1$ の右側の傾きが 2 であり、左側の傾きが -2 であることを示している。左右の微分係数がちがうので $x = 1$ で微分可能ではない。

(注) 例の場合 $x = -1$ でも微分可能ではない。それ以外 $(x \neq \pm 1)$ では微分可能である。
一般にグラフがなめらかな曲線のときは微分可能であり、グラフが尖った先端では (左右の傾きがちがうため) 微分可能でない。

問　$f(x) = |x^2 - 3x|$ の場合に $x = 3$ における左右の微分係数を求め、図 4 の□内に傾きを表す数を入れよ。



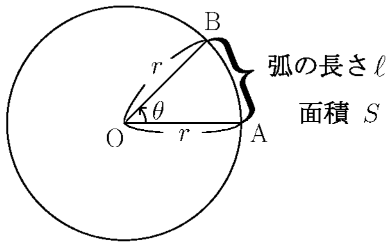
(図4)

$$f'_+(3) = \lim_{x \to 3+0} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} =$$

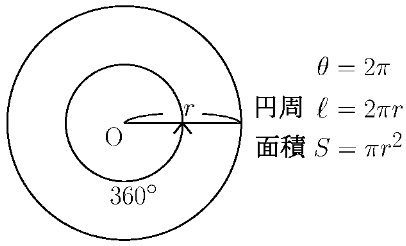
$$f'_-(3) = \lim_{x \to 3-0} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} =$$

＜弧度法の復習＞

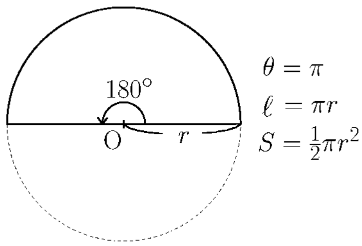
中心角 θ、半径 r の扇形 OAB
の弧の長さ ℓ と扇形 OAB の
面積 S を求めたい。



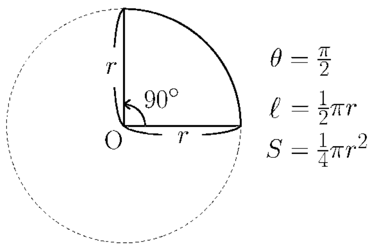
(1) $\theta = 2\pi$（ラジアン）$= 360^\circ$ のときは
　ℓ は円周の長さだから
　　$\ell = 2\pi r$
　であり S は円の面積だから
　　$S = \pi r^2$



(2) $\theta = \pi$（ラジアン）$= 180^\circ$ のときは
　(1) の半分であるから
　　$\ell = \pi r$
　　$S = \dfrac{1}{2}\pi r^2$



(3) $\theta = \dfrac{\pi}{2}$（ラジアン）$= 90^\circ$ のときは
　(1) の $\dfrac{1}{4}$ であるから
　　$\ell = \dfrac{1}{2}\pi r$
　　$S = \dfrac{1}{4}\pi r^2$



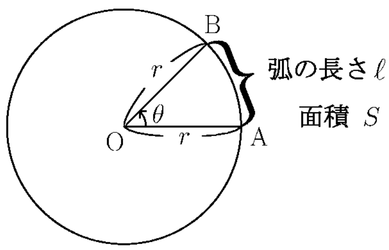
問 1 次の表を完成させよ。

度数法		60°	90°	120°		360°
弧度法 θ	$\frac{\pi}{4}$				π	
弧の長さ ℓ	$\frac{1}{4}\pi r$				πr	$2\pi r$
面積 S			$\frac{1}{4}\pi r^2$			πr^2

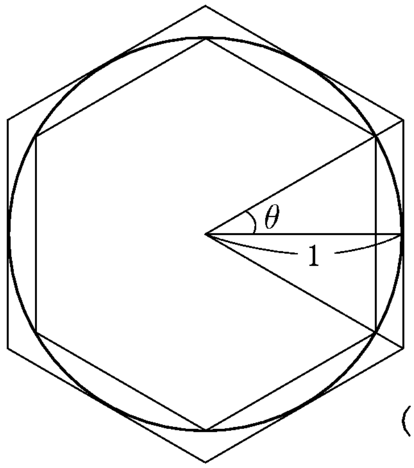
問 2 上の表を参考にして、一般に角度が θ（ラジアン）であるとき
弧の長さ ℓ と扇形 OAB の面積 S を r と θ を用いて表せ。

$\ell =$

$S =$



＜三角関数の極限１＞



(図1)

円周率πは半径1の円周の長さである。
アルキメデスは半径1の円に内接する正多角形と外接する正多角形の周の長さを計って円周率πを計算した。実際には正6角形から始めて正12角形、正24角形、48角形、96角形と計算して

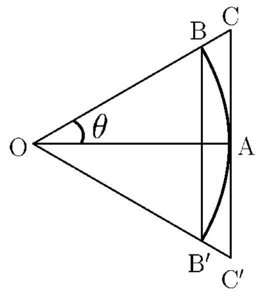
$$3\frac{10}{71}(=3.1408)<\pi<3\frac{1}{7}(=3.1429)$$

を得たのである。

アルキメデスの考えは図2の角θが小さくなるとき、弧BAB$'$の長さは内接多角形の辺BB$'$と外接多角形の辺CC$'$で近似でき、さらに

BB$'$の長さ＜弧BAB$'$の長さ＜CC$'$の長さ

がなりたつ。



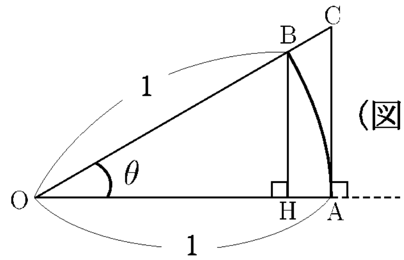
(図2)

ここではアルキメデスの考えを極限の式で表すことを目的にする。

図3において

ℓ_1 : 線分BHの長さ
ℓ_2 : 弧ABの長さ
ℓ_3 : 線分ACの長さ

とする。



(図3)

問１　ℓ_1とℓ_3の長さをθを用いた三角関数で表せ。

$\ell_1 =$　　　　　　　　　　,　　$\ell_3 =$

問２　ℓ_2の長さをθを用いて表せ。(ヒント:半径r、中心角θの弧の長さは前ページ問2のℓ)

$\ell_2 =$

問３　アルキメデスの考えより$\ell_1<\ell_2<\ell_3$である。この不等式をθで表し、単純化せよ。

問４　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$を利用して問3で得られた不等式を次の形にせよ。

$$\boxed{}<\theta<\boxed{}$$

$\boxed{}$の中を$\sin\theta$と$\cos\theta$だけを使って表せ。

＜三角関数の極限 2 ＞

前ページの結果より、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$(*) \qquad \boxed{\sin\theta \;<\; \theta \;<\; \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

がわかる。右側の不等式で $\dfrac{\cos\theta}{\theta} > 0 \ (\theta > 0,\ \cos\theta > 0)$ より

$$\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \implies \theta \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \left(\frac{\cos\theta}{\theta}\right) \implies \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$$

がわかる。

問 1　上の結果より、次の不等式が得られる。

$$(**) \qquad \cos\theta \;<\; \frac{\sin\theta}{\theta} \;<\; \boxed{\quad}$$

$(*)$ の左側の不等式を θ で割ることにより、□の中に適当な数字を入れよ。

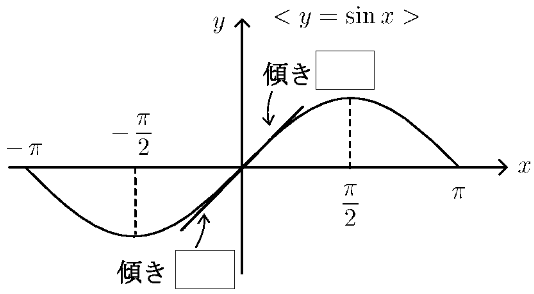
問 2　$\theta \to +0$（右極限）のとき $\cos\theta \to \cos 0 = 1$ である。不等式 $(**)$ から次の極限値を求めよ。

$$(1) \qquad \lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} =$$

問 3　$\theta \to -0$（左極限）のとき $\theta = -\theta_1$ とおくと $\theta_1 \to +0$ であるから

$$(2) \qquad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta_1 \to +0} \frac{\sin(-\theta_1)}{-\theta_1} =$$

となる。$\sin(-\theta_1) = -\sin(\theta_1)$ と (1) 式の結果を利用して、(2) 式の極限値を求めよ。



問 4　$f(x) = \sin x$ とする。$x = 0$ における左右の微分係数を求め、右図の□に傾きを入れよ。

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} =$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} =$$

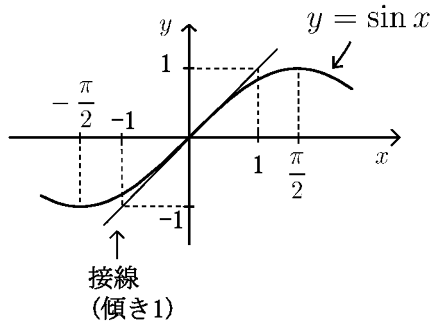
＜三角関数の極限 3＞

前ページの問 2, 問 3 の結果より

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \ , \qquad \lim_{\theta \to -0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

である。従って右極限と左極限が一致するから

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \ = \ 1}$$



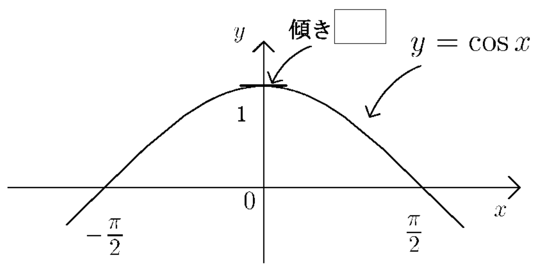
が成り立つ。

(注) 上の極限は「$y = \sin x$ のグラフの原点における接線の傾きが 1 である」ことを意味する。

例 1 $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)}$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(-\frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \right) = -1 \times \frac{0}{1+1} = 0$$

問 1 $f(x) = \cos x$ とする。 $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ を求め、右図の□に傾きを表す数を入れよ。



$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} =$$

例 2 加法定理 $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ と上の結果より

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin x \cos\theta + \cos x \sin\theta - \sin x}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left\{ \left(\sin x \right) \times \left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta} \right) + \left(\cos x \right) \times \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right) \right\} = (\sin x) \times 0 + (\cos x) \times 1 = \cos x$$

問 2 $f(x) = \sin x$ とする。 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

問 3 加法定理 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ と上の結果を用いて、次の極限値を求めよ。

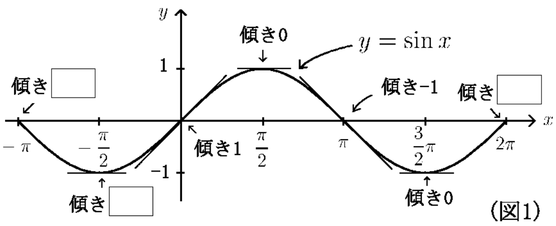
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos(x+\theta) - \cos x}{\theta} =$$

＜三角関数の導関数＞

導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

より $\sin x$ の導関数は次の極限値

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

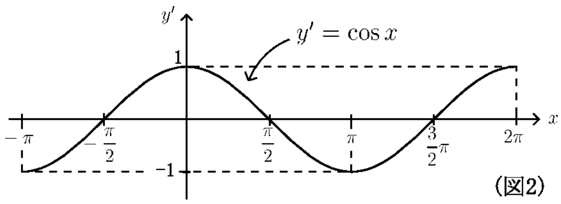


(図1)

である。ここで 0 に近づく変数 h を θ に変えると、

前ページの結果より

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin(x+\theta) - \sin x}{\theta} = \cos x$$



(図2)

であるから $\sin x$ の導関数は $\cos x$ である。

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

図 1 は $y = \sin x$ のグラフである。

図 1 の曲線の傾き (=接線の傾き) をグラフにしたものが図 2($y' = \cos x$) である。

$x = 0$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos 0 = 1$　,　$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$x = \pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos(\pi) = -1$　,　$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \sin x$ の傾き $= \cos\left(\dfrac{3}{2}\pi\right) = 0$

問 1　図 1 の□内に傾きを表す数字を入れよ。

問 2　前ページの問の結果を用いて $\cos x$ の導関数を求めよ。

$$(\cos x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

問 3　問 1 の結果から以下の傾きを求め、図 3 の□内に傾きを表す数字を入れよ。

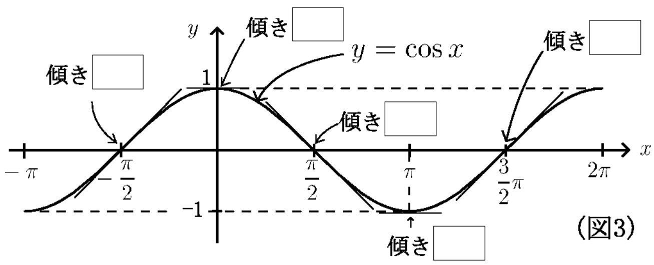
$x = 0$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

$x = \pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

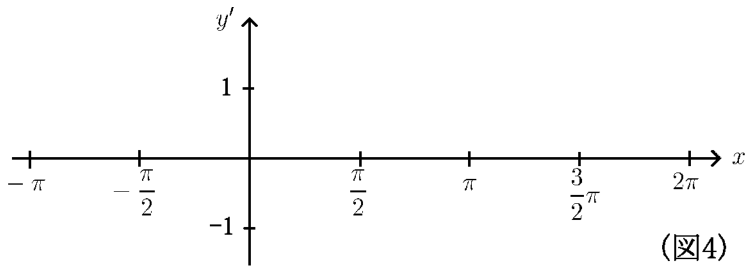
$x = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$y = \cos x$ の傾き=



(図3)

問 4　$y = \cos x$ の**導関数**のグラフを $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で図 4 に書け。



(図4)

＜ネピアの数＞

数列　$a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$　を考える。

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2 \ , \ a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25 \ , \ a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \fallingdotseq 2.37$$

$$a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{5^4}{4^4} \fallingdotseq 2.44 \ , \ a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 \fallingdotseq 2.48 \ , \ \cdots$$

$$a_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \fallingdotseq 2.59 \ , \ \cdots \ , \ a_{100} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} \fallingdotseq 2.70 \ , \ \cdots$$

$$a_{1000} = \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} \fallingdotseq 2.716 \ , \ \cdots \ , \ a_{10000} = \left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000} \fallingdotseq 2.718$$

となり少しずつ増えながらある一定の値に近づく、その極限値を e で表す。

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e は無理数であり、その値は

$$e = 2.71828182845\cdots$$

であることが知られている。e をネピアの数ということもある。

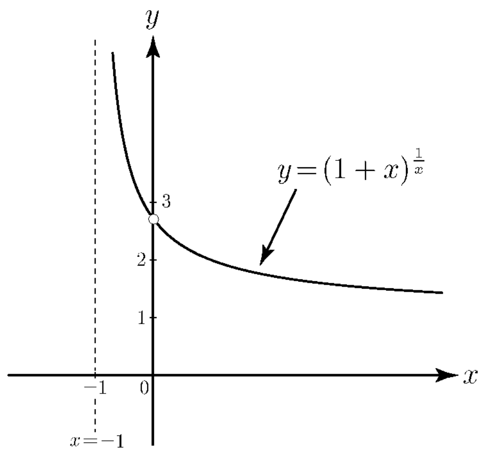
問　関数

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

を考える。この関数は $x=0$ と $x=-1$ で定義されていないが、グラフは右図のようになっている。
y 軸との交点 (y 切片) を求めたい。
y 切片は $x \to +0$ のときの極限値

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

である。この極限値を求めたい。



$x=0.1$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+0.1)^{\frac{1}{0.1}} = \left(1+\dfrac{1}{10}\right)^{10}$

$x=0.01$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+0.01)^{\frac{1}{0.01}} = \left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}$

(1)　x が以下の小数のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ を上のような分数の形にせよ。

$x=0.001$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$x=0.0001$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

(2)　$x=\dfrac{1}{n}$ とおいて次の極限を $n\to\infty$ の極限の式になおすことによって極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \ = \ \lim_{n\to\infty}$$

(注)　図より $\displaystyle\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \ = \ \lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ がわかる。(証明略)

＜ 対数関数の微分 ＞

例 関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(2)$ を求めたい。

定義から

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{\log_{10}(2+h) - \log_{10} 2\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10}\left(\frac{2+h}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10}\left(1 + \frac{h}{2}\right)$$

ここで $\dfrac{h}{2} = t$ とおくと、 $h \to 0$ のとき $t \to 0$ より

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_{10}\left(1 + \frac{h}{2}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \log_{10}(1+t)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} \log_{10}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\} = \frac{1}{2} \log_{10} e$$

(注) ここで前ページの結果 $\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ を使った。

問 1 例と同じ関数 $f(x) = \log_{10} x$ の微分係数 $f'(3)$ と $f'(x)$ を例と同様な極限計算で求めよ。ただし $x > 0$ とする。

$f'(3) =$

$f'(x) =$

問 2 問 1 の結果を参考にして、底が $a > 0$ $(a \neq 1)$ である対数関数 $f(x) = \log_a x$ の導関数を類推せよ。

(答) $\boxed{(\log_a x)' = \qquad}$

＜ 自然対数 ＞

問1 前ページの問の結果を用いて次の対数関数の導関数を求めよ。

(1) $(\log_{10} x)' =$ (2) $(\log_2 x)' =$

問2 底が e(ネピアの数 $\fallingdotseq 2.718$) である対数関数 $\log_e x$ の導関数を求め、できるだけ簡単にせよ。

(答) $(\log_e x)' =$

底がネピアの数 e である対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び、底を省略する。

$$\boxed{\log_e x = \log x} \qquad \text{(自然対数)}$$

今後底を省略した対数 $\log x$ は必ず自然対数を意味する。
(注) 常用対数 $\log_{10} x$ と区別するため、自然対数を $\ln x$ と書くこともある。

例 $\log(\sqrt{e}) = \log_e(\sqrt{e}) = \log_e(e^{\frac{1}{2}}) = \dfrac{1}{2}$

$\log(\dfrac{1}{e^2}) = \log_e(\dfrac{1}{e^2}) = \log_e(e^{-2}) = -2$

問3 次の自然対数の値を求めよ。

(1)$\log e$ (2) $\log(\sqrt[3]{e})$ (3)$\log\left(\dfrac{1}{e}\right)$ (4) $\log 1$

問4 問2の結果を使って自然対数 $\log x$ の導関数を求めよ。

$(\log x)' =$

問5 $f(x) = \log x$ のとき次の微分係数を求め、右図の□内に傾きを示す数を入れよ。

$f'\left(\dfrac{1}{e}\right) =$ ， $f'(1) =$

$f'(2) =$ ， $f'(e) =$