

高知工科大学
基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series **A**

No. **5**

内容

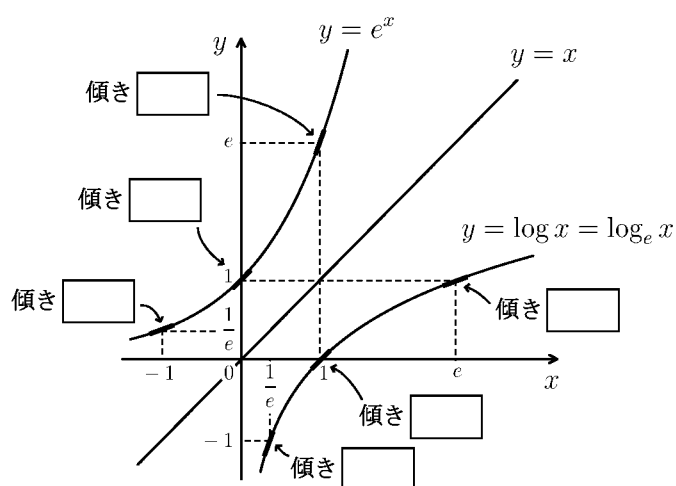
◎ 逆関数・合成関数

◎ 合成関数の微分

◎ 積・商の微分

◎ 不定積分

◎ 置換積分



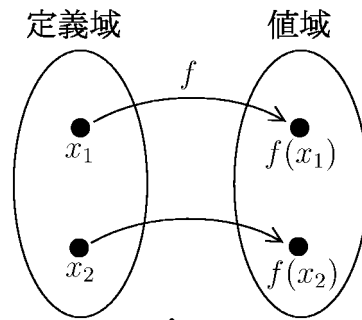
電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

< 1対1関数 >

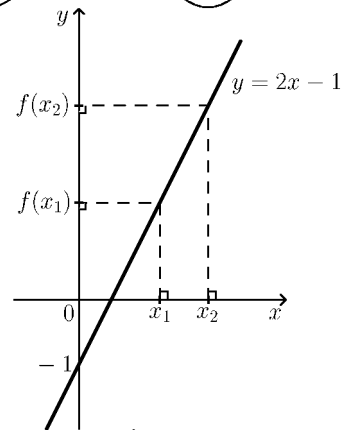
関数 $y = f(x)$ について、定義域内の x の値が異なれば、それに対応する y の値も異なるとき、つまり

(*) $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$

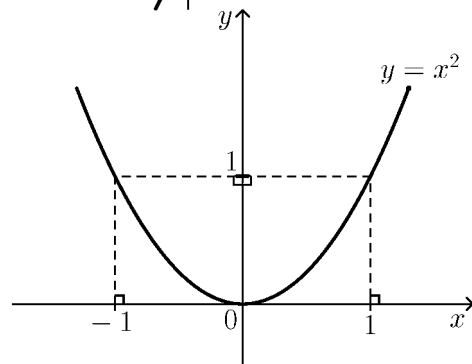
が成り立つとき、関数 $y = f(x)$ は 1対1であるという。



例 1 $f(x) = 2x - 1$ のとき、
関数 $y = f(x)$ は 1対1である。



例 2 $f(x) = x^2$ のとき、定義域を実数全体とすれば、関数 $y = f(x)$ は 1対1ではない。
なぜなら、 $x_1 = -1, x_2 = 1$ のとき
 $f(x_1) = f(x_2) = 1$
となり (*) 式が成立しないから。



(注) このような x_1, x_2 が 1組でもあれば 1対1ではない。

問 次の関数が 1対1であるかどうか判定せよ。

(1) $y = 3x - 2$

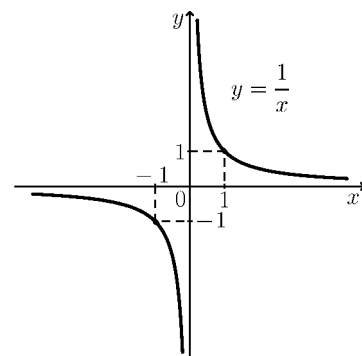
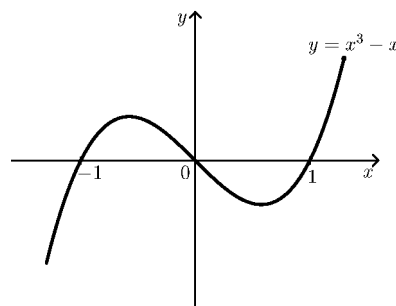
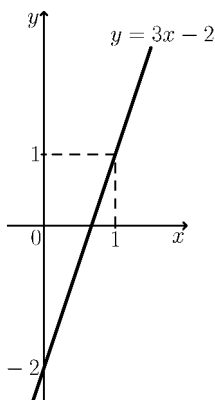
(2) $y = x^3 - x$

(3) $y = \frac{1}{x} (x \neq 0)$

(答) _____

(答) _____

(答) _____



< 逆関数 1 >

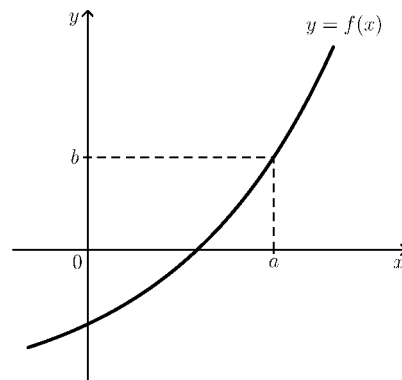
関数 $f(x)$ が 1 対 1 であるとき、 y の値 b に対して、

$$b = f(a)$$

となるような x の値 a がただ 1 つ定まる。このとき

$$a = f^{-1}(b)$$

と書く。



例 $f(x) = 2x - 1$ のとき、

関数 $y = f(x)$ は 1 対 1 である。

$$b = f(a)$$

とおくと、 $f(a) = 2a - 1$ より

$$b = 2a - 1$$

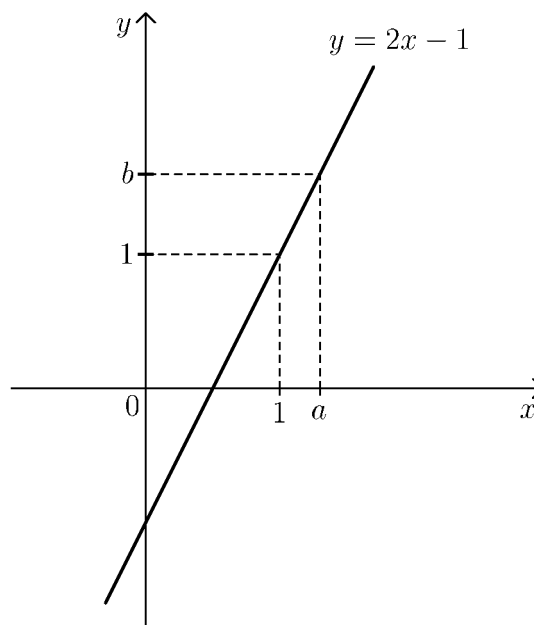
である。これを a について解くと

$$a = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。 $a = f^{-1}(b)$ であるから

$$f^{-1}(b) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}$$

となる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、関数 $y = f(x)$ はすべて 1 対 1 である。
このとき $f^{-1}(b)$ を b に関する式で表せ。

(1) $f(x) = 3x - 2$

(解)

(2) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

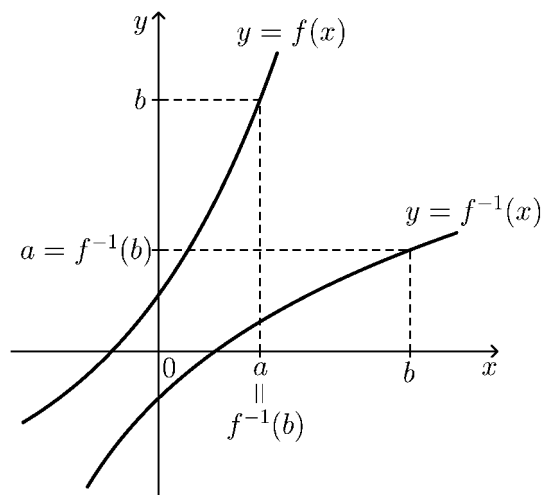
(解)

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

(解)

< 逆関数 2 >

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 のとき、 y の値 b に x の値 $f^{-1}(b)$ を対応させる関係は関数と考えられる。この関数を $y = f^{-1}(x)$ と表して、関数 $y = f(x)$ の逆関数という。



例 $f(x) = 2x + 1$ の逆関数を求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

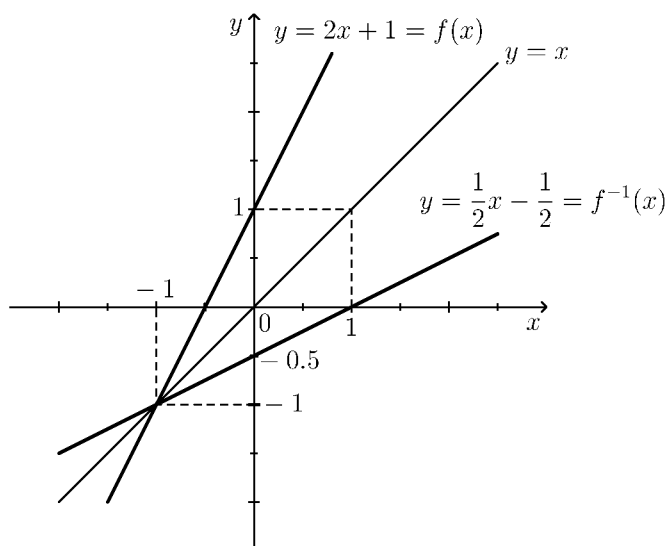
$$b = 2a + 1 \iff a = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2} = f^{-1}(b)$$

だから逆関数は

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

である。

元の関数 $y = f(x)$ と逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフを同じ座標平面に書くと、右図のように直線 $y = x$ に関して対称になる。



問 $f(x)$ が以下の場合に、逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(1) $f(x) = 3x + 2$

(2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$

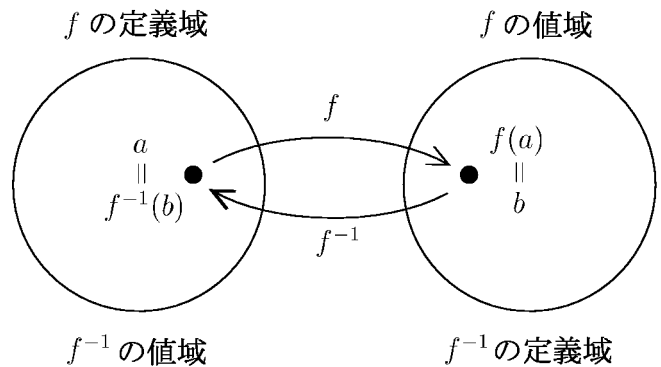
(解)

(解)

(解)

< 逆関数 3 >

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 であるとき、関数 f の値域は逆関数 f^{-1} の定義域であり、関数 f の定義域は逆関数 f^{-1} の値域になっている。



例 $f(x) = x^2 + 1$ のとき、 f の定義域を $x \geq 0$ に制限すれば $y = f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を以下のようにして求める。

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

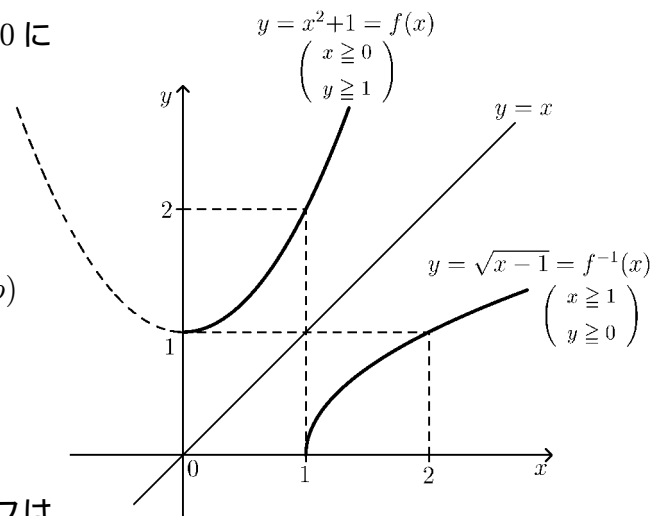
より

$$b = a^2 + 1 \iff a = \sqrt{b-1} = f^{-1}(b) \quad (a \geq 0, b \geq 1)$$

となる。 b を x でおきかえると、逆関数

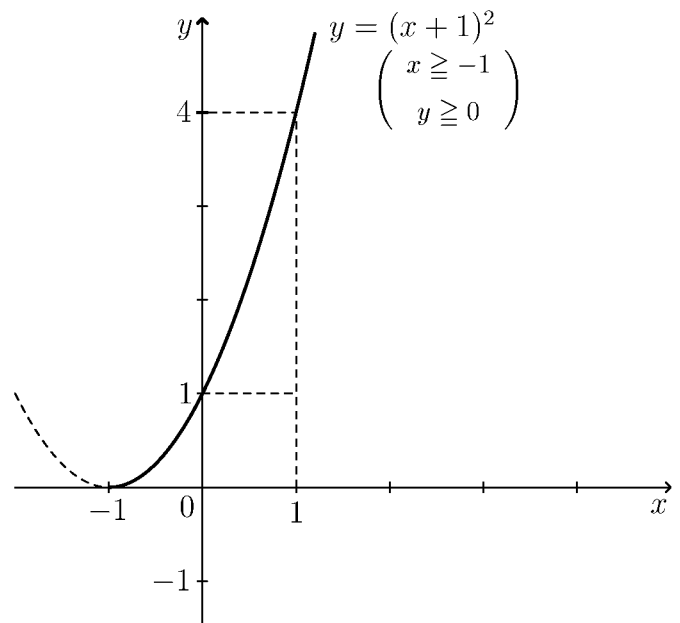
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} \quad (\text{定義域 } x \geq 1)$$

が求まる。 $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ のグラフは右図のように直線 $y = x$ に関し、対称になる。



問 $f(x) = (x+1)^2$ のとき f の定義域を $x \geq -1$ に制限すれば $y = f(x)$ は 1 対 1 になる。この逆関数を求め、グラフを右図に描け。

(解)



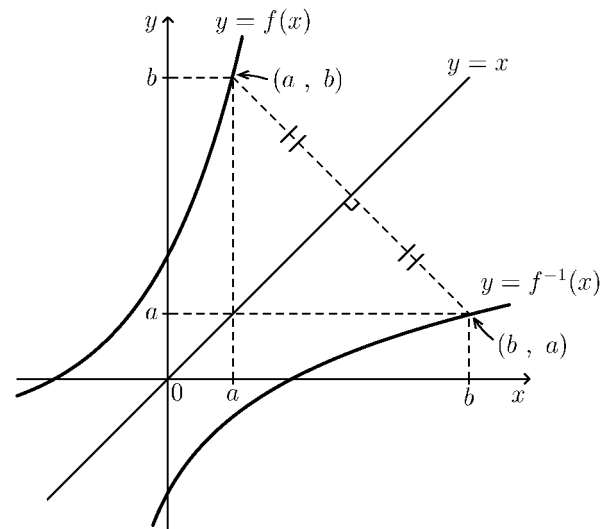
< 逆関数 4 >

関数 $y = f(x)$ が 1 対 1 であるとき、 $y = f(x)$ のグラフ上の点の座標を (a, b) とすると

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より、点 (b, a) は逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフ上の点である。

このことから、逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは、元の関数 $y = f(x)$ のグラフを、直線 $y = x$ に関して、対称に折り返したものになっている。



例 $f(x) = 3^x$ のとき、

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

より

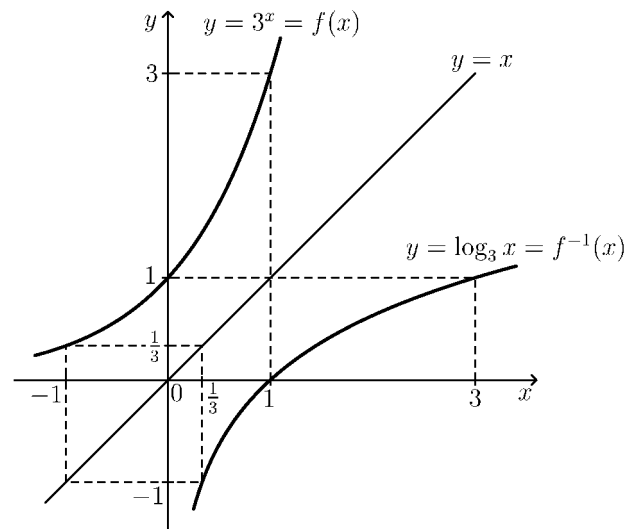
$$b = 3^a \iff a = \log_3 b = f^{-1}(b)$$

であるから、逆関数は

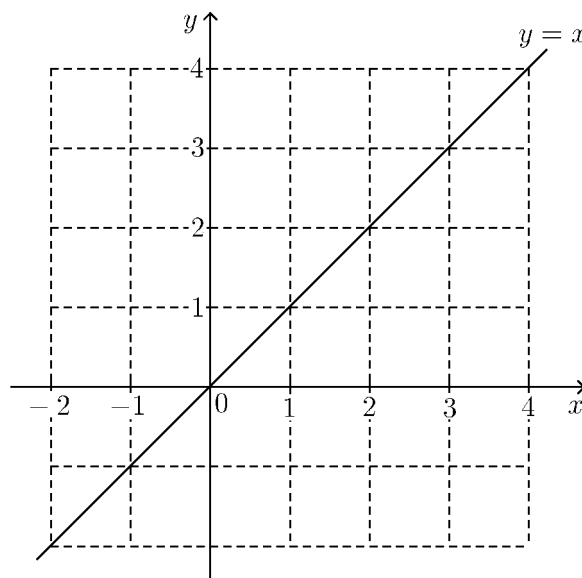
$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

である。対数関数 $y = \log_3 x$ は指数関数 $y = 3^x$ の逆関数である。

$y = \log_3 x$ の正確なグラフは、指数関数 $y = 3^x$ のグラフを直線 $y = x$ を対称軸として折り返すことによって求められる。

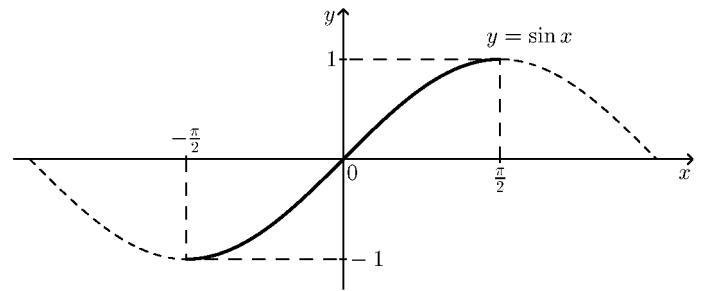


問 指数関数 $y = 2^x$ と対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフを同じ座標平面上に描け。



< 逆三角関数 1 >

正弦関数 $y = \sin x$ の通常の変域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。この関数の変域を $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に制限すると、1対1になる。このとき、関数



$$y = \sin x \quad (\text{変域: } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y = \sin^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arcsin x \quad (\text{変域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2})$$

(インバースサイン) (アークサイン)

と表す。 $y = \sin^{-1} x$ のグラフは、 $y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

問1 右の座標平面上に $y = \sin^{-1} x$ のグラフを描け。

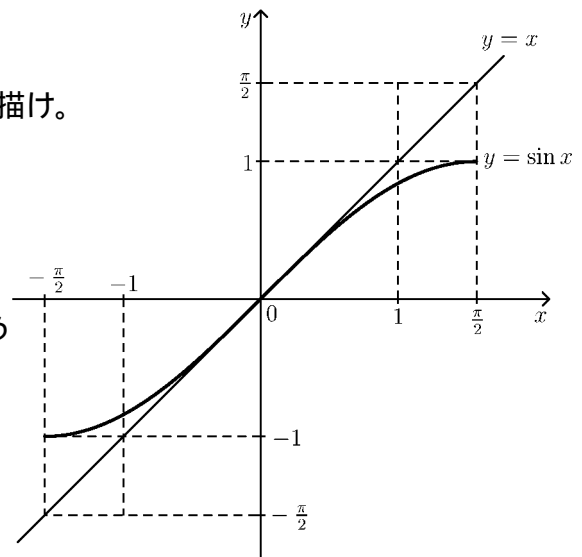
例 逆関数の定義より、

$$a = \sin^{-1} b \iff b = \sin a$$

である。例えば $\sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ の値 θ を求めようとすると、

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \iff \frac{1}{2} = \sin \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin \theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より



θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \theta$	-1				0	$\frac{1}{2}$			1

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ であるから (答) } \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$$

問2 表を完成させよ。

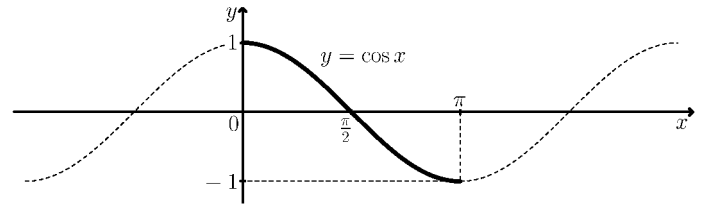
問3 次の値を求めよ。

$$(1) \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \quad (2) \sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \quad (3) \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

< 逆三角関数 2 >

余弦関数 $y = \cos x$ の通常の見義域は実数全体であり、値域は $-1 \leq y \leq 1$ である。この関数の見義域を $0 \leq x \leq \pi$ に制限すると、1対1になる。そのとき、関数

$$y = \cos x \quad (\text{見義域: } 0 \leq x \leq \pi, \text{ 値域: } -1 \leq y \leq 1)$$



の逆関数が存在して、これを、

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arccos x \quad (\text{見義域: } -1 \leq x \leq 1, \text{ 値域: } 0 \leq y \leq \pi)$$

(インバースコサイン) (アークコサイン)

と表す。 $y = \cos^{-1} x$ のグラフは、 $y = \cos x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。

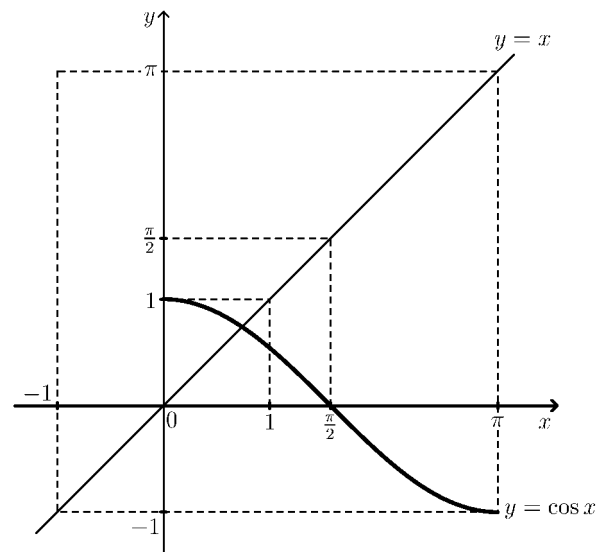
問 1 右の座標平面上に $y = \cos^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の見義より、

$$a = \cos^{-1} b \iff b = \cos a$$

である。例えば $\cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$ の値 θ を求めよとすると、

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \iff \frac{1}{2} = \cos \theta$$



より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で $\cos \theta$ が $\frac{1}{2}$ となる角度 θ を求める。右表より

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos \theta$	1			$\frac{1}{2}$	0				-1

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ であるから (答) } \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

問 2 表を完成させよ。

問 3 次の値を求めよ。

$$(1) \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \quad (2) \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \quad (3) \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

< 逆三角関数 3 >

正接関数 $y = \tan x$ の通常の実数定義域は $\frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数) 以外の実数であり、
 値域は実数全体である。この関数の
 定義域を $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ に制限すると、
 1対1になる。そのとき、関数

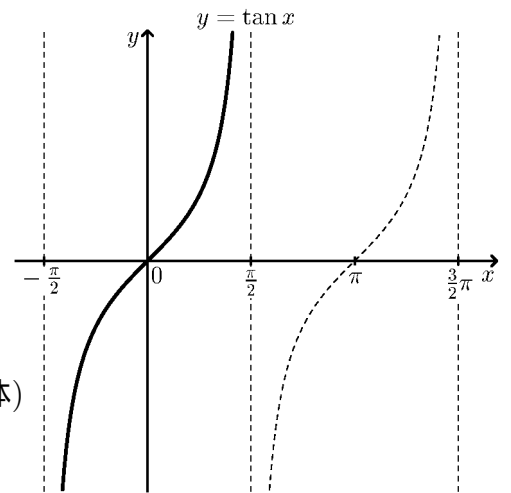
$$y = \tan x \quad (\text{定義域: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ 値域: 実数全体})$$

の逆関数が存在して、これを、

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{又は} \quad y = \arctan x \quad (\text{定義域: 実数全体, 値域: } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$$

(インバースタンジェント) (アークタンジェント)

と表す。 $y = \tan^{-1} x$ のグラフは、 $y = \tan x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に折り返したものである。



問1 右の座標平面上に $y = \tan^{-1} x$ のグラフを描け。

例 逆関数の定義より、

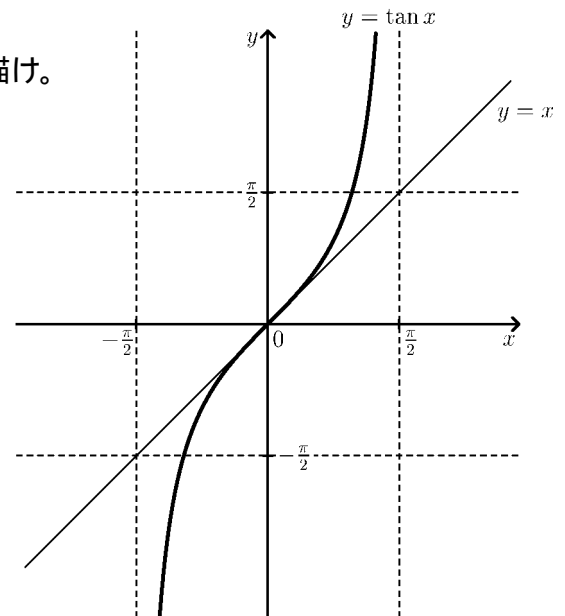
$$a = \tan^{-1} b \iff b = \tan a$$

である。例えば $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ の値 θ を
 求めようとするとき、

$$\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \iff \sqrt{3} = \tan \theta$$

より、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\tan \theta$ が
 $\sqrt{3}$ となる角度 θ を求める。右表より
 $\theta = \frac{\pi}{3}$ であるから

$$(\text{答}) \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$



θ	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan \theta$				0			$\sqrt{3}$

問2 表を完成させよ。

問3 次の値を求めよ。

$$(1) \tan^{-1}(1) = \quad (2) \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \quad (3) \tan^{-1}(-\sqrt{3}) =$$

< 合成関数 1 >

2つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について、関数 $f(g(x))$ や関数 $g(f(x))$ を考えることができる。これら関数を $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数という。

例1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

$$f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

注) $\sin(x^3) \neq \sin^3 x$ である。一般に $f(g(x))$ と $g(f(x))$ は一致しない。

問1 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が以下の場合に、合成関数 $g(f(x))$ と $f(g(x))$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(2) $f(x) = \tan x$, $g(x) = x + 2$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

(4) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \log_2 x$, $g(f(x)) =$, $f(g(x)) =$

例2 複雑な式の関数を簡単な関数の合成関数として表すことができる。

例えば

$$y = \log_{10}(x^2 + 3x)$$

は

$$f(x) = x^2 + 3x \quad , \quad g(x) = \log_{10} x$$

とおくと

$$y = \log_{10}(f(x)) = g(f(x))$$

問2 以下の関数を $g(f(x))$ の形にしたい。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の式を求めよ。

(1) $y = (x^2 - x + 2)^7$, $f(x) =$, $g(x) =$

(2) $y = \cos(2x + 3)$, $f(x) =$, $g(x) =$

(3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $f(x) =$, $g(x) =$

< 合成関数 2 >

2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成関数を

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

という記号で表すことがある。

例1 $f(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$ のとき

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = (\sin x)^3 = \sin^3 x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sin(x^3)$$

問1 次の合成関数を求めよ。

$$(1) \quad f(x) = 2x - 1 \quad , \quad g(x) = 3x - 2 \quad , \quad (f \circ g)(x) = \quad , \quad (g \circ f)(x) =$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 \quad , \quad g(x) = \cos x \quad , \quad (f \circ g)(x) = \quad , \quad (g \circ f)(x) =$$

$$(3) \quad f(x) = x^4 + 3x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad (f \circ g)(x) = \quad , \quad (g \circ f)(x) =$$

$$(4) \quad f(x) = 2^x \quad , \quad g(x) = \log_3 x \quad , \quad (f \circ g)(x) = \quad , \quad (g \circ f)(x) =$$

関数 $f(x)$ だけの合成関数を

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) \quad , \quad f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$$

のように書くことがある。

例2 $f(x) = 2x - 1$ のとき

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x - 1) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(4x - 3) = 2(4x - 3) - 1 = 8x - 7$$

問2 $f(x) = 3x - 2$ のとき、次の合成関数を求めよ。

$$f^2(x) = \quad , \quad f^3(x) =$$

問3 $f(x) = 2x - 1$ に対し

(1) 逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

$$f^{-1}(x) =$$

(2) 次の合成関数を求めよ。

$$(f^2 \circ f^{-1})(x) = f^2(f^{-1}(x)) =$$

$$(f^3 \circ f^{-1})(x) = f^3(f^{-1}(x)) =$$

< 合成関数 3 >

問1 次の合成関数を求めよ。

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ のとき $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

(2) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ のとき $(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

例1 $2^{\log_2 8} = 2^{\log_2(2^3)} = 2^3 = 8$

問2 次の値を求めよ。(ただし、 $x > 0$ とする)

(1) $2^{\log_2 4} =$ (2) $2^{\log_2 16} =$ (3) $2^{\log_2 32} =$ (4) $2^{\log_2 x} =$

問3 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ のとき次の合成関数を求めよ。

$(f \circ g)(x) =$, $(g \circ f)(x) =$

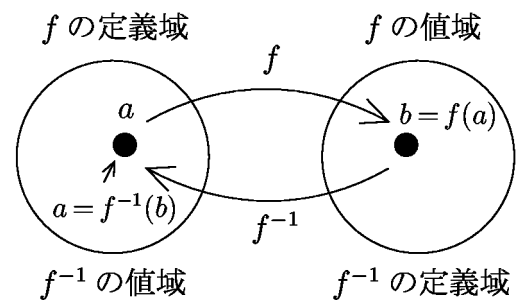
一般に関数 $f(x)$ が 1 対 1 関数のとき

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

であるから

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$



例2 $f(x) = 2^x$ の逆関数は $f^{-1}(x) = \log_2 x$ であるから

$$2^{\log_2 3} = f(\log_2 3) = f(f^{-1}(3)) = (f \circ f^{-1})(3) = 3$$

問4 次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10} 3}$ (2) $e^{\log 5}$

(3) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (4) $\tan(\tan^{-1}(1))$

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

等の記号で表す(全て同じ意味である)。 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ 等の記号は、変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。

変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

等の記号で表す。

例 $y = x^3 - 2x^2$ のとき $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき $\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき $\frac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は、変数が変わっても同様に使用できる。

問 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = x^2 - x + 3$ $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = 4 - 9.8t$ $\frac{dy}{dt} =$

(3) $\ell = 3t^2 - 2t$ $\frac{d\ell}{dt} =$

(4) $S = \pi r^2$ (π は円周率) $\frac{dS}{dr} =$

(5) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{dV}{dr} =$

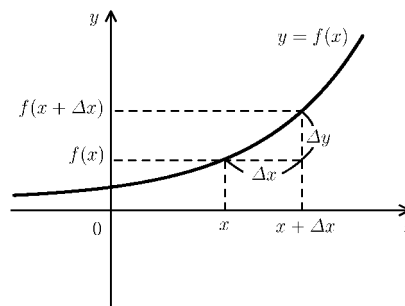
< 増分記号 Δ (デルタ) >

変数 x の増えた量を「 x の増分」といい、「 Δx 」という記号で表す。
 Δx は文字が 2 つであるが 1 つの量を表す。

関数 $y = f(x)$ と x の増分 Δx に対して、
 y の増分を

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

とおくと、導関数 $f'(x)$ は $\Delta x \rightarrow 0$ の
 ときの平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限だから $\frac{dy}{dx}$
 と書く。



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

増分記号 Δx は、変数 x の増えた量を表す。変数 x が他の文字変数に変わっても
 同様である。

例 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = (x^3)' = 3x^2$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^4 - t^4}{\Delta t} = (t^4)' = 4t^3$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} = (\sin u)' = \cos(u)$$

問 次の極限值を、微分の公式を使って求めよ。

(1) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^5 - x^5}{\Delta x} =$

(2) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin(t)}{\Delta t} =$

(3) $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\cos(u + \Delta u) - \cos(u)}{\Delta u} =$

< 合成関数の微分 1 >

例 関数 $y = \sin(x^3)$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$u = x^3$ とおくと $y = \sin(u)$ となる。

x の増分 Δx に対し、 u の増分および y の増分を

$$\Delta u = (x + \Delta x)^3 - x^3$$

$$\Delta y = \sin(u + \Delta u) - \sin(u) \quad \left(= \sin((x + \Delta x)^3) - \sin(x^3) \right)$$

とおくと、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ だから、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\sin(u + \Delta u) - \sin(u)}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \right) \\ &= (\sin u)' \times (x^3)' \\ &= \cos(u) \times 3x^2 = \cos(x^3) \times 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3) \end{aligned}$$

問 1 関数 $y = \cos(x^4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^4$ とおくと、 $y = \cos(u)$ となる。

$$\Delta u = (x + \Delta x)^4 - x^4$$

$$\Delta y = \cos(u + \Delta u) - \cos(u)$$

とおくと、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$ となるから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$$

となる。例にならって、残りの計算をせよ。

(解) $\frac{dy}{dx} =$

問 2 関数 $y = \sin(x^3 + 2x^2)$ の導関数を例にならって求めよ。

(解) $\frac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 2 >

問1 一般の合成関数 $y = g(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$$u = f(x) \text{ とおくと } y = g(u) \text{ となる。}$$

このとき、 $\frac{dy}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ を、 $\frac{dy}{du} \left(= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right)$ と $\frac{du}{dx} \left(= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right)$ で表せ。

(答) $\frac{dy}{dx} =$

例 関数 $y = (x^3 + 5x^2)^7$ の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めたい。

$$u = x^3 + 5x^2 \text{ とおくと } y = u^7 \text{ となる。よって}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (x^3 + 5x^2)' = 7u^6 \times (3x^2 + 10x) = 7(x^3 + 5x^2)^6 (3x^2 + 10x)$$

問2 次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $y = (x^2 - 2x + 5)^3$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \cos(2x - 3)$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \sin(x^5 - 2x^2)$, $\frac{dy}{dx} =$

< 合成関数の微分 3 >

例 1 $y = (x^3 + 4x)^7$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = u^7$ より

$$((x^3 + 4x)^7)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (x^3 + 4x)' = 7u^6 \times (3x^2 + 4) = 7(3x^2 + 4)(x^3 + 4x)^6$$

問 1 次の導関数をもとめよ。

$$(1) ((3x + 5)^7)' = \qquad (2) ((4x^2 + 5x)^8)' =$$

例 2 $y = (f(x))^7$ を考える。 $u = f(x)$ とおくと $y = u^7$ より

$$((f(x))^7)' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (u^7)' \times (f(x))' = 7u^6 \times f'(x) = 7(f(x))^6 \times f'(x)$$

問 2 自然数 n に対し、次の導関数を求めよ。

$$((f(x))^n)' =$$

例 3 $((x^5 + 6x)^8)' = 8(x^5 + 6x)^7 \times (x^5 + 6x)' = 8(x^5 + 6x)^7(5x^4 + 6) = 8(5x^4 + 6)(x^5 + 6x)^7$

問 3 次の導関数を求めよ。

$$(1) ((3x + 4)^5)' =$$

$$(2) ((4x^2 + 9x)^6)' =$$

$$(3) ((x^4 - 2x^3)^{10})' =$$

$$(4) ((3 + 4 \sin x)^5)' =$$

$$(5) ((x - 3 \cos x)^7)' =$$

< 合成関数の微分 4 >

例 1 $y = \sin(x^3 + 4x)$ を考える。 $u = x^3 + 4x$ とおくと $y = \sin u$ より

$$\begin{aligned} (\sin(x^3 + 4x))' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times (x^3 + 4x)' = \cos u \times (3x^2 + 4) \\ &= (3x^2 + 4) \cos(x^3 + 4x) \end{aligned}$$

例 2 $y = \cos(x^7 + 5x^3)$ を考える。 $u = x^7 + 5x^3$ とおくと $y = \cos u$ より

$$\begin{aligned} (\cos(x^7 + 5x^3))' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\cos u)' \times (x^7 + 5x^3)' = -\sin u \times (7x^6 + 15x^2) \\ &= -(7x^6 + 15x^2) \sin(x^7 + 5x^3) \end{aligned}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

$$(1) (\sin(5x - 4))' = \qquad (2) (\sin(x^6 + 7x^2 - 3))' =$$

$$(3) (\cos(4x + 3))' = \qquad (4) (\cos(x^5 - 2x + 1))' =$$

例 3 一般の関数 $f(x)$ に対して $\sin(f(x))$ の導関数を求めたい。

$y = \sin(f(x))$, $u = f(x)$ とおくと $y = \sin u$ より

$$(\sin(f(x)))' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\sin u)' \times (f(x))' = \cos u \times f'(x) = \cos(f(x)) \times f'(x)$$

よって

$$\boxed{(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x)}$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(\cos(f(x)))' =$$

例 4 $(\sin(x^3 - 4x^2 + 5x))' = \cos(x^3 - 4x^2 + 5x) \times (x^3 - 4x^2 + 5x)'$
 $= (3x^2 - 8x + 5) \cos(x^3 - 4x^2 + 5x)$

問 3 次の導関数を求めよ。

$$(1) (\sin(x^6 + 7x^5 - 3x^2 + 4x))' \qquad (2) (\sin(x^7 - 8x^5 + 4x^3 - 6x + 1))'$$

=

=

< 合成関数の微分 5 >

例 関数 $y = \log(x^2 + 3x + 4)$ の導関数を求めたい。

$u = x^2 + 3x + 4$ とおくと $y = \log u$ となる。

合成関数の微分法より

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log u)' \times (x^2 + 3x + 4)' \\ &= \frac{1}{u} \times (2x + 3) = \frac{1}{x^2 + 3x + 4} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

問 1 例にならって、次の関数の導関数 $\frac{dy}{dx}$ を求める。

(1) $y = \log(x^3 + 2x - 5)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(2) $y = \log(1 + \sin x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(3) $y = \log(5 - \cos x)$

$$\frac{dy}{dx} =$$

問 2 上の結果から、一般の場合を類推する。関数 $f(x)$ に対し合成関数 $y = \log(f(x))$ の導関数 $\frac{dy}{dx} = (\log(f(x)))'$ を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

(答)

$$(\log(f(x)))' =$$

例 2 $(\log(\cos x))' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

問 3 問 2 の結果を用いて次の導関数を求めよ。

(1) $(\log(x^2 + 2x))'$

=

(2) $(\log(x^6 + 3x^4))'$

=

(3) $(\log(\sin x))'$

=

< 対数微分法 1 >

一般の関数 $y = f(x)$ に対し、自然対数との合成関数 $\log y = \log(f(x))$ の導関数は (18 ページの結果より)

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ であるから、 } (\log y)' = \frac{y'}{y}$$

例 指数関数 $y = 2^x$ の導関数 y' を求めたい。両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(2^x) = x \log 2$$

である。両辺を x で微分すると ($x' = 1$ より)

$$\frac{y'}{y} = \log 2$$

となるから

$$y' = y \times \log 2 = 2^x \log 2$$

(注) 両辺の自然対数をとってから微分する方法を対数微分法という。

問 1 $y = 3^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 2 $a > 0$ ($a \neq 1$) に対し、 $y = a^x$ の導関数 y' を対数微分法で求めよ。

(解)

問 3 $a = e$ (ネピア数) のとき、指数関数 $y = e^x$ の導関数 $y' = (e^x)'$ をできるだけ簡単な式で求めよ。

(答) $(e^x)' =$

< 対数微分法 2 >

例 $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($= \sqrt{x^3}$) の導関数を対数微分法で求める。

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

両辺の自然対数をとる。

$$\log y = \log \left(x^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x}$$

より

$$y' = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times y = \frac{3}{2} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{3}{2} \sqrt{x} \right)$$

であるから

$$\left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

問 1 $y = x^{\frac{4}{3}}$ ($= \sqrt[3]{x^4}$) の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $\left(x^{\frac{4}{3}} \right)' =$

問 2 一般の実数 r に対し、関数 $y = x^r$ の導関数を対数微分法で求めよ。

(解)

(答) $(x^r)' =$

< x^r の微分 >

前のページより

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

が成り立つ。

例 1 $y = \sqrt[3]{x^5}$ の導関数を求めたい。分数指数の定義 $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$ から

$$(\sqrt[3]{x^5})' = (x^{\frac{5}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$$

問 1 次の導関数を求め、結果を根号 ($\sqrt{\quad}$, $\sqrt[n]{\quad}$ 等) で表せ。

$$(1) (\sqrt[4]{x^5})' = \quad (2) (\sqrt[5]{x^7})' = \quad (3) (\sqrt{x^3})' =$$

例 2 $y = \frac{1}{x^2}$ の導関数を求めたい。負の指数の定義 $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ から

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2 \times \frac{1}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$$

問 2 次の導関数を求め、結果を分数の形にせよ。

$$(1) \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \quad (2) \left(\frac{1}{x^4}\right)' = \quad (3) \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

例 3 $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

問 3 次の導関数を求め、結果を例 3 のように根号で表せ。

$$(1) (\sqrt[4]{x})' = \quad (2) (\sqrt[5]{x^4})' = \quad (3) (\sqrt{x})' =$$

例 4 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \left(= -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} \right)$

問 4 次の導関数を求め、結果を例 4 のように根号で表せ。

$$(1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \quad (2) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = \quad (3) \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

< 逆関数の微分 1 >

$f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は定義から次の関係がある。

$$y = f^{-1}(x) \iff x = f(y)$$

$\Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) - f^{-1}(x)$ とおくと $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta y \rightarrow 0$ より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

となる。

例 逆三角関数 $y = \sin^{-1} x$ の導関数を求めたい。

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y$$

より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(注) $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$

問1 例と同様にして、次の逆三角関数の導関数を求めよ。

$$y = \cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

問2 $\tan x$ の導関数の公式 $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ (30 ページ参照) を使って $\tan^{-1} x$ の導関数を求めよ。

$$y = \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

(ヒント) $\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$

< 逆関数の微分 2 >

問1 $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$ とおく。

(1) 次の導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ および微分係数を求め、右図の 内に傾きを示す数を入れよ。

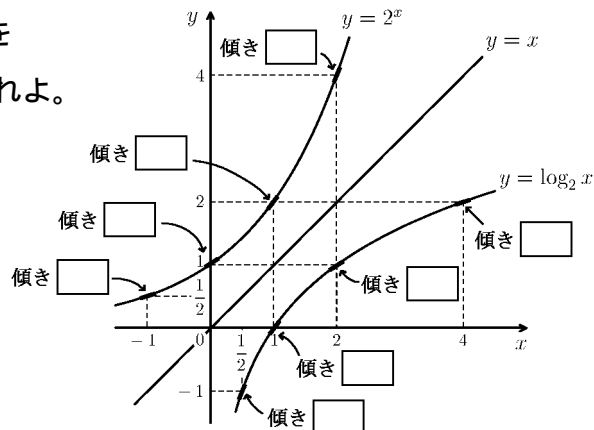
$$f'(x) = \quad , \quad g'(x) =$$

$$f'(-1) = \quad , \quad g'\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$f'(0) = \quad , \quad g'(1) =$$

$$f'(1) = \quad , \quad g'(2) =$$

$$f'(2) = \quad , \quad g'(4) =$$



(2) 対数の性質 $\log_2 e = \frac{1}{\log_e 2} = \frac{1}{\log 2}$ を使って、以下の微分係数を $f'()$ を用いて表せ。

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \quad , \quad g'(1) = \quad , \quad g'(2) = \quad , \quad g'(4) =$$

問2 1対1の関数 $f(x)$ に対し、その逆関数

を $g(x) = f^{-1}(x)$ とおく。 $y = g(x) = f^{-1}(x)$ とおくと

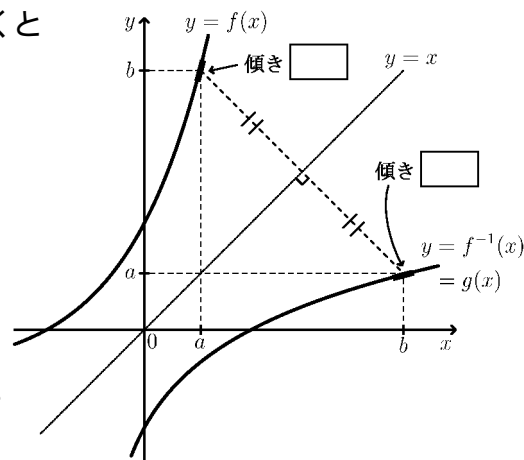
$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)$$

より

$$(*) \quad g'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)}$$

となる。 $a = f^{-1}(b)$ のとき (*) 式で $x = b$, $y = a$ とおくことによって $g'(b)$ を f' と a で表し、右図の 内に傾きを ($f'(a)$ を用いて) 記入せよ。

$$g'(b) =$$



問3 $f(x) = e^x$ とする。

(1) $f^{-1}(x)$ を求めよ。 $f^{-1}(x) =$

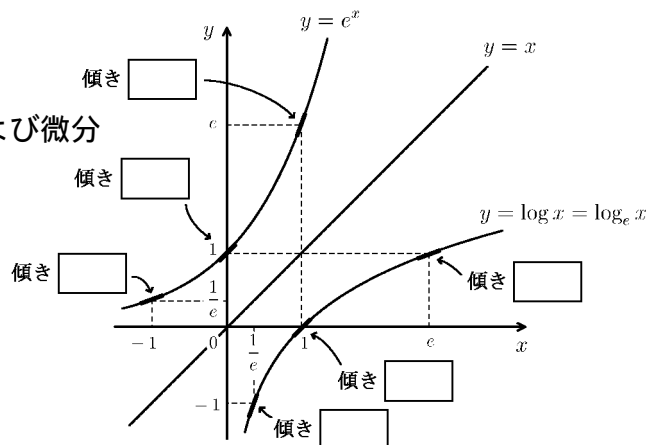
(2) $g(x) = f^{-1}(x)$ とする。以下の導関数および微分係数を求めよ。

$$f'(x) = \quad , \quad g'(x) =$$

$$f'(-1) = \quad , \quad g'\left(\frac{1}{e}\right) =$$

$$f'(0) = \quad , \quad g'(1) =$$

$$f'(1) = \quad , \quad g'(e) =$$



(3) 右図の 内に傾きをいれよ。

< 指数関数の微分 >

$a > 0$, $a \neq 1$ なす数 a に対して指数関数 a^x の導関数は

$$(a^x)' = a^x \log_e a = a^x \log a$$

である。特に $a = e (= 2.73 \dots)$ のときは $\log e = \log_e e = 1$ より

$$(e^x)' = e^x$$

である。この指数関数 e^x と他の関数との合成関数の導関数の求め方を示す。

例 1 $y = e^{x^2}$ の導関数を求めたい。 $u = x^2$ とおくと $y = e^u$ より

$$(e^{x^2})' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (e^u)' \times (x^2)' = e^u \times (2x) = e^{x^2} \times 2x = 2xe^{x^2}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{3x})' =$

(2) $(e^{x^2+3})' =$

(3) $(e^{-x^2+2x})' =$

問 2 例 1 を参考にして $y = e^{f(x)}$ の導関数を求め、 $f(x)$ と $f'(x)$ を用いて表せ。

$$(e^{f(x)})' =$$

例 2 $(e^{-3x^2})' = e^{-3x^2} \times (-3x^2)' = e^{-3x^2} \times (-6x) = -6xe^{-3x^2}$

問 3 次の導関数を求めよ。

(1) $(e^{-3x})' =$

(2) $(e^{-\frac{x^2}{2}})' =$

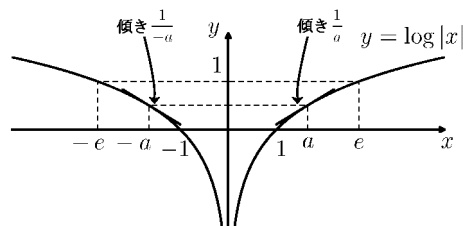
< $\log|x|$ の微分 >

例 1 関数 $y = \log|x|$ を考える。
絶対値の定義から、 $a > 0$ に対し

$$\log|-a| = \log a = \log|a|$$

より、 $y = \log|x|$ のグラフは右図の
ように y 軸対称となる。

この導関数は



(1) $x > 0$ のとき $|x| = x$ より $y' = (\log x)' = \frac{1}{x}$

(2) $x < 0$ のとき $|x| = -x$ より $y' = (\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

(1), (2) より $x \neq 0$ のとき

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

となる。

例 2 関数 $y = \log|\cos x|$ を微分したい。

$$u = \cos x \text{ とおくと } y = \log|u|$$

より合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (\log|u|)' \times (\cos x)' = \frac{1}{u} \times (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x \end{aligned}$$

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \log|\tan x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(2) $y = \log|x^2 + 3x|$, $\frac{dy}{dx} =$

(3) $y = \log|f(x)|$, $\frac{dy}{dx} =$

< 積の微分 1 >

例 $f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

であるから、 $\sin x$ と $\log x$ の導関数は次の極限

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

である。従って $\sin x \times \log x$ の導関数は

$$\begin{aligned} (\sin x \times \log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) \log(x+h) - \sin x \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) \log(x+h) - \sin x \log(x+h) + \sin x \log(x+h) - \sin x \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) \times \log(x+h) + (\sin x) \times \left(\frac{\log(x+h) - \log x}{h} \right) \right\} \\ &= (\sin x)' \times \log x + \sin x \times (\log x)' \end{aligned}$$

問 1 $\sin x$ と $\log x$ の微分の公式を使って例の計算を完成せよ。

$$(\sin x \times \log x)' =$$

問 2 $f(x) \times g(x)$ の導関数を求めたい。以下の 内に適当な文字式を入れよ。

$$\begin{aligned} &(f(x) \times g(x))' \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - \boxed{} + \boxed{} - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\boxed{} - \boxed{}}{h} \right) \times g(x+h) + f(x) \times \left(\frac{\boxed{} - \boxed{}}{h} \right) \right\} \\ &= \left(\boxed{} \right)' \times g(x) + f(x) \times \left(\boxed{} \right)' \end{aligned}$$

< 積の微分 2 >

前ページの結果より、関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積の導関数は

$$(f(x) \times g(x))' = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

である。

例 (1) $(x^3 \sin x)' = (x^3)' \times \sin x + x^3 \times (\sin x)'$
 $= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

(2) $(\cos^2 x)' = (\cos x \times \cos x)'$
 $= (\cos x)' \times \cos x + \cos x \times (\cos x)'$
 $= -\sin x \times \cos x + \cos x \times (-\sin x)$
 $= -2 \sin x \cos x$

問 次の関数の微分せよ。

(1) $(x \sin x)' =$

(2) $(x^2 \cos x)' =$

(3) $(\sin^2 x)' =$

(4) $(e^x \sin x)' =$

(5) $(\sin x \cos x)' =$

< 商の微分 1 >

例 導関数の定義 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ より

$$(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

である。 $\frac{1}{\sin x}$ の導関数は

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sin x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h)\sin x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - \sin(x+h)}{h}}{\sin(x+h)\sin x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}{\sin(x+h)\sin x} \\ &= \frac{-(\sin x)'}{(\sin x)^2} \end{aligned}$$

問 1 $\sin x$ の微分の公式を使って例の計算を完成させよ。

$$\left(\frac{1}{\sin x}\right)' =$$

問 2 導関数の定義 $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$ を用いて以下の 内に適当な文字を入れよ。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} \times \boxed{}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\boxed{} - \boxed{}}{h \times \boxed{} \times \boxed{}}}{\boxed{} \times \boxed{}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{\boxed{} - \boxed{}}{h}}{\boxed{} \times \boxed{}} \\ &= \frac{-\left(\boxed{}\right)'}{\left(\boxed{}\right)^2} \end{aligned}$$

< 商の微分 2 >

前ページの結果より

$$\left(\frac{1}{g(x)} \right)' = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

が成り立つ。

$$\text{例 (1)} \quad \left(\frac{1}{x^4} \right)' = -\frac{(x^4)'}{(x^4)^2} = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{x+\sin x} \right)' = -\frac{(x+\sin x)'}{(x+\sin x)^2} = -\frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^2}$$

(注) 例 (1) は $(x^n)' = nx^{n-1}$ の公式で

$$\left(\frac{1}{x^4} \right)' = (x^{-4})' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

と計算してよい。どちらで求めても同じ結果になる。

問 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad \left(\frac{1}{x} \right)' =$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{x^2} \right)' =$$

$$(3) \quad \left(\frac{1}{x^3} \right)' =$$

$$(4) \quad \left(\frac{1}{\cos x} \right)' =$$

$$(5) \quad \left(\frac{1}{e^x} \right)' =$$

< 分数関数の微分 >

問 1 27 ページ, 29 ページを参考にして、以下の \square 内に適当な文字式を入れよ。

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right)' = (\square)' \times \left(\frac{1}{\square}\right) + (\square) \times \left(\frac{1}{\square}\right)' \\ &= \frac{(\square)'}{\square} + (\square) \times \left(-\frac{(\square)'}{(\square)^2}\right) \\ &= \frac{(\square)' \times \square - \square \times (\square)'}{(\square)^2} \end{aligned}$$

例 $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \times \cos x - \sin x \times (\cos x)'}{(\cos x)^2}$

$$= \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

問 2 次の関数を微分せよ。

(1) $\left(\frac{x}{e^x}\right)' =$

(2) $\left(\frac{\sin x}{e^x}\right)' =$

(3) $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' =$

＜ 微分の練習 ＞

問 1 次の導関数の公式を書け。(ただし k は定数とする)

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (1) $(k)' =$ | (2) $(x^n)' =$ |
| (3) $(\sin x)' =$ | (4) $(\cos x)' =$ |
| (5) $(\log x)' =$ | (6) $(e^x)' =$ |
| (7) $(\sin^{-1} x)' =$ | (8) $(\tan^{-1} x)' =$ |

問 2 次の導関数の公式を $f(x), g(x), f'(x), g'(x)$ で表せ。(ただし k は定数とする)

- (1) 和の微分 $(f(x) + g(x))' =$
- (2) 差の微分 $(f(x) - g(x))' =$
- (3) 定数倍の微分 $(kf(x))' =$
- (4) 積の微分 $(f(x) \times g(x))' =$
- (5) 分数関数の微分 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

問 3 合成関数の微分の公式 $\boxed{(g(f(x)))' = g'(f(x)) \times f'(x)}$ を使って次の関数の導関数を $f(x)$ と $f'(x)$ で表せ。

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| (1) $((f(x))^n)' =$ | (2) $(\sin(f(x)))' =$ |
| (3) $(\cos(f(x)))' =$ | (4) $(\log f(x))' =$ |
| (5) $(e^{f(x)})' =$ | |

問 4 次の導関数を求めよ。

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (1) $(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 8)' =$ | (2) $(\sqrt{x})' =$ |
| (3) $(x\sqrt{x})' =$ | (4) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' =$ |
| (5) $(\sin x \cos x)' =$ | (6) $(\tan x)' =$ |
| (7) $(x \log x - x)' =$ | (8) $(-\log \cos x)' =$ |
| (9) $(e^{2x} \sin(3x))' =$ | (10) $\left(\log(x + \sqrt{x^2 + 1})\right)' =$ |

< 原始関数 >

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき、すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\frac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又、

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\frac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが、全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \quad (C \text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より、 x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \text{ は定数})$$

である。

問 次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 =

(2) x^5 の原始関数の一般形 =

(3) x^6 の原始関数の一般形 =

< 不定積分 1 >

$F'(x) = f(x)$ のとき、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり、その一般形は
 $F(x) + C$ (C は任意の定数)

であった。これを $f(x)$ の不定積分といい、

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち、

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 \int はインテグラル (*integral*) と読む。

例 (1) $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注) 記号 $\int \square dx$ は「微分すると \square になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問題を参考にして、次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^4 dx =$

(2) $\int x^5 dx =$

(3) $\int x^6 dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

< 不定積分 2 >

前ページより n が正の整数のとき

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

がなりたつ。微分の性質

$$(kf(x))' = k \times f'(x) \quad (k \text{ は定数})$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

より不定積分の性質

$$\int kf(x)dx = k \times \int f(x)dx \quad (k \text{ は定数})$$

$$\int \{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

が得られる。

$$\begin{aligned} \text{例 1} \quad \int (9x^2 - 4x + 3) dx &= 9 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 3 \int dx \\ &= 9 \times \frac{1}{3} x^3 - 4 \times \frac{1}{2} x^2 + 3 \times x + C \\ &= 3x^3 - 2x^2 + 3x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

(注1) 例の様な不定積分では、積分定数は1つにまとめて書いておけばよい。

(注2) $(x)' = 1$ より $\int 1 dx = x + C$ である。1 を略して $\int dx = x + C$ と書く。

問 1 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int 3x^3 dx = \quad (2) \int (5 - 4x) dx =$$

$$(3) \int (3x^2 - 10x + 7) dx =$$

$$\begin{aligned} \text{例 2} \quad \int (-2x^2 - 3x + 6) dx - \int (x^2 - 3x + 5) dx \\ = \int \{(-2x^2 - 3x + 6) - (x^2 - 3x + 5)\} dx = \int (-3x^2 + 1) dx = -x^3 + x + C \end{aligned}$$

問 2 例 2 を参考にして、次の不定積分を求めよ。

$$\int (4x^2 - 3x + 2) dx - 2 \int (2x^2 - 3x - 4) dx$$

=

< 不定積分 3 >

微分と不定積分は互いに逆の演算である。

例 1 < 微分 >

$$F'(x) = f(x)$$

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)' = x^n$$

< 不定積分 >

$$\Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

$$\Leftrightarrow \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

問 1 左の微分の式を求めて、右の不定積分の形に変えよ。

< 微分 >

$$(\sin x)' =$$

$$(-\cos x)' =$$

$$(\log|x|)' =$$

$$(e^x)' =$$

< 不定積分 >

$$\Leftrightarrow \int \cos x dx =$$

$$\Leftrightarrow \int \sin x dx =$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{x} dx =$$

$$\Leftrightarrow \int e^x dx =$$

例 2 (1) $\int (2 \cos x + 3 \sin x) dx = 2 \int \cos x dx + 3 \int \sin x dx = 2 \sin x - 3 \cos x + C$

(2) $\int \left(4e^x - \frac{5}{x}\right) dx = 4 \int e^x dx - 5 \int \frac{1}{x} dx = 4e^x - 5 \log|x| + C$

問 2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (4 \sin x - 5e^x) dx =$

(2) $\int \left(\frac{1}{2x} - 3 \cos x\right) dx =$

例 3 (1) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1}x^{-3+1} + C = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

問 3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{x^4} dx =$

(2) $\int \sqrt[3]{x} dx =$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx =$

< 合成関数の不定積分 >

例1 25 ページ問 (3) より

$$(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{微分})$$

となる。これを不定積分の形にすると

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad (\text{不定積分})$$

となる。

問1 左の微分の式を不定積分の式に変えよ。

(微分)

(不定積分)

$$(1) (e^{f(x)})' = e^{f(x)} \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(2) (\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$(3) (-\cos(f(x)))' = \sin(f(x)) \times f'(x) \quad \Longleftrightarrow$$

例2 (1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = \int \frac{(x^2+3x)'}{x^2+3x} dx = \log|x^2+3x| + C$

(2) $\int 3x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^{x^3+1} \times (x^3+1)' dx = e^{x^3+1} + C$

(3) $\int (2x-1) \sin(x^2-x) dx = \int \sin(x^2-x) \times (x^2-x)' dx = \cos(x^2-x) + C$

問2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{4x^3+5}{x^4+5x} dx$

(2) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

(3) $\int (2x+3)e^{x^2+3x} dx$

(4) $\int (-x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

(5) $\int 4x^3 \cos(x^4+3) dx$

(6) $\int (3x-2) \sin\left(\frac{3}{2}x^2-2x\right) dx$

< 積分記号 >

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\frac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し、積分記号 $\int \square dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。
変数 x を変数 t に換えれば、

$$\frac{d}{dt}(F(t)) = f(t) \text{ のとき } \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1 $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ より $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = 3t^2 \text{ より } \int 3t^2 dt = t^3 + C$$

$$\frac{d}{du}(u^3) = 3u^2 \text{ より } \int 3u^2 du = u^3 + C$$

例 2 (1) $\int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (10 - 9.8t) dt =$

(2) $\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\int e^u du =$

(4) $\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\int \cos u du =$

< 置換積分 1 >

積分変数を u にした不定積分の公式は以下ようになる。

$$\int e^u du = e^u + C, \quad \int \frac{1}{u} du = \log |u| + C$$

$$\int \cos u du = \sin u + C, \quad \int \sin u du = -\cos u + C$$

$$\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C \quad (\text{ただし } n \neq -1)$$

この公式さえ覚えておけば、37 ページの合成関数の積分の公式は覚える必要がない。

例 1 $\int e^{f(x)} f'(x) dx$ を考える。

$u = f(x)$ とおくと $f'(x) = \frac{du}{dx}$ ($u = f(x)$ を x で微分) となる。すると

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx$$

と書ける。そこで形式的に

$$\frac{du}{dx} dx = du$$

とおくと

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{f(x)} + C$$

例 2 $\int \cos(f(x)) f'(x) dx$ を考える。上と同様に $u = f(x)$ とおくと

$$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \int \cos(u) \frac{du}{dx} dx = \int \cos(u) du = \sin u + C = \sin(f(x)) + C$$

このように積分変数を x から u におきかえる方法を置換積分法という。

問 上の例と同様に $u = f(x)$ において、合成関数の積分の公式を導け。
(式変形を書くこと)

(1) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx =$

(2) $\int \sin(f(x)) f'(x) dx =$

(3) $\int (f(x))^n f'(x) dx =$

< 置換積分 2 >

例1 不定積分 $\int e^{3x-2} dx$ を考える。

$$u = 3x - 2 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (3x - 2)' = 3 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

となる。ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3 \implies du = 3dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3}du}$$

とおくと

$$\int e^{3x-2} dx = \int e^u \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x-2} + C$$

例2 定数 a, b ($a \neq 0$) に対し $\int e^{ax+b} dx$ を考える。

$$u = ax + b \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = a \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = a dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a} du}$$

とおくと

$$\int e^{ax+b} dx = \int e^u \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int e^u du = \frac{1}{a} e^u + C = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

がわかる。

例3 定数 a, b ($a \neq 0$) に対し $\int \cos(ax+b) dx$ を考える。上と同様に $u = ax + b$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = a \implies du = a dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{a} du}$$

より

$$\int \cos(ax+b) dx = \int \cos(u) \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int \cos(u) du = \frac{1}{a} \sin(u) + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$$

問1 上と同様にして定数 a, b ($a \neq 0$), ($n \neq -1$) に対して $u = ax + b$ とおくことにより次の不定積分を求めよ。(式変形を書くこと)

$$(1) \int \frac{1}{ax+b} dx =$$

$$(2) \int \sin(ax+b) dx =$$

$$(3) \int (ax+b)^n dx =$$

問2 次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{4x+5} dx$$

$$(2) \int \cos(3x-5) dx$$

$$(3) \int \frac{1}{5x+6} dx$$

$$(4) \int \sin(2x+\pi) dx$$

$$(5) \int (8x+7)^5 dx$$

$$(6) \int \frac{1}{(5x+6)^2} dx$$

< 置換積分 3 >

例1 $\int 3x^2 e^{x^3} dx$ を考える。

$$\boxed{u = x^3} \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^3)' = 3x^2 \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \implies du = 3x^2 dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とおくと

$$\int 3x^2 e^{x^3} dx = \int 3x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int e^{x^3} du = \int e^u du = e^u + C = e^{x^3} + C$$

例2 $\int x^2 e^{x^3} dx$ を考える。上と同様に $x^3 = u$ とおき

$$\boxed{dx = \frac{1}{3x^2} du}$$

とすると

$$\int x^2 e^{x^3} dx = \int x^2 e^{x^3} \frac{1}{3x^2} du = \int \frac{1}{3} e^{x^3} du = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

例3 $\int x \cos(x^2 + 1) dx$ を考える。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = (x^2 + 1)' = 2x \quad (u \text{ を } x \text{ で微分})$$

ここで形式的に

$$\frac{du}{dx} = 2x \implies du = 2x dx \implies \boxed{dx = \frac{1}{2x} du}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int x \cos(x^2 + 1) dx &= \int x \cos(x^2 + 1) \frac{1}{2x} du = \int \frac{1}{2} \cos(u) du = \frac{1}{2} \int \cos(u) du \\ &= \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x e^{x^2+1} dx =$

(2) $\int x^3 e^{x^4} dx =$

(3) $\int x^2 \cos(x^3 + 2) dx =$

(4) $\int x \sin(x^2 + 3) dx =$

(5) $\int \frac{x}{x^2 + 3} dx =$

(6) $\int x(x^2 + 1)^5 dx =$