高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2002年度版)
Series A
$No.\ 6$

内容

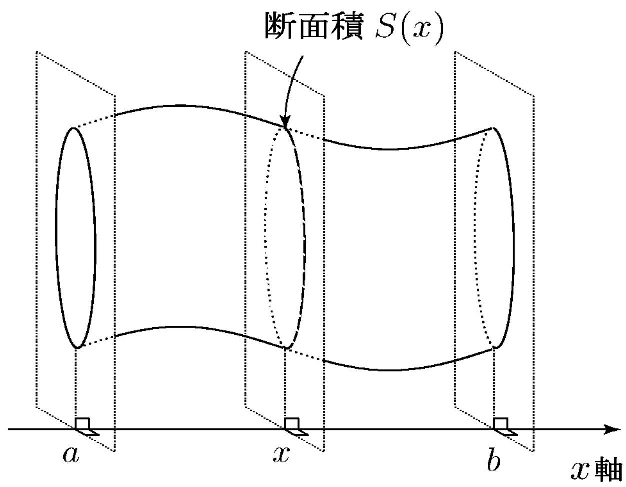
◎ 和の記号 $\sum$

◎ 区分求積法

◎ 定積分

◎ 面積

◎ 体積



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

＜部分積分法 1 ＞

例題 $\displaystyle\int x\cos dx$ を求めよ。

(解) 微分して $x\cos x$ になる関数の候補として $x\sin x$ を考える。積の微分法より

$$
\begin{aligned}
(x\times\sin x)' &= (x)'\times(\sin x)+(x)\times(\sin x)' \\
&= 1\times\sin x + x\times\cos x
\end{aligned}
$$

となる。これを式変形すると

$$x\cos x = (x\times\sin x)' - 1\times\sin x$$

となる。この式の両辺を積分すると

$$
\begin{aligned}
\int x\cos dx &= x\times\sin x - \int 1\times\sin x dx \\
&= x\sin x + \cos x + C
\end{aligned}
$$

注) $(x\times\sin x)'$ を積分すると $x\times\sin x$ になる。

微分と積分は逆の操作であり、微分したものを積分すると元にもどる。

問 積の微分法の公式より

$$\big(f(x)\times g(x)\big)' = f'(x)\times g(x) + f(x)\times g'(x)$$

である。これを式変形すると

$$f(x)\times g'(x) = \big(f(x)\times g(x)\big)' - f'(x)\times g(x)$$

である。この両辺を積分することにより、次の不定積分を $g'(x)$ を使わないで表せ。

$$\int f(x)\times g'(x)dx =$$

＜ 部分積分法 2 ＞

前ページ 問より

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx}$$

が成り立つ。この公式を利用する方法を**部分積分法**という。

例 1 $\displaystyle\int (2x+1)\sin x dx$

$$= \int (2x+1) \times (-\cos x)' dx = (2x+1) \times (-\cos x) - \int (2x+1)' \times (-\cos x) dx$$

$$= -(2x+1)\cos x + \int 2\cos x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$$

例 2 $\displaystyle\int \log x dx = \int (\log x) \times 1 dx = \int (\log x) \times (x)' dx = (\log x) \times x - \int (\log x)' \times x dx$

$$= (\log x) \times x - \int \frac{1}{x} \times x dx = x\log x - \int 1 dx = x\log x - x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (3x-2)\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int xe^x dx$

(3) $\displaystyle\int (x^2+1)\cos x dx$

(4) $\displaystyle\int (\log x) \times x dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って、簡単な不定積分に直してから積分する。特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}$$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は、右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

＜不定積分の検証＞

不定積分 $\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには、右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1 $\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\big((x^3+1)^5\big)' = \frac{1}{15}\times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3}\times(x^3+1)^4\times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい**。

例 2 $\displaystyle\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$\big(\log(\cos x)\big)' = \frac{1}{\cos x}\times(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\times(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より**正しくない**。

例 3 $\displaystyle\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\big(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\big)' = -(2x+1)'\times\cos x - (2x+1)\times(\cos x)' + 2\times(\sin x)'$$
$$= -2\cos x - (2x+1)\times(-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$$

より**正しい**。

問 次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^3dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

＜数列の類推＞

例題 奇数列 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$ の第 n 項までの和を

$$a_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n-1)$$

とする。第 5 項までを求め、一般項を類推せよ。

(解) $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$, $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$,

$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, $a_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

より $a_n = n^2$ と類推される。

問 1 2 つの数列

$$a_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \quad , \quad b_n = \frac{6}{n \times (2n+1)} a_n$$

に対し、共に第 5 項まで求め、b_n の一般項を類推せよ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

問 2 2 つの数列

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad , \quad b_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

に対し、共に第 5 項まで求め、b_n を a_n で表せ。

$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$ $a_5 =$

$b_1 =$ $b_2 =$ $b_3 =$ $b_4 =$ $b_5 =$

$b_n =$

＜ 和の記号 $\sum$(シグマ) 1 ＞

数列の和を表すのに、記号 $\sum$ を使って、次のように書くこともある。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

ここで a_k は数列の第 k 項を表し、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ は、k が 1, 2, 3, $\cdots$, n とかわるときの a_k をすべて加えることを表す記号である。

$\sum$ は、(アルファベットの s の大文字)S に相当するギリシャ文字で、シグマと読む。

例 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

② $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$

⑤ $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k-2) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

⑥ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

問 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。(和は計算しなくてもよい)

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} k^4$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k+1)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} (5k-12)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} 1$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 2 >

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = \sum_{k=1}^{10} a_n$$

のように記号 $\sum$ を使うと、和が簡単に書ける。

例 1 (1) $2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$

(2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2$ は第 k 項が $(2k-1)^2$ である数列の初項から第 50 項までの和だから

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 99^2 = \sum_{k=1}^{50} (2k-1)^2$$

問 1 次の和を、$\sum$ を使って表せ。

(1) $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n =$

(2) $1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + \cdots + (2n-1)2n =$

(3) $1 + 4 + 7 + \cdots + 16 =$

(4) $5 + 10 + 15 + \cdots + 100 =$

$\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k$ は数列 $\{a_k\}$ の第 m 項から第 n 項までの和を表す。

例 2 (1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

(2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{6} (3k-2) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^n = 1 + 3 + 9 + \cdots + 3^n$

問 2 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。(和は計算しなくてもよい)

(1) $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (k^2 - 8)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=4}^{8} (3k-2)(k-3)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^k$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 3 >

記号 $\sum$ の定義から次の性質がわかる。

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\\ \sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k\quad(c\text{ は定数})\end{gathered}}$$

また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 個の和}}=n$ と等差数列の和 (ワークブック Ser.A , *No.*4) の結果より

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}1=n}\quad,\quad\boxed{\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}}$$

が成り立つ。

例 1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}+3\times n=2n^2+5n$

問 1 次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(8k-5)=$

例 2 $1+5+9+13+\cdots+(4n-3)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(4n-3)=4\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)-3\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3\times n=2n^2-n$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$

(2) $2+7+12+17+\cdots+(5n-3)=$

(3) $3+10+17+24+\cdots+(7n-4)=$

$<$ 和の記号 $\sum$(シグマ) 4 $>$

5 ページ問 1 の結果より

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

が成り立つ。

問 1 上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^2$

$$=\frac{10\times(10+1)\times(2\times 10+1)}{6}=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$=\frac{(n-1)\big((n-1)+1\big)\big(2(n-1)+1\big)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2=$

(2) $1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2+(n+1)^2=$

< 和の記号 $\sum$(シグマ) 5 >

5 ページ問 2 の結果より

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$$

が成り立つ。

問 1　上の公式を $\sum$ を使って表せ。

例 (1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{10}k^3$

$$=\left\{\frac{10\times(10+1)}{2}\right\}^2=55^2=3025$$

(2)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}k^3$

$$=\left\{\frac{(n+1)\bigl((n+1)+1\bigr)}{2}\right\}^2=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2$$

問 2　次の和を求めよ。

(1)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+7^3=$

(2)　$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=$

＜和の記号 $\sum$(シグマ) 6 ＞

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を $\displaystyle\sum_{1 \leqq k \leqq n} a_k$ などと記す場合もある。また $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ は、

k 以外の文字を使って、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$ のように書いてもよい。

例 1 $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$\sum_{j=2}^{6} 2^j = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

問 1 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{i=2}^{4} x_i =$

(2) $\displaystyle\sum_{j=3}^{6} y_i =$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 =$

(4) $\displaystyle\sum_{j=2}^{n} j^3 =$

例 2 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=2}^{4} (x_i + y_j) \right\} = \sum_{i=1}^{3} \{(x_i + y_2) + (x_i + y_3) + (x_i + y_4)\}$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + y_2) + (x_1 + y_3) + (x_1 + y_4) \\ &\quad + (x_2 + y_2) + (x_2 + y_3) + (x_2 + y_4) \\ &\quad + (x_3 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_3 + y_4) \end{aligned}$$

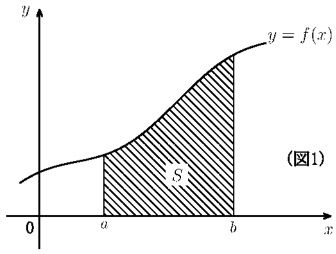
(注) 例 2 の和を $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=2}^{4} (x_i + y_j) = \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 3 \\ 2 \leqq j \leqq 4}} (x_i + y_i)$ 等で表すこともある。

問 2 次の和を $\sum$ を使わないで表せ。

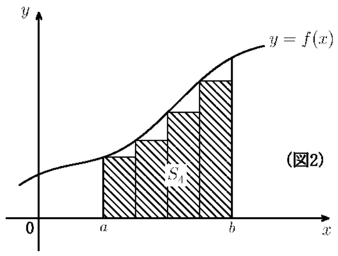
$$\sum_{i=2}^{4} \left\{ \sum_{j=4}^{5} (x_i \times y_i) \right\} =$$

＜区分求積法 1 ＞

曲線で囲まれた領域の面積を求める方法の 1 つとして以下で述べる区分求積法を紹介する。関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ の範囲で正 $(f(x) > 0)$ でかつ増加関数とする。図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。



(図1)

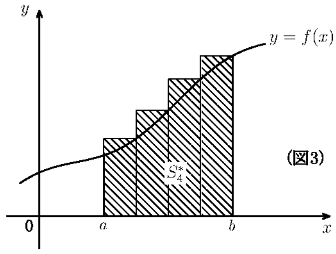


(図2)

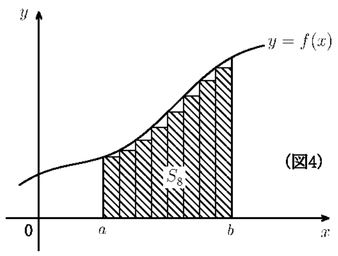
図 2 と図 3 は a から b までを 4 等分して階段状の領域 (斜線部分) の面積を S_4 と S_4^* とする。図より

$$S_4 < S < S_4^*$$

である。



(図3)

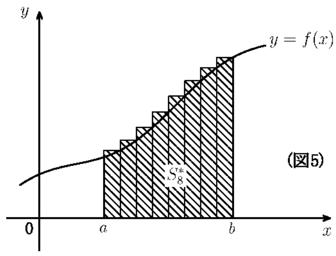


(図4)

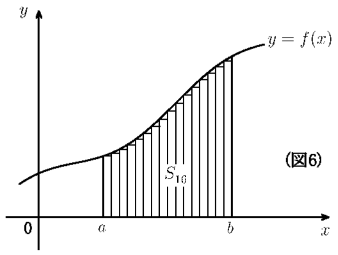
図 4 と図 5 は a から b までを 8 等分し、斜線部分の面積を S_8 と S_8^* とする。図より

$$S_4 < S_8 < S < S_8^* < S_4^*$$

である。



(図5)

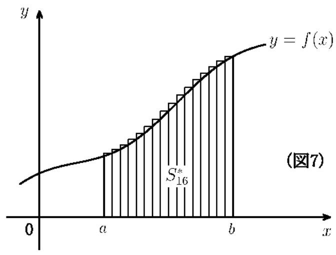


(図6)

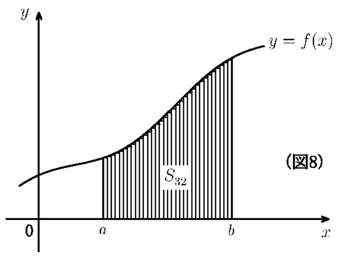
図 6 と図 7 は a から b までを 16 等分し、階段状の領域の面積を S_{16} と S_{16}^* とする。図より

$$S_8 < S_{16} < S < S_{16}^* < S_8^*$$

である。



(図7)

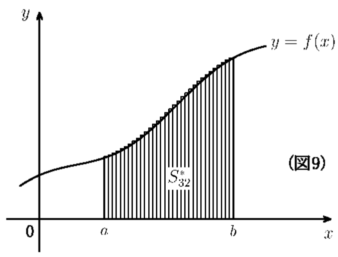


(図8)

図 8 と図 9 は a から b までを 32 等分し、階段状の領域の面積を S_{32} と S_{32}^* とする。図より

$$S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^*$$

である。



(図9)

以上より $S_4 < S_8 < S_{16} < S_{32} < S < S_{32}^* < S_{16}^* < S_8^* < S_4^*$ である。面積 S に最も近いのが S_{32} と S_{32}^* である。等分を細かくしていくほど S に近い値がわかる。そこで a から b までを n 等分し、階段状の領域を作り、その面積を S_n と S_n^* とおくと

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n < \cdots < S < \cdots < S_n^* < \cdots < S_2^* < S_1^*$$

となり極限をとると

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。この両方の極限が一致する時面積 S が求まる。この方法を**区分求積法**という。

＜区分求積法 2＞

例 曲線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた領域の面積 S(図 1) を求めたい。前ページの区分求積法を適用する。0 から 1 までを n 等分し、分割した分点を

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$$

とする。分割した小区間の幅を h とおくと

$$x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_n=nh, \quad h=\frac{1}{n}$$

となる。図 2 の斜線部分の面積を S_n とすると

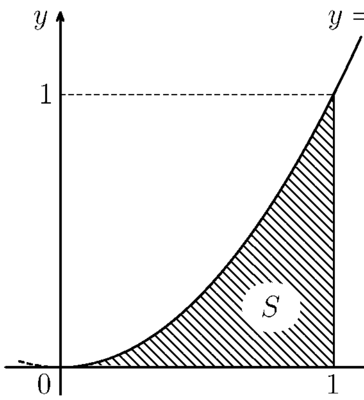
$$S_n=(x_1)^2h+(x_2)^2h+\cdots+(x_{n-1})^2h$$
$$=h^2h+(2h)^2h+\cdots+\big((n-1)h\big)^2h$$
$$=\big\{1+2^2+\cdots+(n-1)^2\big\}h^3=\left\{\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right\}h^3$$

9 ページより

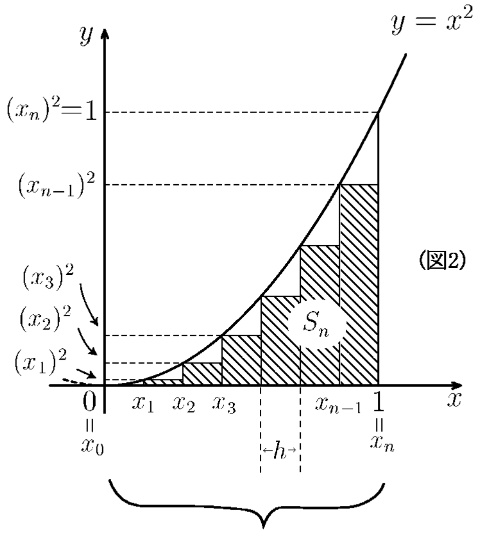
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\boxed{}$$

で、$h=\dfrac{1}{n}$ であるから

$$S_n=\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{6}\left(1-\boxed{}\right)\left(2-\boxed{}\right)$$



(図1)



(図2)

問 1 上の $\boxed{}$ の中に適当な文字式を入れよ。

問 2 次の値を求めよ。

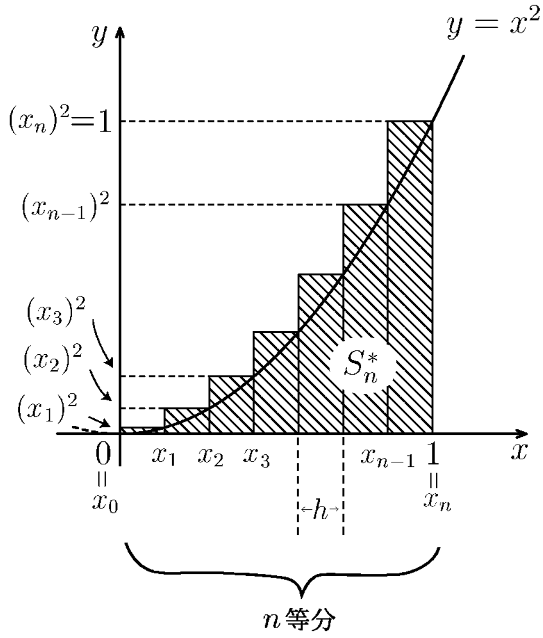
$S_1=$, $S_2=$, $S_3=$

問 3 S_n の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}S_n=$$

< 区分求積法 3 >

問 前ページ図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。
以下の問に答えよ。



(1) 右図の斜線部分の面積を S_n^* とする。
S_n^* を n 等分点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と小区間の幅 h で表せ。

$S_n^* =$

(2) $x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_n = nh$ であることを用いて、S_n^* を書きなおし、記号 $\sum$ で表せ。

$S_n^* =$

$= \left(\sum \qquad\qquad \right) \times h^3$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式 (9 ページ) と $h = \frac{1}{n}$ を用いて、S_n^* を n の式で表せ。

$S_n^* =$

(4) 次の値を求めよ。

$S_1^* =$ $\qquad\qquad$ $, S_2^* =$ $\qquad\qquad$ $, S_3^* =$

(5) S_n^* の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

(6) 前ページ図 2 の S_n に対し $S_n < S < S_n^*$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。前ページの問 3 と上の (5) の結果を用いて S の値を求めよ。

$S =$

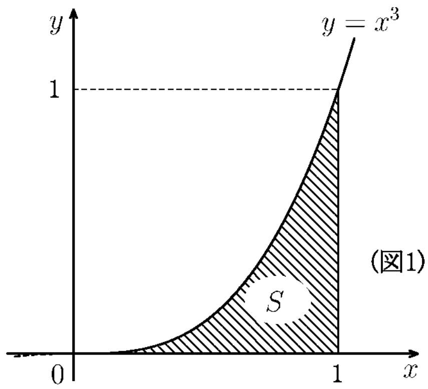
< 区分求積法 4 >

図 1 の斜線部分の面積 S を求めたい。
以下の問に答えよ。

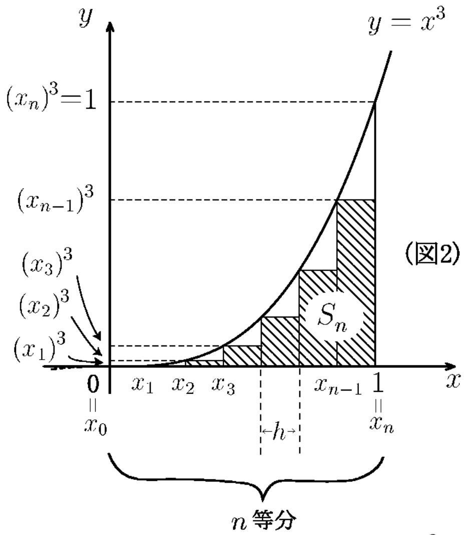
問 1　0 から 1 を n 等分、分点を
$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ とする。
分割した小区間の幅を h とすると図 2 の斜線部分の面積 S_n は

$$S_n = (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + \cdots + (x_{n-1})^3 h$$

である。



(図1)



(図2)

(1) $x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_{n-1} = (n-1)h$ を代入して S_n を n と h の式で表し、$\sum$ を用いて書きなおせ。

$S_n =$

$$= \left\{ \sum \qquad\qquad \right\} h^4$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2$ と $h = \dfrac{1}{n}$ を代入して S_n を n だけの式にせよ。

$S_n =$

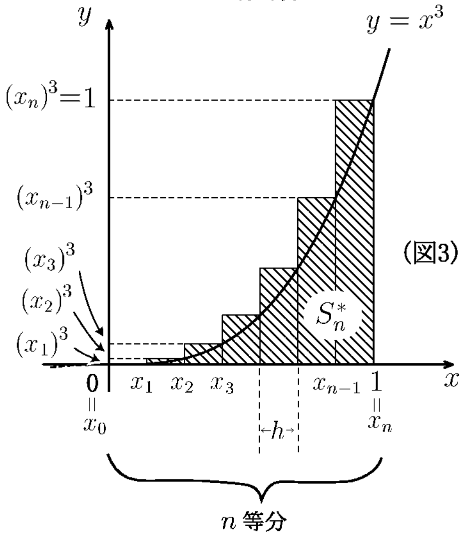
(3) S_n の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n =$

問 2　図 3 の斜線部分の面積を S_n^* とすると

$$S_n^* = (x_1)^3 h + (x_2)^3 h + \cdots + (x_n)^3 h$$

である。S_n^* を n だけの式で表し、その極限値を求めよ。



(図3)

$S_n^* =$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^* =$

問 3　図 1 の斜線部分の面積 S に対し、図 2 と図 3 より $S_n < S < S_n^*$ であるから

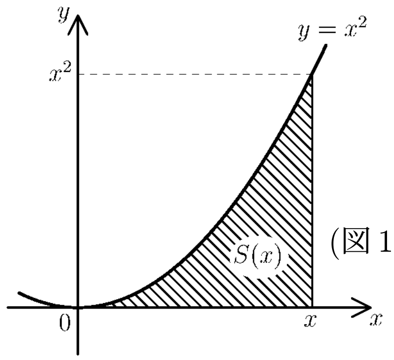
$$\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

である。S の値を求めよ。

$S =$

＜区分求積法 5＞

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。



(図 1)

問 1　0 から x までを n 等分し、分割した分点を

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=x$$

とする。分割した小区間の幅を h とする。

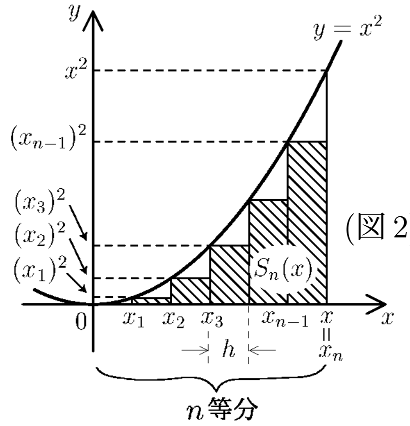
(1) 図 2 の斜線部分の面積 $S_n(x)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ と h で表せ。

$S_n(x)=$

(2) $x_1=h, x_2=2h, \cdots, x_{n-1}=(n-1)h$ を代入して $S_n(x)$ を n と h の式で表し、$\sum$ を用いて書き直せ。

$S_n(x)=$

$$=\left\{\sum \qquad \right\}h^3$$



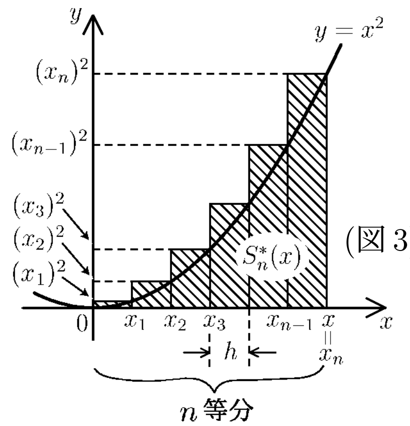
(図 2)

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k^2$ の公式と $h=\dfrac{x}{n}$ を用いて、$S_n(x)$ を n と x だけの式にせよ。

$S_n(x)=$

(4) $S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n(x)=$



(図 3)

問 2　図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。

(1) $S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x)=$

(2) $S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n^*(x)=$

問 3　図より $S_n(x)<S(x)<S_n^*(x)$ であるから

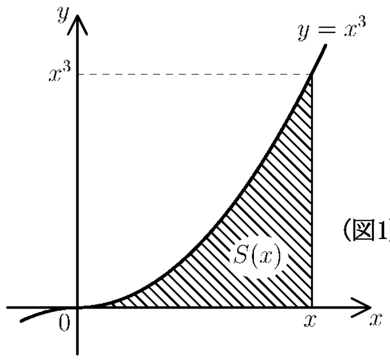
$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)\leqq S(x)\leqq\lim_{n\to\infty}S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x)=$

＜区分求積法 6＞

図 1 の斜線部分の面積 $S(x)$ を求めたい。



(図1)

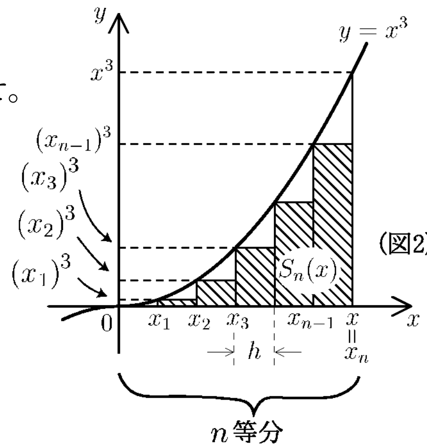
問 1　0 から x までを n 等分し、分割した分点を

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x$$

とする。分割した小区間の幅を h とする。

(1) 図 2 の斜線部分の面積 $S_n(x)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ と h で表せ。

$S_n(x) =$



(図2)

(2) $x_1 = h, x_2 = 2h, \cdots, x_{n-1} = (n-1)h$ を代入して $S_n(x)$ を n と h の式で表し、$\sum$ を用いて書き直せ。

$S_n(x) =$

$$= \left\{ \sum \qquad \right\} h^4$$

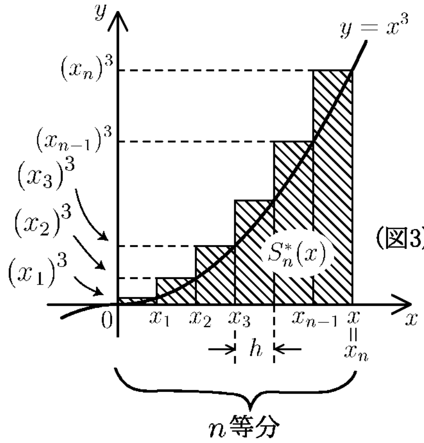
(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^3$ の公式と $h = \dfrac{x}{n}$ を用いて、$S_n(x)$ を n と x だけの式にせよ。

$S_n(x) =$

(4) $S_n(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x) =$

問 2　図 3 の斜線部分の面積を $S_n^*(x)$ とする。



(図3)

(1) $S_n^*(x)$ を n と x だけの式で表せ。

$S_n^*(x) =$

(2) $S_n^*(x)$ の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n^*(x) =$

問 3　図より $S_n(x) < S(x) < S_n^*(x)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \leqq S(x) \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*(x)$$

である。$S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

＜定積分の定義＞

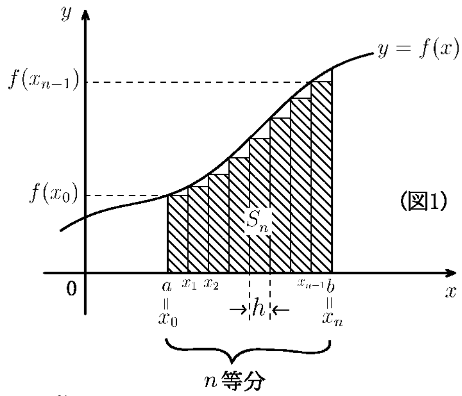
定数 a, b $(a < b)$ に対し、区間 $[a,\ b]$ $= \{x : a \leqq x \leqq b\}$ で有限な値をとる関数 $f(x)$ の定積分を以下で定義する。任意の自然数 n に対し

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)h = \bigl\{f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\bigr\}h$$

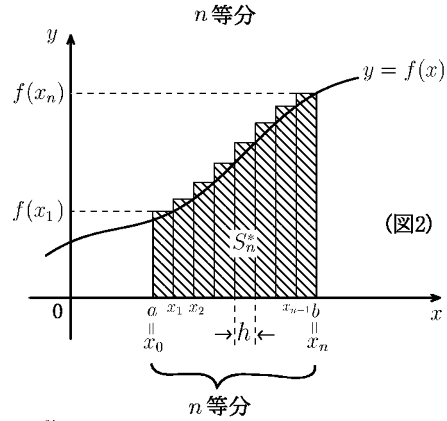
$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h = \bigl\{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\bigr\}h$$

とおく。ただし $x_0, \cdots, x_n$ は $[a,\ b]$ を n 等分した分点であり、h は小区間の幅である。すなわち

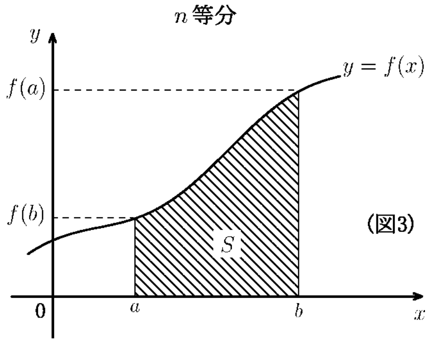
$$x_h = a + kh\ (k = 0, 1 \cdots, n), \quad h = \frac{b-a}{n}$$



(図1)



(図2)



(図3)

[**定理 1**]　f が連続な関数ならば、次の極限値

$$\lim_{n\to\infty} S_n\ , \qquad \lim_{n\to\infty} S_n^*$$

が両方とも存在する。

(証明略)

[**定理 2**] $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^*}$

[証明] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (S_n^* - S_n) = \lim_{n\to\infty} \bigl\{f(x_n) - f(x_0)\bigr\}h$

$$= \lim_{n\to\infty} \bigl\{f(b) - f(a)\bigr\}\frac{b-a}{n} = 0 \quad \text{(証明終)}$$

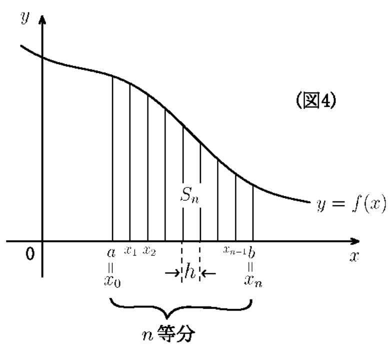
＜**定積分の定義**＞　定理 2 の極限値を

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^*}$$

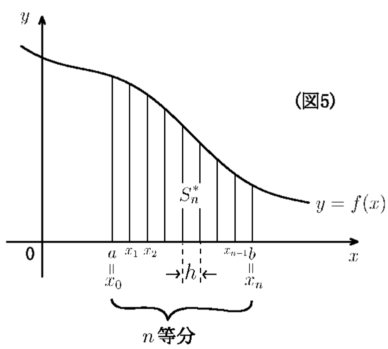
と書き、$f(x)$ の a から b までの**定積分**という。

(注) $f(x)$ が正 $(f(x) \geqq 0)$ で増加関数のとき、S_n と S_n^* は図 1 と図 2 の斜線部分の面積を表す。図 3 の斜線部分の面積を S とすると $S_n \leqq S \leqq S_n^*$ である。従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n^*$ である。定理 2 から両方の極限値が等しいので $\int_a^b f(x)dx = S$ となる。

問　$f(x)$ が減少関数のとき、S_n と S_n^* はどの領域の面積を表すか?図 4 と図 5 にその領域を作図せよ。



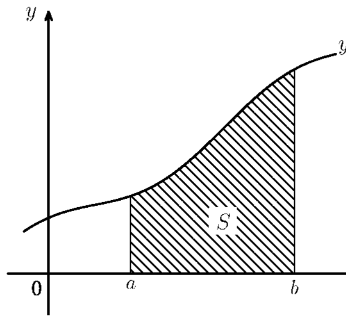
(図4)



(図5)

< 定積分の幾何学的意味 1 >

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき、定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の図形的な意味を示す。

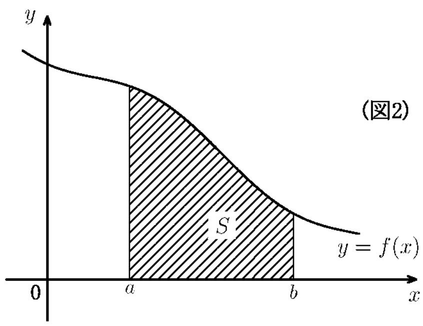


(図1)

[1] $<f(x)$ が増加関数のとき $>$

前ページ (注) より $\int_a^b f(x)dx$ は図 1 の面積 S を意味する。

$$\int_a^b f(x)dx = S$$



(図2)

[2] $<f(x)$ が減少関数のとき $>$

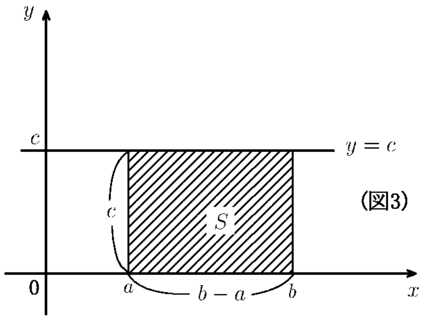
図 2 の面積 S に対し、前ページ問より $S_n^* < S < S_n$ がなり立つ。従って

$$\lim_{n\to\infty} S_n^* \leqq S \leqq \lim_{n\to\infty} S_n$$

がなり立つ。前ページ定理 2 より両方の極限値が一致するので

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^* = S$$

である。



(図3)

[3] $<f(x)$ が定数のとき $>$

$f(x) = c\ (c > 0)$ のとき S_n と S_n^* の定義より

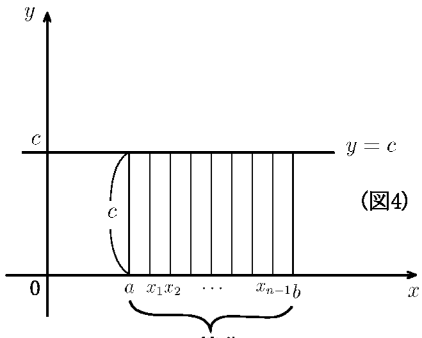
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)h = nch = nc \times \frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

$$S_n^* = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h = nch = nc \times \frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

よって

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b-a)$$

これは図 3 の面積 S を意味する。



(図4)

$f(x)$ が [1], [2], [3] 以外の連続関数の場合は次のページで解説する。そのために必要な次の定理を示す。

[**定理 3**]

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}dx &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \\ \int_a^b \{f_1(x) - f_2(x)\}dx &= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx\end{aligned}}$$

< 証明 > プラスの場合だけ示す (マイナスの場合も同様である)。定積分の定義より

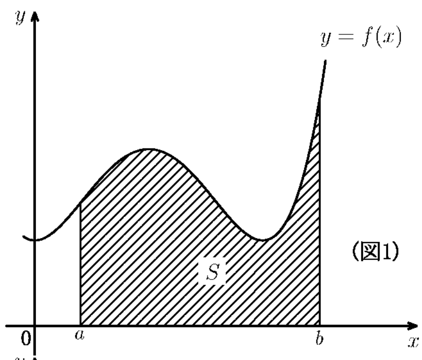
$$\int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} S_n^* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \{f_1(x_k) + f_2(x_k)\}h$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{k=1}^{n} f_1(x_k)h + \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k)h\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_1(x_k)h + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_2(x_k)h = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

がわかる (証明終)。

＜ 定積分の幾何学的意味 2 ＞

[**定理 4**] $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ である連続関数 $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x)dx$ の値は、$y = f(x)$,x 軸, 直線 $x = a$, 直線 $x = b$ で囲まれた部分 (図 1 の斜線部分) の面積 (S) を表す。



(図1)

[**補助定理**]

連続関数は増加関数と減少関数の和で表される

＜ 補助定理の証明の概略 ＞

連続関数 $f(x)$ が図 2 のように a から c まで増加、c から d まで減少、d から b まで増加している場合について示す。減少関数 $f_2(x)$ は $f(x)$ が増加している時は定数であり、$f(x)$ が減少しているときはそのカーブに平行な連続関数とし、$f_1(x) = f(x) - f_2(x)$ とする (図 2、図 3、図 3 参照)。式で書くと

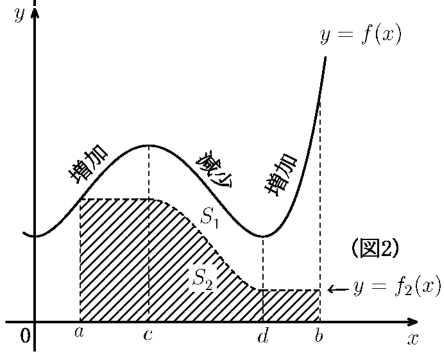
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) - f(a) : a \leqq x \leqq c \\ f(c) - f(a) : c \leqq x \leqq d \\ f(x) - f(d) + f(c) - f(a) : d \leqq x \leqq b \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(a) : a \leqq x \leqq c \\ f(x) - f(c) + f(a) : c \leqq x \leqq d \\ f(d) - f(c) + f(a) : d \leqq x \leqq b \end{cases}$$

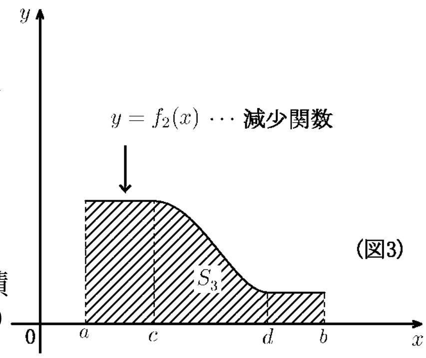
となる。このとき $f_1(x)$ は増加関数、$f_2(x)$ は減少関数であり

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

となる。



(図2)



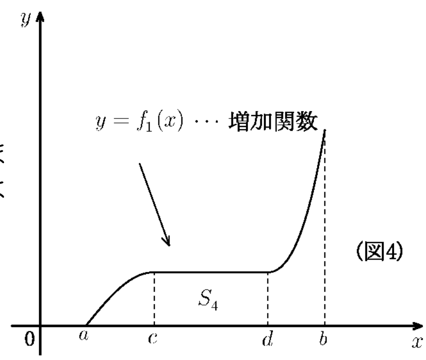
(図3)

＜ 定理 4 の証明の概略 ＞

図 1 の面積 S は図 2 のように $y = f_2(x)$ の上部の面積 S_1 と下部の面積 S_2 の分けられる。前ページ定理 3 より

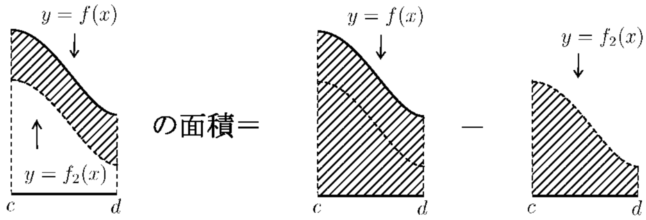
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \{f_1(x) + f_2(x)\}dx \\ &= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx = S_4 + S_3\end{aligned}$$

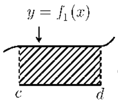
である。ここで $S_3 = S_2$ であり、$S_4 = S_1$ である。



(図4)

$S_4 = S_1$ である理由は以下のとおりである。c から d までの範囲では領域の形がちがうが、前ページ定理 3 より



$$= \int_c^d f(x)dx - \int_c^d f_2(x)dx = \int_c^d \{f(x) - f_2(x)\}dx = \int_c^d f_1(x)dx =$$ 

の面積

となって等しい、従って

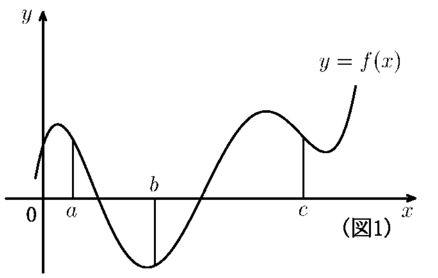
$$\int_a^b f(x)dx = S_4 + S_3 = S_1 + S_2 = S$$

< 定積分の性質 >

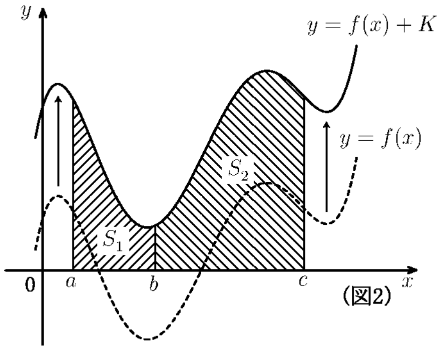
[**定理 5**] $a < b < c$ なる定数 a, b, c に対し

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx}$$

< 証明 > $y = f(x)$ が図 1 のような場合、十分大きな数 K をとり、a から c までの範囲で $f(x) + K > 0$ となるようにできる。図 2 と定理 3 より



(図1)



(図2)

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^c \{f(x) + K\}dx - \int_a^c K dx$$

$$= S_1 + S_2 - K(c - a)$$

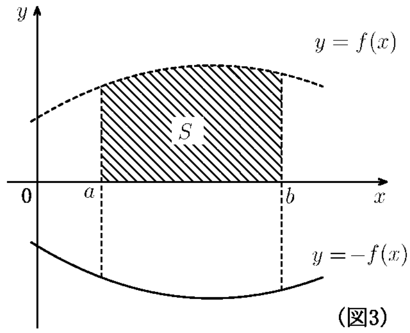
$$= \int_a^b \{f(x) + K\}dx + \int_b^c \{f(x) + K\}dx - Kc + Ka$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b K dx + \int_b^c f(x)dx + \int_b^c K dx - Kc + Ka$$

$$= \int_a^b f(x)dx + K(b - a) + \int_b^c f(x)dx + K(c - b) - Kc + Ka$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \qquad \text{(証明終)}$$

[**定理 6**] $\boxed{\int_a^b \{-f(x)\}dx = -\int_a^b f(x)dx}$



(図3)

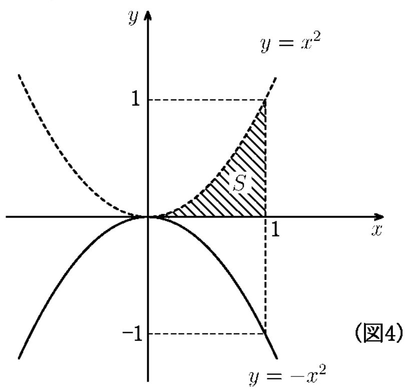
< 証明 > 定積分の定義より

$$\int_a^b \{-f(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \{-f(x_k)\}h = \lim_{n\to\infty} \left\{-\sum_{k=1}^n f(x_k)h\right\}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)h = -\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(証明終)}$$

(注) $f(x) \geqq 0$ のとき図 3 の斜線部分の面積を S とすると

$$\int_a^b \{-f(x)\}dx = -\int_a^b f(x)dx = -S$$



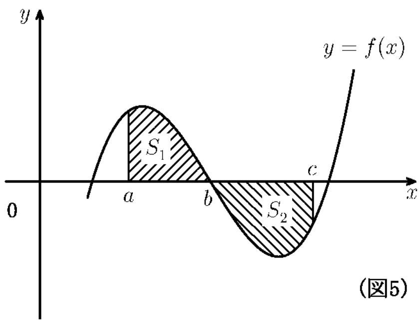
(図4)

例 図 4 の斜線部分の面積 S は 14 ページより $S = \dfrac{1}{3}$ であるから

$$\int_0^1 \{-x^2\}dx = -\int_0^1 x^2 dx = -S = -\frac{1}{3}$$

問 1 15 ページの結果を使って次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^1 \{-x^3\}dx =$$

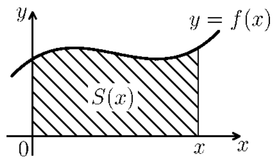


(図5)

問 2 $y = f(x)$ が図 5 のような場合、$\int_a^c f(x)dx$ の値を図 5 の斜線部分の面積 S_1 と S_2 で表せ。

$$\int_a^c f(x)dx =$$

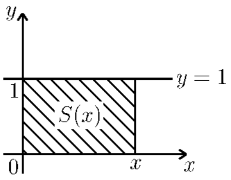
＜ 面積関数 $S(x)$ ＞



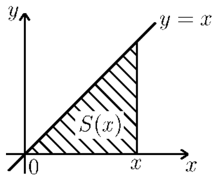
正の値をとる関数 $f(x)$ に対し、右図の
斜線部分の面積を $S(x)$ とする。

問 1 下図を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=1$ のとき $S(x)=$

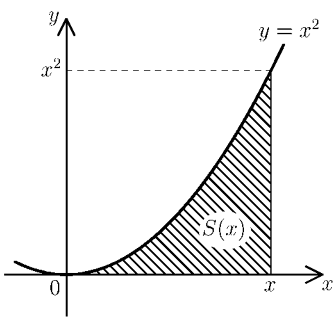


(2) $f(x)=x$ のとき $S(x)=$

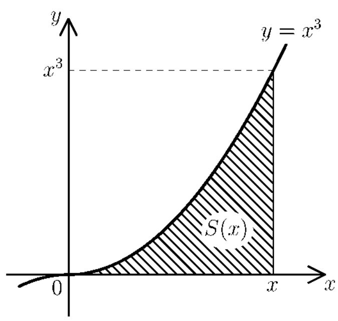


問 2 下図と 16,17 ページの結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$ のとき $S(x)=$



(2) $f(x)=x^3$ のとき $S(x)=$



問 3 上記の結果を参考にして、次の場合の $S(x)$ を類推せよ。

(1) $f(x)=x^4$ のとき $S(x)=$

(2) $f(x)=x^n$ のとき $S(x)=$

問 4 上の結果から考えて、一般の正の関数 $f(x)$ に関する面積関数を $S(x)$ とするとき、$f(x)$ と $S(x)$ にはどんな関係があるか類推せよ。

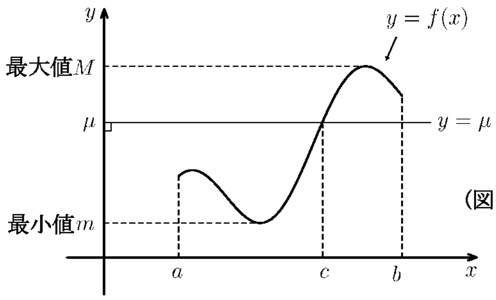
< 積分の平均値の定理 >

[**中間値の定理**]

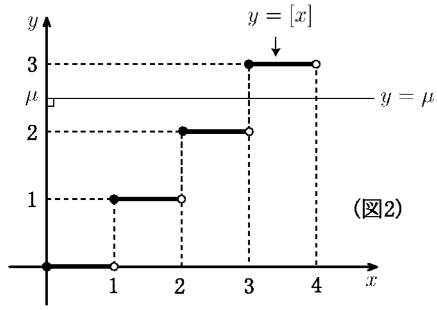
> $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続とする。この範囲で $f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とする。
> このとき $m \leqq \mu \leqq M$ である任意の数 μ に対し,
> $$f(c) = \mu \qquad (a < c < b)$$
> となる数 c が a と b の間に存在する。

中間値の定理の厳密な証明は実数の性質に深くかかわる。直感的には図 1 のように連続関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = \mu$ との交点の x 座標を c とすればよい。

(注) 不連続関数 (グラフがつながっていない関数) ではこの定理はなりたたない。図 2 のようなガウス記号 $[x]$ の関数 $y = [x]$ がその例である。



(図1)



(図2)

[**積分の平均値の定理**]

> $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続なとき
> $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$
> となる数 c が a と b の間に存在する。

< 証明 >

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x)$ の最大値を M, 最小値を m とすると

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

である。定積分の定義から

$$\int_a^b m dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M dx$$

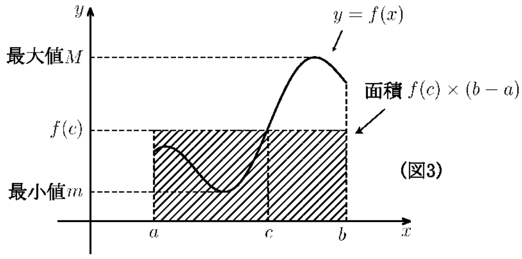
がわかる。従って

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq M$$

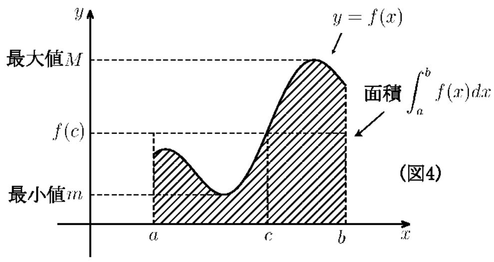
となる。ここで $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とおくと、$m \leqq \mu \leqq M$ より中間値の定理から

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$

となる数 c が a と b の間に存在する。(証明終)



(図3)



(図4)

(注) 積分の平均値の定理は

$$f(c) \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$

とも書ける。$f(x) > 0$ のときは図 3 と図 4 の斜線部分の面積が等しいことを意味する。

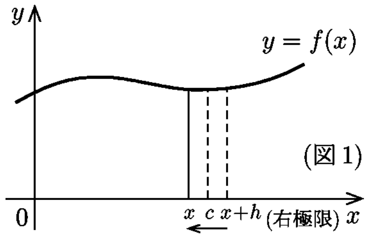
＜微分積分学の基本定理 1＞

基本定理を説明する前に定積分の定義を以下のように拡張する。

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad , \quad \int_a^a f(x)dx = 0} \quad \text{(定積分の拡張)}$$

[**定理 7**] 連続関数 $f(x)$ に対し、次の極限式が成立する。

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx = f(x)}$$



＜証明＞

[1] (右極限)

$h>0$ のとき、積分の平均値の定理より

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx \qquad (x<c<x+h)$$

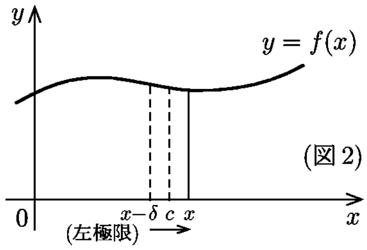
となる c が存在する。$x<c<x+h$ より $h\to +0$ のとき $c\to x+0$(図 1) だから

$$\lim_{h\to +0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx = \lim_{c\to x+0} f(c) = f(x) \quad \cdots \ (1)$$

[2] (左極限)

$h<0$ のとき、$h=-\delta$ $(\delta>0)$ とおくと、拡張された定積分の定義より

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx = \frac{1}{-\delta}\int_x^{x-\delta} f(x)dx = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(x)dx$$



となる。積分の平均値の定理より

$$f(c) = \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(x)dx \qquad (x-\delta<c<x)$$

となる c が存在する。$x-\delta<c<x$ より $\delta\to +0$ のとき $c\to x-0$ となる (図 2) から

$$\lim_{h\to -0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx = \lim_{\delta\to +0}\frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(x)dx = \lim_{c\to x-0} f(c) = f(x) \quad \cdots \ (2)$$

よって (1) , (2) より右極限と左極限が一致するから定理 6 が証明された。(証明終)

(注) 図では $f(x)>0$ の場合を扱っているが、積分の平均値の定理は $f(x)\leqq 0$ の場合も成り立つので、定理 6 は $f(x)\leqq 0$ の場合も成立する。

問 $h=-\delta$ $(\delta>0)$, $x>a+\delta$ とする。以下の式の $\square$ に x または h を用いた文字式を入れよ。

$$\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^{x} f(x)dx\right\} = \frac{1}{-\delta}\left\{\int_a^{x-\delta} f(x)dx - \int_a^{x} f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\delta}\int_{x-\delta}^{x} f(x)dx = \frac{1}{h}\int_x^{\square} f(x)dx$$

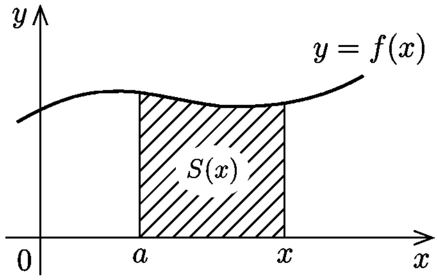
＜微分積分学の基本定理 2＞

[**定理 8**] 任意の実数 a と連続関数 $f(x)$ に対し

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とおくと

$$S'(x) = f(x)$$



(注) $f(x) > 0$ のとき $S(x)$ は右図の斜線部分の面積を表す。

＜証明＞ 定理 5 と定理 7 より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{\square}^{x+h} f(x)dx = f(x)$$

(証明終)

[**定理 9**] $F'(x) = f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

＜証明＞ $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ とおくと定理 8 より $S'(x) = f(x)$ だから

$$\big(F(x) - S(x)\big)' = F'(x) - S'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

微分して 0(ゼロ) になる関数 ($\Leftrightarrow$ 傾きが常に 0(ゼロ)) は定数だから

$$F(x) - S(x) = C \qquad (C\text{ は定数})$$

とおける。従って

$$F(x) = S(x) + C = \int_a^{\square} f(x)dx + C$$

より

$$F(b) - F(a) = \{S(b) + C\} - \{S(a) + C\} = S(b) - S(a)$$

$$= \int_a^{\square} f(x)dx - \int_a^{\square} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(証明終)

問 上の証明の中の $\square$ に適当な文字を入れよ。

(注) 定理 7 , 定理 8 , 定理 9 をまとめて「**微分積分学の基本定理**」という。

＜定積分 1 ＞

前ページの結果から

$$F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

のとき、定積分は

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

で計算される。今後はこの式で全て計算する。ここで $F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ または $\Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$ と書くことにする。すなわち

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

である。

例 (1) $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ より $\displaystyle\int_4^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_4^5 = \frac{1}{3}\times 5^3 - \frac{1}{3}\times 4^3 = \frac{61}{3}$

(2) $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ より $\displaystyle\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^2 = \frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}\times 1^4 = \frac{15}{4}$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^7 1dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 xdx =$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2 dx =$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3 dx =$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^4 dx =$

＜ 定積分 2 ＞

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \text{ のとき } \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)} \quad \text{(定積分)}$$

問 1 定数 a , b に対し以下の定積分の値を上の $F(b) - F(a)$ の形にせよ。

$$\left(\text{ただし } n \neq -1 \quad , \qquad \log b - \log a = \log\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

(1) $\displaystyle\int_a^b dx = \int_a^b 1dx =$

(2) $\displaystyle\int_a^b x^n dx =$

(3) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx =$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^x dx =$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos x dx =$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx =$

問 2 以下の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^{10} dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 + x^3 + x^4)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx$

(5) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}dx$

(6) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(8) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}dx$

(9) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{x}dx$

(10) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx$

(11) $\displaystyle\int_{-1}^1 4e^x dx$

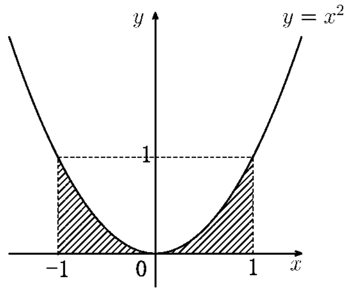
(12) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(14) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin x dx$

< 定積分 3 >

例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times(-1)^3 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



(注) 定積分の幾何学的意味より、$\int_{-1}^{1} x^2 dx$ は右図斜線部分の面積を表す。$y = x^2$ は y 軸対象だから左右の面積が等しいので

$$\int_{-1}^{0} x^2 dx = \int_{0}^{1} x^2 dx$$

となるから

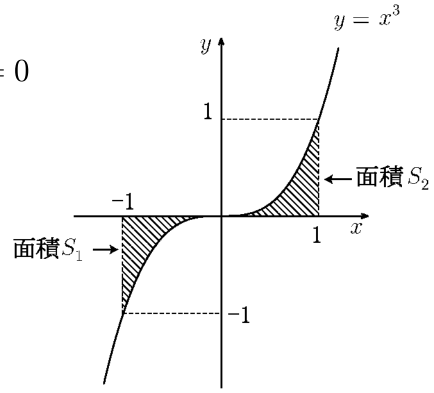
$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = 2\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = 2\times\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

一般に $f(x) = x^{2n}$ (n は自然数) のときは $f(-x) = f(x)$ (y 軸対称) になる。このような関数 $f(x)$ を**週関数**といい、

$$\boxed{\int_{-a}^{a} x^{2n} dx = 2\int_{0}^{a} x^{2n} dx} \quad (n \text{ は自然数})$$

がなりたつ。

例 2 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\times 1^4 - \frac{1}{4}\times(-1)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$



(注) 右図斜線部分の面積を S_1 と S_2 とおくと

$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = -S_1, \quad \int_{0}^{1} x^3 dx = S_2$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = -S_1 + S_2$$

となる。一方 $y = x^3$ は原点対称だから $S_1 = S_2$ より

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

一般に $f(x) = x^{2n-1}$ (n は自然数) のときは $f(-x) = -f(x)$ (原点対称) になる。このような関数 $f(x)$ を**奇関数**といい

$$\boxed{\int_{-a}^{a} x^{2n-1} dx = 0} \quad (n \text{ は自然数})$$

がなりたつ。

例 3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3 + x^4)d = \int_{-1}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{1} x^4 dx = 2\int_{0}^{1} x^4 dx = 2\times\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

問 次の定積分を求める。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^3 + x^4 + x^5)dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x + x^3 + x^6)dx =$

< 定積分の積分変数 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変っても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \big[F(t)\big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4 dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2 dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta d\theta = [4\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問 次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 9.8t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u} du$

＜定積分の置換積分法１＞

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ の値を求めよ。

(解)　まず不定積分 $\displaystyle\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx$ を求める。

$$u = x^3+1 \ \text{とおくと}\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \implies dx = \frac{1}{3x^2}du$$

より

$$\int 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int 3x^2\sqrt{x^3+1}\frac{1}{3x^2}du = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

となるから

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left[\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}(2^3+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1^3+1)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{2\times 27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

(別解)　$u = x^3+1$ とおくと

$$\begin{cases} x=2 \iff u=9 \\ x=0 \iff u=1 \end{cases}$$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_{u=1}^{u=9}\sqrt{u}du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{u=9} = \frac{2}{3}\times 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\times 1^{\frac{3}{2}} = \frac{52}{3}$$

別解の方法を**定積分の置換積分法**という。

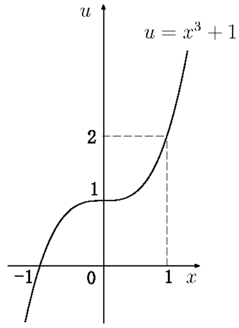
問　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2(x^3+1)^4dx$

(2) $\displaystyle\int_0^2 2x\sqrt{x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4+1)^2}dx$

＜定積分の置換積分法 2＞



例 1 $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1} dx$ を求めたい。

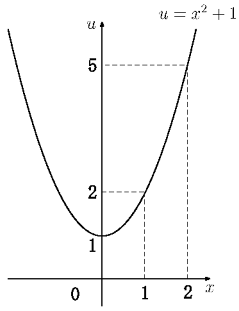
$$u = x^3 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{3x^2} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 1 & \Longleftrightarrow & u = 2 \\ x = -1 & \Longleftrightarrow & u = 0 \end{cases}$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3+1} dx = \int_{x=-1}^{x=1} x^2 e^{x^3+1} \frac{1}{3x^2} du = \int_{u=0}^{u=2} \frac{1}{3} e^u du = \left[\frac{1}{3} e^u\right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3}$$



例 2 $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1} dx$ を求めたい。

$$u = x^2 + 1 \quad \text{とおくと} \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} du$$

であり

$$\begin{cases} x = 2 & \Longleftrightarrow & u = 5 \\ x = 0 & \Longleftrightarrow & u = 1 \end{cases}$$

より

$$\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+1} dx = \int_{x=0}^{x=2} \frac{x}{x^2+1} \times \frac{1}{2x} du = \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{2} \times \frac{1}{u} du = \left[\frac{1}{2} \log|u|\right]_{u=1}^{u=5}$$

$$= \frac{1}{2} \log 5 - \frac{1}{2} \log 1 = \frac{1}{2} \log 5$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1} x(x^2+2)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{3} x e^{x^2} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x^3+2} dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

＜ 定積分の部分積分 ＞

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)dx \ = \ f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

から次のことがわかる。

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx \ = \ \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

例 (1) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)^2 dx \ = \ \int_2^4 (x-2) \times \left\{\frac{(x-4)^3}{3}\right\}' dx$

$$= \ \left[(x-2)\frac{(x-4)^3}{3}\right]_2^4 \ - \ \int_2^4 (x-2)' \times \frac{(x-4)^3}{3} \ dx$$

$$= \ (0-0) \ - \ \frac{1}{3}\int_2^4 (x-4)^3 \ dx$$

$$= \ -\frac{1}{3}\left[\frac{(x-4)^4}{4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{(-2)^4}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos x \ dx \ = \ \int_0^\pi x \times (\sin x)' \ dx$

$$= \ \Big[x\sin x\Big]_0^\pi \ - \ \int_0^\pi (x)' \times \sin x \ dx$$

$$= \ (\pi\sin\pi - 0) \ - \ \int_0^\pi \sin x \ dx$$

$$= \ -\Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\ \Big\{-\cos\pi - (-\cos 0)\Big\} = -2$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

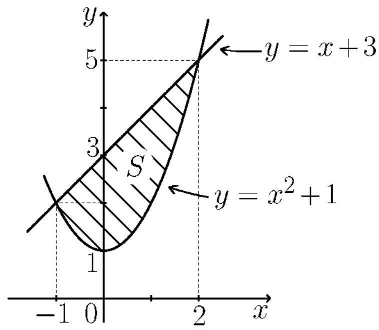
(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

＜ 面積 1 ＞

20 ページより $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

例 直線 $y = x + 3$ と曲線 $y = x^2 + 1$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。

右図のような斜線部分の面積 S_1 , S_2 を考えると、以下のように計算できる。

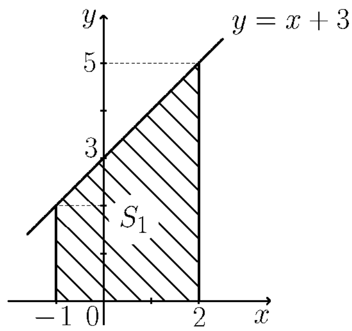


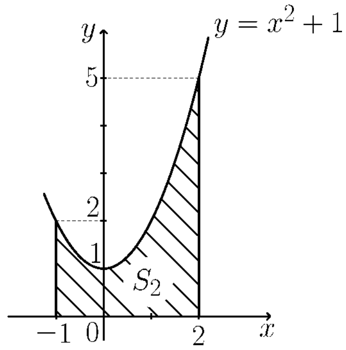
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x+3)dx - \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$

$$= \int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx = \int_{-1}^{2}\left\{-x^2+x+2\right\}dx$$

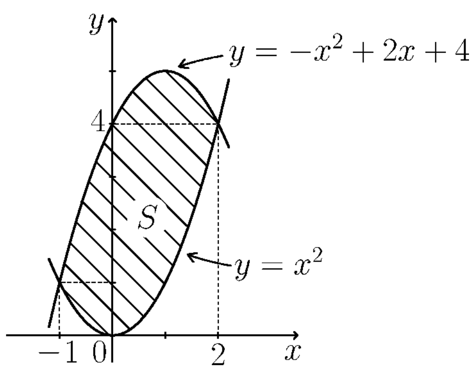
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$





問 曲線 $y = -x^2 + 2x + 4$ と $y = x^2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

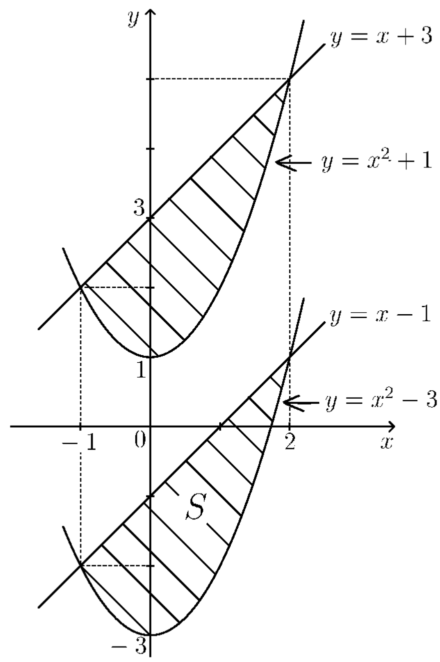


＜ 面積 2 ＞

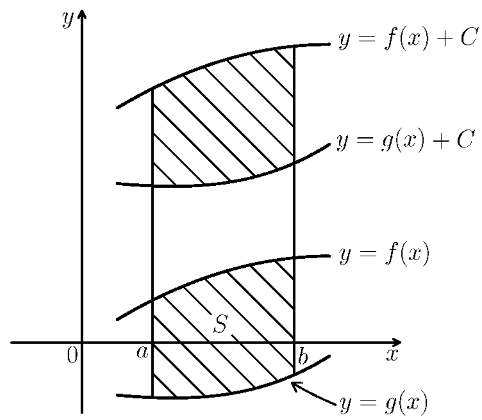
例 直線 $y=x-1$ と曲線 $y=x^2-3$ とで囲まれた部分の面積 S を求める。
直線と曲線を共に y 軸方向に 4 だけ平行移動させると、
$y=x-1$ は $y=x+3$ に
$y=x^2-3$ は $y=x^2+1$ に移る。
S は $y=x+3$ と $y=x^2+1$ とで囲まれた部分の面積と等しいから
前ページの例より

$$S=\int_{-1}^{2}\Big\{(x+3)-(x^2+1)\Big\}dx=\frac{9}{2}$$

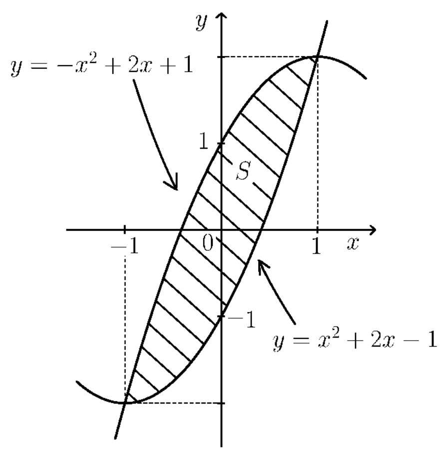
（注）$S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\Big\{(x-1)-(x^2-3)\Big\}dx$ としても求まる。



問 1 右図のように曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と曲線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積 S を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
（ただし $g(x)<f(x)$ とする）

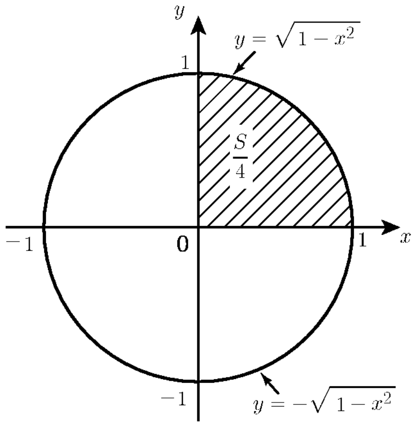


問 2 曲線 $y=-x^2+2x+1$ と $y=x^2+2x-1$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜円の面積＞

例 半径 1 の面積 S を求めたい、そのために
右図斜線部分の面積 $\frac{S}{4}$



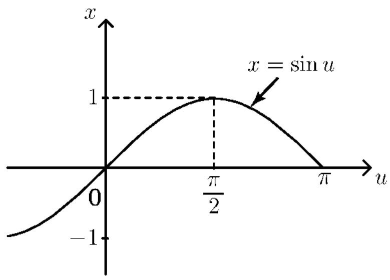
$$\frac{S}{4}=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

を求める。この積分は特別なケースであり
以下のような方法で求める。

$$x=\sin u \qquad \text{とおくと} \qquad \frac{dx}{du}=(\sin u)'=\cos u$$

であり

$$0=\sin 0 \quad , \qquad 1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



となるから置換積分法より

$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}dx=\int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\,\frac{dx}{du}du$$

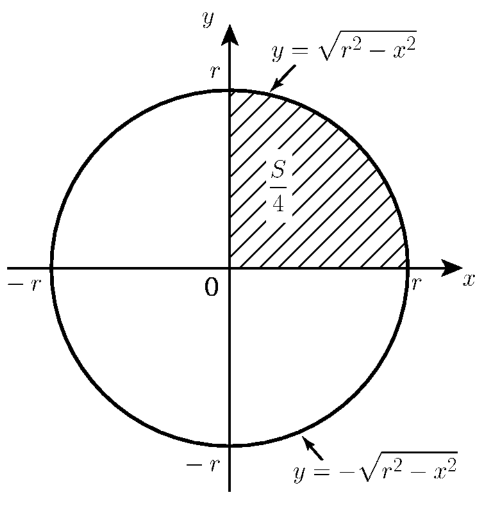
$$=\int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u}\,\cos u du=\int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du=\int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2u)\right\}du$$

$$=\left[\frac{u}{2}+\frac{1}{4}\sin(2u)\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin(\pi)\right\}-\left\{0+\frac{1}{4}\sin 0\right\}=\frac{\pi}{4}$$

よって

$$\frac{S}{4}=\frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \underline{(\text{答})\ \ S=\pi} \quad (\text{半径 1 の円の面積})$$

問 半径 r の円の面積 S を求めるために
右図斜線部分の面積 $\frac{S}{4}$ を求める。



(1) $\dfrac{S}{4}=\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ を $x=r\sin u$

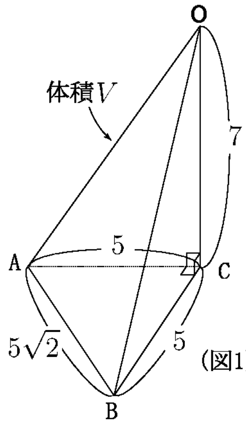
とおくことによって求めよ。

$$\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}dx=$$

(2) S を求めよ。

＜体積 1＞

例 図 1 のような三角錐 OABC の体積 V を求めたい。
区分求積法の考え方を用いる。



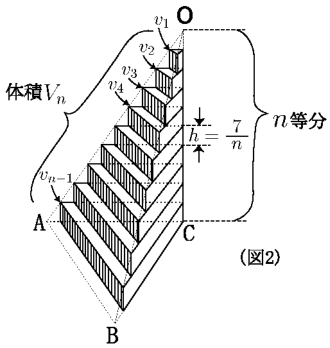
(図1)

[1] 図 2 のように OC を n 等分し、三角錐 OABC に内接する階段状の立体の体積を V_n とする。V_n は $n-1$ 個の小三角柱の集まりである。その体積を上から順に v_1 , v_2 $\cdots$, v_{n-1} とすると

$$V_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$$

である。この体積を求めたい。

＜ 内 接 ＞



(図2)

図 3 のように O から距離が x である平面で切った断面の面積を $f(x)$ とする。図 3 より

$$x : r = 7 : 5$$

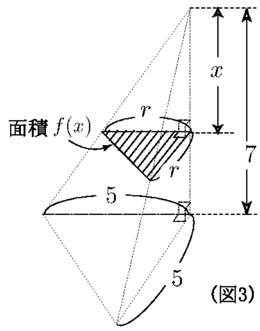
であるから

$$r = \frac{5}{7}x$$

より

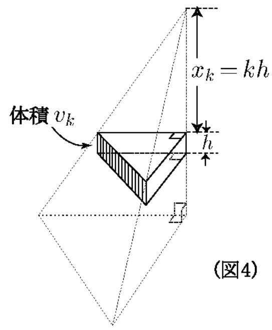
$$f(x) = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{7}x\right)^2 = \frac{25}{98}x^2$$

となる。



(図3)

問 1 第 k 番目の小三角柱の体積 v_k は、$v_k = f(x_k)h$ である (図 4)。
$x_k = kh$, $h = \frac{7}{n}$ を代入して v_k を k と n だけの式で表せ。
$v_k =$



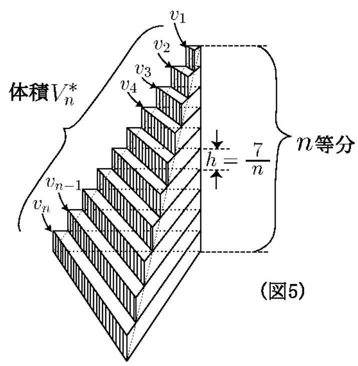
(図4)

問 2 $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} v_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$ を用いて V_n を n だけの式で表せ。$V_n =$

問 3 $n \to \infty$ のときの極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n =$

[2] 図 5 のように三角錐に外接する階段状の立体の体積を V_n^* とする。V_n^* は n 個の小三角柱の集まりである。その体積を上から順に $v_1, v_2, \cdots, v_n$ とすると $V_n^* = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ である。

＜ 外 接 ＞

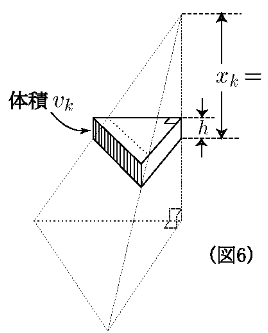


(図5)

問 4 第 k 番目の小三角柱の体積 v_k(図 6) を k と n だけの式で表せ。$v_k =$

問 5 $V_n^* = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を用いて V_n^* を n だけの式で表せ。$V_n^* =$

問 6 $n \to \infty$ のときの極限値を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n^* =$



(図6)

問 7 図 2 と図 5 より $V_n < V < V_n^*$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} V_n \leqq V \leqq \lim_{n\to\infty} V_n^*$$

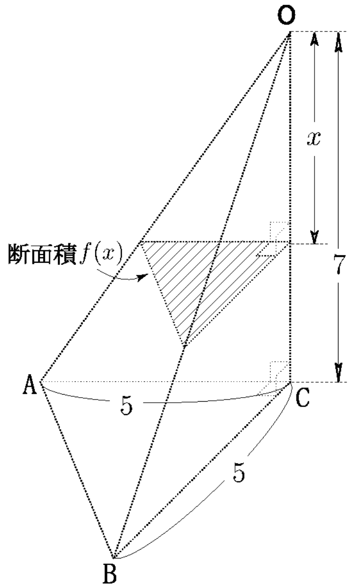
である。三角錐 OABC の体積 V を求めよ。

$V =$

＜ 体積 2 ＞

例　前ページの三角錐の体積 V は以下の方法で求めることができる。右図のように頂点 O からの距離が x である水平面で切り取った断面の面積を $f(x)$ とすると、前ページより

$$f(x) = \frac{25}{98}x^2$$

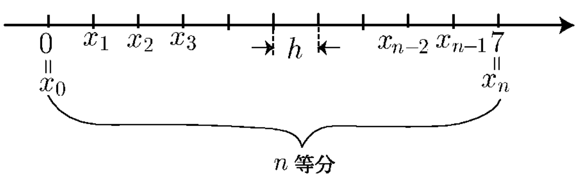


となる。一方前ページの内接立体の体積 V_n は ($f(0) = 0$ より)

$$V_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)h = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)h\ ,$$

と書ける。

ここで x_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ は 0 から 7 までを n 等分した分点である。



$$(x_k = kh\ ,\ h = \frac{7}{n})$$

一方外接立体の体積 V_n^* は

$$V_n^* = \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)h$$

である。よって定積分の定義 (18 ページ) より

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} V_n^* = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx$$

問 1　例の定積分の値を求めることによって V の値を求めよ。

$$V = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2 dx =$$

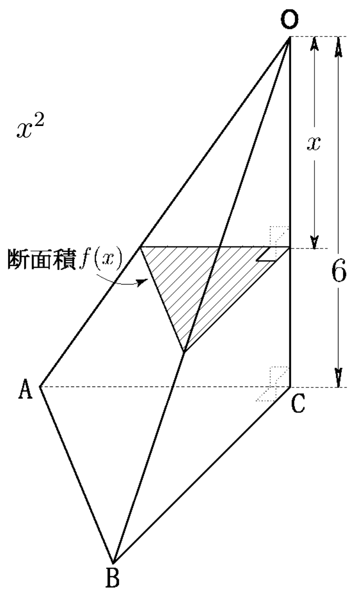
(注) 三角錐の底面積と断面積 $f(x)$ の比は

底面積 : 断面積 $f(x) = \frac{25}{2}\ :\ \frac{25}{98}x^2\ =\ 1\ :\ \frac{1}{49}x^2\ =\ 7^2\ :\ x^2$

問 2　右図の三角錐 OABC は

$\mathrm{AC} = 3$, $\mathrm{BC} = 4$, $\mathrm{AB} = 5$, $\mathrm{OC} = 6$

であるとする.



(1) 頂点 O からの距離が x である水平面で切り取った断面の面積 $f(x)$ を x の式で表せ。

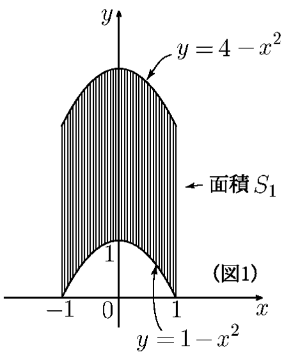
$f(x) =$

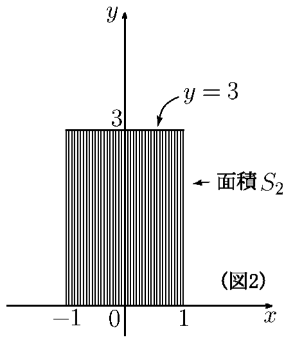
(2) 三角錐 OABC の体積 V を求めよ。

$V =$

＜ 体積 3 ＞

[1] 「線を集めると面になる」





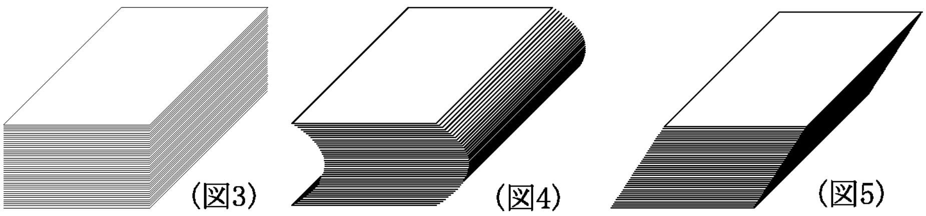
例 1　図 1 の面積 S_1 と図 2 の面積 S_2 は等しい。なぜならば 35 ページより

$$S_1=\int_{-1}^{1}\left\{(4x-x^2)-(1-x^2)\right\}dx=\int_{-1}^{1}3dx=S_2$$

となるからである。一般に
「**線の長さ**を**積分する**と**面積**が求まる」。

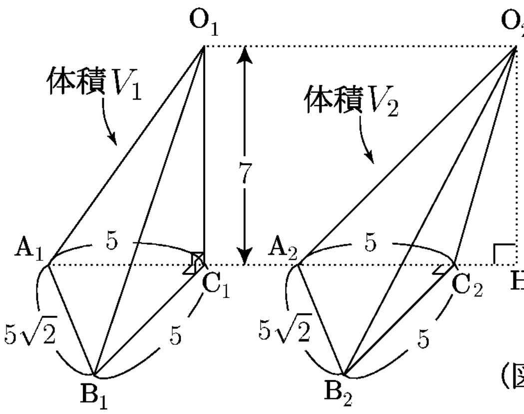
[2] 「面を集めると立体になる」

例 2　図 3 はトランプのような長方形のカードをまっすぐに重ねた立体であり、図 4 と図 5 はそれを横にずらした立体である。3 つの立体の体積は等しい。



(図3)　(図4)　(図5)

例 3　図 6 の三角錐 $O_1A_1B_1C_1$ の体積 V_1 と $O_2A_2B_2C_2$ の体積 V_1 は等しい。それは例 2 の図 3 と図 5 の立体の体積が等しいのと同じ理由による。
図7のように底面と平行な平面で切った断面 $A_1'B_1'C_1'$ と $A_2'B_2'C_2'$ は合同になる。



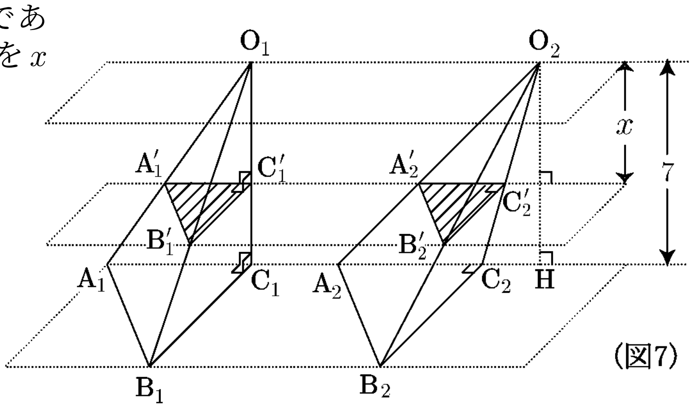
(図6)

問 (1) $\triangle O_1A_1C_1$ と $\triangle O_1A_1'C_1'$ が相似であることを利用して、$A_1'C_1'$ の長さを x で表せ。

$A_1'C_1'=$

(2) $\triangle O_2A_2C_2$ と $\triangle O_2A_2'C_2'$ が相似であることを利用して、$A_2'C_2'$ の長さを x で表せ。

$A_2'C_2'=$



(図7)

(3) $\triangle A_2'B_2'C_2'$ の面積を $S(x)$ とする。$S(x)$ を求めよ。

$S(x)=$

(4) 次の定積分を求めよ。

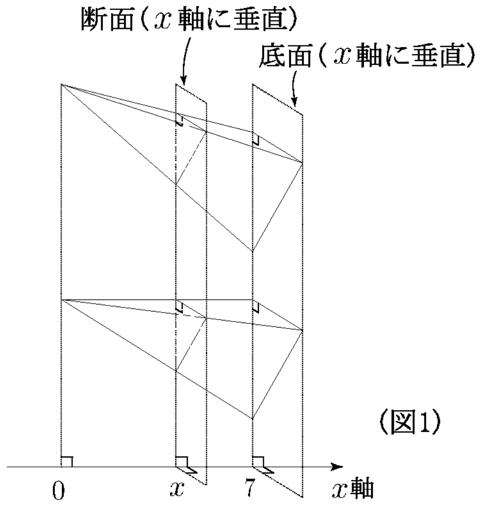
$$\int_0^7 S(x)dx=$$

＜ 体積 4 ＞

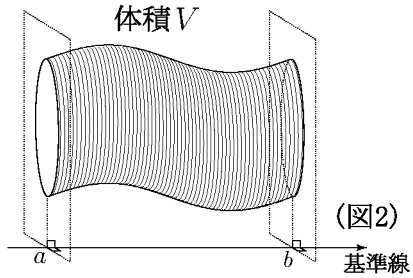
例　前ページ図 7 を別の角度から見たのが右図 (図 1) である。二つの三角錐の底面に垂直な直線を x 軸とする。この x 軸に対し、三角錐は x 軸に垂直な断面の集まりと考えられる。右図斜線部分を「x における断面」ということにすると、37 ページ例より

$$\boxed{\text{三角錐の体積} = \int_0^7 \Big\{ x \text{ における断面積} \Big\} dx}$$

と書ける。図 1 の 2 つの三角錐の断面積は同じなので、2 つの三角錐の体積は等しい。



(図1)

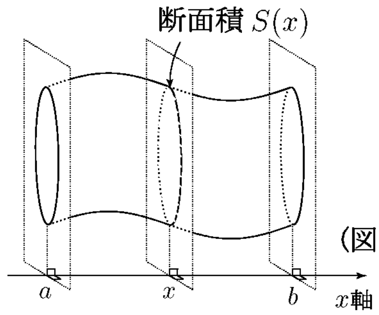


(図2)

一般にある立体が図 2 のように基準線に垂直な断面の集まりとみなせるとき、上の例と同様にして体積が求まる。基準線に目もりを入れ、x 軸と考える。図 2 の立体は図 3 の断面 (斜線部分) の集まりと考えられる。この断面積を $S(x)$ とおくと、図 2 の立体の体積 V は

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。

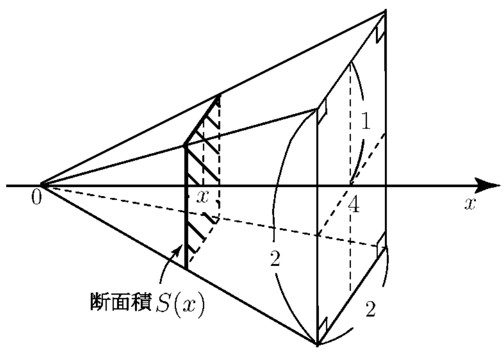


(図3)

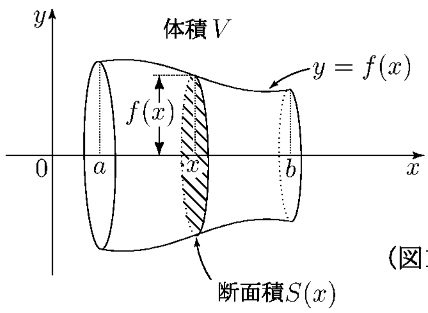
問　底辺が一辺 2 の正方形で、高さが 4 の四角錐の体積 V を求めたい。右図の断面積 $S(x)$ と体積 V を求めよ。

$S(x) =$

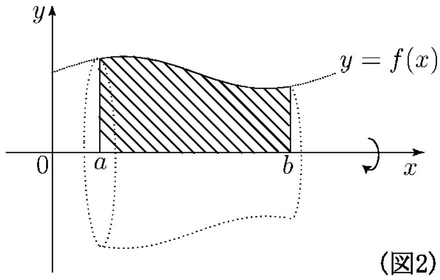
$V =$



＜体積 5＞



(図1)



(図2)

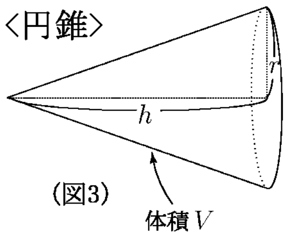
問 1　図 1 の立体は図 2 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた立体である。このような立体を**回転体**という。

(1) 図 1 の斜線部分は半径 $f(x)$ の円である。この斜線部分の面積 $S(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

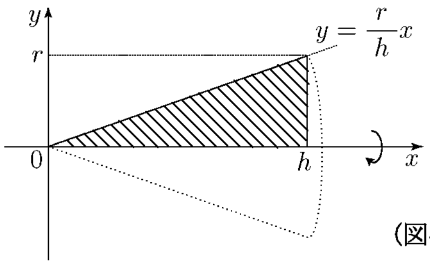
$S(x) =$

(2) 図 1 の回転体の体積 V を $f(x)$ を用いた積分の形で表せ。

$V =$



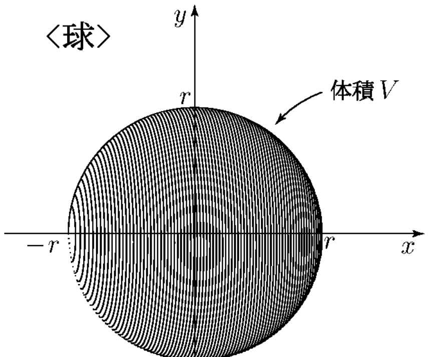
(図3)



(図4)

問 2　底面が半径 r の円であり、高さが h の円錐 (図 3) の体積 V を求めたい。この円錐は図 4 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできたものである。積分の計算によって V を求めよ。

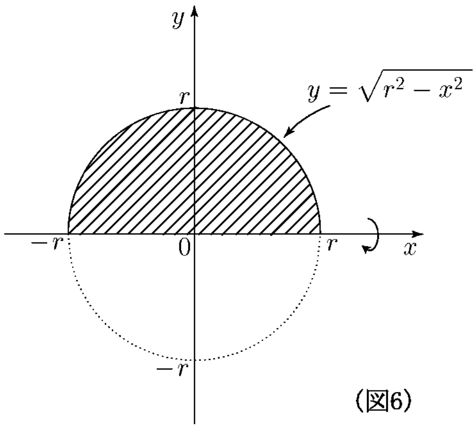
$V =$



(図5)

問 3　半径 r の球 (図 5) の体積 V を求めたい。球は図 6 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体である。積分の計算によって V を求めよ。

$V =$



(図6)