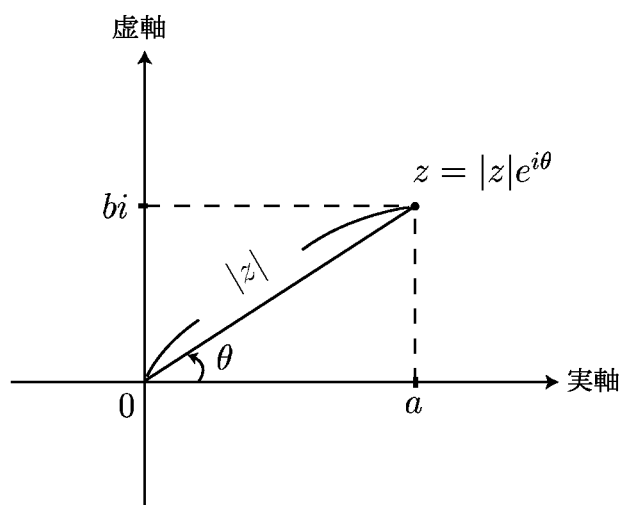


高知工科大学
基礎数学ワークブック
(2002年度版)
Series **A**
No. **8**

内容

- ◎ 複素数
- ◎ 複素平面
- ◎ オイラーの公式
- ◎ 複素数値関数の微分
- ◎ 微分方程式と解



電子・光システム工学科
井上 昌昭 著

< 複素数の四則演算 1 >

複素数の和（差）は実部どうしの和（差）と虚部どうしの和（差）にわけて計算すればよい。

a, b, c, d が実数のとき

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

例 1 $(2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)i = 6 + 8i$
 $(5 + 7i) - (8 + i) = (5 - 8) + (7 - 1)i = -3 + 6i$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $(2 + i) + (3 - i)$

=

(2) $(4 - i) - (5 - 3i)$

=

(3) $\left(0.13 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{3}{4} - 1.5i\right)$

=

(4) $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}i\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{3}i\right)$

=

(5) $(\sqrt{3} - i) + (\sqrt{1} - 2i)$

=

(6) $\left(\frac{1}{4} - \sqrt{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} + \sqrt{3}i\right)$

=

複素数の実数倍は、実部と虚部のそれぞれの実数倍となる。

a, b, k が実数のとき

$$k(a + bi) = (ka) + (kb)i$$

例 2 $2(1 + 4i) + 5(3 - 2i) = (2 + 8i) + (15 - 10i) = 17 - 2i$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $3(4 + i)$

=

(2) $6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i\right)$

=

(3) $3(6 - 2i) - 4(2 - i)$

=

(4) $\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}i\right) + \left(\frac{1}{3} - 2i\right)$

=

< 複素数の四則演算 2 >

複素数どうしの積は通常の数計算規則（分配法則）によって計算すればよいが、 i^2 が出たところで $i^2 = -1$ とおきかえて答を出す。

例

$$\begin{aligned} (1) \quad (3 + 4i)(5 + 7i) &= 3 \times 5 + 3 \times 7i + 4i \times 5 + 4i \times 7i \\ &= 15 + 21i + 20i + 28i^2 \\ &= 15 + 41i - 28 \\ &= -13 + 41i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (3 + 5i)^2 &= 3^2 + 2 \times 3 \times 5i + (5i)^2 \\ &= 9 + 30i + 25i^2 \\ &= 9 + 30i - 25 \\ &= -14 + 30i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (2 + 5i)^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times 5i + 3 \times 2 \times (5i)^2 + (5i)^3 \\ &= 8 + 60i + 150i^2 + 125i^3 \\ &= 8 + 60i - 150 + 125(i^2 \times i) \\ &= -142 + 60i - 125i \\ &= -142 - 65i \end{aligned}$$

問 次式を簡単にせよ。

$$(1) \quad i^3 = \qquad (2) \quad i^4 = \qquad (3) \quad i^5 =$$

$$(4) \quad i^6 = \qquad (5) \quad i^7 = \qquad (6) \quad i^8 =$$

$$(7) \quad (1 + i)(1 - i) = \qquad (8) \quad (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) =$$

$$(9) \quad \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right) = \qquad (10) \quad (-1 + i)^2 =$$

$$(11) \quad (-1 - i)^2 = \qquad (12) \quad (4 + 2i)(2 - 3i) =$$

$$(13) \quad (3 - 2i)(1 - 3i) = \qquad (14) \quad (3 - i)^3 =$$

< 複素数の四則演算 3 >

複素数どうしの割り算は、分母を必ず実数になおして求める。

例

$$(1) \frac{1}{i} = \frac{1 \times i}{i \times i} = \frac{i}{-1} = -i$$

$$(2) \frac{1}{2+3i} = \frac{1 \times (2-3i)}{(2+3i) \times (2-3i)} = \frac{2-3i}{4-(3i)^2} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

$$(3) \frac{2+i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(2+i) \times (1+\sqrt{3}i)}{(1-\sqrt{3}i) \times (1+\sqrt{3}i)} = \frac{2+2\sqrt{3}i+i+\sqrt{3}i^2}{1^2-(\sqrt{3}i)^2}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})+(2\sqrt{3}+1)i}{1+3} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{2\sqrt{3}+1}{4}\right)i$$

問 次式を簡単にせよ。

$$(1) \frac{-1}{1+i} =$$

$$(2) \frac{-1}{1-i} =$$

$$(3) \frac{-i}{1-i} =$$

$$(4) \frac{3}{\sqrt{5}-i} =$$

$$(5) \frac{7}{3+\sqrt{5}i} =$$

$$(6) \frac{-i}{1+i} =$$

$$(7) \frac{1}{\sqrt{3}i(\sqrt{3}+i)} =$$

$$(8) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i} =$$

$$(9) \frac{1}{(\sqrt{2}-i)^2} =$$

$$(10) \frac{i}{(1+i)^4} =$$

< 負の数の平方根 >

前のページまでの計算規則に従うと

$$(\sqrt{2}i)^2 = -2, \quad (-\sqrt{2}i)^2 = -2$$

となるから、 -2 の平方根は $\sqrt{2}i$ と $-\sqrt{2}i$ である。
これらの数をそれぞれ

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2}i, \quad -\sqrt{-2} = -\sqrt{2}i$$

のように表すことにする。一般に

$$a > 0 \text{ のとき } \sqrt{-a} = \sqrt{a}i$$

と定める。

例 1 $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} = \sqrt{4}i \times \sqrt{9}i = 2 \times 3 \times i^2 = -6$

(注) $\sqrt{-4} \times \sqrt{-9} \neq \sqrt{(-4) \times (-9)} (= \sqrt{36} = 6)$

このように $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになるときは、普通の $\sqrt{\quad}$ の計算規則がなりたたない。 $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになる場合は必ず虚数単位 i を用いて計算しなければならない。

例 2 $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} = \frac{2}{3i} = \frac{2 \times i}{3i \times i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i$

$$\sqrt{\frac{4}{-9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}i} = \frac{2}{3}i$$

従って $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}} \neq \sqrt{\frac{4}{-9}}$ である。

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{(-3) \times (-4) \times (-5)}$

(2) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} \times \sqrt{-5}$

(3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-4}}$

(4) $\sqrt{\frac{12}{-4}}$

< 2 次方程式 >

実数 a, b, c ($a \neq 0$) に対し、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

は

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$$

と変形できる。従って

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

が求まる。ここで $\sqrt{\quad}$ の中がマイナスになれば、答は虚数になる。虚数解も 2 次方程式の解と考えると、2 次方程式は複素数の範囲で必ず解がある。

例 2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

は解の公式によって

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 7}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{-59}}{6} = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

問 次の 2 次方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^2 + x + 2 = 0$ $x =$

(2) $x^2 + 3x + 9 = 1$ $x =$

(3) $3x^2 - 5x + 4 = 0$ $x =$

< 2 次式の因数分解 >

例 1 2 次式 $2x^2 - 16x + 30$ を因数分解すると

$$(*) \quad 2x^2 - 16x + 30 = 2(x^2 - 8x + 15) = 2(x - 3)(x - 5)$$

となる。ところで 2 次方程式

$$(**) \quad 2x^2 - 16x + 30 = 0$$

の解は前ページの解の公式を使うと

$$x = 3 \quad \text{および} \quad x = 5$$

であるから、因数分解 (*) を求めるために、2 次方程式 (**) の解 3 と 5 を用いればよい。

一般に、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \text{ は実数}, a \neq 0)$$

の解が

$$x = \alpha \quad \text{および} \quad x = \beta$$

ならば

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる。

例 2 2 次方程式

$$3x^2 + 5x + 7 = 0$$

の解は解の公式を使うと

$$x = -\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \quad \text{および} \quad x = -\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i$$

であるから

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x + 7 &= 3 \left(x - \left(-\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \right) \left(x - \left(-\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \right) \\ &= 3 \left(x + \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \left(x + \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{59}}{6}i \right) \end{aligned}$$

問 次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2x + 5 =$

(2) $-5x^2 + 4x - 3 =$

(3) $3x^2 - 3x + 3 =$

< 高次式の因数分解 >

例 1 3 次式 $x^3 - 8$ は因数分解の公式

$$\begin{array}{l} x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) \\ x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2) \end{array}$$

によって

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

と因数分解できるが、

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

の解が、解の公式より

$$x = -1 \pm \sqrt{3}i$$

であるから、

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

と因数分解できるから、複素数の範囲では

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

まで因数分解できる。

例 2 4 次式 $x^4 - 16$ は、実数の範囲では

$$\begin{aligned} x^4 - 16 &= (x^2)^2 - (4)^2 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \end{aligned}$$

のように因数分解できるが、複素数の範囲では

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$$

まで因数分解できる。

問 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $x^3 - 1$

(2) $x^3 + 8$

(3) $x^4 - 1$

< 高次方程式 >

例 1 3 次方程式

(1) $x^3 - 8 = 0$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 1 - \sqrt{3}i = 0, \quad x + 1 + \sqrt{3}i = 0$$

のいずれかであるから、(1) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -1 + \sqrt{3}i, \quad x = -1 - \sqrt{3}i$$

となる。

例 2 4 次方程式

(2) $x^4 - 16 = 0$

を考える。前ページの因数分解の式を使うと

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i) = 0$$

より

$$x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0, \quad x - 2i = 0, \quad x + 2i = 0$$

のいずれかであるから、(2) の解は (複素数の範囲では)

$$x = 2, \quad x = -2, \quad x = 2i, \quad x = -2i$$

となる。

一般に n 次式は、複素数の範囲では、 n 個の一次式の積に因数分解される。(代数学の基本定理)

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$= a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) \quad (z_1, z_2, \cdots, z_n \text{ は複素数})$$

問 次の方程式の解を複素数の範囲で求めよ。

(1) $x^3 - 1 = 0$

(2) $x^3 + 27 = 0$

(3) $x^4 - 1 = 0$

< 共役複素数 >

$$3 + 2i \text{ と } 3 - 2i, \quad 1 - \sqrt{3}i \text{ と } 1 + \sqrt{3}i$$

のように、虚部の符号だけが違う2つの複素数を互いに共役(きょうやく)という。一方は他方の共役複素数という。複素数 z の共役複素数を \bar{z} で表す。すなわち、実数 a, b に対し、

$$z = a + bi \text{ のとき } \bar{z} = a - bi$$

である。従って $\bar{\bar{z}}$ の共役複素数は $\bar{\bar{z}} = a + bi$ であるから

$$\bar{\bar{z}} = z$$

である。

例 (1) $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$, $\overline{-1 - \sqrt{2}i} = -1 + \sqrt{2}i$

(2) $\overline{4} = 4$, $\overline{-5i} = 5i$

(3) $z = 3 + 2i$ のとき $\bar{z} = 3 - 2i$

$$z + \bar{z} = (3 + 2i) + (3 - 2i) = 6$$

$$z\bar{z} = (3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 + 2^2 = 13$$

問1 以下の複素数 z に対し、共役複素数 \bar{z} を求めよ。

(1) $z = 1$, $\bar{z} =$

(2) $z = i$, $\bar{z} =$

(3) $z = 1 - i$, $\bar{z} =$

(4) $z = \frac{1+i}{2}$, $\bar{z} =$

問2 $z = 4 + 3i$ に対し、次式を計算せよ。

(1) $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(2) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(3) $z\bar{z}$

=

=

=

問3 実数 a, b に対し、 $z = a + bi$ とする。以下の値を a と b で表せ。

(1) $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$

(2) $\frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(3) $z\bar{z}$

=

=

=

< 絶対値 >

複素数 $z = a + bi$ (a, b は実数) に対し、

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

を z の絶対値 という。

例 1 $z = 3 + 2i$ のとき

$$|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

問 1 複素数 z が以下の場合に絶対値 $|z|$ を求めよ。

(1) $z = -1$

(2) $z = 7i$

(3) $z = 3 + 4i$

(4) $z = \frac{1+i}{2}$

$|z| =$

$|z| =$

$|z| =$

$|z| =$

前ページの結果より複素数 $z = a + bi$ に対して

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

が成り立つ。

例 2 $z = 2 + 3i$ のとき

$$|z|^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i - 3^2 = -5 + 12i$$

$$|z^2| = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

問 2 以下の複素数 z に対して、 $|z|^2, z^2, |z^2|$ を求めよ。

(1) $z = 4 - 3i$

(2) $z = 1 + i$

$|z|^2 =$

$|z|^2 =$

$z^2 =$

$z^2 =$

$|z^2| =$

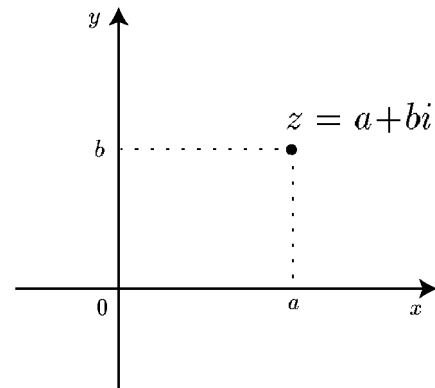
$|z^2| =$

< 複素平面 1 >

定数が数直線上の点で表されたように、複素数を平面上の点として表現する。実数 a, b に対し、複素数

$$z = a + bi$$

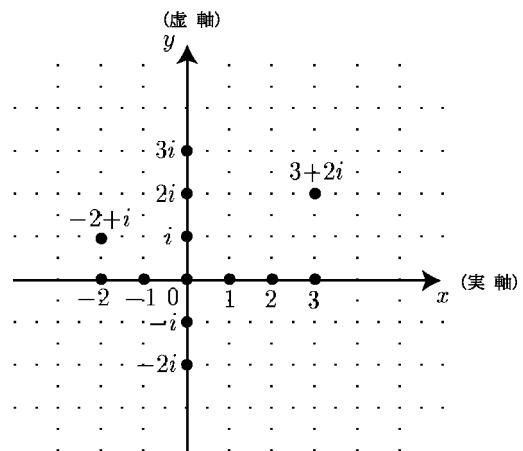
を、右図のように、 x 軸上の目もりが a, y 軸上の目もりが b である xy 平面上の点として表す。この平面を 複素平面 または ガウス平面 という。



例 1 右図のように

実数 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ は全て x 軸上に並んでいる。この x 軸を 実軸 という。

純虚数 $-2i, -i, i, 2i, 3i$ は全て y 軸上に並んでいる。この y 軸を 虚軸 という。



問 1 例 1 の右図の中に以下の複素数を図示せよ。

- (1) $1 + i$, (2) $2 - 2i$, (3) $-3 + 3i$, (4) $-2 - 2i$

例 2 a, b を正の数とすると複素数 $z = a + bi$ は右図の位置にあり、共役複素数

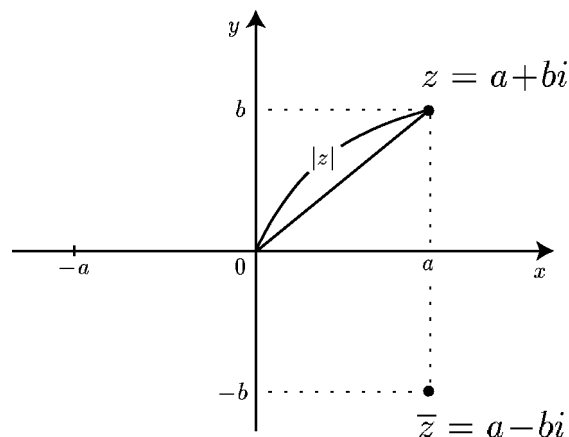
$$\bar{z} = a - bi$$

は実軸に関して対称な位置にある。

また、絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

は原点からの距離を表す。



問 2 例 2 の右図上に $-z$ および $-\bar{z}$ を図示せよ。

< 複素平面 2 >

例 $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 + 2i$

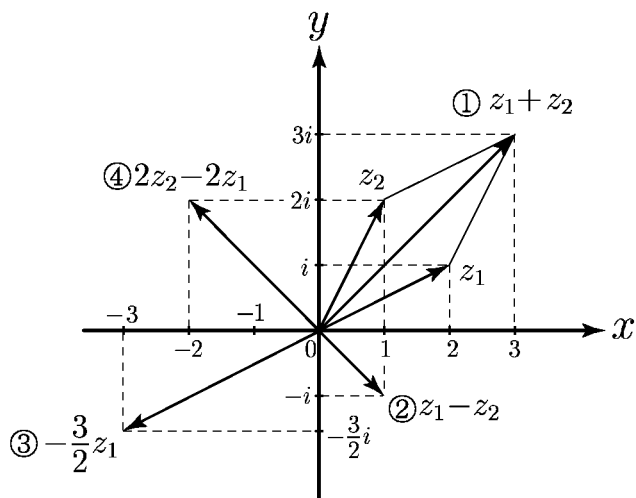
のとき以下の複素数

$$z_1 + z_2 = 3 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = 1 - i$$

$$-\frac{3}{2}z_1 = -3 - \frac{3}{2}i$$

$$\begin{aligned} 2z_2 - 2z_1 &= (2 + 4i) - (4 + 2i) \\ &= -2 + 2i \end{aligned}$$



を複素平面上に表すと右図のようになる。

は z_1 と z_2 の和である。右図から四点 (原点, $z_1, z_2, z_1 + z_2$) を結ぶと平行四辺形になる。

は z_1 の $-\frac{3}{2}$ 倍である。 z_1 と原点を結ぶ直線上に $-\frac{3}{2}z_1$ がある。

問 $z_1 = 3 + i, z_2 = 1 + 3i$

のとき以下の複素数を

計算し、例のように

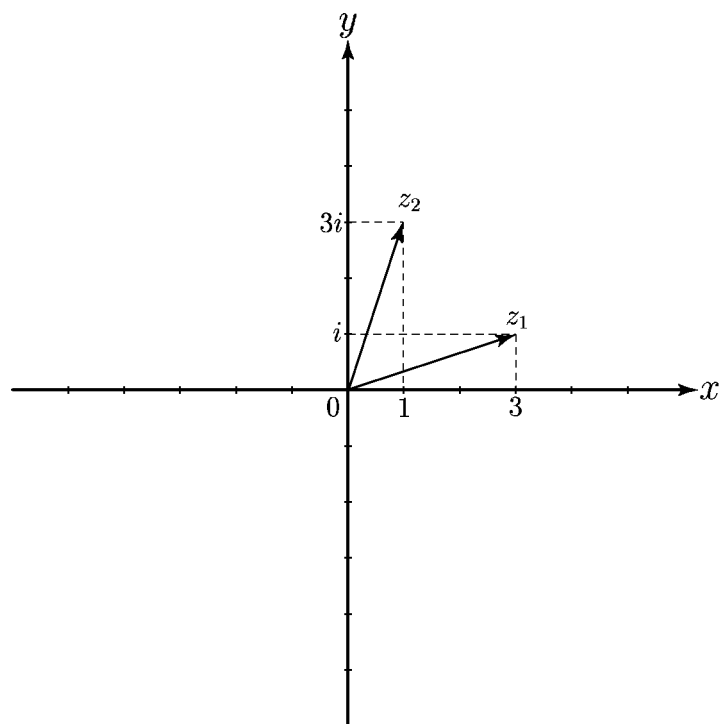
複素平面上に図示せよ。

$$z_1 + z_2 =$$

$$z_1 - z_2 =$$

$$-\frac{3}{2}z_1 =$$

$$2z_2 - 2z_1 =$$



< 複素数の i 倍 >

複素数の和・差・実数倍はベクトルと同じであるが、複素数倍は別の図形的な意味がある。一般の場合は後で説明するが、このページでは i 倍の図形的な意味を考える。

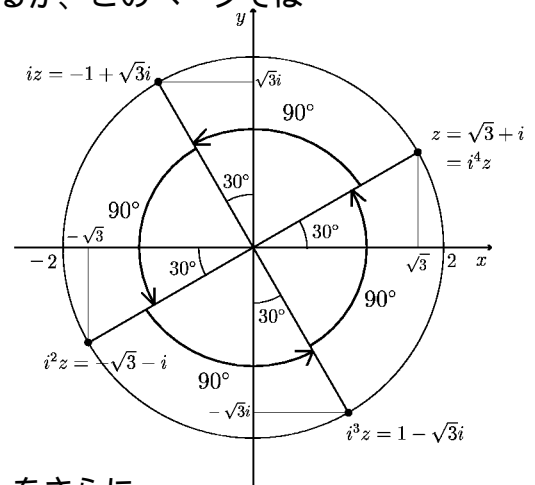
例 $z = \sqrt{3} + i$ に対し

$$iz = i(\sqrt{3} + i) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$i^2z = i(iz) = i(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{3} - i$$

$$i^3z = i(i^2z) = i(-\sqrt{3} - i) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$i^4z = i(i^3z) = i(1 - \sqrt{3}i) = \sqrt{3} + i = z$$



右図より iz は z を原点を中心として反時計

まわりに 90° 回転させたものであり、 i^2 は iz をさらに

90° 回転させたものであり、 i^3z は i^2z をさらに 90° 回転させたもので

あり、 i^4z は i^3z をさらに 90° 回転させたものであるからもとの z にもどる。

問 z が以下の場合に

$$iz, i^2z, i^3z, i^4z$$

を求め、右図に記入せよ。

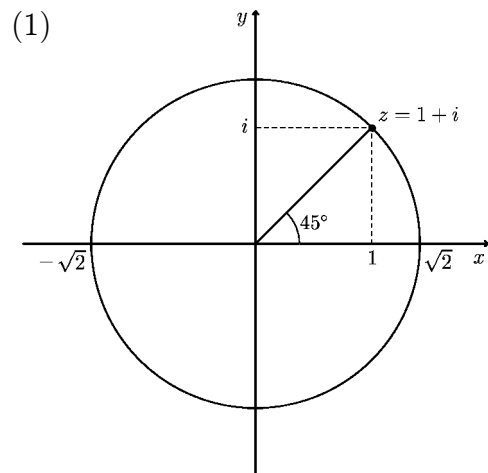
(1) $z = 1 + i$

$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$



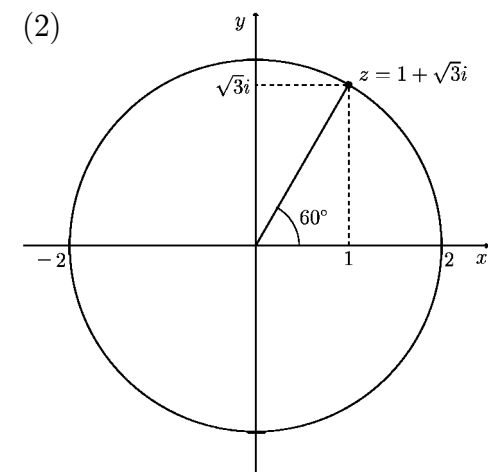
(2) $z = 1 + \sqrt{3}i$

$$iz =$$

$$i^2z =$$

$$i^3z =$$

$$i^4z =$$



< 極座標表示 1 >

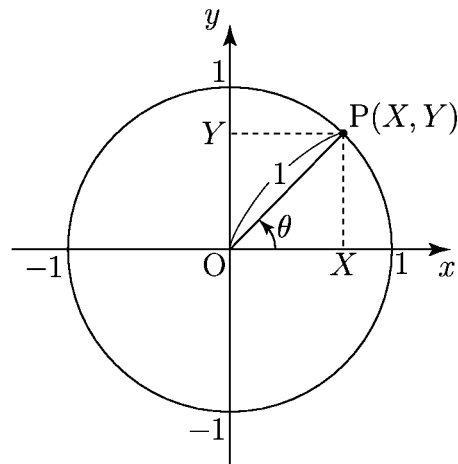
座標平面上の原点 $O(0,0)$ を中心として半径1の円周上の点 $P(X,Y)$ を考える、角度 θ が右図の場合に、三角関数の定義から

$$X = \cos \theta , \quad Y = \sin \theta$$

となるから点 $P(X,Y)$ の座標は

$$(X, Y) = (\cos \theta , \sin \theta)$$

と表される。



例 右図は半径1の円周上の点の x 軸からの角度 (単位ラジアン) を内側に書き、その点の座標を外側に書いてある。この図から

$$(0, 1) = \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

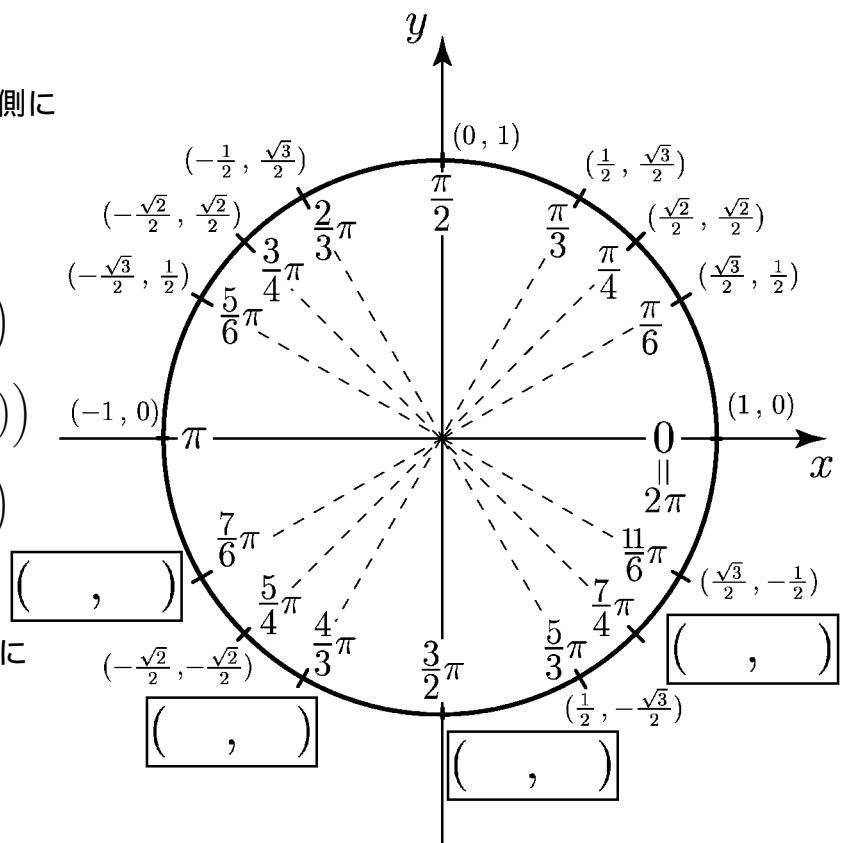
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{6}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{6}\pi \right) \right)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{4}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{4}\pi \right) \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\cos \left(\frac{5}{3}\pi \right), \sin \left(\frac{5}{3}\pi \right) \right)$$

となる。

問1 右図の (\quad, \quad) の中に座標を書け。



問2 以下の座標を例のように三角関数を使って書きなおせ。

(1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$

(2) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

(3) $(1, 0) =$

(4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) =$

(5) $(0, -1) =$

(6) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$

< 極座標表示 2 >

座標平面上の点 $P(a, b)$ は原点 $O(0, 0)$

からの距離が r で、 x 軸からの角度が θ (右図) の位置にあるとする。

線分 OA 上に $OP=1$ となるような点 $P(X, Y)$ をとる。前ページより

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta$$

となる。また三角形の相似比 $X : a = Y : b = 1 : r$ より

$$a = rX, \quad b = rY$$

となるから

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

より

$$(a, b) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{極座標表示})$$

と表される。 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を (a, b) の極座標表示という。

(注) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ である。

例 (1) 点 $A(-1, 1)$ は図 2 より極座標表示すると

$$(-1, 1) = \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

(2) 点 $B(-1, -\sqrt{3})$ は図 3 より

$$(-1, -\sqrt{3}) = \left(2 \cos \left(\frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left(\frac{4}{3}\pi \right) \right)$$

< 検算 > 例の極座標表示が正しいかどうかは三角関数の値を代入してみればわかる。

$$\begin{aligned} (1) & \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{3}{4}\pi \right), \sqrt{2} \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right) \\ & = \left(\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = (-1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(2 \cos \left(\frac{4}{3}\pi \right), 2 \sin \left(\frac{4}{3}\pi \right) \right) \\ & = \left(2 \times \left(-\frac{1}{2} \right), 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = (-1, -\sqrt{3}) \end{aligned}$$

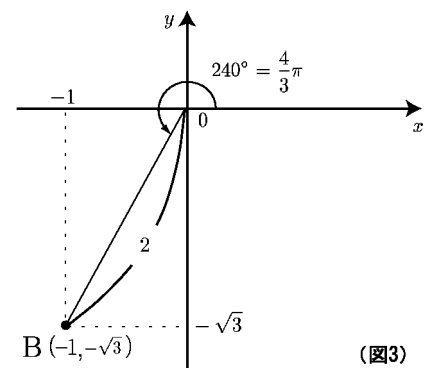
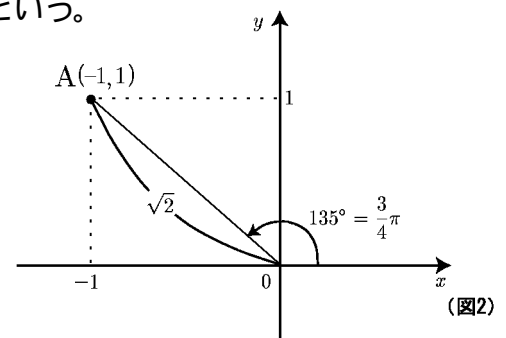
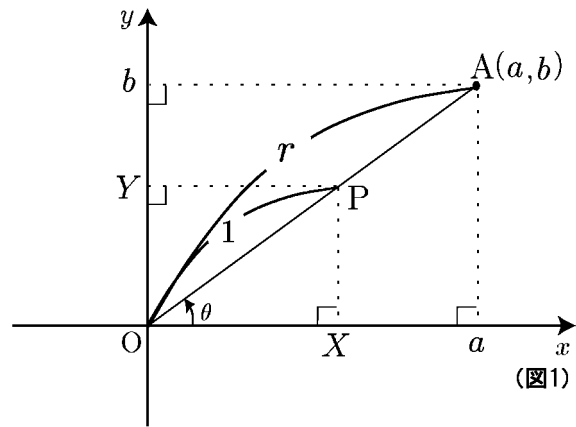
問 次の座標を極座標表示になおせ。

(1) $(3, 3)$

(2) $(1, -\sqrt{3})$

(3) $(\sqrt{3}, 1)$

(4) $(-2, -2)$



< 極形式 1 >

複素数 $z = a + bi$ に対し、

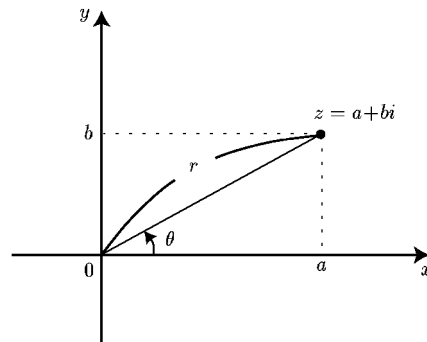
$$|z| = r$$

で、右図のように x 軸の正の部分からの角度が θ であるとき

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

となる。従って

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{極形式})$$



と表される。これを z の極形式という。このとき角 θ は複素数 z の偏角といい、

$$\theta = \arg(z)$$

という記号を使うこともある。

例 (1) $z = 3i$ のとき右図より

$$r = |z| = 3, \quad \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

だから

$$3i = 3 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

(2) $z = -4$ のとき右図より

$$r = |z| = 4, \quad \theta = 180^\circ = \pi$$

だから

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

(3) $z = -2i$ のとき右図より

$$r = |z| = 2, \quad \theta = 270^\circ = \frac{3}{2}\pi$$

だから

$$-2i = 2 \left(\cos \left(\frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{2}\pi \right) \right)$$

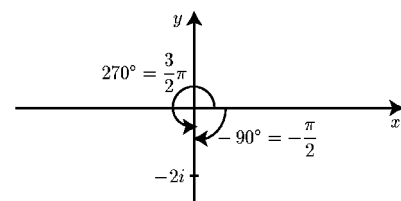
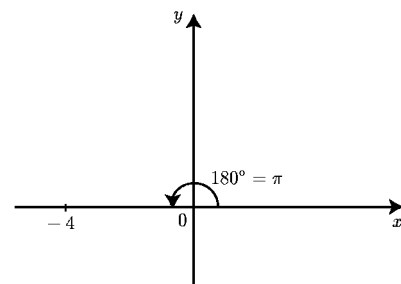
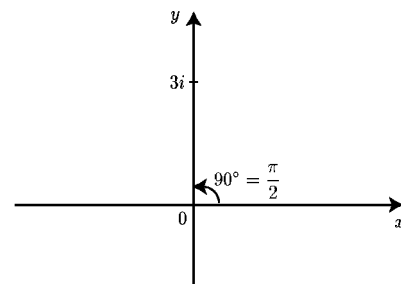
(注) 270° の位置と -90° の位置は同じだから $-2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$ としてもよい。

問 次の複素数を極形式になおせ。

(1) $4i$

(2) -2

(3) $-\sqrt{2}i$



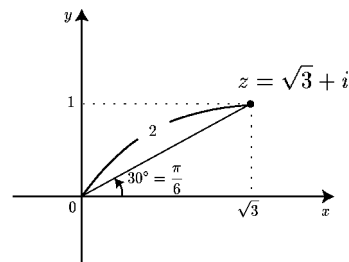
< 極形式 2 >

例 (1) $z = \sqrt{3} + i$ に対し、

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

であり、右図より $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ だから

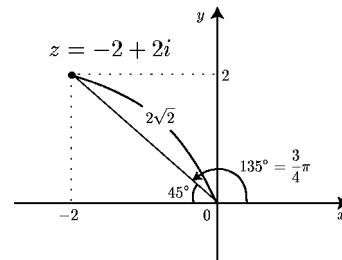
$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

(2) $z = -2 + 2i$ に対し、

$$r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

であり、右図より $\theta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$ だから

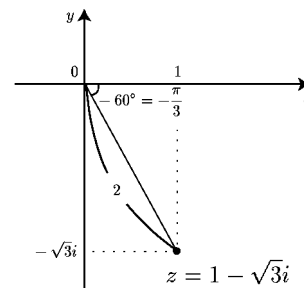
$$-2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi \right) \right)$$

(3) $z = 1 - \sqrt{3}i$ に対し、

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

であり、右図より $\theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$ だから

$$1 - \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$



問 以下の複素数を極形式になおせ。

(1) $z = 1 + i =$

(2) $z = -1 - i =$

(3) $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i =$

(4) $z = -3 - \sqrt{3}i =$

(5) $z = -\sqrt{18} + \sqrt{6}i =$

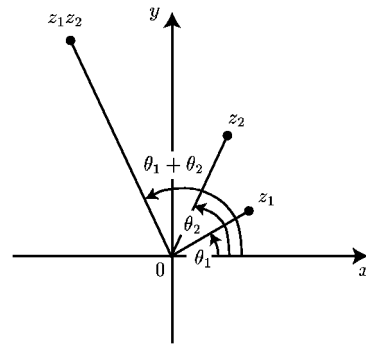
< 複素数の積 >

2つの複素数 z_1, z_2 が極形式で

$$z_1 = r_1 \{ \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \}$$

$$z_2 = r_2 \{ \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \}$$

と表されているとき、積 $z_1 z_2$ は



$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \end{aligned}$$

となる。従って

$$z_1 z_2 = r_1 \{ \cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \} \times r_2 \{ \cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \} = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

(注) 上の計算で三角関数の加法定理

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

を用いた。

例 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

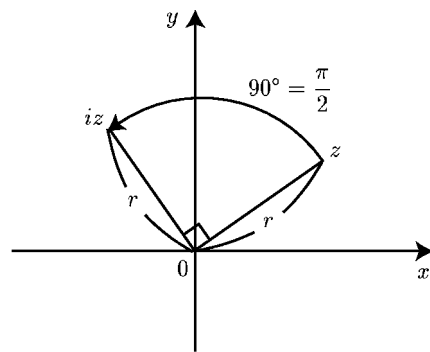
に

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

をかけると、上の式より

$$iz = r \left\{ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right\}$$

より、右図のように、 iz は z を原点を中心として反時計まわりに $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にある。



問 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対して、以下の複素数の積を極形式で表し、回転の角度を求めよ。

(1) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$ (2) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z$ (3) iz

=

=

=

< 複素数の商 >

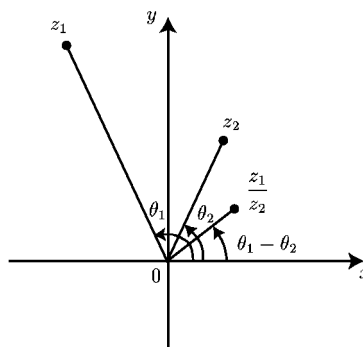
$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdots (1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \cdots (2)$$

に対し、

$$\frac{z_1}{z_2} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

とおくと



$$z_1 = \frac{z_1}{z_2} \times z_2 = r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

より

$$z_1 = rr_2 \{ \cos (\theta + \theta_2) + i \sin (\theta + \theta_2) \}$$

(1) 式と比較すれば

$$r_1 = rr_2, \theta_1 = \theta + \theta_2$$

だから

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2$$

よって

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \}$$

例 $z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right\}$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

より

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i} &= \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right\} \end{aligned}$$

問 次の複素数の商を極形式で表せ。

(1) $\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} =$

(2) $\frac{1 - i}{-1 + i} =$

(3) $\frac{1 - i}{-\sqrt{3} + i} =$

< ド・モアブルの定理 >

複素数の積で

$$r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

であった。とくに $r_1 = r_2 = 1$ のときは

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。ここで $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ とすれば

$$(1) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

又、 $\theta_1 = 2\theta$, $\theta_2 = \theta$ とすれば

$$(2) \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \{ \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \} \times (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta)$$

(1) と (2) を一般化すると、

$$\boxed{(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

が任意の自然数 n に対して成立する。この公式を ド・モアブルの定理 という。

例 $\sqrt{3} + i = 2 \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}$ だから

$$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 \times \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}^6 = 64 \times \{ \cos(\pi) + i \sin(\pi) \} = -64$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad (-\sqrt{3} + i)^3 =$$

$$(2) \quad \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^6 =$$

$$(3) \quad \left(\frac{1 - i}{2} \right)^4 =$$

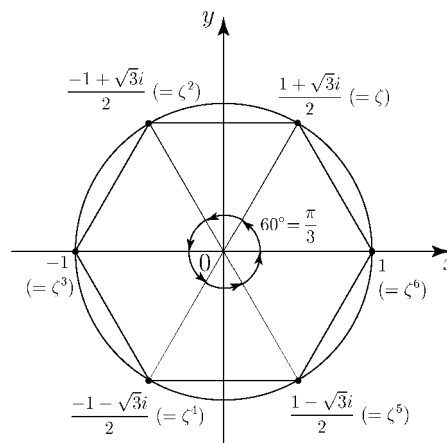
$$(4) \quad \left(\frac{-1 + i}{\sqrt{3} + i} \right)^{12} =$$

< 1 の累乗根 >

例題

$$z^6 = 1$$

をみたす複素数 z をすべて求めよ。



(解) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta))$$

となる。一方 1 を極形式で表すと

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = \cos(4\pi) + i \sin(4\pi) = \dots$$

となる。 z^6 と等しいから

$$z^6 = r^6(\cos(6\theta) + i \sin(6\theta)) = \cos(2n\pi) + i \sin(2n\pi) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

よって

$$r = 1, \quad 6\theta = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。

$$n = 0 \text{ のとき } \quad 6\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$n = 1 \text{ のとき } \quad 6\theta = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 2 \text{ のとき } \quad 6\theta = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad z = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 3 \text{ のとき } \quad 6\theta = 6\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi \quad \Rightarrow \quad z = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$n = 4 \text{ のとき } \quad 6\theta = 8\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{4}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad z = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$n = 5 \text{ のとき } \quad 6\theta = 10\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{5}{3}\pi \quad \Rightarrow \quad z = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6 次方程式の解は 7 個以上はないから、これがすべての解である。

$$\text{(答)} \quad z = 1, \quad \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad -1, \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

(注) $\zeta = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ ($= \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$) とすると、 $z^6 = 1$ の解は

$$z = 1, \quad \zeta, \quad \zeta^2, \quad \zeta^3, \quad \zeta^4, \quad \zeta^5$$

となっている。複素平面上では、単位円周を 6 等分する分点である。(右上図参照)

問 次の方程式をみたす複素数 z を全て求め、上図のように単位円周上の点として図示せよ。

(1) $z^3 = 1$

(2) $z^4 = 1$

(3) $z^8 = 1$

< オイラーの公式 1 >

指数関数・三角関数のマクローリン展開 (ワークブック Ser. A , No. 7) を復習すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \quad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \quad (3)$$

であった。ここで x は実数である。これを虚数まで拡張したい。
実数 y と虚数単位 i に対し、(1) 式の x のかわりに iy を代入すれば、 $i^2 = -1$ だから

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots \right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y} \quad (y \text{ は実数})$$

が成立する。これをオイラーの公式という。

例 $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

問 次の複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2\pi i} =$ (2) $e^{-\frac{\pi}{2}i} =$

(3) $e^{\frac{3}{4}\pi i} =$ (4) $e^{\frac{5}{3}\pi i} =$

(5) $e^{-\frac{3}{4}\pi i} =$ (6) $e^{-\frac{\pi}{3}i} =$

< オイラーの公式 2 >

複素数 z に対し、 e の z 乗をマクローリン展開

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \quad (= \exp(z))$$

によって定義する。これを $e^z = \exp(z)$ と書く場合もある。

今 $z = x + iy$ (x, y は実数) のとき、(詳しい計算は省略するが)

$$\begin{aligned} e^{x+iy} &= 1 + (x + iy) + \frac{(x + iy)^2}{2!} + \frac{(x + iy)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \times \left(1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots \right) \\ &= e^x \times e^{iy} \end{aligned}$$

が成立する。

$$e^{x+iy} = e^x \times e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (x \text{ と } y \text{ は実数})$$

この式もオイラーの公式と呼ばれている。

例 (1) $e^{2+i\pi} = e^2(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^2$

(2) $e^{-3-\frac{\pi}{2}i} = e^{-3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = -\frac{1}{e^3} i$

(3) $e^{\log 2 + \frac{\pi}{6}i} = e^{\log 2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$

(注) $\log 2$ は底が e の対数 (=自然対数) であるから、対数の定義より

$$x = \log 2 = \log_e 2 \iff e^x = 2$$

よって

$$e^{\log 2} = e^x = 2$$

問 以下の指数表示された複素数を例のようになおせ。

(1) $e^{2-2\pi i}$

(2) $e^{0+\frac{\pi}{3}i}$

(3) $e^{2+\frac{3}{4}\pi i}$

(4) $e^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\pi i}$

(5) $e^{\log 2 + \frac{5}{4}\pi i}$

(6) $e^{\frac{1}{3}\log 8 + \frac{\pi}{6}i}$

< 複素数の指数表示 >

複素数 z の絶対値が r 、偏角が θ のとき、 z は極形式によって

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される。一方

$$r = e^{\log r}, \quad \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

であるから

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{\log r} \times e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$$

と指数表示できる。特に $r = 1$ のとき $\log 1 = 0$ より

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

となる。このように絶対値が 1 の複素数は指数表示の方が簡単である。

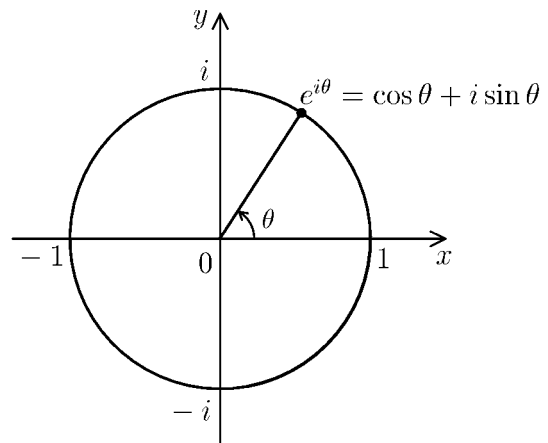
例 1 ド・モアブルの定理

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

を指数表示で書くと、

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad (\text{ド・モアブルの定理})$$

と簡単に書ける。



問 1 絶対値が 1、偏角が θ_1 と θ_2 の複素数の積は、19 ページより

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

となる。この式を指数表示で書け。

例 2 $\frac{\sqrt{3}+i}{2} = e^{\frac{\pi}{6}i}$, $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\frac{\pi}{3}i}$ より

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \times \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{6}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $e^{\frac{3}{2}\pi i} \times e^{\frac{\pi}{2}i} =$

(2) $e^{\frac{4}{3}\pi i} \div e^{\frac{\pi}{6}i} =$

(3) $(e^{\frac{\pi}{8}i})^4 =$

(4) $(e^{\frac{\pi}{48}i})^{12} =$

< 複素数の簡易表示 >

複素数 $z = a + bi$ の偏角が θ

のとき、極形式によって

$$z = a + bi = |z|\{\cos \theta + i \sin \theta\}$$

と表される。ここでオイラーの公式より

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

であるから

$$z = |z|e^{i\theta}$$

と表される。(ただし $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

例 1 $z_1 = 1 + i$ は偏角 $\frac{\pi}{4}$, 絶対値 $|z_1| = \sqrt{2}$

だから

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

例 2 $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ は偏角 $\frac{2\pi}{3}$, 絶対値 $|z_2| = 2$

だから

$$z_2 = -1 + \sqrt{3}i = 2\{\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\} = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

例 3 例 1, 例 2 の z_1, z_2 に対し, 積と商も $|z|e^{i\theta}$ の形で表示する。

$$z_1 z_2 = (1 + i)(-1 + \sqrt{3}i) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \times 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt{2} \times 2 \times e^{\frac{\pi}{4}i + \frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{2} e^{\frac{11\pi}{12}i}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{1 + i} = \frac{2e^{\frac{2\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times e^{\frac{2\pi}{3}i - \frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2} e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

問 1 次の複素数を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1 = \sqrt{3} + i$

(2) $z_2 = -1 + i$

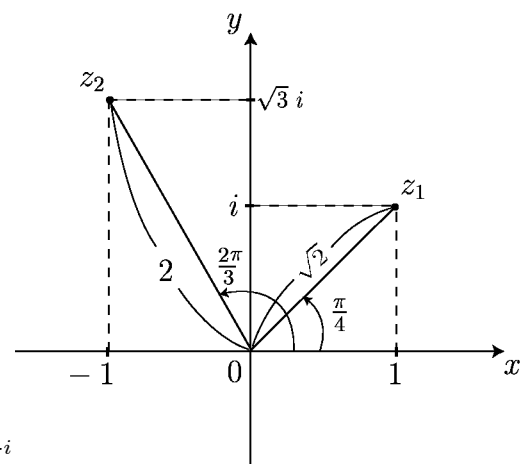
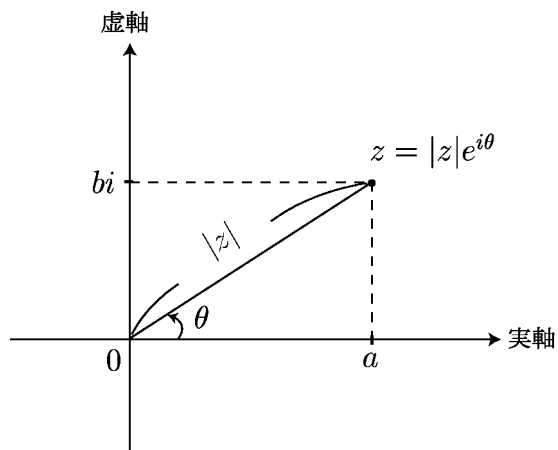
(3) $z_3 = -\sqrt{3} - 3i$

問 2 問 1 の z_1, z_2, z_3 に対し次式を $|z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

(1) $z_1 z_2$

(2) $z_2 z_3$

(3) $\frac{z_3}{z_1}$



< 時間変数 t による微分 1 >

物体の運動などを表現する場合、各時刻における位置などを考える。このような場合、位置は時刻の関数と考える。すなわち変数が時刻になる。時刻(時間)を表す変数を通常 t で表す。そこで今後は変数 t の関数 $f(t)$ を考える。

t の関数 $f(t)$ の導関数の定義は、

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

である。今まで習った微分の公式を変数 t におきかえると以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} (t^r) = r t^{r-1} \quad (r \text{ は実数})$$

$$\frac{d}{dt} (e^t) = e^t \quad \frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t} \quad (\log t = \log_e t \text{ (自然対数)})$$

$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t$$

例 (1) $\frac{d}{dt} (t^7 - 4e^t + 5 \log t) = 7t^6 - 4e^t + \frac{5}{t}$

(2) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5}{t^3} - \sqrt{t} \right) = \frac{d}{dt} (5 \times t^{-3} - t^{\frac{1}{2}}) = 5 \times (-3t^{-4}) - \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} = -\frac{15}{t^4} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$

問 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt} (9 - 6t^2 + 3t^3) =$

(2) $\frac{d}{dt} (-t^8 + 3t^4 + 2t^2 + 6e^t) =$

(3) $\frac{d}{dt} (2t^5 - 6 \cos t + \frac{1}{2} \log t) =$

(4) $\frac{d}{dt} \left(\frac{5}{t} + \frac{4}{\sqrt{t^3}} \right) =$

< 時間変数 t による微分 2 >

微分する変数が x から t に変わっても微分の公式は同様になりたつ。

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt}} \quad (\text{合成関数の微分})$$

例 1 $y = \sin(5t + 3)$ を微分したい。

$$u = 5t + 3 \quad \text{とおくと} \quad y = \sin(u) \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\sin u) \times \frac{d}{dt}(5t + 3) = \cos(u) \times 5 = 5 \cos(5t + 3)$$

だから

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt} \sin(5t + 3) = 5 \cos(5t + 3)}}$$

問 1 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \sin(5t + 4) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} e^{3t+2} =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos\left(-2t + \frac{1}{2}\right) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(9 - 2t) =$$

例 2 $y = \cos(t^2 - 4t)$ を微分したい。

$$u = t^2 - 4t \quad \text{とおくと} \quad y = \cos(u) \quad \text{より}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{d}{du}(\cos u) \times \frac{d}{dt}(t^2 - 4t) = -\sin(u) \times (2t - 4)$$

よって

$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}(\cos(t^2 - 4t)) = -(2t - 4) \sin(t^2 - 4t)}}$$

問 2 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt} \sin(2t^3 - t) =$$

$$(2) \frac{d}{dt} (e^{-t^3}) =$$

$$(3) \frac{d}{dt} \cos(2 + 3t - 4t^2) =$$

$$(4) \frac{d}{dt} \log(t^5 - 2t^3 + t) =$$

< 時間変数 t による微分 3 >

t の関数 $f(t)$ と $g(t)$ に対し、積 $f(t) \times g(t)$ の導関数は

$$\boxed{(f(t) \times g(t))' = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)} \quad (\text{積の微分})$$

となる。

例 1 (1) $\frac{d}{dt}(t^2 e^t) = (t^2)' \times e^t + t^2 \times (e^t)' = 2te^t + t^2 e^t$

(2) $\frac{d}{dt}(e^t \cos t) = (e^t)' \times \cos t + e^t \times (\cos t)' = e^t \cos t - e^t \sin t$

問 1 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt}(2te^t) =$

(2) $\frac{d}{dt}(t^3 \cos t) =$

(3) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^t \sin t\right) =$

(4) $\frac{d}{dt}(t^2 \log t) =$

例 2 $\frac{d}{dt}(e^{2t} \sin(3t)) = (e^{2t})' \times \sin(3t) + e^{2t} \times (\sin(3t))'$
 $= 2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)$

問 2 次の導関数を求めよ。

(1) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}e^t \sin(2t)\right) =$

(2) $\frac{d}{dt}(e^{3t} \cos(6t)) =$

(3) $\frac{d}{dt}(4e^{\frac{t}{2}} \sin(-5t)) =$

(4) $\frac{d}{dt}(3e^{-2t} \cos(4t)) =$

< 複素数値関数の微分 1 >

実変数 t の複素数値関数 $z = z(t)$ は

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (x(t) \text{ と } y(t) \text{ は実数})$$

のように実部 $x(t)$ と虚部 $y(t)$ の2つの実数値関数で表される。

このとき $z(t)$ の導関数を

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + i \frac{dy(t)}{dt}$$

と定める。

例 (1) $z(t) = t^2 + t^3i$ のとき

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) + \frac{d}{dt}(t^3)i = 2t + 3t^2i$$

(2) $z(t) = e^{(2+3i)t} = e^{2t}(\cos(3t) + i \sin(3t))$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{2t} \cos(3t) + ie^{2t} \sin(3t)) \\ &= \frac{d}{dt}(e^{2t} \cos(3t)) + i \frac{d}{dt}(e^{2t} \sin(3t)) \\ &= \{2e^{2t} \cos(3t) - 3e^{2t} \sin(3t)\} + i \{2e^{2t} \sin(3t) + 3e^{2t} \cos(3t)\} \end{aligned}$$

問 次式を t で微分せよ。(ただし a と b は実数)

(1) $z(t) = 3t^2 - 4t + (t^4 + 5t^3)i$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(2) $z(t) = e^{ibt} = \cos(bt) + i \sin(bt)$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(3) $z(t) = e^{(3+2i)t}$

$$\frac{dz}{dt} =$$

(4) $z(t) = e^{(a+bi)t}$

$$\frac{dz}{dt} =$$

< 複素数値関数の微分 2 >

前ページ問 (4) より 実数 a, b に対し

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= \frac{d}{dt}e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt)) \\ &= \{ae^{at}\cos(bt) - be^{at}\sin(bt)\} + i\{ae^{at}\sin(bt) + be^{at}\cos(bt)\} \\ &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt) + (ai-b)\sin(bt)\}\end{aligned}$$

となる。ここで $i^2 = -1$ より $ai - b$ を

$$ai - b = ai + bi^2 = (a + bi)i$$

におきかえると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} &= e^{at}\{(a+bi)\cos(bt) + (a+bi)i\sin(bt)\} \\ &= e^{at}(a+bi)\{\cos(bt) + i\sin(bt)\} \\ &= e^{at}(a+bi)e^{bti} = (a+bi)e^{(a+bi)t}\end{aligned}$$

となる。すなわち

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{(a+bi)t} = (a+bi)e^{(a+bi)t}}$$

が得られる。

問 以下の導関数を求めよ。(ただし a と b は実数)

(1) $\frac{d}{dt}e^{3it}$

(2) $\frac{d}{dt}e^{-2it}$

(3) $\frac{d}{dt}e^{bit}$

(4) $\frac{d}{dt}e^{(1+i)t}$

(5) $\frac{d}{dt}e^{(2-i)t}$

(6) $\frac{d}{dt}e^{(-3+2i)t}$

(7) $\frac{d}{dt}e^{(a-i)t}$

(8) $\frac{d}{dt}e^{(a-bi)t}$

< 複素数の練習 1 >

問1 次式を簡単にせよ。ただし $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする。

(1) $i^7 + i^4 + i$

(2) $(i + 1)(i^2 - i + 1)$

(3) $\left(\frac{1 + i^3}{2}\right)\left(\frac{1 - i^3}{2}\right)$

(4) $\frac{1 - i}{1 + i}$

(5) $\frac{2}{i - \sqrt{3}}$

(6) $\sqrt{-10} \times \sqrt{-6} \div \sqrt{-105} \times \sqrt{-7}$

問2 2次方程式 $2x^2 - x + 3 = 0$ の解を複素数の範囲で求めよ。

問3 $z = 3 + 4i$ に対し、次式を計算せよ。

$\bar{z} =$

$z\bar{z} =$

$|z| =$

$z^2 =$

問4 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $3 - \sqrt{3}i$

(2) $-2 + 2i$

問5 次式を計算せよ。

(1) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{12}$

(2) $(1 - i)^8$

< 複素数の練習 2 >

問1 次の複素数を $x + iy$ (x, y は実数) の形にせよ。

$$(1) e^{-\frac{2\pi}{3}i} \qquad (2) e^{3+\frac{\pi}{4}i}$$

$$(3) e^{\frac{\pi}{3}i} \div e^{\frac{\pi}{2}i}$$

問2 オイラーの公式を用いて次の複素数を指数 e^{\square} の形にせよ。

$$(1) \frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \qquad (2) -\frac{\sqrt{2}e}{2} + \frac{\sqrt{2}e}{2}i$$

問3 複素数 z の偏角を θ とすると $z = |z|e^{i\theta}$ と表される。

次の複素数を $z = |z|e^{i\theta}$ の形にせよ。

$$(1) 1 + \sqrt{3}i \qquad (2) -3 + \sqrt{3}i$$

問4 次式を $x + iy$ (x と y は実数) の形にせよ。(ただし t は実数)

$$(1) e^{\frac{5\pi}{3}i} \qquad (2) e^{\frac{2+3\pi i}{4}}$$

$$(3) \left(e^{\frac{\pi}{6}i}\right)^7 \div e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$(4) \left(\frac{1-i}{2}\right)e^{(3+5i)t} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e^{(3-5i)t}$$

問5 $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を複素数を用いた指数で表せ。

$$\cos \theta =$$

$$\sin \theta =$$

問6 次の導関数を求めよ。

$$(1) \frac{d}{dt}e^{t^2+t} \qquad (2) \frac{d}{dt}\{e^{2t} \cos(3t)\}$$

$$(3) \frac{d}{dt}e^{-3ti} \qquad (4) \frac{d}{dt}e^{(4+5i)t}$$

< 微分方程式 >

微分方程式 (differential equation) とは独立変数とその未知関数および未知関数の導関数を含む方程式のことである。簡単にいえば微分 (導関数) を含む方程式である。たとえば変数 t の関数 y に関する微分方程式の例として

$$(1) \frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6$$

$$(2) \frac{dy}{dt} = 2ty$$

$$(3) \frac{dy}{dt} + 3y = e^{4t}$$

等がある。これらは全て 1 階導関数 $\frac{dy}{dt}$ を含む微分方程式なので 1 階微分方程式という。これに対し、2 階導関数を含む微分方程式の例として

$$(4) \frac{d^2y}{dt^2} = -9.8$$

$$(5) \frac{d^2y}{dt^2} = -4y$$

$$(6) \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 3t$$

等がある。(4) ~ (6) の例のように 2 階導関数 $\frac{d^2y}{dt^2}$ を含み、3 階以上の導関数を含まない微分方程式を 2 階微分方程式という。一般に n 階導関数を含み、 $n + 1$ 階以上の導関数を含まない微分方程式を n 階微分方程式という。

問 次の微分方程式は何階微分方程式か?

$$(1) \frac{dy}{dt} = 2y$$

$$(2) \frac{d^2y}{dt^2} = -9y$$

$$(3) \frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} + t^4 = 0$$

< 微分方程式の解 1 >

微分方程式を満たす関数をその微分方程式の解という。

例 独立変数 t , 未知関数 y に関する 1 階微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。今

$$(1) \quad \boxed{y = e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^t) = e^t = y$$

より関数 (1) は微分方程式 (*) の解である。微分係

数 $y'(t) = \frac{dy}{dt} = e^t$ は $y = e^t$ のグラフの「接線の

傾き」を意味するから

$$t = 0 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(0) = e^0 = 1$$

$$t = 1 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(1) = e^1 = e$$

$$t = 2 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(2) = e^2$$

となる (図 1 参照)。実は微分方程式 (*) の解は (1)

だけではない。

$$(2) \quad \boxed{y = 2e^t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(2e^t) = 2e^t = y$$

より関数 (2) も微分方程式 (*) の解である。

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = 2e^t \text{ より}$$

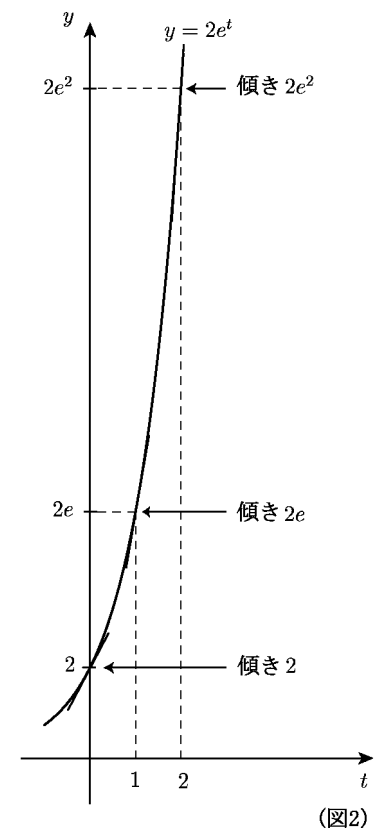
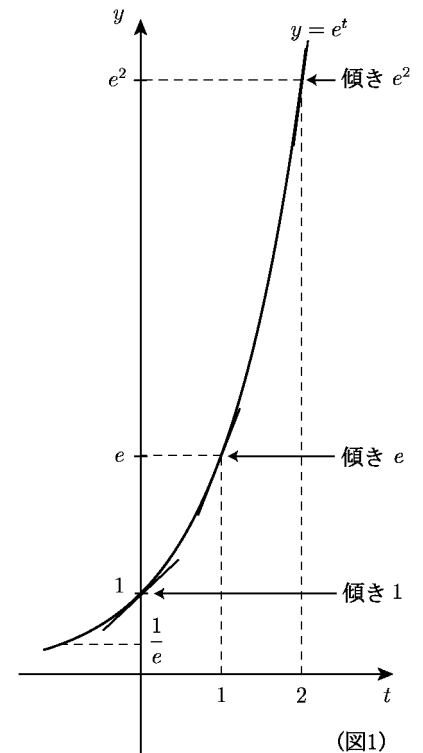
$$t = 0 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(0) = 2e^0 = 2$$

$$t = 1 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(1) = 2e^1 = 2e$$

$$t = 2 \text{ のとき 接線の傾き} = y'(2) = 2e^2$$

となる (図 2 参照)。

問 上の例の微分方程式 (*) の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。



< 微分方程式の解 2 >

例 前ページの例の微分方程式

$$(*) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = y}$$

を考える。前ページより $y = e^t$ および $y = 2e^t$ は (*) の解であった。

それ以外に

$$y = 3e^t, y = 4e^t, \dots, y = -e^t, y = -2e^t, \dots$$

$$y = \frac{1}{2}e^t, y = \frac{1}{3}e^t, \dots, y = -\frac{1}{2}e^t, y = -\frac{1}{3}e^t, \dots$$

等もすべて (*) の解である。これらの関数の 1 つ 1 つを微分方程式 (*) の特殊解という。

一方、微分方程式 (*) の全ての解 (特殊解の全体) は

$$(**) \quad \boxed{y = Ce^t} \quad (C \text{ は任意定数})$$

の形をしている。このような任意定数 C を含む関数 (**) を微分方程式 (*) の一般解という。

特殊解は一般解の C に具体的な値を与えた関数である。

$$C = 1 \text{ のとき } y = e^t \quad \dots \text{ 前ページの関数 (1)}$$

$$C = 2 \text{ のとき } y = 2e^t \quad \dots \text{ 前ページの関数 (2)}$$

これらは全て特殊解である。

一般解 (**) の定数 C が定まるような条件として例えば

$$(***) \quad \boxed{t = 0 \text{ のとき } y = 1}$$

という条件があれば C が定まる。(**) と (***) より

$$t = 0 \text{ のとき } y = Ce^0 = C \quad \text{より} \quad \underline{C = 1}$$

となって特殊解 $y = e^t$ が決まる。(***) のような条件を初期条件という。 t は時刻 (時間) を表す変数であるから、「 $t = 0$ は時刻 0 のとき」という意味で初期条件という。グラフで考えると、前ページ図 1 の y 切片 (y 軸との交点) を意味する。

問 例の一般解 (**) に対し、以下の初期条件を満たす C を求め、特殊解 y を決定せよ。

(1) $t = 0$ のとき $y = 3$

(2) $t = 0$ のとき $y = -2$

(3) $t = 0$ のとき $y = 0$

< 微分方程式の解 3 >

例 微分方程式

$$(*) \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

を考える。今

$$(1) \quad y = e^{-t}$$

とおくと

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}e^{-t} = -e^{-t} = -y$$

より微分方程式 (*) をみたく。すなわち関数 (1) は微分方程式 (*) の特殊解である。

(1) の導関数を $y'(t)$ とすると

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = -e^{-t}$$

より

$$t = 0 \text{ のときの接線の傾き} = y'(0) = -e^{-0} = -1$$

$$t = 1 \text{ のときの接線の傾き} = y'(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$t = 2 \text{ のときの接線の傾き} = y'(2) = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$$

となる (図 1 参照)。このグラフは $t \rightarrow \infty$ のとき ($e^t \rightarrow \infty$ より) $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ は 0 に限りなく近づく。すなわち

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$$

である。この極限は後でよく用いるので、ここで書いておいた。

微分方程式 (*) の特殊解は関数 (1) だけではない。

$$(2) \quad y = 2e^{-t}$$

とおくと

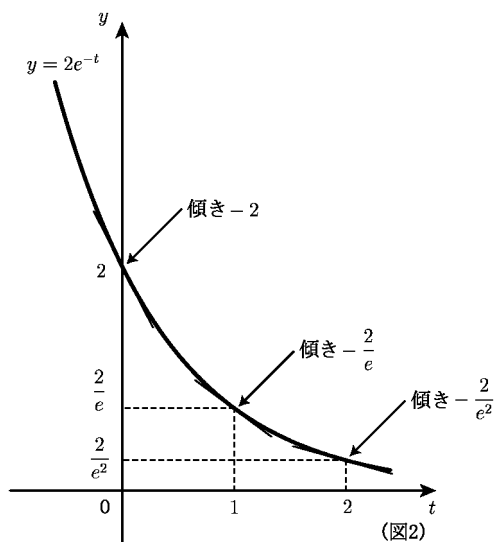
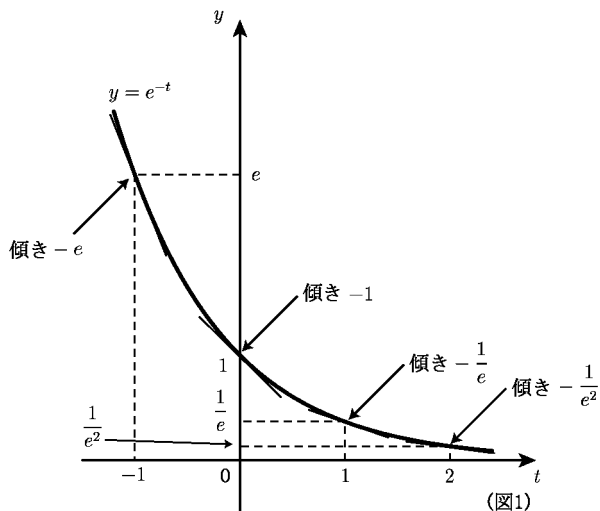
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}2e^{-t} = -2e^{-t} = -y$$

より微分方程式 (*) を満たす。関数 (2) のグラフは図 2 のようになる。

(注) 関数 (1) は初期条件

$$(1)' \quad t = 0 \text{ のとき } y = 1$$

を満たす (*) の解である。



問 1 (注) のように関数 (2) のみたす初期条件を書け。

問 2 上の微分方程式 (*) の解で (1), (2) 以外の関数を 1 つ示せ。

問 3 上の微分方程式 (*) の一般解を類推せよ。

< 積分の復習 >

< 微分の公式 >

$$(1) \frac{d}{dt}(t^n) = nt^{n-1} \quad , \quad (2) \frac{d}{dt}(\log |t|) = \frac{1}{t} \quad (\text{ただし } \log = \log_e \quad \text{は自然対数})$$

$$(3) \frac{d}{dt}e^t = e^t \quad , \quad (4) \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t \quad , \quad (5) \frac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$$

< 積分の公式 >

$$(1) \int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \quad (n \neq -1) \quad , \quad (2) \int \frac{1}{t} dt = \log |t| + C$$

$$(3) \int e^t dt = e^t + C \quad , \quad (4) \int \cos t dt = \sin t + C \quad , \quad (5) \int \sin t dt = -\cos t + C$$

< 置換積分 >

$$\int \boxed{\quad} \frac{dy}{dt} dt = \int \boxed{\quad} dy$$

例 (1) $\int y^n \frac{dy}{dt} dt = \int y^n dy = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} dt = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| + C$

(3) $\int \frac{dy}{dt} dt = \int dy = y + C$

(注) $\frac{dy}{dt} dt = dy$ と考えてよい。

問 例のようにして次の不定積分を求めよ。

(1) $\int e^y \frac{dy}{dt} dt =$

(2) $\int \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dt} dt =$

(3) $\int \sin y \frac{dy}{dt} dt =$

(4) $\int \cos y \frac{dy}{dt} dt =$

< 求積法 >

微分方程式の一般解を求めることを「微分方程式を解く」という。

このページでは次の形の微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \boxed{t \text{ だけの式}}$$

を考える。この形の微分方程式は1回積分することによって解くことができる。

例1 微分方程式

$$(1) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = -9.8t + 19.6}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt} dt = \int (-9.8t + 19.6) dt = -4.9t^2 + 19.6t + C$$

より(1)の一般解は

$$\text{一般解: } \boxed{y = -4.9t^2 + 19.6t + C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

例2 微分方程式

$$(2) \quad \boxed{\frac{dy}{dt} = t^2 - e^t + \cos t}$$

を考える。両辺を積分すると

$$y = \int \frac{dy}{dt} dt = \int (t^2 - e^t + \cos t) dt = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C$$

より(2)の一般解は

$$\text{一般解: } \boxed{y = \frac{1}{3}t^3 - e^t + \sin t + C} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である。

例1,2のように積分することによって微分方程式を解く方法を求積法という。

問 次の微分方程式を解け。

$$(1) \quad \frac{dy}{dt} = 3t + 6$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t^3 + 5t^4$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = 4 \sin t - 5 \cos t$$