高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series A

$No.$ 9

解答

＜ 1 ページ.1 階微分方程式の原理 ＞

問の解答

＜証明＞ $y_1 = e^t$ とおく. $(*)\dfrac{dy}{dt} = y$ の任意の解を y_2 とすると, $(*)$ より

$$y_1{}' = y_1 \quad , \qquad y_2{}' = y_2$$

である. 今 $y = \dfrac{y_2}{y_1}$ とおくと

$$y' = \frac{y_2{}'y_1 - y_2 y_1{}'}{(y_1)^2} = \frac{y_2 y_1 - y_2 y_1}{(y_1)^2} = 0$$

より定理から y が定数 C になるので

$$y = C \ \Rightarrow \ \frac{y_2}{y_1} = C \ \Rightarrow \ y_2 = Cy_1 = Ce^t$$

より $(*)$ の任意の解 y_2 が $(**)$ の形をしていることがわかった.

(証明終)

＜ 3 ページ. 変数分離系 2 ＞

問の解答

(1) $y = Ce^{5t}$ (C は任意定数)

(2) $y = Ce^{-3t}$ (C は任意定数)

(3) $y = Ce^{at}$ (C は任意定数)

$<$ 4 ページ. 変数分離形 3 $>$

問の解答

(1) $y = Ce^{3t^2+5t}$ 　　(C は任意定数)

(2) $y = Ce^{t^3+4t}$ 　　(C は任意定数)

＜ 5 ページ.1 階線形微分方程式 1 ＞

問 1 の解答

(1) $y = Ce^{-at}$ (C は任意定数)

(2) $y = Ce^{5t^2}$ (C は任意定数)

(3) $y = Ce^{-2t^3-t}$ (C は任意定数)

問 2 の解答

$y = Ce^{-\int p(t)dt}$ (C は任意定数)

＜ 7 ページ.1 階線形微分方程式 3 ＞

問の解答

(1) $y = \dfrac{5}{3} + Ce^{-3t}$ 　　(C は任意定数)

(2) $y = \dfrac{b}{a} + Ce^{-at}$ 　　(C は任意定数)

＜ 8 ページ.1 階線形微分方程式 4 ＞

問の解答

(1) $y = C(t)e^{-4t}$

$y' + 4y = C'(t)e^{-4t} = e^{5t}$

$C'(t) = e^{9t}$

$C(t) = \dfrac{1}{9}e^{9t} + C$

$\underline{(答)\ y = \dfrac{1}{9}e^{5t} + Ce^{-4t}}$

(2) $y = C(t)e^{4t}$

$y' - 4y = C'(t)e^{4t} = e^{5t}$

$C'(t) = e^{t}$

$C(t) = e^{t} + C$

$\underline{(答)\ y = e^{5t} + Ce^{4t}}$

< 9 ページ.1 階線形微分方程式 5 >

問の解答

(1) $y = te^{2t} + Ce^{2t}$ (C は任意定数)

(2) $y = te^{-3t} + Ce^{-3t}$ (C は任意定数)

(3) $y = te^{at} + Ce^{at}$ (C は任意定数)

＜ 10 ページ.1 階線形微分方程式の一般解 1 ＞

問 1 の解答

$$y = \left\{ \int \left(q(t) e^{-at} \right) dt + C \right\} e^{at}$$

問 2 の解答

$$y = \left\{ \int 1 dt + C \right\} e^{at} = te^{at} + Ce^{at}$$

＜ 11 ページ.1 階線形微分方程式の一般解 2 ＞

問 1 の解答

$$\frac{dy_1}{dt} + p(t)y_1$$

$$= \left\{\int \left(g(t)e^{\int p(t)dt}dt\right)\right\}' e^{-\int p(t)dt} + \left\{\int \left(g(t)e^{\int p(t)dt}dt\right)\right\} \times \bigl(-p(t)\bigr)e^{-\int p(t)dt}$$

$$+p(t)\left\{\int \left(g(t)e^{\int p(t)dt}dt\right)\right\} e^{-\int p(t)dt}$$

$$= q(t)\underbrace{e^{\int p(t)dt} \times e^{-\int p(t)dt}}_{\parallel \atop 1} + \left\{\int \left(g(t)e^{\int p(t)dt}dt\right)\right\} \left\{\underbrace{-p(t)+p(t)}_{\parallel \atop 0}\right\} e^{-\int p(t)dt}$$

$$= q(t)$$

問 2 の解答

(1) 特解 $y = -\dfrac{b}{a}$

一般解 $y = -\dfrac{b}{a} + Ce^{at}$

(2) 特解 $y = \dfrac{1}{b-a}e^{bt}$

一般解 $y = \dfrac{1}{b-a}e^{bt} + Ce^{at}$

(3) 特解 $y = te^{at}$

一般解 $y = te^{at} + Ce^{at}$

< 12 ページ.1 階微分方程式の初期値問題 >

問の解答

(1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 10 - 9.8t \\ t = 0 \text{ のとき } y = 6 \end{cases}$

$y = 10t - 4.9t^2 + C$

$t = 0$ のとき $y = C = 6$

$\underline{(\text{答})\ y = 10t - 4.9t^2 + 6}$

(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -5y \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

$y = Ce^{-5t}$

$t = 0$ のとき $y = C = 4$

$\underline{(\text{答})\ y = 4e^{-5t}}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = 9.8 \\ t = 0 \text{ のとき } y = 0 \end{cases}$

$y = \dfrac{9.8}{k} + Ce^{-kt}$

$t = 0$ のとき $y = \dfrac{9.8}{k} + C = 0 \ \Rightarrow\ C = -\dfrac{9.8}{k}$

$\underline{(\text{答})\ y = \dfrac{9.8}{k}(1 - e^{-kt})}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ky = -g \\ t = 0 \text{ のとき } y = 4 \end{cases}$

$y = -\dfrac{g}{k} + Ce^{kt}$

$t = 0$ のとき $y = -\dfrac{g}{k} + C = 4 \ \Rightarrow\ C = \dfrac{g}{k} + 4$

$\underline{(\text{答})\ y = -\dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt}) + 4e^{-kt}}$

＜ 13 ページ.2 階線形微分方程式 1 ＞

問の解答

(1) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 8 \\ y(0) = 7\ ,\quad y'(0) = 6 \end{cases}$

一般解　$y = 4t^2 + C_1 t + C_2$

初期値　$y(0) = 7 \ \Rightarrow\ C_2 = 7$ ，　$y'(0) = 6 \ \Rightarrow\ C_1 = 6$

(答) $y = 4t^2 + 6t + 7$

(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = 6t + 2 \\ y(0) = 8\ ,\quad y'(0) = 9 \end{cases}$

一般解　$y = t^3 + t^2 + C_1 t + C_2$

初期値　$y(0) = 8 \ \Rightarrow\ C_2 = 8$ ，　$y'(0) = 9 \ \Rightarrow\ C_1 = 9$

(答) $y = t^3 + t^2 + 9t + 8$

＜ 14ページ.2 階線形微分方程式 2 ＞

問の解答

① $y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$, $y(0) = C_1 = 6$

$y'(t) = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)$, $y'(0) = 3C_2 = 8$

(答) $y = 6\cos(3t) + \dfrac{8}{3}\sin(3t)$

② $C_1 = \alpha$, $3C_2 = \beta$

(答) $y = \alpha\cos(3t) + \dfrac{\beta}{3}\sin(3t)$

＜ 15 ページ.2 階線形同次微分方程式 1 ＞

問の解答

もう一つの基本解は $y = \sin(2t)$

一般解は $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$

< 16ページ.2階線形同次微分方程式 2 >

問の解答

もう一つの基本解は e^{5t}

一般解は $y = C_1 e^{5t} + C_2 t e^{5t}$

$<$ 17 ページ. 微分演算子 D $>$

問 1 の解答

(1) $(D+5)y=0$

(2) $(D^2-6D+9)y=0$

問 2 の解答

(1) $(D-4)y=0 \ \Rightarrow\ \dfrac{dy}{dt}-4y=0$

(答) $y=Ce^{4t}$

(2) $(D-a)y=0 \ \Rightarrow\ \dfrac{dy}{dt}-ay=0$

(答) $y=Ce^{at}$

(3) $(D-4)y=e^{4t} \ \Rightarrow\ \dfrac{dy}{dt}-4y=e^{4t}$

(答) $y=te^{4t}+Ce^{4t}$

(4) $(D-a)y=e^{at} \ \Rightarrow\ \dfrac{dy}{dt}-ay=e^{at}$

(答) $y=te^{at}+Ce^{at}$

＜ 18 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 1 ＞

問 1 の解答

(1) $y = e^{2t}$,　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 4e^{2t} - 5 \times 2e^{2t} + 6 \times e^{2t} = (4 - 10 + 6)e^{2t} = 0$

(2) $y = e^{3t}$,　$\dfrac{d^2y}{dt^2} - 5\dfrac{dt}{dy} + 6y = 9e^{3t} - 5 \times 3e^{3t} + 6 \times e^{3t} = (9 - 15 + 6)e^{3t} = 0$

問 2 の解答

(1) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

$\Rightarrow \ (D^2 - 3D + 2)y = 0$

$\Rightarrow \ (D - 1)(D - 2)y = 0$

$\Rightarrow \ \underline{(\text{答})\ y = C_1e^t + C_2e^{2t}}$

(2) $\dfrac{d^2y}{dy^2} - 3\dfrac{dy}{dt} - 4y = 0$

$\Rightarrow \ (D^2 - 3D - 4)y = 0$

$\Rightarrow \ (D - 4)(D + 1)y = 0$

$\Rightarrow \ \underline{(\text{答})\ y = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}}$

< 19 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 2 >

問の解答

(1) $(D-2)(D-2)y=0$

(答) $y=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}$

(2) $(D-5)(D-5)y=0$

(答) $y=C_1e^{5t}+C_2te^{5t}$

(3) $(D+4)(D+4)y=0$

(答) $y=C_1e^{-4t}+C_2te^{-4t}$

(4) $(D-\alpha)(D-\alpha)y=0$

(答) $y=C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}$

＜ 20 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 3 ＞

問 1 の解答

$$y = \left(\frac{C_1 - C_2 i}{2} + \frac{C_1 + C_2 i}{2}\right)\cos(3t) + i\left(\frac{C_1 - C_2 i}{2} - \frac{C_1 + C_2 i}{2}\right)\sin(3t)$$

$$= C_1\cos(3t) + i(-C_2 i)\sin(3t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t)$$

問 2 の解答

(1) $y = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$

(2) $y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$

＜ 21 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 4 ＞

問 1 の解答

(1) $y_1 = e^{-2t}\cos(15t)$

$y_1{}' = -2e^{-2t}\cos(15t) - 15e^{-2t}\sin(15t)$

$y_1{}'' = -221e^{-2t}\cos(15t) + 60e^{-2t}\sin(15t)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y_1}{dt^2} + 4\frac{dy_1}{dt} + 229y_1 &= -221e^{-2t}\cos(15t) + 60e^{-2t}\sin(15t)\\ &\quad +4\left\{-2e^{-2t}\cos(15t) - 15e^{-2t}\sin(15t)\right\} + 229e^{-2t}\cos(15t)\\ &= 0\end{aligned}$$

(2) $y_2 = e^{-2t}\sin(15t)$

$y_2{}' = -2e^{-2t}\sin(15t) + 15e^{-2t}\cos(15t)$

$y_2{}'' = -221e^{-2t}\sin(15t) - 60e^{-2t}\cos(15t)$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} + 4\frac{dy_2}{dt} + 229y_2 = 0$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}y &= \left(\frac{C_1 - C_2 i}{2} + \frac{C_1 + C_2 i}{2}\right)e^{-2t}\cos(15t) + i\left(\frac{C_1 - C_2 i}{2} - \frac{C_1 + C_2 i}{2}\right)e^{-2t}\sin(15t)\\ &= C_1 e^{-2t}\cos(15t) + C_2 e^{-2t}\sin(15t)\end{aligned}$$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$

$D^2 + 4D + 5 = 0$

$D = -2 \pm i$

<u>(答) $y = C_1 e^{-2t}\cos t + C_2 e^{-2t}\sin t$</u>

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} + 10y = 0$

$D^2 - 2D + 10 = 0$

$D = 1 \pm 3i$

<u>(答) $y = C_1 e^{t}\cos(3t) + C_2 e^{t}\sin(3t)$</u>

＜ 22 ページ. 定数係数 2 階線形同次微分方程式 5 ＞

問の解答

(1) $D^2 - 5D - 6 = 0$

$(D-6)(D+1) = 0$

(答) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t}$

(2) $D^2 + 8D + 16 = 0$

$(D+4)(D+4) = 0$

(答) $y = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}$

(3) $(D^2 + 16) = 0$

$D = \pm\sqrt{16}\, i = \pm 4i$

(答) $y = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$

(4) $D^2 - 8D + 20 = 0$

$D = 4 \pm 2i$

(答) $y = C_1 e^{4t} \cos(2t) + C_2 e^{4t} \sin(2t)$

＜ 23 ページ. 定数係数 2 階線形非同次微分方程式 1 ＞

問の解答

(1) $D^2 + D - 2 = (D-1)(D+2)$

(答) $y = -3 + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$

(2) $D^2 - 3D - 4 = (D-4)(D+1)$

(答) $y = -2 + C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$

(3) $D^2 + 4D + 4 = (D+2)(D+2)$

(答) $y = \dfrac{5}{2} + C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

(4) $D^2 + 16 = (D-4i)(D-4i)$

(答) $y = \dfrac{5}{4} + C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t)$

< 24 ページ. 定数係数 2 階非同次線形微分方程式 2 >

問の解答

$\alpha = 0$, $\beta = \omega$, $a = 0$, $b = \omega^2$

$$\left.\begin{aligned} &A = \alpha^2 - \beta^2 + \alpha a + b = 0 - \omega^2 + 0 + \omega^2 = 0 \\ &B = (2\alpha + a)\beta = 0 \end{aligned}\right) \Rightarrow \text{特解} = -\frac{r}{2\beta} t e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$= -\frac{r}{2\omega} t \cos(\omega t)$$

一般解 $y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) - \dfrac{rt}{2\omega} \cos(\omega t)$

＜ 25 ページ.2 階微分方程式の初期値問題 ＞

問の解答

(1) $D^2 - 3D - 4 = (D-4)(D+1)$

$y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t} \quad , \quad y(0) = C_1 + C_2 = 5 \cdots$ ①

$y' = 4C_1 e^{4t} - C_2 e^{-t} \quad , \quad y'(0) = 4C_1 - C_2 = 7 \cdots$ ②

①，②より $C_1 = \dfrac{12}{5} \quad , \quad C_2 = \dfrac{13}{5}$

(答) $y(t) = \dfrac{12}{5} e^{4t} + \dfrac{13}{5} e^{-t}$

(2) $y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

$y' = (-2C_1 + C_2) e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t}$

$y(0) = C_1 = 10 \quad , \quad y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = 20$

(答) $y = 10e^{-2t} + 20te^{-2t}$

(3) $y = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t) \quad , \quad y(0) = C_1 = 3$

$y' = -5C_1 \sin(5t) + 5C_2 \cos(5t) \quad , \quad y'(0) = 5C_2 = 2$

(答) $y = 3\cos(5t) + \dfrac{2}{5} \sin(5t)$

(4) $D^2 + 4D + 13 = 0$

$D = -2 \pm 3i$

$y = C_1 e^{-2t} \cos(3t) + C_2 e^{-2t} \sin(3t)$

$y' = -2C_1 e^{-2t} \cos(3t) - 3C_1 e^{-2t} \sin(3t) - 2C_2 e^{-2t} \sin(3t) + 3C_2 e^{-2t} \cos(3t)$

$\quad = (-2C_1 + 3C_2) e^{-2t} \cos(3t) - (3C_1 + 2C_2) e^{-2t} \sin(3t)$

$y(0) = C_1 = 10 \quad , \quad y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 0 \ \Rightarrow \ C_2 = \dfrac{20}{3}$

(答) $y = 10e^{-2t} \cos(3t) + \dfrac{20}{3} e^{-2t} \sin(3t)$

＜ 26 ページ. 微分方程式の練習 1 ＞

問の解答

(1) $y = t^3 - 2t^2 + 5t + C$

(2) $y = \frac{1}{2}\sin(2t) + C$

(3) $y = Ce^{-5t}$

(4) $y = Ce^{t^2}$

(5) $y = \frac{3}{2} + Ce^{-2t}$

(6) $y = -\frac{5}{3} + Ce^{3t}$

(7) $y = \frac{b}{a} + Ce^{-at}$

(8) $y = -e^t + Ce^{2t}$

(9) $y = te^{3t} + Ce^{3t}$

(10) $y = \frac{a}{6}t^3 + \frac{b}{2}t^2 + C_1 t + C_2$

(11) $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$

(12) $y = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$

(13) $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$

(14) $y = C_1 e^{3t} + C_2 te^{3t}$

(15) $y = C_1 e^{-4t} + C_2 te^{-4t}$

(16) $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$

(17) $y = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)$

(18) $y = C_1 e^t \cos(2t) + C_2 e^t \sin(2t)$

(19) $y = C_1 e^{-3t} \cos(4t) + C_2 e^{-3t} \sin(4t)$

(20) $y = -\frac{2}{3} + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$

(21) $y = \frac{5}{4} + C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t}$

(22) $y = \frac{5}{4} + C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$

＜ 27 ページ. 微分方程式の練習 2 ＞

問の解答

(1) $y = t^2 - 3t + C$

(答) $y = t^2 - 3t + 5$

(2) $y = Ce^{-3t}$

(答) $y = 4e^{-3t}$

(3) $y = \dfrac{5}{4} + Ce^{-4t}$

$y(0) = \dfrac{5}{4} + C = 6$

$\Rightarrow\ C = 6 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{24-5}{4} = \dfrac{19}{4}$

(答) $y = \dfrac{5}{4} + \dfrac{19}{4}e^{-4t}$

(4) $v = 2 + Ce^{-3t}$

$v(0) = 2 + C = 5\ \Rightarrow\ C = 3$

(答) $v = 2 + 3e^{-3t}$

(5) $I = \dfrac{5}{2} - Ce^{-2t}$

$I(0) = \dfrac{5}{2} - C = 0\ \Rightarrow\ C = \dfrac{5}{2}$

(答) $I(t) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{5}{2}e^{-2t}$

(6) $y = 2t^2 + C_1 t + C_2$, $C_2 = 1$

$y' = 4t + C_1$, $C_1 = 3$

(答) $y = 2t^2 + 3t + 1$

(7) $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$

$y' = -2C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{2t}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 1$

$y'(0) = -2C_1 + 2C_2 = 5$

$C_1 = \dfrac{3}{4}$, $C_2 = \dfrac{7}{4}$

(答) $y = -\dfrac{3}{4}e^{-2t} + \dfrac{7}{4}e^{2t}$

(8) $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{4t}$

$y' = C_1 e^{t} + 4C_2 e^{4t}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 2$

$y'(0) = C_1 + 4C_2 = 6$

$C_1 = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$, $3C_2 = 4\ \Rightarrow\ C_2 = \dfrac{4}{3}$

(答) $y = \dfrac{2}{3}e^{t} + \dfrac{4}{3}e^{4t}$

(9) $y = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

$y' = -2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-2t} - 2C_2 t e^{-2t}$

$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0\ \Rightarrow\ C_2 = 2$

(答) $y = e^{-2t} + 2te^{-2t}$

(10) $y = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$

$y' = -2C_2 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$

$y(0) = C_1 = 5$

$y'(0) = 2C_2 = 6\ \Rightarrow\ C_2 = 3$

(答) $y = 5\cos(2t) + 3\sin(2t)$

(11) $y = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$

$y' = -3C_1 \sin(3t) + 3C_2 \cos(3t)$

$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = 3C_2 = 0$

(答) $y = \cos(3t)$

(12) $y = C_1 e^{-2t}\cos(3t) + C_2 e^{-2t}\sin(3t)$

$$\begin{aligned} y' &= (-2C_1 + 3C_2)e^{-2t}\cos(3t) \\ &\quad + (-3C_1 - 2C_2)e^{-2t}\sin(3t) \end{aligned}$$

$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 0$

$\Rightarrow\ 3C_2 = 2\ \Rightarrow\ C_2 = \dfrac{2}{3}$

(答) $y = e^{-2t}\cos(3t) + \dfrac{2}{3}e^{-2t}\sin(3t)$

＜ 28 ページ. 微分方程式の応用 1 ＞

問の解答

$$\frac{dv}{dt} = -9.8$$

$$v(t) = -9.8t + 7$$

$$\frac{dy}{dt} = v(t) = -9.8t + 7$$

<u>(答) $y(t) = -4.9t^2 + 7t + 10$</u>

< 29 ページ. 微分方程式の応用 2 >

問 1 の解答

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v = -9.8$$

$$v(t) = -\frac{9.8}{\gamma} + Ce^{-\gamma t}$$

$t = 0$ のとき $v(0) = -\dfrac{9.8}{\gamma} + C = 0 \;\Rightarrow\; C = \dfrac{9.8}{\gamma}$

(答) $v(t) = -\dfrac{9.8}{\gamma} + \dfrac{9.8}{\gamma}e^{-\gamma t}$

問 2 の解答

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -9.8 - \gamma v \\ t = 0 \text{ のとき } v = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow\;\; v(t) = -\dfrac{9.8}{\gamma} + Ce^{-\gamma t}$

$t = 0$ のとき $v(0) = -\dfrac{9.8}{\gamma} + C = 5$

$$C = 5 + \frac{9.8}{\gamma}$$

(答) $\begin{cases} v(t) = -\dfrac{9.8}{\gamma} + \left(5 + \dfrac{9.8}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} \\ \displaystyle\lim_{t \to 0} v = -\dfrac{9.8}{\gamma} \end{cases}$

＜ 30 ページ. 微分方程式の応用 3 ＞

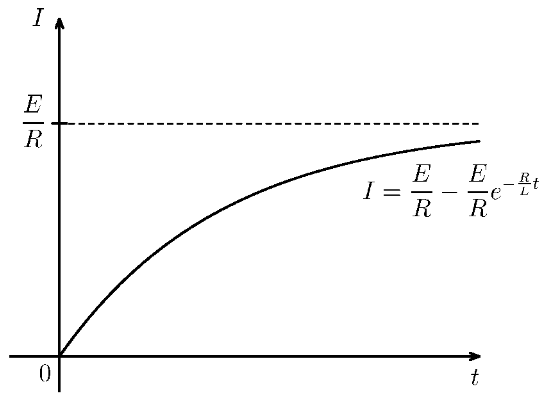
問の解答

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

$$I = \frac{\frac{E}{L}}{\frac{R}{L}} + Ce^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$t = 0$ のとき $I = \dfrac{E}{R} + C = 0 \ \Rightarrow \ C = -\dfrac{E}{R}$

(答) $I = \dfrac{E}{R} - \dfrac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$



＜ 31 ページ. 微分方程式の応用 4 ＞

問の解答

(1) $v = \dfrac{dy}{dt}$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + 2v = 0 \\ v(0) = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v(t) = 6e^{-2t}$$

$$y(t) = \int v(t)dt = \int 6e^{-2t}dt = -3e^{-2t} + C$$

$$y(0) = -3 + C = 10 \ \Rightarrow \ C = 13$$

(答) $y(t) = -3e^{-2t} + 13$

(2) $v = \dfrac{dy}{dt}$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + 2v = 6 \\ v(0) = 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} v(t) = 3 + C_1 e^{-2t} \\ v(0) = 3 + C_1 = 8 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 5 \end{array}$$

$$y(t) = \int v(t)dt = \int (3 + 5e^{-2t})dt$$

$$= 3t - \frac{5}{2}e^{-2t} + C_2$$

$$y(0) = -\frac{5}{2} + C_2 = 10 \ \Rightarrow \ C_2 = \frac{25}{2}$$

(答) $y(t) = 3t - \dfrac{5}{2}e^{-2t} + \dfrac{25}{2}$

＜ 32 ページ. 微分方程式の応用 5 ＞

問の解答

(解) $\dfrac{dy}{dt} = v$ とすると

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + \gamma v = -9.8 \\ v(0) = 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$v = -\frac{9.8}{\gamma} + C_1 e^{-\gamma t}$$

$$v(0) = -\frac{9.8}{\gamma} + C_1 = 5$$

$$v(t) = -\frac{9.8}{\gamma} + \left(5 + \frac{9.8}{\gamma}\right) e^{-\gamma t}$$

$$y(t) = \int v(t)dt = \int \left\{ -\frac{9.8}{\gamma} + \left(5 + \frac{9.8}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} \right\} dt$$

$$= -\frac{9.8}{\gamma}t - \frac{1}{\gamma}\left(5 + \frac{9.8}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} + C_2$$

$$y(0) = -\frac{1}{\gamma}\left(5 + \frac{9.8}{\gamma}\right) + C_2 = 10$$

$$C_2 = 10 + \frac{1}{\gamma}\left(5 + \frac{9.8}{\gamma}\right)$$

(答) $\underline{y(t) = -\dfrac{9.8}{\gamma}t - \dfrac{1}{\gamma}\left(5 + \dfrac{9.8}{\gamma}\right) e^{-\gamma t} + 10 + \dfrac{1}{\gamma}\left(5 + \dfrac{9.8}{\gamma}\right)}$

＜ 33 ページ. 微分方程式の応用 6 ＞

問の解答

(解) (1) の解は I は 30 ページより

$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$g(t) = \int I(t)dt = \int \left(\frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right) dt$$

$$= \frac{E}{R}t - \left(-\frac{L}{R}\right)\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} + C$$

$$= \frac{E}{R}t + \frac{LE}{R^2}e^{-\frac{Rt}{L}} + C$$

$$g(0) = \frac{LE}{R^2} + C = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C = -\frac{LE}{R^2}$$

$$\underline{(\text{答})\ g(t) = \frac{E}{R}t + \frac{LE}{R^2}\left(e^{-\frac{Rt}{L}} - 1\right)}$$

< 34 ページ. ばね 1 >

問の解答

k は大きくなる.

<理由> かたいばねはのび l が小さい. よって

$k = \dfrac{mg}{l}$ は分母が小さくなるので k の値は大きくなる.

< 35 ページ. ばね 2 >

問の解答

$$f = -mg = -kl_0$$

$$\Downarrow$$

$$l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{9.8m}{k}$$

＜ 36 ページ. ばねの運動 1 ＞

問の解答

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{d^2y}{dt^2} + \boxed{\frac{k}{m}}\, y = 0}$$

＜ 37 ページ. ばねの運動 2 ＞

問 1 の解答

$y(0) = L \quad , \qquad y'(0) = 0$

問 2 の解答

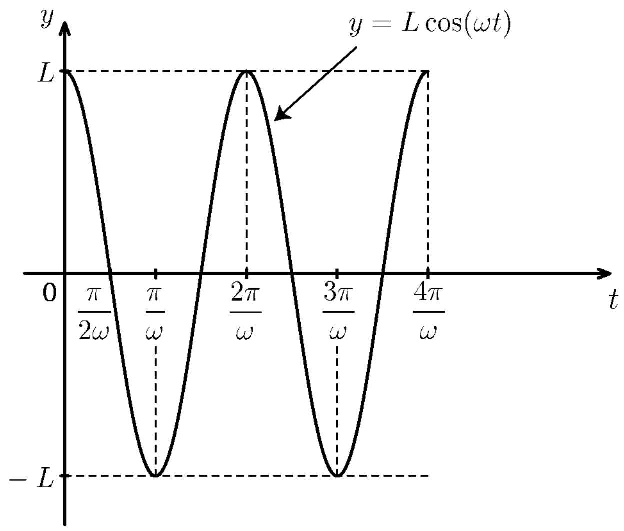
$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \ \ \Rightarrow \ \ y(0) = C_1 = L$

$y' = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t) \ \ \Rightarrow \ \ y'(0) = \omega C_2 = 0$

$\omega \neq 0$ とすると $C_2 = 0$

(答) $y(t) = L\cos(\omega t)$

問 3 の解答



＜ 38 ページ. ばねの運動 3 ＞

問の解答

(1) $y = C_1 e^{-2t}\cos(3t) + C_2 e^{-2t}\sin(3t) \quad \Rightarrow \quad y(0) = C_1 = L$

$y' = (-2C_1 + 3C_2)e^{-2t}\cos(3t) + (-3C_1 - 2C_2)e^{-2t}\sin(3t)$

$\Rightarrow \quad y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 0$

$3C_2 = 2C_1 = 2L$

(答) $y = Le^{-2t}\cos(3t) + \dfrac{2}{3}Le^{-2t}\sin(3t)$

(2) $y = C_1 e^{-3t} + C_2 te^{-3t} \quad \Rightarrow \quad y(0) = C_1 = L$

$y' = (-3C_1 + C_2)e^{-3t} + 3C_2 te^{-3t} \quad \Rightarrow \quad y'(0) = -3C_1 + C_2 = 0$

(答) $y = Le^{-3t} + 3Lte^{-3t}$

＜ 39 ページ. 強制振動 1 ＞

問 1 の解答

$$y = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t) + \frac{1}{9}\sin(4t)$$

問 2 の解答

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

問 3 の解答

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y' = -5C_1 \sin(5t) + 5C_2 \cos(5t) + \frac{4}{9}\cos(4t)$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = 5C_2 + \frac{4}{9} = 0$$

$$C_2 = \frac{4}{45}$$

$$\underline{y = -\frac{4}{45}\sin(5t) + \frac{1}{9}\sin(4t)}$$

問 4 の解答

$$y = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t) \quad \Rightarrow \quad y(0) = C_1 = 0$$

$$y' = -5C_1 \sin(5t) + 5C_2 \cos(5t) + \frac{\beta}{25-\beta^2}\cos(\beta t) \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 5C_2 + \frac{\beta}{25-\beta^2} = 0$$

$$\underline{y = \frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)}$$

＜ 40 ページ. 強制振動 2 ＞

問 1 の解答

$$y = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t) - \frac{t}{10}\cos(5t)$$

問 2 の解答

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y' = -5C_1 \sin(5t) + 5C_2 \cos(5t) - \frac{1}{10}\cos(5t) + \frac{t}{2}\sin(5t) \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 5C_2 - \frac{1}{10} = 0$$

$$y = \frac{1}{50}\sin(5t) - \frac{t}{10}\cos(5t)$$

問 3 の解答

$$\lim_{\beta \to 5}\left\{-\frac{\beta}{5(25-\beta^2)}\sin(5t) + \frac{1}{25-\beta^2}\sin(\beta t)\right\} = \lim_{\beta \to 5}\frac{-\beta\sin(5t) + 5\sin(\beta t)}{125 - 5\beta^2}$$

$$= \lim_{\beta \to 5}\frac{\frac{d}{d\beta}\{-\beta\sin(5t) + 5\sin(\beta t)\}}{\frac{d}{d\beta}(125 - 5\beta^2)} = \lim_{\beta \to 5}\frac{-\sin(5t) + 5t\cos(\beta t)}{-10\beta} = \frac{-\sin(5t) + 5t\cos(\beta t)}{-50}$$

$$= \frac{1}{50}\sin(5t) - \frac{t}{10}\cos(5t)$$