

高知工科大学
基礎数学ワークブック

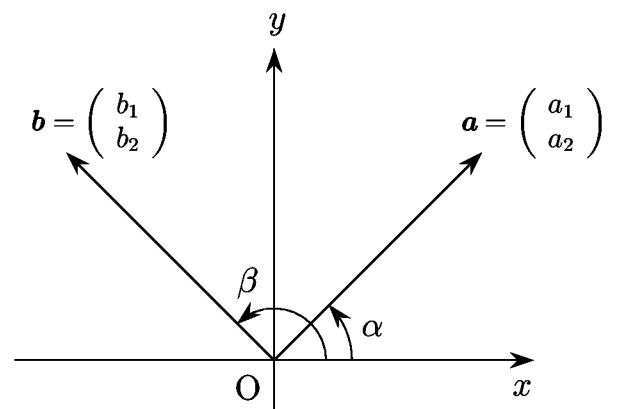
(2002年度版)

Series **A**

No. 10

内容

- ◎ 平面のベクトル
- ◎ 平面ベクトルの位置関係
- ◎ 空間のベクトル
- ◎ 内積
- ◎ 外積



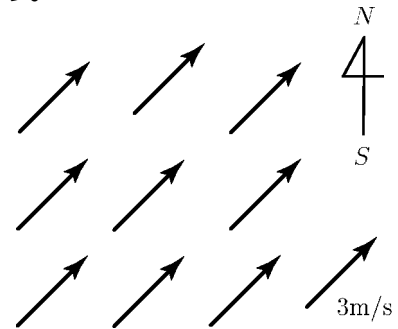
電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< スカラーとベクトル >

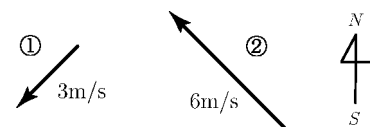
長さ、質量、温度などは、ある単位を基準に1つの実数で表すことができる。このような量をスカラー (scalar) という。しかし風の速度のように、大きさ (速さ) だけでなく、その方向を考えなければならないものがある。天気図などで風を表すときは、風の方向を \nearrow , \searrow のような矢印で表す。このように線分の片方の端に矢印をつけたものを有向線分という。

例 「南西の風 3m/s」と言えば、その地域の各点で南西の方角から秒速 3m の風が吹くことを意味する。このことを有向線分を用いて右図のように描くことができる。



(注) 実際の天気図では1つの地域の風を1本の有向線分で表す。同じ方向と同じ長さをもった有向線分をたくさん描くことはない。

問 1 右図の有向線分 ①、② が表す風を例のような「 \quad の風 \quad m/s」の形で表せ。



風を有向線分で表す場合に、同じ方向と同じ大きさ (= 長さ = 風の速さ) を持つ有向線分は同じ風を表す。このように有向線分について、位置を考えないで、方向と大きさ (= 長さ) だけを考えるとき、これをベクトル (vector) という。

(注) 有向線分をベクトルとみなす場合もある。「1点に働く力」は有向線分で表されるが、位置を無視することはできないのでベクトルとはいえない。しかしこれもベクトルとみなす場合がある。

スカラー : 1次元の量

ベクトル : 2次元・3次元の量

問 2 次の量はスカラーであるかベクトルであるか答えよ。

(1) 面積 (2) 体積 (3) 時間

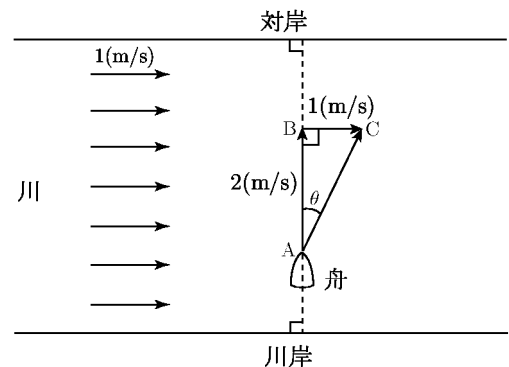
(4) 湿度 (5) 海流の速度 (6) 重力

< 速度の合成 >

例 1 静水中を 2m/s の速さで進む舟が、流速 1m/s の川を、一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まで進むはずであるが、川の流れのため、実際は A 地点から C 地点に向かって角度 θ だけ流される。

この角度 θ を正確に求めるためには、AB の長さを $2(=\text{舟の速さ})$ 、BC の長さを $1(=\text{川の流れ})$ とした直角三角形 ABC を作ると、三平方の定理より $AC = \sqrt{5}$ となるから、

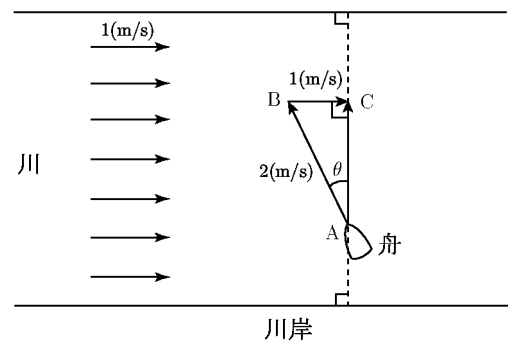
$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \approx 26.6^\circ$$



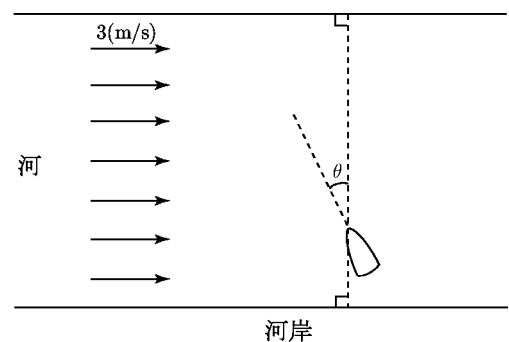
例 2 例 1 と同じ場合に、この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき、舟のへさきを川に垂直な方向から角度 θ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。

例 1 と同様に、舟の速度を有向線分 AB (長さ 2)、川の流れを有向線分 BC (長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると、直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$



問 静水中を 5m/s で走る船がある。この船で、流れの速さが 3m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために、船の進行方向を河岸に対し角度 θ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin \theta$ の値を求めよ。



< ベクトルの表記 >

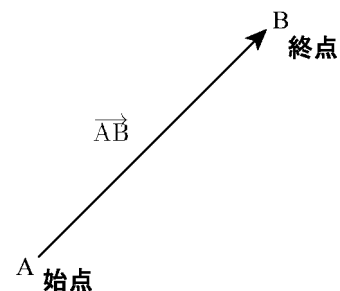
速度や力などの場合は、その大きさ（強さ）だけでなく、その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を有向線分で示し、その大きさは有向線分の長さで表す。

川の流れなどで、場所によって速度が変わらないときは、一本の有向線分で流れの速度を表すことができる。このように、有向線分で、向きと大きさだけを考え、位置を問題にしないとき、これをベクトル (*vector*) という。

点 A から点 B までの有向線分 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{AB}$$

と書き、ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル \overrightarrow{AB} の始点といい、B を終点という。ベクトルは \vec{a} のような記号で表したり、太字で \mathbf{a} と表したりする（本書では a と書くことにする）。



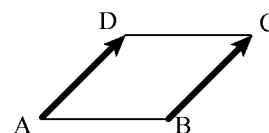
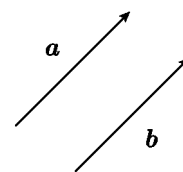
ベクトル a , b について、向きが同じで、大きさが等しいとき、 a と b は等しいといい、

$$a = b$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

である。

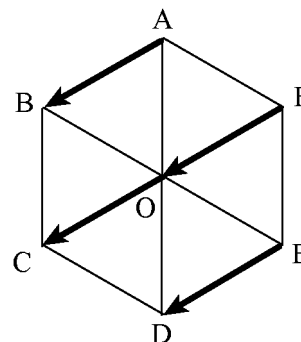


例 右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$$

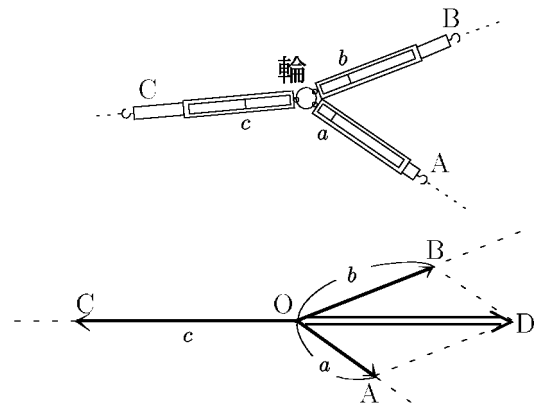
である。

問 右の正六角形で、 \overrightarrow{BO} に等しいベクトルを 3 つ書け。



< 力の合成 >

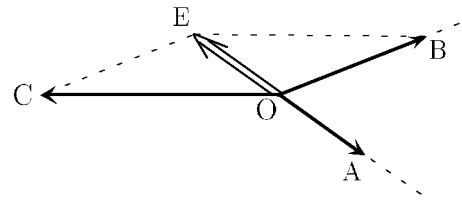
例 机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り a, b, c を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。



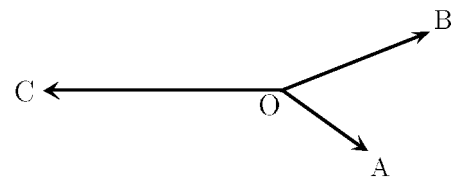
輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ有向線分をひき, その有向線分の先を A, B, C とする。

次に OA, OB を 2 辺とする平行四辺形 $OADB$ を作り, 対角線 OD をひく。すると, 有向線分 OD と有向線分 OC は方向が同じ (有向線分の向きは逆) で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を有向線分 $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ で表すと, \vec{OA} と \vec{OB} との合力が \vec{OD} であり, \vec{OC} とつりあっていることがわかる。

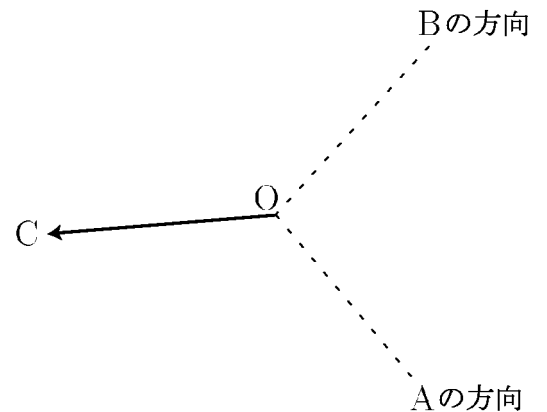
同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 $OBEC$ を作り, 対角線 OE をひくと, 有向線分 OE と OA は方向が同じ (向きが逆) で, 長さも等しい。つまり \vec{OB} と \vec{OC} の合力が \vec{OE} であり, \vec{OA} とつりあっている。



問1 右図に \vec{OA} と \vec{OC} との合力 \vec{OF} を作図せよ。



問2 ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので \vec{OA} と \vec{OB} の有向線分の長さがわからない。 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ がつりあうように, 右図に有向線分 \vec{OA}, \vec{OB} を作図せよ。



< 平面のベクトル 1 >

2 ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や、4 ページでやった 2 つの力の合力を求める方法は、ベクトルとして同じ概念である。

2 つのベクトル a, b が与えられているとする。

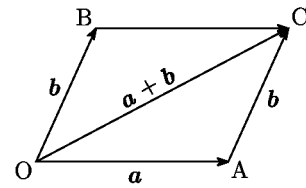
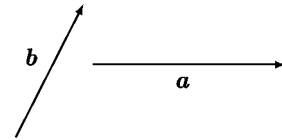
a と b の始点を同じ点 O にもっていき、終点を A, B とし、 OA, OB を 2 辺とする平行四辺形 $OACB$ を作るとベクトル \vec{OC} が決まる。これを a と b との和といい、

$$a + b$$

と書く。 a と b が 2 つの力であれば $a + b$ はその合力を表す。また、 a, b が 2 つの速度であれば、 $a + b$ はその合成速度を表す。

ここで、 $b = \vec{OB} = \vec{AC}$ であるから、

$$\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$



$$\boxed{\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}}$$

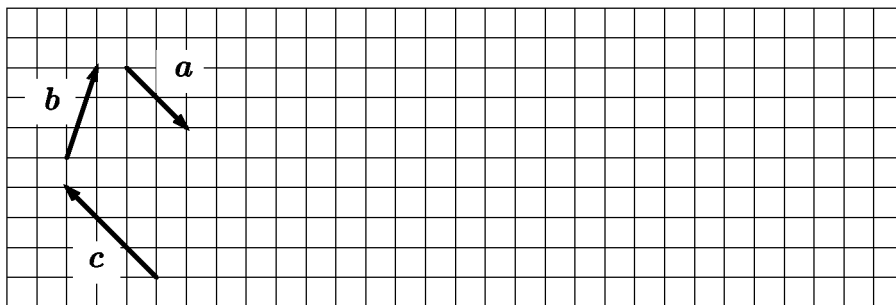
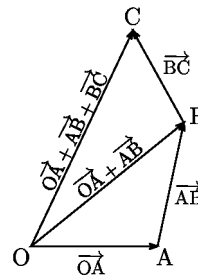
が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと、A から出発して C に行くベクトルとの和は、途中の中継点 A を略して最後の到着点 C に行くベクトルになる。

同様に、4 点 O, A, B, C に対し

$$\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

が成り立つ。

問 ベクトル a, b, c が下図の場合に、 $a + b, b + c, a + b + c$ を作図せよ。



< 平面のベクトル 2 >

\overrightarrow{AB} は、始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。
これを零ベクトルといい、 0 で表す。つまり

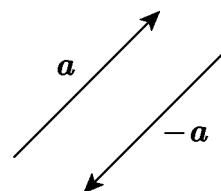
$$\overrightarrow{AA} = 0$$

零ベクトルの大きさは 0 で、その向きは考えないものとする。
ベクトル a に対して、大きさが同じで

向きが反対であるベクトルを、 a の
逆ベクトルといい、 $-a$ で表す。

$a = \overrightarrow{OA}$ のとき、 $-a = \overrightarrow{AO}$ である。

$$\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$$

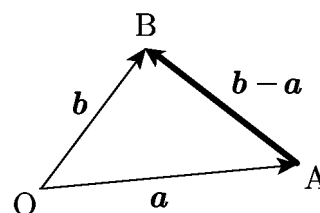


2 つのベクトル $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ に対して、

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

だから \overrightarrow{AB} を b と a の差といい、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a$$



と表す。 \overrightarrow{AB} をベクトルの差として $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ と表す場合には
「終点 (B) - 始点 (A)」と覚えておくとよい。

問 a, b が次のように与えられている場合に $b - a$ を図示せよ。

(1)	(2)	(3)

< 平面のベクトル 3 >

ベクトル a の大きさを $|a|$ で表す。 $a = \overrightarrow{AB}$ のときは、 $|a|$ は線分 AB の長さである。

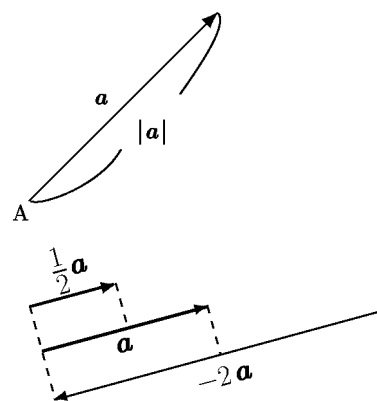
大きさが 1 であるベクトルを単位ベクトルという。

0 でないベクトル a と正数 k に対して

(1) ka は、 a と向きが同じで大きさが k 倍のベクトル

(2) $-ka$ は、 a と向きが逆で大きさが k 倍のベクトル

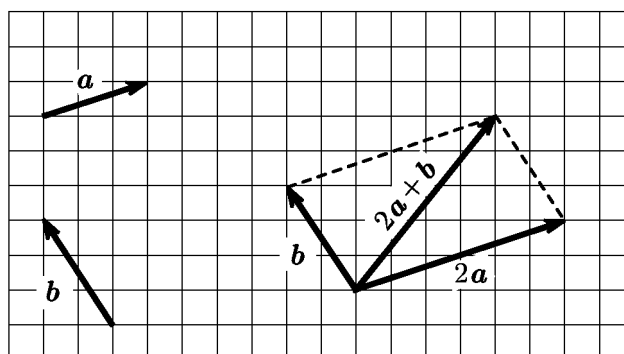
と定める。このようなベクトルを a の実数倍という。



例 ベクトル a, b が右図の様に与えられているとき

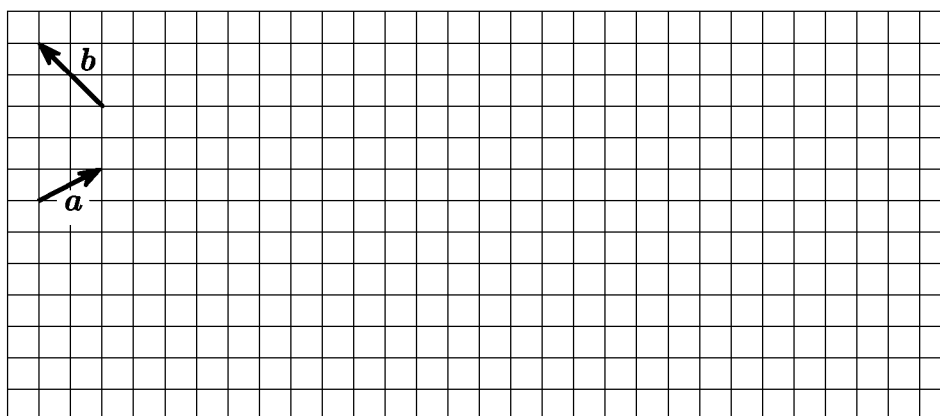
$$2a + b$$

を図示すると、右のようになる。



問 ベクトル a, b が下の図の様に与えられているとき、次のベクトルを図示せよ。

(1) $-2a$, (2) $\frac{3}{2}b$, (3) $-a + b$, (4) $a + \frac{5}{2}b$



< 平面ベクトルの成分 1 >

O を原点とする座標平面上の 2 点 $I(1,0)$, $J(0,1)$ に対して、

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \mathbf{j} = \overrightarrow{OJ}$$

を基本ベクトルという。

平面上の任意の点 $A(a_1, a_2)$ に対し、2 点 $B(a_1, 0)$, $C(0, a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

となる。ここで $\overrightarrow{OB} = a_1\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OC} = a_2\mathbf{j}$ だから、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ は

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$$

と表すことが出来る。この a_1 , a_2 を \mathbf{a} の成分といい、 a_1 を x 成分、 a_2 を y 成分という。このとき \mathbf{a} を成分を使って

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

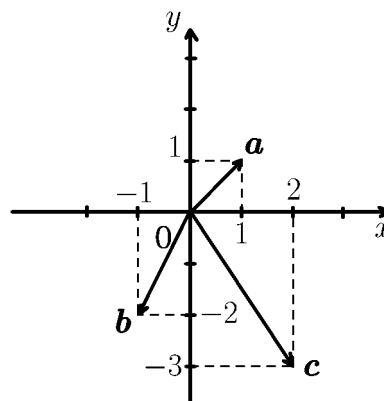
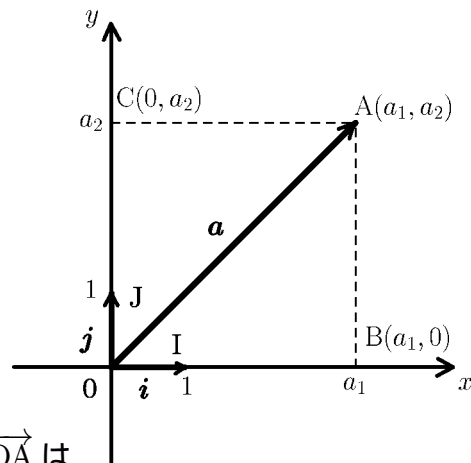
と表す。(このように成分を縦に並べる表し方を縦ベクトル表示といい、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ の様に横に並べる表し方を横ベクトル表示という。本書では、縦ベクトル表示を使う。)

例 1 $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ …… 零ベクトル

例 2 2 点 $A(2, 3)$, $B(4, -1)$ に対し、 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を成分で表すと

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

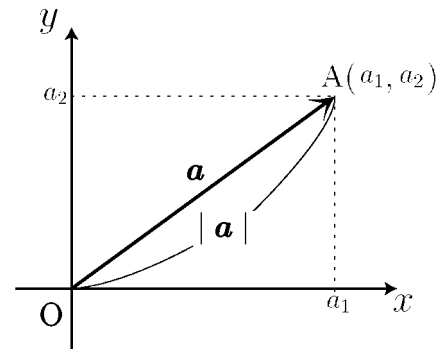
問 右図のベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} を成分で表せ。



< 平面ベクトルの成分 2 >

右図のように $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ $|\mathbf{a}|$ は、
線分 OA の長さと一致するから

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



例題 2点 $A(3, 1), B(4, 5)$ が与えられたとき、
 \overrightarrow{AB} の成分と大きさを求めよ。

(解) ベクトル \overrightarrow{AB} を右図のように

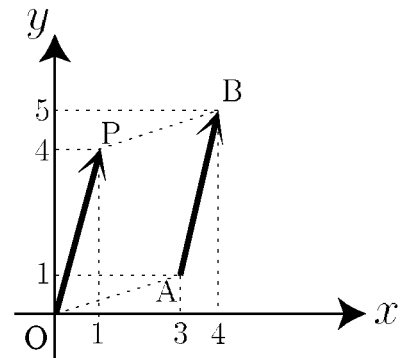
x 軸方向に -3
 y 軸方向に -1

だけ平行移動するとベクトル \overrightarrow{OP} になるから

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$



(別解) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \dots$ (終点 - 始点)

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問 次の2点 A, B に対し、 \overrightarrow{AB} を成分で表し、その大きさを求めよ。

(1) $A(3, 1), B(4, 5)$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

(2) $A(1, -1), B(-2, 3)$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

(3) $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$|\overrightarrow{AB}| =$$

< 平面ベクトルの成分 3 >

例題 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

- (1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, (3) $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, (4) $2\mathbf{b}$

(解) (1) 右図より

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(2) 右図より

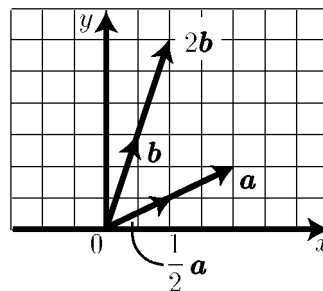
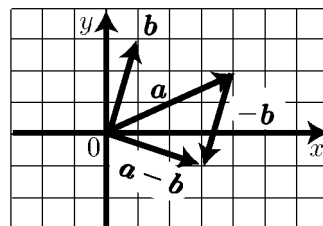
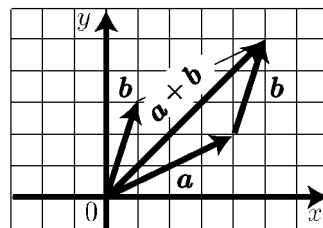
$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) 右図より

$$2\mathbf{b} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$



問1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(k は定数)

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$

(2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$

(3) $k\mathbf{a} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$

問2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$ のとき、次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\frac{1}{2}\mathbf{a} =$

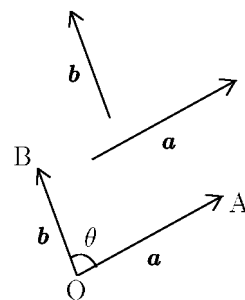
(2) $-\mathbf{b} =$

(3) $\mathbf{a} - \mathbf{b} =$

(4) $\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b} =$

< 平面ベクトルの内積 1 >

0 でない2つのベクトル a, b に対し、 a と b の始点を同じ点 O にもっていき、終点をそれぞれ A, B とするとき、 $\angle AOB$ の大きさ θ は、 a, b によってきまる。この角 θ をベクトル a, b のつくる角という。



ベクトル a, b のつくる角が θ のとき

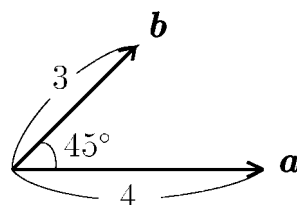
$$|a||b| \cos \theta$$

を、ベクトル a, b の内積といい、 $a \cdot b$ で表す。すなわち

$$a \cdot b = |a||b| \cos \theta \quad (\text{内積の定義})$$

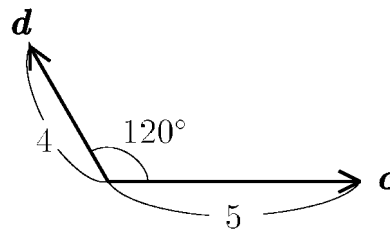
例 (1) $|a| = 4$, $|b| = 3$ で
 a, b のつくる角が 45° のとき
 $a \cdot b = 4 \times 3 \times \cos 45^\circ$

$$= 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$



(2) $|c| = 5$, $|d| = 4$ で
 c, d のつくる角が 120° のとき
 $c \cdot d = 5 \times 4 \times \cos 120^\circ$

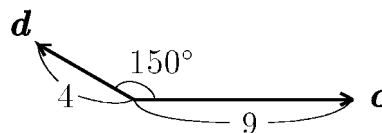
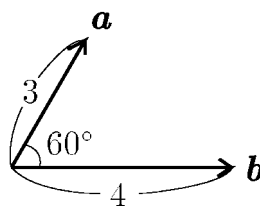
$$= 5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -10$$



問 a, b, c, d が右図の場合に
内積 $a \cdot b$, $c \cdot d$ を求めよ。

$$a \cdot b =$$

$$c \cdot d =$$



< 平面ベクトルの内積 2 >

内積 $a \cdot b$ で、 $a = b$ のときは、2つのベクトルは一致するので間の角 $\theta = 0^\circ$ より $\cos \theta = \cos 0^\circ = 1$ だから

$$a \cdot a = |a|^2 \text{ つまり、} |a| = \sqrt{a \cdot a}$$

また、 a と b のなす角が 90° のとき、 a と b は垂直であるといい、 $a \perp b$ と書く。 $\cos 90^\circ = 0$ であるから、次が成り立つ。

$a \neq 0, b \neq 0$ のとき

$$a \perp b \iff a \cdot b = 0$$

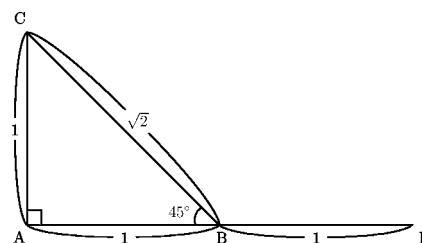
(ベクトルの垂直と内積)

例 右図の直角二等辺三角形において

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \times 1 \times \cos 90^\circ = 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ = 1$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{BD} \cdot \vec{BC} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos 135^\circ = -1$$



問 右図のように一辺の長さが2の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点を M とするとき、次の内積の値を求めよ。

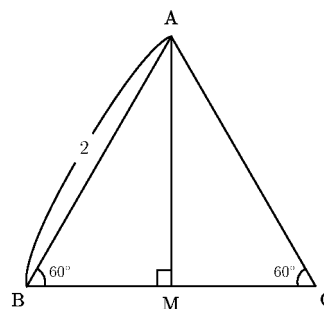
(1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} =$

(2) $\vec{AM} \cdot \vec{AC} =$

(3) $\vec{BA} \cdot \vec{BC} =$

(4) $\vec{BC} \cdot \vec{MA} =$

(5) $\vec{MB} \cdot \vec{MC} =$



＜ 平面ベクトルの内積の成分表示 1 ＞

座標平面上の2点 $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ と原点 O に対し、2点間の距離の公式より

$$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

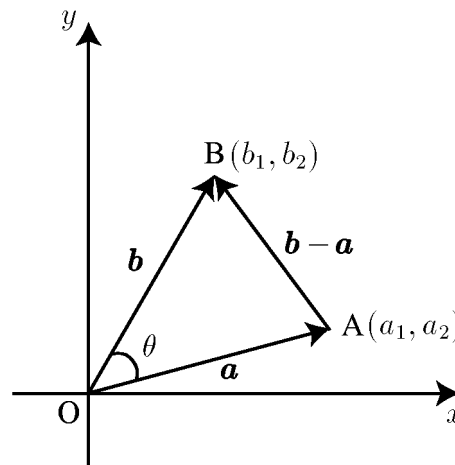
である。一方 $\angle AOB = \theta$ とすると、余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times \cos \theta$$

であるから

$$OA \times OB \times \cos \theta = \frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} \dots \dots \dots (*)$$

となる。



問1 (*) 式の右辺を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} =$$

問2 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos \theta = OA \times OB \times \cos \theta$$

となる。問1の結果を使って、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を a_1, a_2, b_1, b_2 についての簡単な式で表せ。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

< 平面ベクトルの内積の成分表示 2 >

前ページの結果より

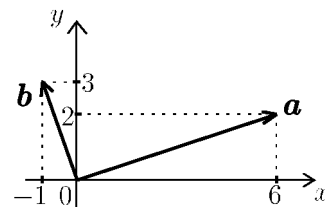
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

である。

例1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき 内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 6 \times (-1) + 2 \times 3 = 0$$

であるから、 \mathbf{a} と \mathbf{b} は垂直 ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$) である。



問1 \mathbf{a}, \mathbf{b} が以下の場合に内積を求め、 \mathbf{a} と \mathbf{b} が垂直である場合は $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と書け。

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

(3) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

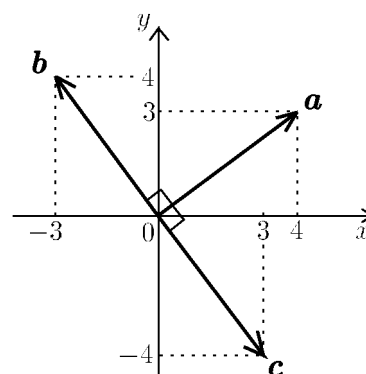
例2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

のとき

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

より $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \mathbf{a} \perp \mathbf{c}$ である。



問2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と垂直なベクトルの例を2つあげよ。

< 平面ベクトルのなす角 >

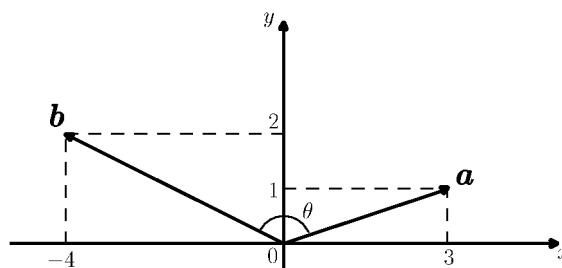
例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ のなす

角 θ を求めたい。内積の定義から

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos \theta$$

より

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{3 \times (-4) + 1 \times 2}{\sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



よって $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta = \frac{3}{4}\pi$ ($= 135^\circ$) である。

問1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めたい。上の例にならって、

$\cos \theta$ の値を a_1, a_2, b_1, b_2 で表せ。

$$\cos \theta =$$

問2 以下の場合に、 \mathbf{a} と \mathbf{b} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を求めよ。

(1) $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sqrt{3}$

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(3) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$

< 平面ベクトルの位置関係 >

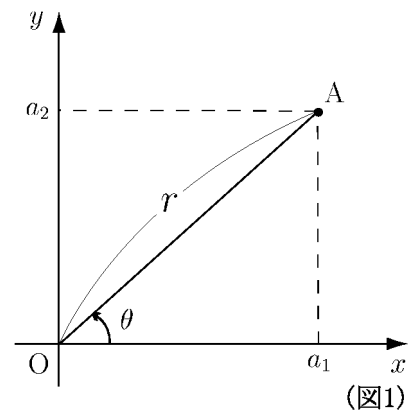
例 平面上の点 $A(a_1, a_2)$ に対し、原点 O からの距離を r とする。右図のように線分 OA の x 軸 (の正の部分) からの角度を θ とする。このとき

$$a_1 = r \cos \theta, \quad a_2 = r \sin \theta$$

が成り立つ。この場合、ベクトル \overrightarrow{OA} の成分は

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$$

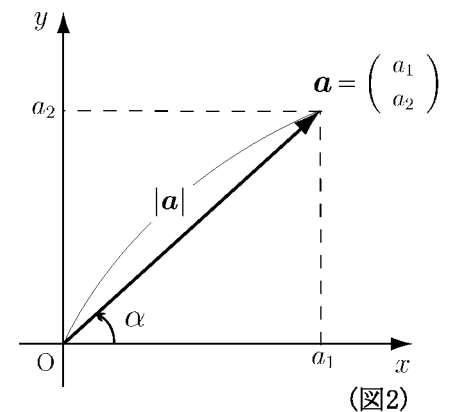
となる。



問 上の例を参考にして次の問に答えよ。

- (1) ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点 O にもってきて、図2のように x 軸からの角度を α とするとき、 \mathbf{a} の各成分を $|\mathbf{a}|$ と角度 α で表せ。

$$a_1 = \quad, \quad a_2 =$$



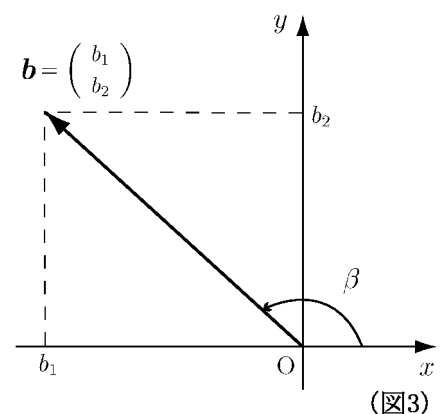
- (2) ベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点 O にもってきて、図3のように x 軸からの角度を β とするとき、 \mathbf{b} の各成分を $|\mathbf{b}|$ と角度 β で表せ。

$$b_1 = \quad, \quad b_2 =$$

- (3) \sin の加法定理を用いて次式を展開し、整理して、 a_1, a_2, b_1, b_2 だけで表せ。

$$|\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \sin(\beta - \alpha)$$

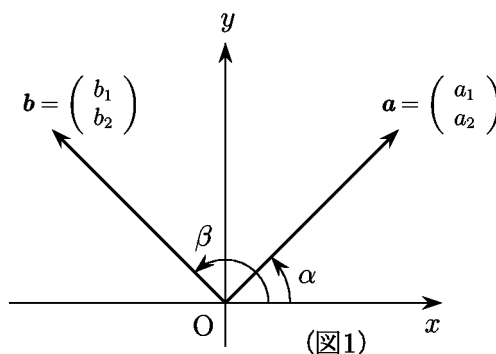
=



< 平面ベクトルの位置関係 2 >

2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の始点を原点にもってきて、 x 軸からの角度をそれぞれ α と β とする (図1)。このとき前ページの結果より

$$(*) \quad |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \sin(\beta - \alpha) = a_1 b_2 - a_2 b_1$$



が成り立つ。この(*)式を用いると、2つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の位置関係が成分を計算することによってわかる。

例 $a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0$ のときは

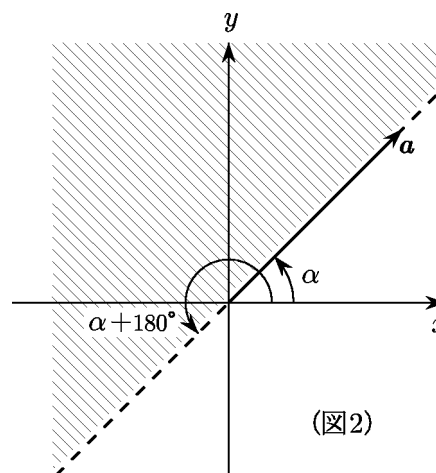
$|\mathbf{a}| > 0, |\mathbf{b}| > 0$ より(*)式から

$$\sin(\beta - \alpha) > 0$$

$$\iff 0^\circ < \beta - \alpha < 180^\circ$$

$$\iff \alpha < \beta < \alpha + 180^\circ$$

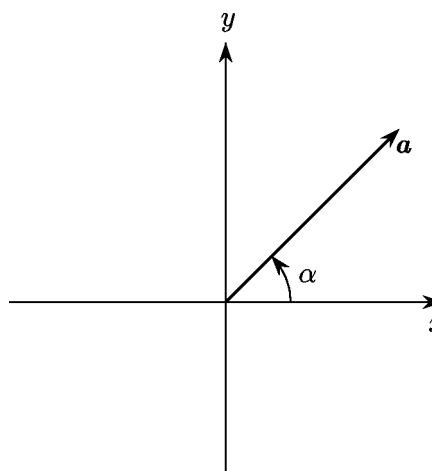
となる。従ってベクトル \mathbf{b} の存在する範囲は図2の斜線部分である。ただし境界は含まない。



(注) 正確に言うと、原点を始点とするベクトル \mathbf{b} の終点の存在する範囲が図2の斜線部分である。

問1 $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ のとき、ベクトル \mathbf{a} とベクトル \mathbf{b} の位置関係を答えよ。

問2 $a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0$ のとき、ベクトル \mathbf{b} の(終点の)存在する範囲を右に図示せよ。



＜ 平面のベクトルと平行四辺形の面積 ＞

2つのベクトル

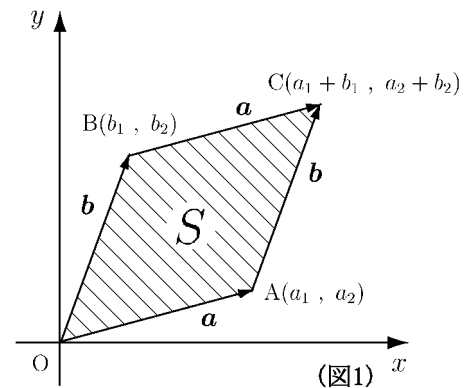
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して原点 $O(0, 0)$ と3点

$$A(a_1, a_2), \quad B(b_1, b_2), \quad C(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

をとると、四角形 $OACB$ は平行四辺形となる。

これを2つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} によってできる平行四辺形ということにする。この面積 S を求めたい。

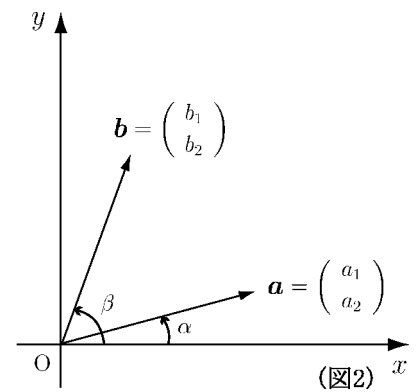


問1 ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} が図2のような位置関係にあるとする。このとき \mathbf{a} と \mathbf{b} によってできる平行四辺形の面積 S は図3より

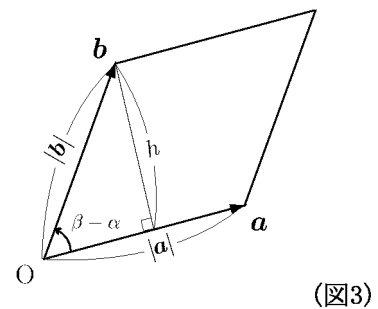
$$S = |\mathbf{a}| \times h$$

である。

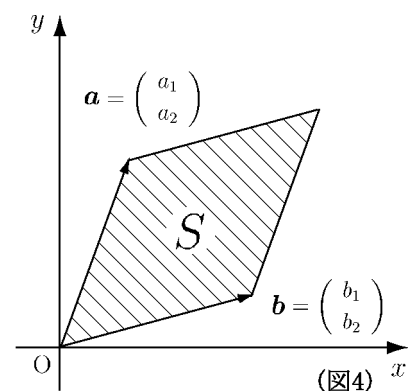
(1) h を $|\mathbf{b}|$ と $\beta - \alpha$ で表せ。



(2) 前ページの(*)式を用いて S を a_1, a_2, b_1, b_2 だけで表せ。



問2 ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が図4のような位置関係にあるとする。このとき \mathbf{a} と \mathbf{b} によってできる平行四辺形の面積 S を a_1, a_2, b_1, b_2 だけで表せ。



< 2 次の行列式 >

2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、 $a_1b_2 - a_2b_1$ の値を

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ という記号で表し、2 次の行列式という。

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1} \quad (\text{2 次の行列式})$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$, $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 7 \times 3 = 9$

問1 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

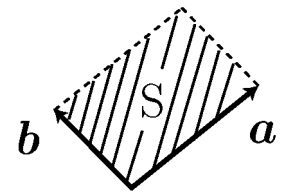
(2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

零ベクトルでない2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し、行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の値は次のことを意味する。

[] $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0$ のとき \mathbf{a} と \mathbf{b} は図1のような

位置関係である。 \mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる平方四辺形の面積を S とすると

$$\boxed{S = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

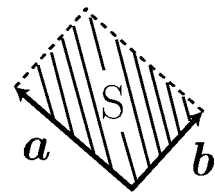


(図1)

[] $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} < 0$ のとき \mathbf{a} と \mathbf{b} は図2のような

位置関係である。 \mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる平方四辺形の面積を S とすると

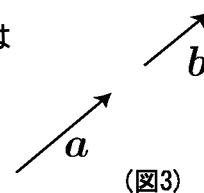
$$\boxed{S = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$



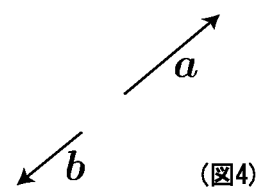
(図2)

[] $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ のとき \mathbf{a} と \mathbf{b} は図3または

図4のような位置関係である。つまり \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行である。



(図3)



(図4)

問2 [] $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のとき $\frac{b_1}{a_1} = k$ として、 \mathbf{b} を k と \mathbf{a} で表せ。(ただし $a_1 \neq 0$, とする)

< 空間座標 >

例 座標空間上に原点 $O(0, 0, 0)$
と3点 A, B, P が図1のような
位置にあるとき、 A, B, P の座標は

$$A(a, 0, 0)$$

$$B(a, b, 0)$$

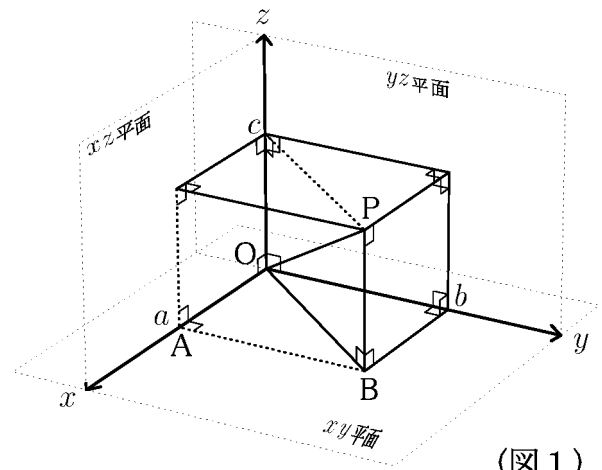
$$P(a, b, c)$$

と表される。 a, b, c が正のとき、
各線分の長さ(各点の距離)は

$$OA = a \quad , \quad AB = b \quad , \quad BP = c \quad , \quad OB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$OP = \sqrt{OB^2 + BP^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

となる。



(図1)

問1 この例で、点 $C(a, 0, c)$, $D(0, b, c)$ の位置を図1内に表示し、
以下の線分の長さを求めよ。

$$AC = \quad , \quad CD = \quad , \quad AD = \quad$$

問2 図2の4点 $P(x_1, y_1, z_1)$, $A(x_2, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$
に対し、以下の線分の長さを求めよ。(ただし $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, $z_1 < z_2$ とする)

$$PA = \quad , \quad AB = \quad , \quad BQ = \quad$$

$$PB = \quad$$

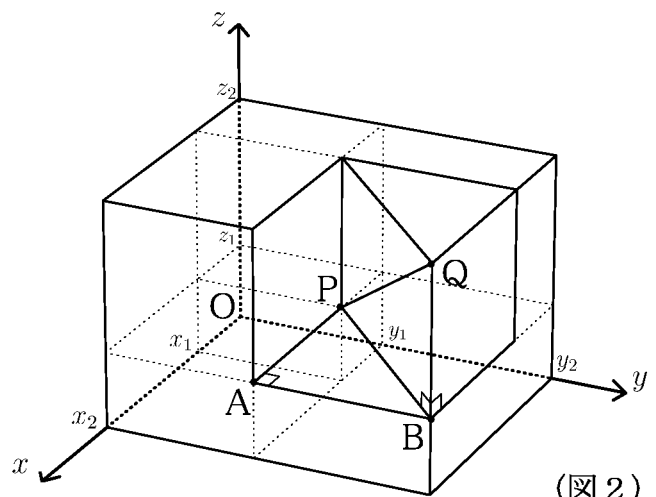
$$PQ = \quad$$

問3 点 $C(x_2, y_1, z_2)$, $D(x_1, y_2, z_1)$
の位置を図2内に表示し、
以下の線分の長さを求めよ。

$$AC = \quad$$

$$AD = \quad$$

$$CD = \quad$$



(図2)

< 空間座標と距離 >

例 前ページの結果より

2点 $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ の間の
距離 PQ (= 線分 PQ の長さ) は

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

である。

(注) この公式は

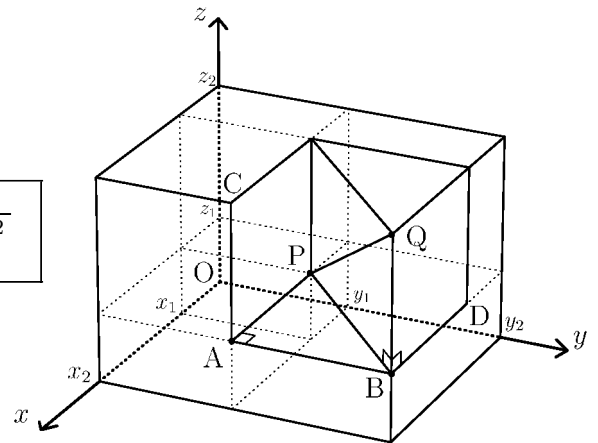
$$x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2, \quad z_1 < z_2$$

の場合以外にも適用できる。

右図の点 $C(x_2, y_1, z_2)$, $D(x_1, y_2, z_1)$ の間の距離 CD は

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \end{aligned}$$

であり, $\sqrt{\quad}$ の中の $(\quad - \quad)^2$ の中の \quad と \quad は入れ替えても 2 乗するので
結果は変わらないからである。



問 1 点 $E(x_1, y_1, z_2)$, $F(x_1, y_2, z_2)$ の位置を右上図内に表示し,
点 $A(x_2, y_1, z_1)$ と点 $B(x_2, y_2, z_1)$ に対し, 次の距離を求めよ。

$$BE =$$

$$AF =$$

問 2 原点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ に対し,

(1) 以下の距離を求めよ。

$$OA = \quad, \quad OB =$$

$$AB =$$

(2) 以下の式を計算し, できるだけ簡単にせよ。

$$OA^2 + OB^2 - AB^2 =$$

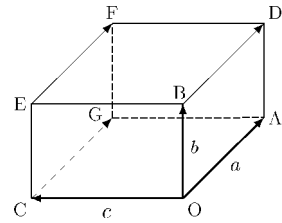
< 空間のベクトル 1 >

速度や力などのように、方向と大きさをもつベクトルは、平面上だけでなく空間においても同様に扱える。

例 1 右図の直方体の頂点を始点、終点とするベクトルのうちで、 \vec{OA} に等しいものは

$$\vec{BD}, \vec{EF}, \vec{CG}$$

である。すなわち $\vec{OA} = \vec{BD} = \vec{EF} = \vec{CG}$ である。



問 1 例 1 で、 \vec{OB} に等しいものと \vec{OC} に等しいものを全て書け。

(1) $\vec{OB} =$

(2) $\vec{OC} =$

空間のベクトルについても、和・差、実数倍は平面のベクトルと同様である。

例 2 例 1 の直方体で

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AD} = \vec{OD}$$

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}, \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{DF} = \vec{OD} + \vec{DF} = \vec{OF}$$

問 2 例 1 の直方体で $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b, \vec{OC} = c$ とするとき、

次のベクトルを a, b, c で表せ。

(1) $\vec{OG} =$

(2) $\vec{OD} =$

(3) $\vec{OF} =$

(4) $\vec{CF} =$

(5) $\vec{FA} =$

(6) $\vec{EA} =$

< 空間のベクトル 2 >

O を原点とする空間における座標軸上の
3点 $I(1, 0, 0)$, $J(0, 1, 0)$, $K(0, 0, 1)$
に対し、

$$\mathbf{i} = \overrightarrow{OI}, \quad \mathbf{j} = \overrightarrow{OJ}, \quad \mathbf{k} = \overrightarrow{OK}$$

を基本ベクトルという。

空間における任意のベクトル \mathbf{a} の始点を

原点にもっていき、 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ となる点 A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき、

$A_1(a_1, 0, 0)$, $A_2(0, a_2, 0)$, $A_3(0, 0, a_3)$ とおくと、

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$$

となる。 $\overrightarrow{OA_1} = a_1\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OA_2} = a_2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OA_3} = a_3\mathbf{k}$ より

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

と表される。この a_1, a_2, a_3 を \mathbf{a} の成分といい、 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と表す。

とくに $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ である。

問1 上図で、 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ を成分で表せ。

例 $A(1, 3, 2)$ に対し、 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

である。ここで、 $A_1(1, 0, 0)$, $B(1, 3, 0)$
とおくと

$$\begin{aligned} OA^2 &= OB^2 + AB^2 \\ &= (OA_1^2 + A_1B^2) + AB^2 \\ &= 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14 \end{aligned}$$

より、ベクトル \overrightarrow{OA} の大きさは、 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{14}$ である。

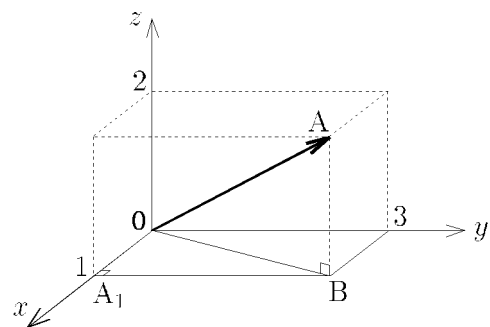
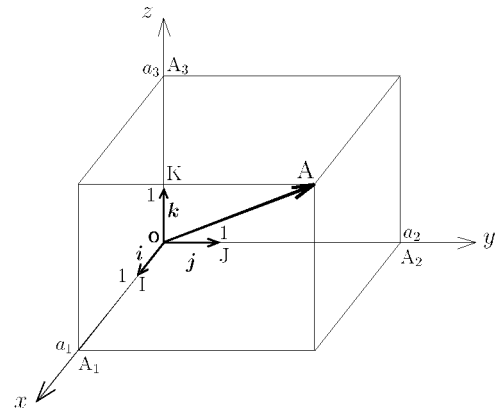
問2 \mathbf{a} の成分が以下の場合に、ベクトル \mathbf{a} の大きさ $|\mathbf{a}|$ を求めよ。

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$|\mathbf{a}| =$

$|\mathbf{a}| =$



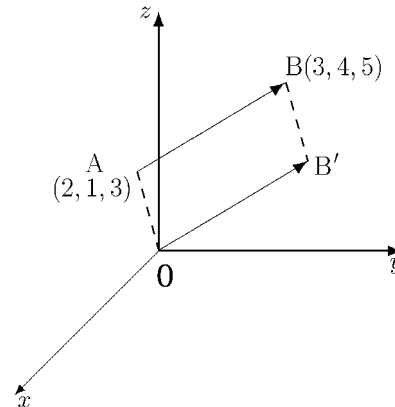
< 空間のベクトル 3 >

例 空間座標上の2点 $A(2,1,3)$ 、 $B(3,4,5)$ に対し、ベクトル \overrightarrow{AB} の成分を求めたい。
ベクトル \overrightarrow{AB} を平行移動し、始点を原点 O にもっていくとすると、点 A が原点 O に移動するから

x 軸方向に -2

y 軸方向に -1

z 軸方向に -3



だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B' に (同じ様に) 平行移動して、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB'}$ となったとすると、 B' の座標は

$$B'(3-2, 4-1, 5-3) = (1, 3, 2)$$

となる。よって \overrightarrow{AB} の成分は

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(別解) 次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

だから

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

問 空間の2点 A 、 B の座標が以下の場合に、ベクトル \overrightarrow{AB} の成分を求めよ。

(1) $A(5, 2, 3)$, $B(4, 1, 2)$

(2) $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{AB} =$

< 空間のベクトル 4 >

例 空間の 2 点 $A(2,1,3)$ 、 $B(1,3,2)$ と原点 O に対し、ベクトル

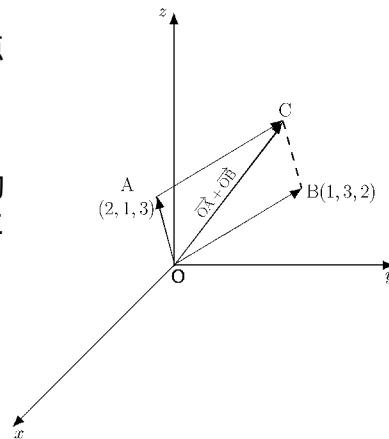
$$\vec{OA} + \vec{OB}$$

の成分を求めたい。ベクトル \vec{OB} を平行移動し、始点が A になるようすると、 O が A に移動するから、

x 軸方向に $+2$

y 軸方向に $+1$

z 軸方向に $+3$



だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同じ様に平行移動して、 $\vec{OB} = \vec{AC}$ となったとすると、 C の座標は

$$C(1+2, 3+1, 2+3) = (3, 4, 5)$$

となる。よって $\vec{OA} + \vec{OB}$ の成分は

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(別解) 次の様に計算してもよい。

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1+3 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

問 2 点 A 、 B の座標が次の様な場合に、以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) $A(5,2,3)$, $B(4,1,2)$

$$\vec{OA} + \vec{OB} =$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} =$$

$$2\vec{OB} =$$

(2) $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{OA} + \vec{OB} =$$

$$\vec{OB} - \vec{OA} =$$

$$3\vec{OA} =$$

< 空間のベクトル 5 >

問 1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき前ページの結果から類推し

て、次のベクトルの成分を求めよ。(ただし、 k は実数)

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$

(2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} =$

(3) $k\mathbf{a} =$

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、 $3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ の成分は

$$3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+0 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

23 ページの結果より、このベクトルの大きさは

$$|3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

問 2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき次のベクトルの成分と大きさを求めよ。

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} =$

(2) $\mathbf{a} - \mathbf{b} =$

$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| =$

$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$

(3) $3\mathbf{a} =$

(4) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} =$

$|3\mathbf{a}| =$

$|\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| =$

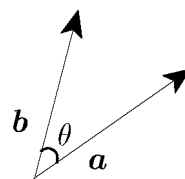
< 空間ベクトルの内積 1 >

平面上のベクトルと同じように、空間の 0 でない 2 つのベクトル a, b のつくる角 θ を定めることができる。 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)

そして、 a と b の内積 $a \cdot b$ を

$$a \cdot b = |a| \times |b| \cos \theta$$

と定める。(どちらか一方が 0 のときは、内積は 0 とする。)

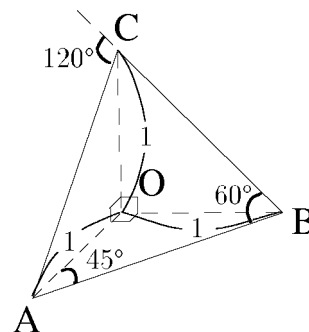


例 右図のような立体 OABC を考える。

ここで $OA=OB=OC=1$,

$OA \perp OB, OB \perp OC, OC \perp OA$

とする。このとき



$$\vec{AO} \cdot \vec{AB} = |\vec{AO}| \times |\vec{AB}| \times \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \times |\vec{BC}| \times \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = |\vec{BC}| \times |\vec{CA}| \times \cos 120^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

問 右の図は、1 辺の長さが 1 の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。

(1) $\vec{AD} \cdot \vec{AF} =$

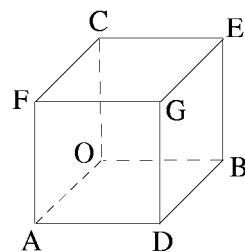
(2) $\vec{DB} \cdot \vec{DE} =$

(3) $\vec{AF} \cdot \vec{AG} =$

(4) $\vec{CO} \cdot \vec{BG} =$

(5) $\vec{OB} \cdot \vec{CE} =$

(6) $\vec{DF} \cdot \vec{DE} =$

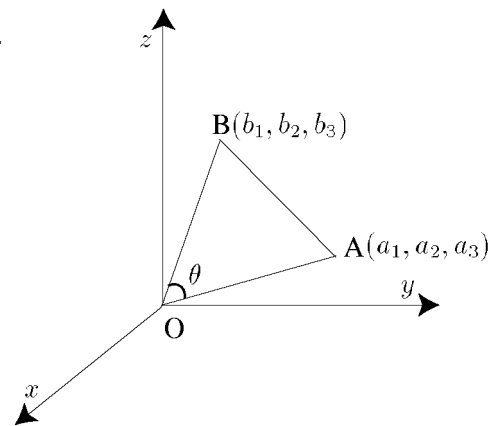


< 空間ベクトルの内積 2 >

空間の2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ と原点 O に
対し、 $\angle AOB = \theta$ とすると、余弦定理より、

$$(*) \quad OA \times OB \cos \theta = \frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\}$$

となる。



問1 OA, OB, AB の長さの2乗を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ で表せ。

$$OA^2 = \quad \quad \quad , OB^2 =$$

$$AB^2 =$$

問2 $(*)$ 式の右辺を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2} \{OA^2 + OB^2 - AB^2\} =$$

問3 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos \theta = OA \times OB \times \cos \theta$$

問2の結果を使って、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

< 空間ベクトルの内積 3 >

2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積は、前ページの
結果より

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (\text{内積の成分表示})$$

となる。

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のつくる角を θ とすれば、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}| \times \cos \theta$$

より

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \times |\mathbf{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) だから、 $\theta = 120^\circ$ となる。

問 以下の場合に、 \mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を求めよ。

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

< 平面の方程式 1 >

例 空間の点 $Q(3, 4, 5)$ を通り、ベクトル

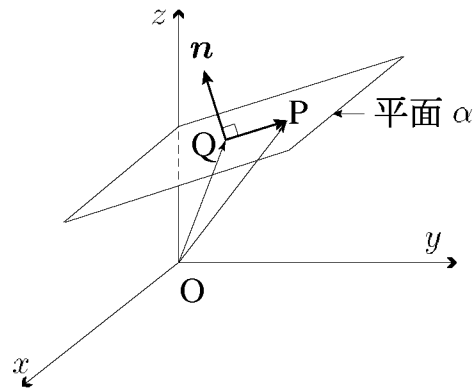
$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \text{ に垂直な平面を } \alpha \text{ と}$$

する。平面 α 上の任意の点 $P(x, y, z)$

に対し、 \mathbf{n} と \overrightarrow{QP} は直交するから

\mathbf{n} と \overrightarrow{QP} との内積は $\cos 90^\circ = 0$ より

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP} = 0$$



となる。一方、

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \\ z-5 \end{pmatrix} = -4 \times (x-3) + (-3) \times (y-4) + 12 \times (z-5) = 0$$

これを整理すると、

$$-4x - 3y + 12z - 36 = 0 \quad (\text{平面の方程式})$$

となる。これが平面 α を表す方程式である。このとき \mathbf{n} を平面 α の法線ベクトルという。

問 ベクトル \mathbf{n} と点 Q が以下の場合に、点 Q を通って \mathbf{n} に垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q(2, -1, 3)$

(2) $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Q(q_1, q_2, q_3)$

< 平面の方程式 2 >

点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ を通り、 $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式は

$$a(x - q_1) + b(y - q_2) + c(z - q_3) = 0$$

となる。

例 1 $2x + 4y + 3z = 0$ は原点 $(0, 0, 0)$ を通り、 $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式である。

例 2 $3x + 5y + 2z = 8$ を変形すると

$$3x + 5y + 2(z - 4) = 0$$

となるから、点 $(0, 0, 4)$ を通り、 $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の

方程式である。

例 3 $z = 2x + 3y + 1$ を変形すると

$$2x + 3y - (z - 1) = 0$$

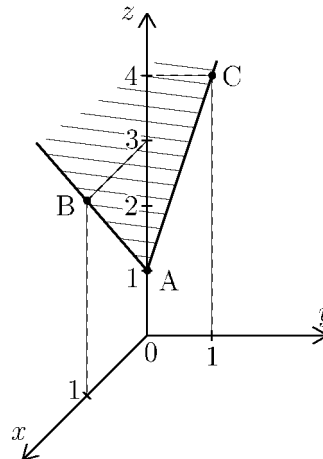
となるから、点 $(0, 0, 1)$ をとおり、

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ に垂直な平面の方程式

である。この平面は点 $A(0, 0, 1)$,

$B(1, 0, 3)$, $C(0, 1, 4)$ を通る

右図のような平面である。



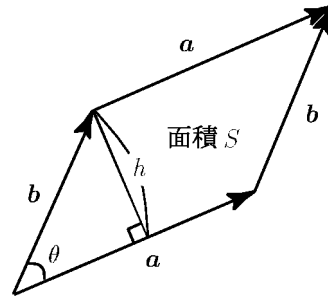
問 次の方程式はどんな平面を表すか。

(1) $x - 2y + 3z = 0$ (2) $2x + y + 3z = 1$ (3) $z = \frac{10 - 5x - 3y}{7}$

< 空間の平行四辺形 1 >

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ に対し、

右図のように、 \mathbf{a} と \mathbf{b} がつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。



\mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる角を θ 、平行四辺形の高さを h とすれば、

$$S = |\mathbf{a}| \times h, \quad h = |\mathbf{b}| \times \sin \theta$$

より

$$\begin{aligned} S^2 &= |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 \times \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 \times (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 \times \cos^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\ &= (1^2 + 6^2 + 3^2) \times ((-2)^2 + 4^2 + 5^2) - (1 \times (-2) + 6 \times 4 + 3 \times 5)^2 \\ &= 701 \end{aligned}$$

よって $S = \sqrt{701}$ となる。

問 \mathbf{a}, \mathbf{b} が以下の場合に、 \mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる平行四辺形の面積 S を求めよ。

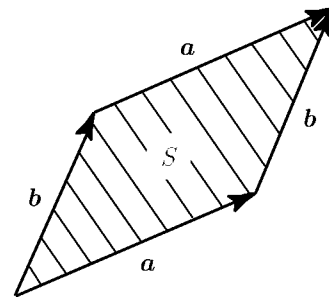
$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

< 空間の平行四辺形 2 >

一般のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に

対して、 \mathbf{a} と \mathbf{b} のつくる平行四辺形の面積 S を求めたい。前ページと同様に考えると、



$$\begin{aligned}
 S^2 &= |\mathbf{a}|^2 \times |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
 &= \{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\} \times \{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2\} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= (a_1)^2(b_1)^2 + (a_1)^2(b_2)^2 + (a_1)^2(b_3)^2 + (a_2)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 \\
 &\quad + (a_2)^2(b_3)^2 + (a_3)^2(b_1)^2 + (a_3)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 \\
 &\quad - \{(a_1)^2(b_1)^2 + (a_2)^2(b_2)^2 + (a_3)^2(b_3)^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_2b_2a_3b_3 + 2a_1b_1a_3b_3\} \\
 &= \{(a_1b_2)^2 - 2(a_1b_2)(a_2b_1) + (a_2b_1)^2\} + \{(a_2b_3)^2 - 2(a_2b_3)(a_3b_2) + (a_3b_2)^2\} \\
 &\quad + \{(a_3b_1)^2 - 2(a_3b_1)(a_1b_3) + (a_1b_3)^2\}
 \end{aligned}$$

となる。

問1 S^2 を $\{ \quad \}^2 + \{ \quad \}^2 + \{ \quad \}^2$ の形にせよ。

$$S^2 =$$

問2 行列式の記号 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ を用いて、 S^2 を表せ。

$$S^2 =$$

問3 S を行列式の記号を用いて表せ。

$$S =$$

< 外積 1 >

空間のベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ の外積})$$

を \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積という。外積の大きさは

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

であるから、前ページの結果より、 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ は \mathbf{a} と \mathbf{b} の
つくる平行四辺形の面積 S に等しい。

(注) 今後、2つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の間に積の記号 \times がある
場合は必ず外積を意味し、内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ と区別する。

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、外積は

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり、内積は $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ である。

問 \mathbf{a} と \mathbf{b} が以下の場合に、外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を求めよ。

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

< 外積 2 >

例1 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、前ページの例より $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

であった。このとき

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 1 + 6 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$$

より $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{a} は直交している。すなわち $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a}$ である。また

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 6 \times 5 + (-3) \times 6 = 0$$

より $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{b} も直交している。すなわち $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$ である。

問1 \mathbf{a} と \mathbf{b} が以下の場合に、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$ と $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$ を計算せよ。

$$(1) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (2) \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

例2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

より $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{a} は直交している。

問2 例2の場合に、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$ を計算せよ。

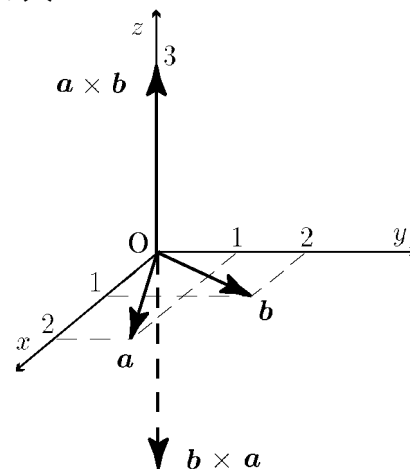
< 外積 3 >

a と b との外積 $a \times b$ は a (および b) と直交していて、その大きさは a と b のつくる平行四辺形の面積に等しい。

例 1 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$a \times b = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b \times a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

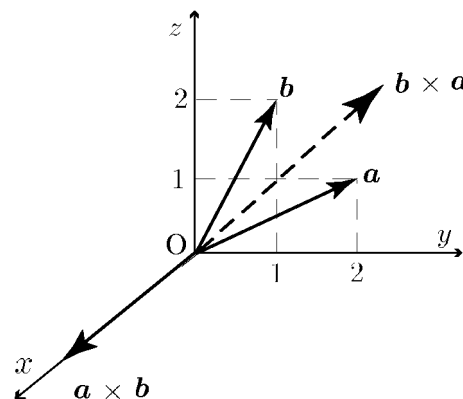
より $b \times a = -(a \times b)$ となる。



例 2 $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき、

$$a \times b = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b \times a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $b \times a = -(a \times b)$ となる。

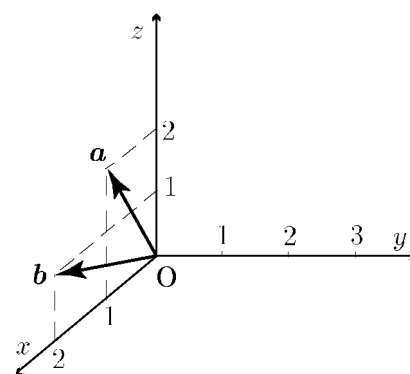


問 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき、

$a \times b$ と $b \times a$ の成分を求め、
右に $a \times b$ と $b \times a$ を作図せよ。

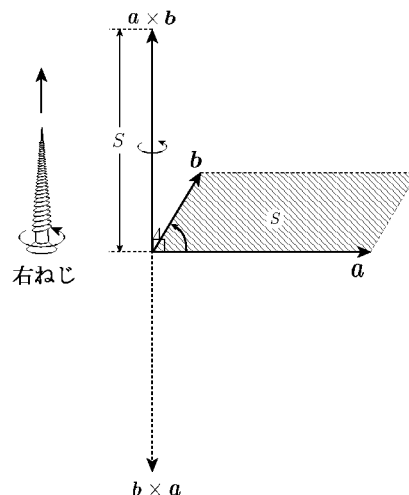
$$a \times b =$$

$$b \times a =$$



< 外積 4 >

2つのベクトル a と b の外積 $a \times b$ は、 a と b に垂直なベクトルであり、大きさは a と b のつくる平行四辺形の面積 S に等しい。又 $a \times b$ の向きは a から b に、向かって回転するとき、右ねじの進む方向である。従って $b \times a$ はその反対向きであり

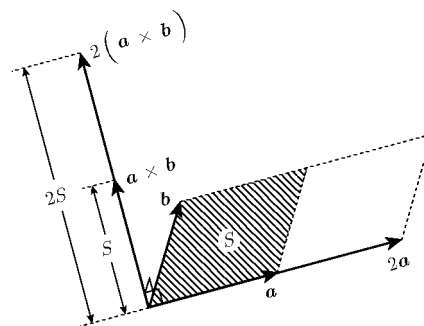


$$b \times a = -(a \times b)$$

が成り立つ。

例1 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき

$$a \times b = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \text{である。}$$



次に $(2a) \times b$ を計算したい。右図から明らかに

$$(2a) \times b = 2(a \times b) = 2 \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix} \text{である。}$$

例2 $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき $a \times a = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

問 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき、次の外積の成分を求めよ。

(ただし k は定数とする。)

- (1) $a \times b$, (2) $b \times a$, (3) $(ka) \times b$, (4) $a \times (3a)$

< 平行六面体の体積 >

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

であるとき、右図のような平行六面体の体積 V を求めたい。 \mathbf{a} と \mathbf{b} が
つくる平行四辺形の面積を S 、
平行六面体の高さを h とすると、

$$V = Sh, \quad S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$$

である。一方、 \mathbf{c} と $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のつくる角を θ とすると

$$h = |\mathbf{c}| \cos \theta$$

であるから、

$$V = Sh = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \theta = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ と } \mathbf{c} \text{ の内積})$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= 6 \times (-1) + (-4) \times 3 + 32 \times 7 = 206$$

一般に $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の作る平行六面体の体積 V は

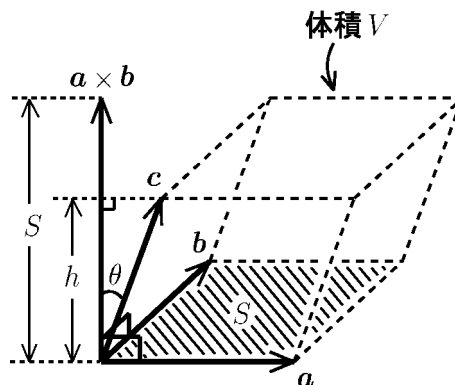
$$V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \text{ の絶対値}$$

問 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が以下の場合に、 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を求めよ。

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ (2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$$



< 3 次の行列式 >

3つのベクトル a, b, c に対し a と b の外積 $a \times b$ と c との内積

$$(a \times b) \cdot c$$

をスカラー三重積という。

$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し、スカラー三重積

$$\begin{aligned} (a \times b) \cdot c &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \end{aligned}$$

の値を記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

で表し、 a, b, c のつくる (3 次の) 行列式 という。

例 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6 - 7 \times 5 \times 3 - 4 \times 2 \times 9 - 1 \times 6 \times 8 = 0$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix} =$$

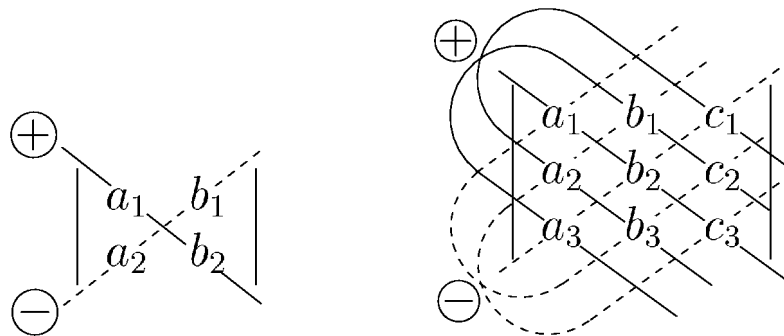
< サラスの方法 >

2 次や 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

の計算規則を覚えるためには、次のように考える。



この図で実線はプラスの項であり、点線はマイナスの項である。この方法をサラスの方法という。

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$