

高知工科大学
基礎数学ワークブック

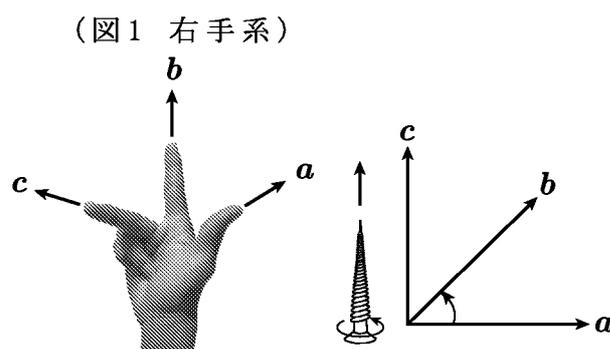
(2002年度版)

Series **A**

No. 11

内容

- ◎ 2次・3次の行列式
- ◎ 連立一次方程式
- ◎ 空間ベクトルと行列式
- ◎ 同次方程式
- ◎ 行列



電子・光システム工学科

井上 昌昭 著

< 2 次行列式の性質 >

2 次の行列式の定義

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

より、次の性質がわかる。

[] 行と列を入れ替えても行列式の値は同じ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

[] 列(または行)をいれかえると符号が反対になる。

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

[] 1 つの列(または行)を定数倍した行列式の値は元の行列式の値の定数倍になる。

$$\begin{vmatrix} k a_1 & b_1 \\ k a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (k \text{ は定数})$$

[] 分配法則が成り立つ。

$$\begin{vmatrix} (a_1 + c_1) & b_1 \\ (a_2 + c_2) & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

[] 列(または行)が一致すれば行列式の値は 0

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

例 1 $\begin{vmatrix} 60 & 50 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} = 30 \times \begin{vmatrix} 2 & 50 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = 30 \times 10 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 300 \times (8 - 5) = 900$

例 2 2 つの実数 x, y に対し

$$k_1 = 7x + 5y, \quad k_2 = 3x + 4y$$

とおくと

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (7x + 5y) & 5 \\ (3x + 4y) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7x & 5 \\ 3x & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5y & 5 \\ 4y & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 13x$$

$$\begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & (7x + 5y) \\ 3 & (3x + 4y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7x \\ 3 & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 5y \\ 3 & 4y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 13y$$

問 2 つの実数 x, y に対し

$$k_1 = 3x - y, \quad k_2 = 4x + 2y$$

とおくとき次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & 2 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 4 & k_2 \end{vmatrix}$

< 3 次行列式の性質 1 >

3 次の行列式のサラスの公式より

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

$$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

となるので

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} \quad (\text{列展開})$$

がなりたつ。この展開を列展開 という。

例

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 48 = -3$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \times (36 - 42) = 12$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 3 \times (32 - 35) = -9$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

< 3 次行列式の性質 2 >

サラスの方法において、行列式の行と列を入れかえた行列式を元の行列式と比較すると、



プラスの項（実線）は両方とも $a_1b_2c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$ で等しい。同様にマイナスの項（点線）も両方同じであるから、2つの行列式は等しい。従って

<p>[] 行列式の行と列を入れかえても、行列式の値は同じ。</p>	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
-------------------------------------	---

となる。前ページの展開公式

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$	(列展開)
--	-------

を列展開という。[] の性質から

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$	(行展開)
--	-------

がなりたつ。この式を行展開という。

例
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-4 + 3) - 3 \times (-5 + 2) + 0 = -2 + 9 = 7$$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
--	--	---

< 3 次行列式の性質 3 >

行列式の 1 列目と 2 列目を入れかえた行列式の値はサラスの公式より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} &= b_1 a_2 c_3 + b_2 a_3 c_1 + b_3 a_1 c_2 - b_1 a_3 c_2 - b_2 a_1 c_3 - b_3 a_2 c_1 \\ &= -(a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1) \\ &= - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。従って元の行列式の値にマイナスをつけたものになる。同様にして

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

がわかる。すなわち行列式の 2 つの列を入れ変えると符号が逆になる。

前ページの [] で行列式の行と列を入れかえても行列式の値は同じであるから、

[] 行列式の 2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。

がなりたつ。

例 (1) $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = - \left\{ 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right\} = 5$

問 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

< 3 次行列式の性質 4 >

3 次の行列式の展開公式 (サラスの公式) より以下の性質がわかる。

[] 1 つの列 (または行) を定数倍した行列式の値は元の行列式の定数倍になる。

例 1 k を定数とすると

$$k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & kc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix}$$

[] 分配法則がなりたつ。

例 2

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (c_1 + d_1) \\ a_2 & b_2 & (c_2 + d_2) \\ a_3 & b_3 & (c_3 + d_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ (a_2 - a'_2) & (b_2 - b'_2) & (c_2 - c'_2) \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[] 2 つの列 (または行) が一致すれば行列式の値は 0。

例 3

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

例 4

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+3) & 1 \\ 2 & (2+3) & 1 \\ 3 & (3+3) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (4-1) \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= - \left\{ 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = -1$$

問 次の行列式の値を求めよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

< 2元連立一次方程式 1 >

例題 与えられた定数 k_1, k_2 に対し、2元連立一次方程式

$$\begin{cases} 7x + 5y = k_1 \cdots \\ 3x + 4y = k_2 \cdots \end{cases}$$

をみたす x, y を求めよ。

(解) , より y を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times 4 - \times 5 > \\ 28x + 20y = 4k_1 \cdots \times 4 \\ -) 15x + 20y = 5k_2 \cdots \times 5 \\ \hline 13x \qquad \qquad = 4k_1 - 5k_2 \cdots \end{array}$$

より

$$x = \frac{4k_1 - 5k_2}{13}$$

, より x を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times 3 - \times 7 > \\ 21x + 15y = 3k_1 \cdots \times 3 \\ -) 21x + 28y = 7k_2 \cdots \times 7 \\ \hline -13y = 3k_1 - 7k_2 \cdots \end{array}$$

より

$$y = \frac{-3k_1 + 7k_2}{13}$$

(答) $x = \frac{4k_1 - 5k_2}{13}$, $y = \frac{-3k_1 + 7k_2}{13}$

問 与えられた定数 k_1, k_2 に対し、次の連立一次方程式をみたす x, y を求めよ。ただし $ad - bc \neq 0$ とする。

(1)
$$\begin{cases} 5x + 2y = k_1 \\ 4x + 3y = k_2 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} ax + by = k_1 \\ cx + dy = k_2 \end{cases}$$

< 2元連立一次方程式 2 >

例 与えられた数 k_1, k_2 に対して、連立一次方程式

$$\begin{cases} 7x + 5y = k_1 \\ 3x + 4y = k_2 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

をみたく解 x, y を求めたい。1 ページ例 2 より

$$\begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7x + 5y & 5 \\ 3x + 4y & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 7x + 5y \\ 3 & 3x + 4y \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

$$(2) \text{ より } x = \frac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & 5 \\ k_2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} (4k_1 - 5k_2) \dots\dots\dots (4)$$

$$(3) \text{ より } y = \frac{1}{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 7 & k_1 \\ 3 & k_2 \end{vmatrix} = \frac{-3k_1 + 7k_2}{13} \dots\dots\dots (5)$$

が求まる。このようにして連立方程式 (1) の解を求める方法をクラメルの方法という。

問 1 与えられた数 $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ は $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ とする。

連立方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

の解 x, y に対し、例の (2), (3) のように

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots \begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} =$$

を x と y で表すことにより、例の (4), (5) のように、解 x, y を $a_1, a_2, b_1, b_2, k_1, k_2$ を用いた行列式で表せ。

$$x = \dots\dots\dots y =$$

問 2 問 1 の式をクラメルの公式という。次の連立方程式をクラメルの公式で解け。

$$(1) \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 3x + 4y = k_1 \\ 2x + 3y = k_2 \end{cases}$$

< 3元連立一次方程式 1 >

例 3元連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x + 5y + 2z = 17 \cdots\cdots \\ 5x + 4y + 3z = 15 \cdots\cdots \\ 9x + 6y + 5z = 27 \cdots\cdots \end{cases}$$

をみたす x, y, z を求めたい。[Step 1] まず z を消去する。

$$< \times 3 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 24x + 15y + 6z = 51 \cdots \times 3 \\ -) 10x + 8y + 6z = 30 \cdots \times 2 \\ \hline 14x + 7y = 21 \cdots \end{array}$$

$$< \times 5 - \times 2 >$$

$$\begin{array}{r} 40x + 25y + 10z = 85 \cdots \times 5 \\ -) 18x + 12y + 10z = 54 \cdots \times 2 \\ \hline 22x + 13y = 31 \cdots \end{array}$$

[Step 2] 次に y を消去する。

$$< \times 13 - \times 7 >$$

$$\begin{array}{r} 182x + 91y = 273 \cdots \times 13 \\ -) 154x + 91y = 217 \cdots \times 7 \\ \hline 28x = 56 \cdots \end{array}$$

[Step 3] x, y, z を求める。

$$\text{より } x = 2 \quad , \quad \text{より } 7y = 21 - 14x = 21 - 28 = -7 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{より } 2z = 17 - 8x - 5y = 17 - 16 + 5 = 6 \Rightarrow z = 3 \quad (\text{答}) \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

問 次の3元連立一次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 8x + 5y + 2z = 7 \\ 5x + 4y + 3z = 7 \\ 9x + 6y + 5z = 13 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 5 \\ 4x + 3y + 5z = 11 \\ 2x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

< 3元連立一次方程式 2 >

例題 与えられた定数 k_1, k_2, k_3 に対し、次の3元連立一次方程式

$$\begin{cases} 8x + 5y + 2z = k_1 \cdots \cdots \\ 5x + 4y + 3z = k_2 \cdots \cdots \\ 9x + 6y + 5z = k_3 \cdots \cdots \end{cases}$$

をみたす x, y, z を求めよ。

(解) 前ページの方法でまず z を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times 3 - \quad \times 2 > & & < \times 5 - \quad \times 2 > \\ 24x + 15y + 6z = 3k_1 \quad \cdots \times 3 & & 40x + 25y + 10z = 5k_1 \quad \cdots \times 5 \\ -) 10x + 8y + 6z = 2k_2 \quad \cdots \times 2 & & -) 18x + 12y + 10z = 2k_3 \quad \cdots \times 2 \\ \hline 14x + 7y = 3k_1 - 2k_2 \quad \cdots & & 22x + 13y = 5k_1 - 2k_3 \quad \cdots \end{array}$$

次に z より y を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times 13 - \quad \times 7 > \\ 182x + 91y = 13(3k_1 - 2k_2) \quad \cdots \times 13 \\ -) 154x + 91y = 7(5k_1 - 2k_3) \quad \cdots \times 7 \\ \hline 28x = 13(3k_1 - 2k_2) - 7(5k_1 - 2k_3) \quad \cdots \end{array}$$

$$\text{よ} \text{り} \quad 28x = 4k_1 - 26k_2 + 14k_3 \quad \text{よ} \text{つ} \text{て} \quad x = \frac{2k_1 - 13k_2 + 7k_3}{14}$$

$$\text{よ} \text{り} \quad 7y = (3k_1 - 2k_2) - 14x = (3k_1 - 2k_2) - (2k_1 - 13k_2 + 7k_3) = k_1 + 11k_2 - 7k_3$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{り} \quad 2z = k_1 - 8x - 5y &= k_1 - \frac{4(2k_1 - 13k_2 + 7k_3)}{7} - \frac{5(k_1 + 11k_2 - 7k_3)}{7} \\ &= \frac{7k_1 - 8k_1 + 52k_2 - 28k_2 - 5k_1 - 55k_2 + 35k_3}{7} = \frac{-6k_1 - 3k_2 + 7k_3}{7} \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad x = \frac{2k_1 - 13k_2 + 7k_3}{14}, \quad y = \frac{k_1 + 11k_2 - 7k_3}{7}, \quad z = \frac{-6k_1 - 3k_2 + 7k_3}{14}$$

問 与えられた定数 k_1, k_2, k_3 に対し、次の連立方程式の解 x, y, z を求めよ。

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = k_1 \\ 4x + 3y + 5z = k_2 \\ 2x - y + 3z = k_3 \end{cases}$$

< 3元連立一次方程式 3 >

一般の3元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \cdots \cdots \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \cdots \cdots \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \cdots \cdots \end{cases}$$

の解を求めたい。 c_1, c_2, c_3 のうちどれかを0でないとする。ここでは $c_1 \neq 0$ として、まず z を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times c_2 - \times c_1 > & & < \times c_3 - \times c_1 > \\ a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = k_1c_2 \cdots \times c_2 & & a_1c_3x + b_1c_3y + c_1c_3z = k_1c_3 \cdots \times c_3 \\ -) a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z = k_2c_1 \cdots \times c_1 & & -) a_3c_1x + b_3c_1y + c_1c_3z = k_3c_1 \cdots \times c_1 \\ \hline (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = k_1c_2 - k_2c_1 \cdots & & (\quad)x + (\quad)y = \quad \cdots \end{array}$$

次に y を消去する。

$$\begin{array}{r} < \times (b_1c_3 - b_3c_1) - \times (b_1c_2 - b_2c_1) > \\ (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)y = (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) \cdots \times (b_1c_3 - b_3c_1) \\ -) (\quad)(\quad)x + (\quad)(\quad)y = (\quad)(\quad) \cdots \times (b_1c_2 - b_2c_1) \\ \hline \{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)\}x & & = (\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) \cdots \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{式の左辺} &= \left\{ (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\quad)(\quad) \right\} x \\ &= \left\{ a_1b_1c_2c_3 - a_1b_3c_1c_2 - a_2b_1c_1c_3 + a_2b_3c_1^2 - (\quad) \right\} x \\ &= c_1 \left\{ (\quad) \right\} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式の右辺} &= (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - (\quad)(\quad) \\ &= k_1b_1c_2c_3 - k_1b_3c_1c_2 - k_2b_1c_1c_3 + k_2b_3c_1^2 - (\quad) \\ &= c_1 \left\{ (\quad) \right\} \end{aligned}$$

問 上の \square 内に適当な文字式を入れよ。

< 3元連立一次方程式 4 >

前ページの連立方程式

$$(*) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & \cdots \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & \cdots \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & \cdots \end{cases}$$

の解を求めたい。 $c_1 \neq 0$ として z と y を消去した式は

$$c_1 \left\{ \quad \quad \quad \right\} x = c_1 \left\{ \quad \quad \quad \right\} \cdots$$

の形になった。ここで、

$$\begin{aligned} \text{式の右辺} &= c_1 \{-k_1b_3c_2 - k_2b_1c_3 + k_2b_3c_1 + k_3b_1c_2 + k_1b_2c_3 - k_3b_2c_1\} \\ &= c_1 \{k_1(b_2c_3 - b_3c_2) - k_2(b_1c_3 - b_3c_1) + k_3(b_1c_2 - b_2c_1)\} \\ &= c_1 \left\{ k_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - k_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right\} = c_1 \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} \text{式の左辺} &= c_1 \left\{ \boxed{\hspace{15em}} \right\} x \\ &= c_1 \left\{ a_1 \left(\boxed{\hspace{1em}} - \boxed{\hspace{1em}} \right) - a_2 \left(\boxed{\hspace{1em}} - \boxed{\hspace{1em}} \right) + a_3 \left(\boxed{\hspace{1em}} - \boxed{\hspace{1em}} \right) \right\} x \\ &= c_1 \left\{ a_1 \begin{vmatrix} \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix} \right\} x \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ a_2 & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ a_3 & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix} x \end{aligned}$$

となる。よって 式は

$$c_1 \begin{vmatrix} \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix} x = c_1 \begin{vmatrix} \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \\ \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} & \boxed{\hspace{1em}} \end{vmatrix}$$

と表される。従って (*) の係数行列式が 0 でなければ x の値が求まる。

問 上の $\boxed{\hspace{1em}}$ 内に適当な文字式を入れよ。

< 3元連立一次方程式 5 >

例 次の3元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases} \dots\dots\dots (1)$$

をみたす解 x, y, z を求めたい。ただし

$$\text{係数行列式} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

をみたすとする。この条件があれば8ページと同様に求められる。

3次の行列式の性質 [], [], [] (5ページ) より

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ = x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

より

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

が求まる。これもクラメルの公式という。

問1 例の場合に (3) 式のように

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} =$$

を y と z で表すことにより、(1) の解 y, z を (4) 式のように表せ。

$$y = \qquad \qquad \qquad z =$$

問2 クラメルの公式を用いて、次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 3 \\ x - 2y - 4z = -4 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 3z = -1 \\ 5y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$x = \qquad , y = \qquad , z =$$

$$x = \qquad , y = \qquad , z =$$

＜ 3元連立一次方程式 6 ＞

3元連立一次方程式

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \end{cases}$$

に対し、係数行列式を D とする。この D が 0 でなければ、すなわち

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

であれば、(1) の解は

$$\boxed{x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}}$$

となる (クラメル公式)。

例 $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ の場合に連立方程式

$$(2) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

の解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

となる。

問 例と同じ係数行列 ($D \neq 0$) に対し、次の連立方程式の解を例のような形 $\left(\pm \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix}\right)$ で表せ。

$$(1) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \qquad (2) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 1 \end{cases}$$

< ベクトルの平行条件 >

零ベクトルでない2つのベクトル a と b が平行 ($a \parallel b$) であるということは互いに他の定数倍 ($a = kb$ または $b = ka$ となる定数 k が存在する) ということである。これが成立するための条件を平面と空間の場合にそれぞれ示す。

[1. 平面ベクトルの平行条件] $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ は共に零ベクトルでないとする。

このとき

$$\boxed{a \parallel b \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0} \quad (\text{平面ベクトルの平行条件})$$

(証明)

(\Rightarrow) a と b が平行のとき $b = ka$ となる定数 k が存在する。このとき $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

より

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

(\Leftarrow) $a \neq 0$ より a_1 と a_2 のうちどちらかは0ではない。 $a_1 \neq 0$ とし $\frac{b_1}{a_1} = k$ とおく。

条件

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad \text{より} \quad a_1 b_2 = a_2 b_1 \Rightarrow b_2 = \frac{a_2}{a_1} b_1$$

ここで $b_1 = ka_1$ を代入すると $b_2 = \frac{a_2}{a_1} b_1 = \frac{a_2}{a_1} \times ka_1 = ka_2$ よって

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = ka$$

より a と b が平行である。

$a_2 \neq 0$ の場合も同様に示される。

[2. 空間ベクトルの平行条件] $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ は共に零ベクトルでないとする。

このとき

$$\boxed{a \parallel b \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0} \quad (\text{空間ベクトルの平行条件})$$

証明は平面の場合と同様である。

問1 空間ベクトルの平行条件の (\Leftarrow) を証明したい。 $a_1 \neq 0$ として $\frac{b_1}{a_1} = k$ とおくととき条件式から $b_2 = ka_2$, $b_3 = ka_3$ を導け。

問2 空間ベクトルの平行条件を a と b の外積 $a \times b$ を用いて表せ。

$$a \parallel b \iff$$

< スカラー三重積 1 >

3つのベクトル \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} に対して

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \quad \left((\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{b} \text{ の外積}) \text{ と } \mathbf{c} \text{ との内積} \right)$$

を $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ のスカラー三重積という。

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対しスカラー三重積は

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_2 b_3 - b_2 a_3) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。従ってスカラー三重積は3次の行列式を使って

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

と表される。

例 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のスカラー三重積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 + 2 - 2 - 3 = 15$$

問 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} が以下の場合にスカラー三重積 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を求めよ。

(1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$

(2) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} =$

< スカラー三重積 2 >

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し行列式の性質より

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

であるから

$$\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}}$$

が成り立つ。また

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

より

$$\boxed{(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}$$

が成り立つ。

問 1 次のスカラー三重積を $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ を用いて表せ。

(1) $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} =$

(2) $(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} =$

問 2 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し次のスカラー三重積の値を求めよ。

(1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$

(2) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$

(3) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

< 2つの空間ベクトルの張る平面 1 >

[1] < 点 Q を通り n に垂直な平面 >

点 $Q(q_1, q_2, q_3)$ を通りベクトル $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ に垂直

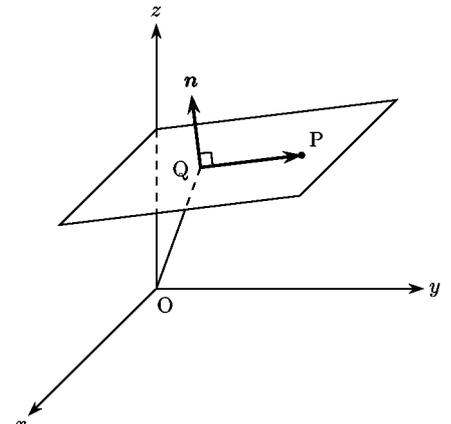
な平面上の点を $P(x, y, z)$ とすると

$$n \perp \overrightarrow{QP} \quad \text{より} \quad n \cdot \overrightarrow{QP} = 0$$

だから

$$n_1(x - q_1) + n_2(y - q_2) + n_3(z - q_3) = 0$$

を満たす。これを平面の方程式という。



[2] < 3 点を通る平面 >

3 点 $Q(q_1, q_2, q_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ は同一直線上にないとする。このときベクトル \overrightarrow{QA} と \overrightarrow{QB} は平行でない。従って 15 ページよりその外積 $\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}$ は 0 (ゼロベクトル) ではない。

これを

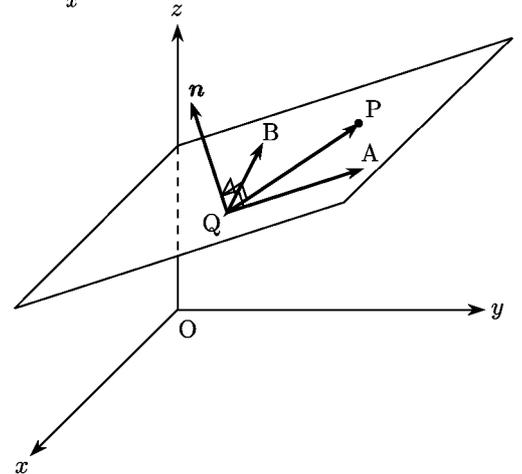
$$n = \overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB} \quad (\text{外積})$$

とおくと、外積の性質より n は 3 点 Q, A, B を通る平面に垂直である。この平面上の任意の点

を $P(x, y, z)$ とすると、 $n \perp \overrightarrow{QP}$ より

$$n \cdot \overrightarrow{QP} = (\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}) \cdot \overrightarrow{QP} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 - q_1 \\ a_2 - q_2 \\ a_3 - q_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 - q_1 \\ b_2 - q_2 \\ b_3 - q_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} x - q_1 \\ y - q_2 \\ z - q_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - q_1 & b_1 - q_1 & x - q_1 \\ a_2 - q_2 & b_2 - q_2 & y - q_2 \\ a_3 - q_3 & b_3 - q_3 & z - q_3 \end{vmatrix} = 0$$

を満たす。これが 3 点 Q, A, B を通る平面の方程式である。



[3] < ベクトル a, b の張る平面 >

平行でない 2 つのベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

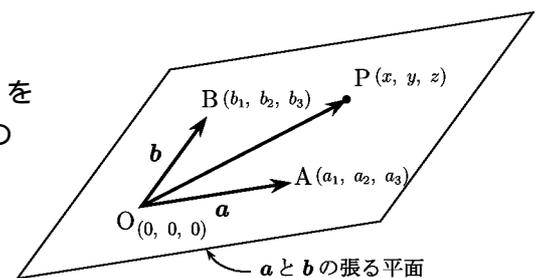
に対し 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ を通る平面を「 a と b の張る平面」という。この平面上の任意の点を $P(x, y, z)$, $n = a \times b$ とおくと

$$n \cdot \overrightarrow{OP} = (a \times b) \cdot \overrightarrow{OP} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & x \\ a_2 & b_2 & y \\ a_3 & b_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つ。

問 平行でない 2 つのベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と定数 x, y に対し、

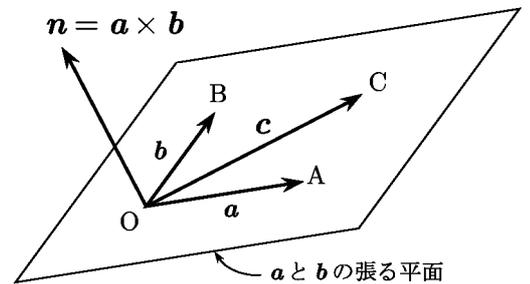
点 $C(xa_1 + yb_1, xa_2 + yb_2, xa_3 + yb_3)$ は a, b の張る平面上の点であることを示せ。



< 2つの空間ベクトルの張る平面 2 >

平行でない2つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に
 対し、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の張る平面上の任意の点を $C(c_1, c_2, c_3)$ と
 する。 $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ とおくと、前ページより

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$



が成り立つ。このとき

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} \quad \text{となる定数 } x, y \text{ が存在する。}$$

[証明] \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積を $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ とおく。すなわち $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ とおく。

\mathbf{a} と \mathbf{b} は平行でないから $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ より $|\mathbf{n}| > 0$ である。ここで $D = |\mathbf{n}|^2$ とおくと

$$D = |\mathbf{n}|^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & n_1 \\ a_2 & b_2 & n_2 \\ a_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix} > 0$$

である。ここで連立方程式

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + n_1z = c_1 \\ a_2x + b_2y + n_2z = c_2 \\ a_3x + b_3y + n_3z = c_3 \end{cases}$$

を考える。

問1 この連立方程式は係数行列式 D が0でないので解 x, y, z が存在する。クラメルの公式(14ページ)より解 x, y, z を求めよ。(行列式を用いた答でもよい)

$$x = \quad , y = \quad , z = \quad$$

問2 連立方程式(*)は

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

と表される。問1の結果を用いて $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ となることを示せ。

< 右手系と左手系 >

3つのベクトル a, b, c が図1のような位置関係にあるとき

$\{a, b, c\}$ は右手系

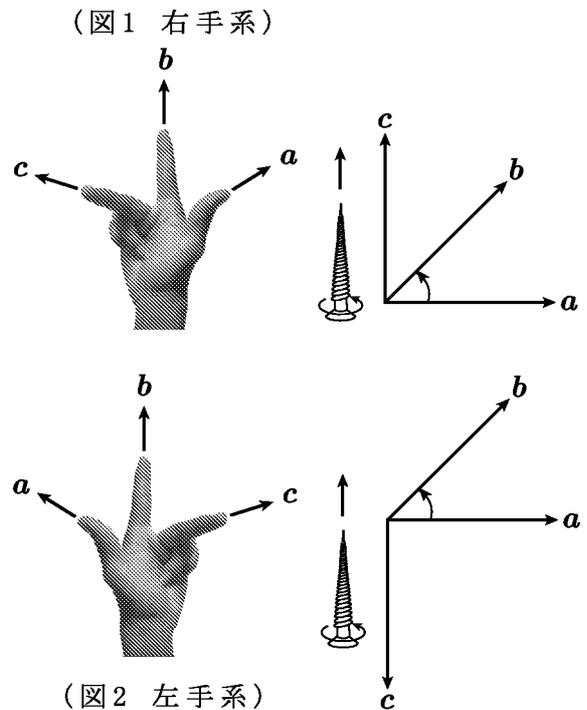
という。

また a, b, c が図2のような位置関係にあるとき

$\{a, b, c\}$ は左手系

という。

(注) $\{a, b, c\}$ が右手系であれば
 $\{b, c, a\}$ も右手系であり、
 $\{c, a, b\}$ も右手系である。



ワークブック Ser. A , No. 10 の 38 ページの例の $\{a, b, c\}$ は右手系である。この例の場合スカラー三重積 $(a \times b) \cdot c$ は3つのベクトル a, b, c の作る平行六面体の体積になる。

この事と前のページのスカラー三重積の性質

$$(a \times b) \cdot c = (b \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot b$$

より以下の事がわかる。

$\{a, b, c\}$ が右手系	\iff	$(a \times b) \cdot c > 0$
$\{a, b, c\}$ が左手系	\iff	$(a \times b) \cdot c < 0$

(注1) $(a \times b) \cdot c = 0$ の場合は3つのベクトル a, b, c が作る平行六面体の体積は0 (ゼロ) となる。このときは3つのベクトルが同一平面上にある。この場合は右手系でも左手系でもない。

(注2) $\{a, b, c\}$ が右手系であれば $\{b, a, c\}$ は左手系である。

問 a, b, c が以下の場合に、スカラー三重積 $(a \times b) \cdot c$ を計算し、 $\{a, b, c\}$ が右手系か左手系かを判定せよ。

(1) $a = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(a \times b) \cdot c =$

(2) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$(a \times b) \cdot c =$

< 空間ベクトルと行列式 >

零ベクトルでない3つのベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し、

$a \times b$ と c とのなす角を θ , スカラー三重積 $(a \times b) \cdot c$ の値を D とすると

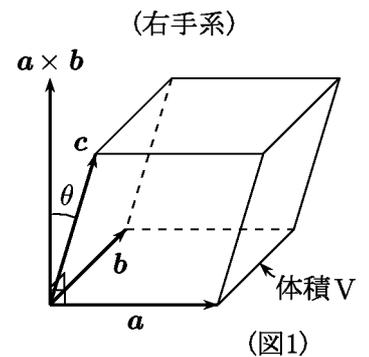
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a \times b) \cdot c = |a \times b| |c| \cos \theta$$

となる。この D の値によって3つのベクトルの位置関係がわかる。

- [1] $D > 0$ のとき $|a \times b| > 0$, $|c| > 0$, $\cos \theta > 0$ より $0^\circ < \theta < 90^\circ$

このとき $\{a, b, c\}$ は右手系 (図1) であり、 a, b, c の作る平行六面体の体積を V とすると

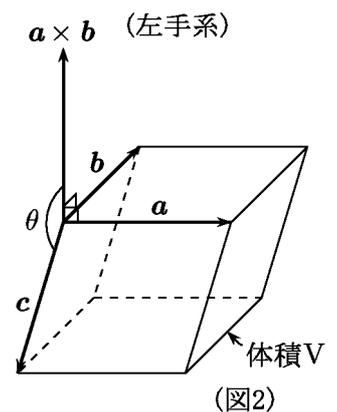
$$V = D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



- [2] $D < 0$ のとき $|a \times b| > 0$, $|c| > 0$, $\cos \theta < 0$ より $90^\circ < \theta < 180^\circ$

このとき $\{a, b, c\}$ は左手系 (図2) であり、 a, b, c の作る平行六面体の体積を V とすると

$$V = -D = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



- [3] $D = 0$ のとき $|c| > 0$ より $|a \times b| = 0$ かまたは $\cos \theta = 0$

- (1) $|a \times b| = 0$ のとき $a \times b = 0$ (ゼロベクトル) である。
15 ページより a と b は平行になる。(図3または図4)
すなわち

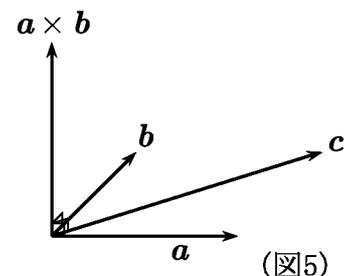
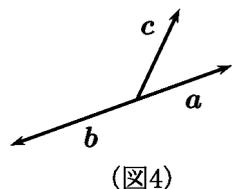
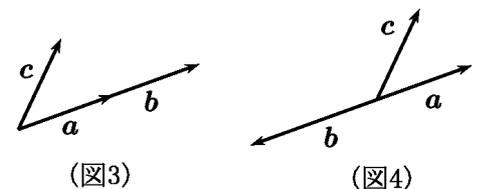
$$b = ka$$

を満たす定数 k が存在する。

- (2) $|a \times b| \neq 0$ のとき $\cos \theta = 0$ より $\theta = 90^\circ$.
 $a \times b \neq 0$ であるから19ページより c は
 a と b の張る平面上のベクトルであり

$$c = xa + yb$$

を満たす定数 x, y が存在する。



問 図5の場合3つのベクトル a, b, c は同一平面上にあると言える。
図3と図4の場合はどうか。

- (1) 図3の場合

- (2) 図4の場合

< 同次方程式 1 >

2 元連立一次方程式で右辺が 0 の場合

$$(*) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

を考える。このように $x + y = 0$ の方程式を同次方程式という。もし係数行列式が

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ならばクラメルの公式より}$$

$$x = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

より解は $x = y = 0$ だけである。しかし $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ の場合は $x = y = 0$ 以外にも解がある。

例 連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 & \cdots \\ 8x + 12y = 0 & \cdots \end{cases}$$

を考える。このとき係数行列式は $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$ になる。式を 4 で割ると

式と同じ式になる。従って式をみたま x と y の組は全て t の解である。

たとえば

$$x = 3, y = -2$$

は解である。一般に任意の実数 t に対し

$$\begin{cases} x = 3t & \cdots \\ y = -2t & \cdots \end{cases}$$

は t の解である。逆に t の全ての解は $(3t, -2t)$ の形をしている。

一般に (*) 式において $x = y = 0$ 以外の解をもつための必要十分条件は係数行列式が 0 になることである。

[定理] $(*)$ 式が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つ $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

(証明は次のページで行う。)

問 次の連立方程式をみたま $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求め、式のように表せ。

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} 4x - 6y = 0 \\ 12x - 18y = 0 \end{cases}$$

< 同次方程式 2 >

[] <2元連立方程式> 前ページの定理を証明する ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を用いると、連立方程式(*)は

$$(*) \begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

と書きなおせる。

[定理の証明]

(\Rightarrow) (*)式が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解を持つとする。例に $x \neq 0$ とする。 $k = -\frac{y}{x}$ とおくと

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = k\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 \\ kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

($y \neq 0$ の場合も同様であるから略す)

(\Leftarrow) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ とする。

(1) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ の場合は15ページより \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行になる。従って0でない。

定数 k が存在して $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ となる。よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ は(*)の解である。

(2) $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ のときは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は(*)の解である。

(3) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ のときは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は(*)の解である。

(4) $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{0}$ のときは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は(*)の解である。 (証明終)

[] <3元連立方程式> 3元連立一次方程式で右辺が0の場合

$$(**) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$$

を考える。もし係数行列式が0でなければクラメルの公式より解は $x = y = z = 0$ だけである。係数行列式が0であれば $x = y = z = 0$ 以外の解をもつ。一般に次の定理が成立する。

[定理]

$$(**) \text{ が } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 以外の解をもつ } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

問 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつ3元連立同次方程式(**)の例を示せ。またその解も答えよ。

(できれば係数は全て0でない方が望ましい)

< 同次方程式 3 >

前ページの定理を証明する．ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を

用いると 3 元連立方程式 (**) は

$$(**) \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

と書きなおせる。

[定理の証明]

(\Rightarrow) (**) が $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 以外の解をもつとする。仮に $x \neq 0$ とする。 $k = -\frac{y}{x}$, $\ell = -\frac{z}{x}$ と

おくと

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{a} = k\mathbf{b} + \ell\mathbf{c} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 + \ell c_1 \\ a_2 = kb_2 + \ell c_2 \\ a_3 = kb_3 + \ell c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kb_1 + \ell c_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 + \ell c_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 + \ell c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \ell \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

($y \neq 0$ や $z \neq 0$ の場合も同様である)

$$(\Leftarrow) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ とする。}$$

(1) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ のいずれかの場合は, 前ページ (2), (3), (4) の場合と同様に 0 でない解がある。

(2) \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} はすべて 0 でない場合, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ と \mathbf{c} とのなす角を θ とすると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| \cos \theta = 0$$

である。21 ページの [3] より,

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$ のとき \mathbf{a} と \mathbf{b} は平行より, ある定数 k が存在して $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ となる。

従って $k\mathbf{a} + (-1)\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = \mathbf{0}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が 0 でない解である。

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ のとき \mathbf{c} は \mathbf{a} と \mathbf{b} の張る平面上のベクトルであるから

$$\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

となる定数 x と y が存在する。従って

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + (-1)\mathbf{c} = \mathbf{0} \text{ より } \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \text{ が 0 でない解である。}$$

問 前ページの問題で答えた例は上記 (1), (2), (2) のどの場合になるか。その理由も述べよ。

< 内積の計算 1 >

0 でない 2 つの平面ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を成分で表すと

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

であった。この式から次の性質がわかる。ただし k は実数である。

- | | | |
|------|--|--------|
| (1) | $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} ^2$ | |
| (2) | $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ | (交換法則) |
| (3) | $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ | (分配法則) |
| (3)' | $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ | (分配法則) |
| (4) | $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ | (実数倍) |

(証明)

$$(1) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 = |\mathbf{a}|^2$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = b_1 a_1 + b_2 a_2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(3) \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ とおくと、}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

問 1 (3)' を証明せよ。

問 2 (4) 式の $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ を証明せよ。

例 1 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + (-\mathbf{c})) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot (-\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

例 2 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$
 であるから、 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ のときは $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ と $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は直交する。

問 3 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ を $|\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{b}|^2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ だけで表せ。

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 =$$

< 内積の計算 2 >

0 でない 2 つの空間ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ を成分で表すと

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

であった。この式から前ページと同様な性質がわかる。

(1)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} ^2$	
(2)	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	
(3)	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$	
(3)'	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$	
(4)	$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$	(k は実数)

例 1 $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + (-\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

例 2 $|k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b}|^2 = (k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b}) \cdot (k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b}) = k_1^2 |\mathbf{a}|^2 + 2k_1 k_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + k_2^2 |\mathbf{b}|^2$

ここで、 \mathbf{a} と \mathbf{b} が直交するときは $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ より $|k_1 \mathbf{a} + k_2 \mathbf{b}|^2 = k_1^2 |\mathbf{a}|^2 + k_2^2 |\mathbf{b}|^2$

問 1 次式を例 2 のように展開し、 $|\mathbf{a}|^2$ と $|\mathbf{b}|^2$ だけで表せ。

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 =$$

問 2 \mathbf{a} と \mathbf{b} が直交すれば $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ であることを示せ。

問 3 2 つの 0 でないベクトル \mathbf{a} , \mathbf{r} に対し、 $k = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$, $\mathbf{b} = \mathbf{r} - k\mathbf{a}$ とおく。 \mathbf{b} と \mathbf{a} が直交することを示せ。

< 平面の直交系 >

0でない2つの平面ベクトル a, b が直交するとき, $\{a, b\}$ は直交系という。

内積の性質より

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ が直交} \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

である。

例1 $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し

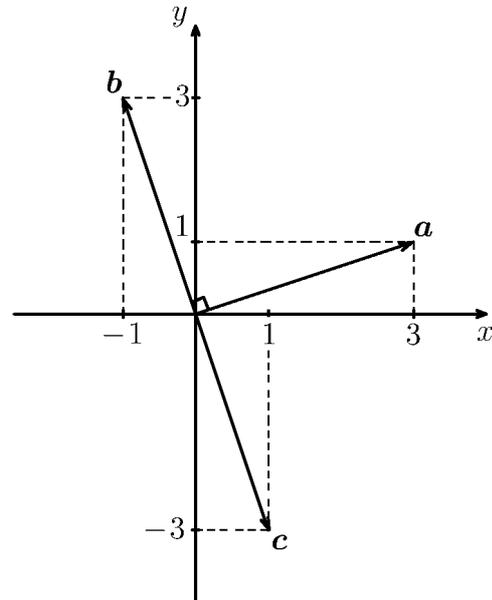
$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$a \cdot b = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$$

$$a \cdot c = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 0$$

より $a \perp b, a \perp c$ である。



問1 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, a と直交する

ベクトルの例を2つあげよ。

ベクトル e_1 と e_2 が直交していて, 大きさが1 ($|e_1| = 1, |e_2| = 1$) であるとき, $\{e_1, e_2\}$ を正規直交系という。

例2 例1のベクトル a, b, c の大きさは $|a| = \sqrt{10}, |b| = \sqrt{10}, |c| = \sqrt{10}$ である。これを $\sqrt{10}$ で割ったベクトルを

$$e_1 = \frac{a}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, e_2 = \frac{b}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, e_2' = \frac{c}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

とおくと, $|e_1| = |e_2| = |e_2'| = 1$ となる。このようにベクトルの大きさを1にすることを正規化するという。このとき $\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_2'\}$ は正規直交系である。

問2 問1のベクトル $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対し, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}a$ とおく。このとき $\{e_1, e_2\},$

$\{e_1, e_2'\}$ が正規直交系となるベクトル e_2, e_2' を求めよ。

< 空間の直交系 1 >

0でない3つの空間ベクトル a, b, c が互いに直交しているとき, すなわち

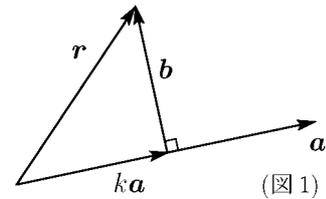
$$a \perp b, b \perp c, c \perp a \quad (\Leftrightarrow a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = 0)$$

であるとき $\{a, b, c\}$ は直交系であるという。

例 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を含む直交系の例を作りたい。

a と平行でない任意のベクトル r に対し

$$b = r - ka, \quad k = \frac{r \cdot a}{|a|^2}$$

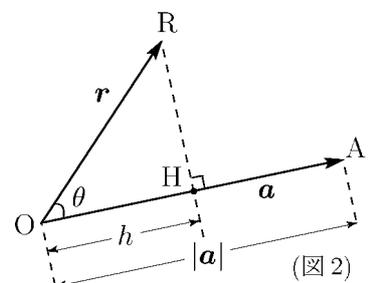


とおくと 26 ページより a と b は直交する。

幾何学的には図 1 のような位置関係にある。
 なぜならば図 2 より

$$h = |r| \cos \theta, \quad r \cdot a = |a| |r| \cos \theta = |a|h$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{h}{|a|} a = \left(\frac{r \cdot a}{|a|^2} \right) a = ka$$

$$b = \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OH} = r - ka$$


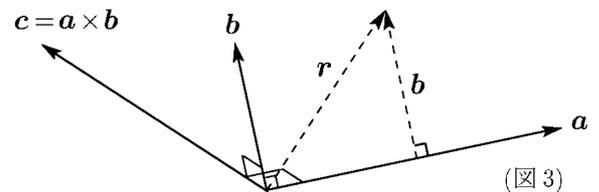
よって $a \perp b$ である。 a と b に直交するベクトル c を求めるには

$$c = a \times b \quad (\text{外積})$$

とおけばよい(図 3)。外積の性質より

$$c \perp a, \quad c \perp b$$

となる。



問 $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して, 例の k とベクトル b, c を求め,

各内積を求めよ。

(解) $k =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____

$a \cdot b =$ _____, $b \cdot c =$ _____, $c \cdot a =$ _____

< 空間の直交系 2 >

0 でない 3 つの空間ベクトル $\{e_1, e_2, e_3\}$ が直交系であり、大きさが全て 1 ($|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1$) であるとき $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交系という。

$$\{e_1, e_2, e_3\} \text{ が正規直交系} \iff \begin{cases} e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_1 = 0 \\ |e_1| = |e_2| = |e_3| = 1 \end{cases}$$

例 正規直交系の例を作りたい。前ページ問で求めた a, b, c を正規化する。

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ に対し } |a| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ より}$$

$$e_1 = \frac{a}{|a|} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$|e_1| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+0+1}{5}} = 1$$

である。

問 上の例の場合に次の問に答えよ。(ただし b と c は前ページの問題で求めたものである。)

(1) $|b|$ と $|c|$ を求めよ。 $|b| =$, $|c| =$

(2) $e_2 = \frac{b}{|b|}$, $e_3 = \frac{c}{|c|}$ とおく。 e_2, e_3 の成分を求めよ。

$$e_2 =$$
 , $e_3 =$

(3) e_2, e_3 の大きさを求めよ。

$$|e_2| =$$
 , $|e_3| =$

(4) 各内積を求めよ。

$$e_1 \cdot e_2 =$$
 , $e_2 \cdot e_3 =$, $e_3 \cdot e_1 =$

(5) 各外積を求めよ。

$$e_1 \times e_2 =$$
 , $e_2 \times e_3 =$, $e_3 \times e_1 =$

(6) $e_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とおくとき行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ の値を求めよ。

< 行列 >

自然数 n と m に対して, $n \times m$ 個の数を縦に n 個, 横に m 個の長方形に並べて書いたものを n 行 m 列の行列 (*matrix*), または (n, m) 型の行列, (n, m) 行列などという。一つの行列を構成する n, m 個の数をその行列の成分という。また同じ横線上に並んでいる n 個の数の組をその行列の行, 同じ縦線上に並んでいる m 個の数の組をその行列の列という。第 i 行と第 j 列の交叉点にある成分をその行列の (i, j) 成分という。

例 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ は 2 行 3 列の行列 ((2,3) 型行列) で,

第 1 行は $(1, 3, 5)$, 第 2 行は $(2, 4, 6)$, 第 1 列は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

第 2 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ である。また $(1, 2)$ 成分は

1 行 2 列の成分だから 3 であり, $(2, 3)$ 成分は 6 である。

問 1 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ の型 (何行, 何列) と第 1 行, 第 3 列を書き,

$(1, 3)$ 成分と $(3, 2)$ 成分を求めよ。

行列を表すのに $A, B, C \dots, X, Y \dots$ 等の大文字の斜体を用いる。行列の型が特別の場合, (n, m) 型行列の代わりに別名で呼ぶ。 $n = m$ の場合は n 次の正方行列という。 $(n, 1)$ 型行列を n 次の列ベクトル, $(1, m)$ 型行列を m 次の行ベクトルという。

例 2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = (1 \ 4 \ 6)$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

の場合, A は 2 次の正方行列, B は 3 次の行ベクトル, C は 2 次の列ベクトル, D は 3 次の正方行列, E は 3 次の列ベクトルである。

問 2 4 次の行ベクトル, 3 次の列ベクトル, 2 次の正方行列の例を上げよ。

< 行列の計算 1 >

一般の (n, m) 型行列を表すのに

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

のように一つの小文字 a に二重の添字をつけて表す。このように行列 A の型がはっきり分かっている、 A の (i, j) 成分が a_{ij} で表されるとき、 $A = (a_{ij})$ と略記する。

二つの行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ は型が同じで、かつ対応する成分が等しい ($a_{ij} = b_{ij}$) とき、そのときに限って A と B は等しいといい、 $A=B$ と書く。また同じ型の行列に対し、ベクトルの場合と同様にして、和、差、実数倍が定められる。

共に (m, n) 型行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し、

$$\begin{aligned} \text{和:} & \quad A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \\ \text{差:} & \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij}) \\ \text{実数倍:} & \quad kA = (ka_{ij}) \quad (k \text{ は実数}) \end{aligned}$$

と定める。

$$\text{例 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 14 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad (3) \quad 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

問 次の計算をせよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$(3) \quad -3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} =$$

< 行列の計算 2 >

行列の和・差，実数倍はベクトルの場合とまったく同じである。その際零ベクトルに相当するものはすべての成分が0（ゼロ）である行列

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

であり，アルファベットのOの大文字の斜体で表し，零行列という。

例題 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき

$$3(X - 2A) + 2(B + X) = O$$

をみたす行列 X を求めよ。

解 上の式から

$$5X - 6A + 2B = O$$

より

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{5}(6A - 2B) \\ &= \frac{1}{5} \left\{ 6 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{5} \left\{ \begin{pmatrix} 18 & 6 \\ 12 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 例題の行列 A, B に対し，次式をみたす行列 X を求めよ。

$$(1) 3X - 2A + B = O$$

$$(2) 3(2X - 3A) = -5(B - X)$$

< 行列の積 1 >

m 次の行ベクトル A と m 次の列ベクトル B が

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

であるとき A と B の積を

$$AB = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$$

と定める。

例 (1) $(3 \ 2) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 = 12 + 10 = 22$

(2) $(3 \ 2 \ 1) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 = 12 + 20 + 6 = 38$

(3) $(3 \ 2 \ 1 \ -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 5 + 1 \times 6 + (-1) \times 7 = 31$

注) (1) は平面のベクトルの内積, (2) は空間ベクトルの内積を表していると考えてもよい。

問 次のベクトルの積を求めよ。

(1) $(6 \ 5) \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$
=

(2) $(3 \ 0 \ 4) \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
=

(3) $(2 \ -5 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} =$

< 行列の積 2 >

$$n \text{ 行 } m \text{ 列の行列 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{と}$$

$$m \text{ 行 } \ell \text{ 列の行列 } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} \quad \text{に対して、積を}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{m\ell} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{i\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{n\ell} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}\cdots a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

と定める。

$$\text{例 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 53 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 & 1 \times 7 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 & 3 \times 7 + 4 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 23 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}$$

問 次の行列の積を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

< 行列の積 3 >

$$\text{例 (1)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 3 \times 6 + (-1) \times 7 \\ 2 \times 5 + 0 \times 6 + 4 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 38 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 3 \times 9 + (-1) \times 10 \\ 2 \times 8 + 0 \times 9 + 4 \times 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 56 \end{pmatrix}$$

(3) (1) と (2) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 38 & 56 \end{pmatrix}$$

(注) 行列 A, B に対して, 左の行列 A の列の数と右の行列 B の行の数と同じでないと積 AB はできない。

行列の積の定義から, 次のことがわかる。

$$(n, m) \text{ 行列} \times (m, \ell) \text{ 行列} = (n, \ell) \text{ 行列}$$

問 次の行列の積を求めよ。

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

< 行列の積 4 >

行列 A 、 B が共に n 次の正方行列の場合は、その積として AB と BA が共に定義されるが、 AB と BA が等しいことはまれである。(このことを「交換法則がなりたない」という。)

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ のとき、}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times (-3) & 1 \times (-1) + 2 \times 6 \\ 3 \times 4 + 5 \times (-3) & 3 \times (-1) + 5 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -3 & 27 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 1 + (-1) \times 3 & 4 \times 2 + (-1) \times 5 \\ (-3) \times 1 + 6 \times 3 & (-3) \times 2 + 6 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$$

であり、 $AB \neq BA$ となる。

問 行列 A 、 B が以下の場合に積 AB と BA を求めよ。

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$$BA =$$

< 行列の積 5 >

行列の乗法に関しては、交換法則は成り立たないが、それ以外は数の計算と同様にできる。 A, B, C を行列、 k を実数とすると

$$\text{実数倍} \quad (kA)B = A(kB) = k(AB)$$

$$\text{結合法則} \quad (AB)C = A(BC)$$

$$\text{分配法則} \quad (A + B)C = AC + BC \quad \dots (1)$$

$$C(A + B) = CA + CB \quad \dots (2)$$

が成り立つ。ただし、交換法則が成り立たないので、

(1) と (2) は等しくない。

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$\begin{aligned} AC + BC &= (A + B)C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 上の A, B, C に対し、以下の計算をせよ。

$$(1) C(A + B) =$$

$$(2) AB - BC =$$

$$(3) CC + BC =$$

< 行列の積 6 >

3つの行列 A, B, C の積 $(AB)C = A(BC)$ を単に ABC と書く。また, $AA = A^2$, $AAA = A^3$, $AAAA = A^4$ と表す。

例 A, B を同じ型の正方行列とするととき, 分配法則より

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

であるが, 交換法則が成り立たないので

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$$

である。例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A(A - B) + B(A - B)$$

$$= (A + B)(A - B)$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

問 1 上の行列 A, B に対し, 次式を計算せよ

(1) $A^2 - B^2$

=

(2) $A^2 - BA + AB - B^2$

=

< 単位行列 >

 n 次の正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

の成分で、 $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}\}$ を対角成分という。 n 次の正方行列 A の対角成分以外の成分が全て 0 であるとき、 A を n 次の対角行列といい、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と略記する。

問 1 $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ に対し、積 AB と BA を計算せよ。

$AB =$

$BA =$

n 次の対角行列の対角成分が全て 1 である行列を n 次の単位行列といい、 I で表す。

例 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 2 次の単位行列

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は 3 次の単位行列

問 2 以下の場合に積 AI と IA を計算せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$

$IA =$

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AI =$

$IA =$

< 零因子 >

n 次の正方行列 A, B と零行列 O に対し、

$$AO = OA = O$$

が成り立つが、

「 $AB = BA = O$ であっても $A \neq O, B \neq O$ の場合がある」

例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$ のとき

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、 $A \neq O$ かつ $B \neq O$ にもかかわらず $AB = O$ となる。
この様な行列 A, B を零因子という。

問 1 次の行列の積を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

問 2 $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、次の積を求めよ。

$$(1) AB =$$

$$(2) AC =$$

$$(3) A(B - C) =$$

問 3 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ のとき、次の行列の積を求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$