高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2002年度版)

Series **A**

No. 11

解答

＜ 1 ページ.2 次行列式の性質 ＞

問の解答

(1) $\begin{vmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-y & -1 \\ 4x+2y & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10x$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 4 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3x-y \\ 4 & 4x+2y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10y$

＜ 2 ページ.3 次行列式の性質 1 ＞

問の解答

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 14$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 63$$

(3) $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -7 - 46 = -53$$

(4) $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -8 - 4 = -12$$

< 3 ページ.3 次行列式の性質 2 >

問の解答

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7$

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\,(6 + 1) = -14$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 2) + 3\,(1 + 3) = 11$

＜ 4 ページ.3 次行列式の性質 3 ＞

問の解答

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(5+4) = -9$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -10-1 = -11$$

＜ 5 ページ.3 次行列式の性質 4 ＞

問の解答

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & (1+1) & 3 \\ 2 & (2+1) & 4 \\ 5 & (5+1) & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & (1+2) \\ 2 & 1 & (2+2) \\ 5 & 1 & (5+2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2\times 2 & 1\times 2 & 3\times 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3)\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3+1) & 1 & 0 \\ (0+1) & 1 & 1 \\ (-3+1) & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 3(3-1-1) = 3$$

＜ 6ページ.3次行列式の性質 5 ＞

問の解答

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 15 \\ 3 & 16 & 24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

$$(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 17 & 27 \\ 15 & 35 & 55 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 30 - 30 = 0$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 23 & 10 & 32 \\ 2 & 1 & 3 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 23 & 10 & 32 \\ 50 & 23 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 23 & 32 \\ 23 & 50 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5$$

$$(4)\ \begin{vmatrix} 8 & 3 & 25 \\ 7 & 3 & 30 \\ 10 & 3 & 28 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 8 & 25 \\ 3 & 7 & 30 \\ 3 & 10 & 28 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 8 & 25 \\ 1 & 7 & 30 \\ 1 & 10 & 28 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\,(-3 - 10) = 39$$

＜ 7 ページ.2 元連立一次方程式 1 ＞

問の解答

(1) $\begin{cases} 5x+2y=k_1 & \cdots ① \\ 4x+3y=k_2 & \cdots ② \end{cases}$

（解）

①× 3− ②× 2

$$\begin{array}{rrl} & 15x+6y &= 3k_1 \\ -) & 8x+6y &= 2k_2 \\ \hline & 7x &= 3k_1-2k_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{3k_1-2k_2}{7}$$

①× 4− ②× 5

$$\begin{array}{rrl} & 20x+8y &= 4k_1 \\ -) & 20x+15y &= 5k_2 \\ \hline & -7y &= 4k_1-5k_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-4k_1+5k_2}{7}$$

(2) $\begin{cases} ax+by=k_1 & \cdots ① \\ cx+dy=k_2 & \cdots ② \end{cases}$

（解）

①× d− ②× b

$$\begin{array}{rrl} & adx+bdy &= k_1d \\ -) & bcx+bdy &= k_2b \\ \hline & (ad-bc)x &= k_1d-k_2b \end{array} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{k_1d-k_2b}{ad-bc}$$

①× c− ②× a

$$\begin{array}{rrl} & acx+bcy &= k_1c \\ -) & acx+ady &= k_2a \\ \hline & (bc-ad)y &= k_1c-k_2a \end{array} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{k_1c-k_2a}{bc-ad}$$

＜８ページ.2元連立一次方程式２＞

問１の解答

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = k_1 \\ a_2x + b_2y = k_2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1x + b_1y) & b_1 \\ (a_2x + b_2y) & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y & b_1 \\ b_2y & b_2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & (a_1x + b_1y) \\ a_2 & (a_2x + b_2y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1x \\ a_2 & a_2x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1y \\ a_2 & b_2y \end{vmatrix} = y\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & b_1 \\ k_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & k_1 \\ a_2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{（クラメルの公式）}$$

問２の解答

(1) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$

（解） $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{7} \quad ; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\dfrac{4}{7}$

(2) $\begin{cases} 3x + 4y = k_1 \\ 2x + 3y = k_2 \end{cases}$

（解） $x = \dfrac{\begin{vmatrix} k_1 & 4 \\ k_2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 3k_1 - 4k_2 \quad ; \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & k_1 \\ 2 & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 3k_2 - 2k_1$

＜ 9 ページ.3 元連立一次方程式 1 ＞

問の解答

(1)
$$\begin{cases} 8x+5y+2z=7 \ \cdots\cdots ① \\ 5x+4y+3z=7 \ \cdots\cdots ② \\ 9x+6y+5z=13 \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

＜ ① × 3 − ② × 2 ＞

$$\begin{array}{rl} 24x+15y+6z=21 & \cdots ①\times 3 \\ -)\ \ 10x+8y+6z=14 & \cdots ②\times 2 \\ \hline 14x+7y\qquad =7 & \Rightarrow 2x+y=1\cdots ④ \end{array}$$

＜ ① × 5 − ③ × 2 ＞

$$\begin{array}{rl} 40x+25y+10z=35 & \cdots ①\times 5 \\ -)\ \ 18x+12y+10z=26 & \cdots ③\times 2 \\ \hline 22x+13y\qquad =9 & \cdots ⑤ \end{array}$$

＜ ④ × 13 − ⑤ ＞

$$\begin{array}{rl} 26x+13y=13 & \\ -)\ \ 22x+13y=9 & \\ \hline 4x\qquad =4 & \Rightarrow x=1 \end{array}$$

④より $y=1-2x=-1$

①より $2z=7-8x-5y$
$=7-8+5=4$
$\Rightarrow z=2$

(答) $x=1\ ,\ y=-1\ ,\ z=2$

(2)
$$\begin{cases} 3x+2y+2z=5 \ \cdots\cdots ① \\ 4x+3y+5z=11 \ \cdots\cdots ② \\ 2x-y+3z=9 \ \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

＜ ① × 5 − ② × 2 ＞

$$\begin{array}{rl} 15x+10y+10z=25 & \cdots ①\times 5 \\ -)\ \ 8x+6y+10z=22 & \cdots ②\times 2 \\ \hline 7x+4y\qquad =3 & \cdots ④ \end{array}$$

＜ ① × 3 − ③ × 2 ＞

$$\begin{array}{rl} 9x+6y+6z=15 & \cdots ①\times 3 \\ -)\ \ 4x-2y+6z=18 & \cdots ③\times 2 \\ \hline 5x+8y\qquad =-3 & \cdots ⑤ \end{array}$$

＜ ④ × 2 − ⑤ ＞

$$\begin{array}{rl} 14x+8y=6 & \\ -)\ \ 5x+8y=-3 & \\ \hline 9x\qquad =9 & \Rightarrow x=1 \end{array}$$

④より $4y=3-7x=3-7=-4$
$\Rightarrow y=-1$

①より $2z=5-3x-2y=5-3+2=4$
$\Rightarrow z=2$

(答) $x=1\ ,\ y=-1\ ,\ z=2$

＜ 10 ページ.3 元連立方程式 2 ＞

問の解答

$$\begin{cases} 3x+2y+2z=k_1 & \cdots\cdots ① \\ 4x+3y+5z=k_2 & \cdots\cdots ② \\ 2x-y+3z=k_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

＜ ①×5 − ②×2 ＞

$$\begin{array}{rl} & 15x+10y+10z = 5k_1 \\ -) & 8x+6y+10z = 2k_2 \\ \hline & 7x+4y = 5k_1-2k_2 \quad \cdots ④ \end{array}$$

＜ ①×3 − ③×2 ＞

$$\begin{array}{rl} & 9x+6y+6z = 3k_1 \\ -) & 4x-2y+6z = 2k_3 \\ \hline & 5x+8y = 3k_1-2k_3 \quad \cdots ⑤ \end{array}$$

＜ ④×2 − ⑤ ＞

$$\begin{array}{rl} & 14x+8y = 10k_1-4k_2 \\ -) & 5x+8y = 3k_1-2k_3 \\ \hline & 9x = 7k_1-4k_2+2k_3 \end{array}$$

$$x=\frac{7k_1-4k_2+2k_3}{9}$$

＜ ⑤×7 − ④×5 ＞

$$\begin{array}{rl} & 35x+56y = 21k_1-14k_3 \\ -) & 35x+20y = 25k_1-10k_2 \\ \hline & 36y = -4k_1+10k_2-14k_3 \end{array}$$

$$y=\frac{-4k_1+10k_2-14k_3}{36}$$

$$=\frac{-2k_1+5k_2-7k_3}{18}$$

①より $\quad z=\dfrac{1}{2}\{k_1-3x-2y\}=\dfrac{1}{2}\left\{k_1-\dfrac{21k_1-12k_2+6k_3}{9}-\dfrac{2k_1+5k_2-7k_3}{9}\right\}$

$$=\frac{-10k_1+7k_2+k_3}{18}$$

(答) $\quad x=\dfrac{7k_1-4k_2+2k_3}{9} \quad , \quad y=\dfrac{-2k_1+5k_2-7k_3}{18} \quad , \quad z=\dfrac{-10k_1+7k_2+k_3}{18}$

＜ 11 ページ.3 元連立一次方程式 3 ＞

一般の 3 元連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = k_1 & \cdots\cdots ① \\ a_2x + b_2y + c_2z = k_2 & \cdots\cdots ② \\ a_3x + b_3y + c_3z = k_3 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めたい。c_1 , c_2 , c_3 のうちどれかを 0 でないとする。ここでは $c_1 \neq 0$ として、まず z を消去する。

＜ ① × c_2 − ② × c_1 ＞

$$\begin{array}{rl} & a_1c_2x + b_1c_2y + c_1c_2z = k_1c_2 \quad \cdots ① \times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y + c_1c_2z = k_2c_1 \quad \cdots ② \times c_1 \\ \hline & (a_1c_2 - a_2c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)y = k_1c_2 - k_2c_1 \cdots ④ \end{array}$$

＜ ① × c_3 − ③ × c_1 ＞

$$\begin{array}{rl} & a_1c_3x + b_1c_3y + c_1c_3z = k_1c_3 \quad \cdots ① \times c_3 \\ -) & a_3c_1x + b_3c_1y + c_1c_3z = k_3c_1 \quad \cdots ③ \times c_1 \\ \hline & \left(\boxed{a_1c_3 - a_3c_1}\right)x + \left(\boxed{b_1c_3 - b_3c_1}\right)y = \boxed{k_1c_3 - k_3c_1} \cdots ⑤ \end{array}$$

次に y を消去する。

＜ ④ × $(b_1c_3 - b_3c_1)$ − ⑤ × $(b_1c_2 - b_2c_1)$ ＞

$$\begin{array}{rl} & (a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)x + (b_1c_2 - b_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1)y = (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) \quad \cdots ④ \\ -) & \left(\boxed{a_1c_3 - a_3c_1}\right)\left(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}\right)x + \left(\boxed{b_1c_3 - b_3c_1}\right)\left(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}\right)y = \left(\boxed{k_1c_3 - k_3c_1}\right)\left(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}\right) \quad \cdots ⑤ \\ \hline & \{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)\}\, x = (\quad)(\quad) - (\quad)(\quad) \quad \cdots ⑥ \end{array}$$

⑥式の左辺 $= \left\{(a_1c_2 - a_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - \left(\boxed{a_1c_3 - a_3c_1}\right)\left(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}\right)\right\} x$

$= \left\{a_1b_1c_2c_3 - a_1b_3c_1c_2 - a_2b_1c_1c_3 + a_2b_3{c_1}^2 - \left(\boxed{a_1b_1c_2c_3 - a_3b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_3 + a_3b_2c_1^2}\right)\right\} x$

$= c_1 \left\{\boxed{-a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_3b_2c_1}\right\} x$

⑥式の右辺 $= (k_1c_2 - k_2c_1)(b_1c_3 - b_3c_1) - \left(\boxed{k_1c_3 - k_3c_1}\right)\left(\boxed{b_1c_2 - b_2c_1}\right)$

$= k_1b_1c_2c_3 - k_1b_3c_1c_2 - k_2b_1c_1c_3 + k_2b_3{c_1}^2 - \left(\boxed{k_1b_1c_2c_3 - k_3b_1c_1c_2 - k_1b_2c_1c_3 + k_3b_2c_1^2}\right)$

$= c_1 \left\{\boxed{-k_1b_3c_2 - k_2b_1c_3 + k_2b_3c_1 + k_3b_1c_2 + k_1b_2c_3 - k_3b_2c_1}\right\}$

問 上の $\boxed{}$ 内に適当な文字式を入れよ。

＜ 12 ページ.3 元連立一次方程式 4 ＞

前ページの連立方程式

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 & \cdots ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 & \cdots ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

の解を求めたい。$c_1 \neq 0$ として z と y を消去した式は

$$c_1\left\{\qquad\qquad\right\}x=c_1\left\{\qquad\qquad\right\}\quad\cdots ⑥$$

の形になった。ここで、

$$\begin{aligned} ⑥式の右辺 &= c_1\{-k_1b_3c_2-k_2b_1c_3+k_2b_3c_1+k_3b_1c_2+k_1b_2c_3-k_3b_2c_1\} \\ &= c_1\{k_1(b_2c_3-b_3c_2)-k_2(b_1c_3-b_3c_1)+k_3(b_1c_2-b_2c_1)\} \\ &= c_1\left\{k_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-k_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+k_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}=c_1\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned} ⑥式の左辺 &= c_1\left\{\boxed{-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1}\right\}x \\ &= c_1\left\{a_1\left(\boxed{b_2c_3}-\boxed{b_3c_2}\right)-a_2\left(\boxed{b_1c_3}-\boxed{b_3c_1}\right)+a_3(\boxed{b_1c_2}-\boxed{b_2c_1})\right\}x \\ &= c_1\left\{a_1\begin{vmatrix} \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \end{vmatrix}\right\}x \\ &= c_1\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ a_3 & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}x \end{aligned}$$

となる。よって⑥式は

$$c_1\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}x=c_1\begin{vmatrix} \boxed{k_1} & \boxed{b_1} & \boxed{c_1} \\ \boxed{k_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ \boxed{k_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}$$

と表される。従って $(*)$ の係数行列式が 0 でなければ x の値が求まる。

問 上の $\boxed{\qquad}$ 内に適当な文字式を入れよ。

＜ 13 ページ.3 元連立一次方程式 5 ＞

問 1 の解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 \\ a_2 & k_2 & c_2 \\ a_3 & k_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad z = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \\ a_3 & b_3 & k_3 \end{vmatrix}$$

問 2 の解答

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - z = 3 \\ x - 2y - 4z = -4 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -5$ より $\qquad x = \dfrac{1}{-5} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\dfrac{26}{5}$

$$y = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \frac{61}{5} \qquad z = \frac{1}{-5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -\frac{32}{5}$$

（答） $\underline{x = -\dfrac{26}{5}\ ,\ y = \dfrac{61}{5}\ ,\ z = -\dfrac{32}{5}}$

(2) $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 3z = -1 \\ 5y + 4z = 3 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 23$ より $\qquad x = \dfrac{1}{23} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{25}{23}$

$$y = \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \frac{21}{23} \qquad z = \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{9}{23}$$

（答） $\underline{x = -\dfrac{25}{23}\ ,\ y = \dfrac{21}{23}\ ,\ z = -\dfrac{9}{23}}$

＜ 14 ページ.3 元連立一次方程式 6 ＞

問の解答

$$(1)\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=1 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(2)\ \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=1 \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$y=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix}=-\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$z=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

＜ 15 ページ. ベクトルの平行条件 ＞

問 1 の解答

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ ならば $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ ($\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は平行) であることを示す。

$a_1 \neq 0$ のとき $\dfrac{b_1}{a_1} = k$ とおくと $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ より $b_2 = \dfrac{b_1}{a_1} a_2 = k a_2$

$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0$ より $b_3 = \dfrac{b_1}{a_1} a_3 = k a_3$

よって $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = k\boldsymbol{a}$ より $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$

問 2 の解答

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$$ （外積＝ゼロベクトル）

（または $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 0$）

＜ 16 ページ. スカラー三重積 1 ＞

問の解答

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}3&1&4\\2&0&2\\1&-1&6\end{vmatrix} = -12$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}1&2&7\\2&3&6\\3&4&5\end{vmatrix} = 0$

< 17 ページ. スカラー三重積 2 >

問 1 の解答

次のスカラー三重積を $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を用いて表せ。

(1) $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

(2) $(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

問 2 の解答

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対し次のスカラー三重積の値を求めよ。

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (a_1+b_1) \\ a_2 & b_2 & (a_2+b_2) \\ a_3 & b_3 & (a_3+b_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

＜ 18 ページ.2 つの空間ベクトルの張る面積 1 ＞

問の解答

点 C が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上の点であることを示すには

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$$

であることを示せば良い。

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \\ xc_3 + yb_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & (xa_1 + yb_1) \\ a_2 & b_2 & (xa_2 + yb_2) \\ a_3 & b_3 & (xa_3 + yb_3) \end{vmatrix}$$

$$= x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

より点 C は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上の点である。

＜ 19 ページ.2 つの空間ベクトルの張る平面 2 ＞

問 1 の解答

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & n_1 \\ c_2 & b_2 & n_2 \\ c_3 & b_3 & n_3 \end{vmatrix} \quad , y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & n_1 \\ a_2 & c_2 & n_2 \\ a_3 & c_3 & n_3 \end{vmatrix} \quad , z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

問 2 の解答

$z = 0$ より $x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ よって $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

＜ 20 ページ. 右手系と左手系 ＞

問の解答

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 < 0$ より $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は左手系

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 52 > 0$ より $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ は右手系

＜ 21 ページ. 空間ベクトルと行列式 ＞

問の解答

(1) 図 3 の場合

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は同一平面上にある。

(2) 図 4 の場合

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は同一平面上にある。

＜ 22 ページ. 同次方程式 1 ＞

問の解答

(1) $\begin{cases} x+2y=0 \\ 4x+8y=0 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$ (t は任意の実数)

(2) $\begin{cases} 4x-6y=0 \\ 12x-18y=0 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x=3t \\ y=2t \end{cases}$ (t は任意の実数)

＜ 23 ページ. 同次方程式 2 ＞

問の解答

(解 1) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x=2t \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$ （t は任意の実数）

(解 2) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+4y+6z=0 \\ 3x+6y+9z=0 \end{cases}$ の解は $\begin{cases} x=-2t-3s \\ y=t \\ z=s \end{cases}$ （t と s は任意の実数）

＜ 24 ページ. 同次方程式 3 ＞

問の解答

(前ページ解 1 の場合)

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\ \text{より}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&2&0\end{vmatrix}=0$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{0}\ \text{より}$$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq 0$ よって (2) の②の場合である。

(このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行でない。$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ となる)

(前ページ解 2 の場合)

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}\ \text{より}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}=0$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ より $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$

よって (2) の①の場合である。このとき $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は全て平行になる。

< 25 ページ. 内積の計算 1 >

問 1 の解答

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=(a_1+b_1)\,c_1+(a_2+b_2)\,c_2+(a_3+b_3)\,c_3$$

$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)+(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$ (証明終)

問 2 の解答

$$(k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=(ka_1)\,b_1+(ka_2)\,b_2+(ka_3)\,b_3$$

$$=k\,(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$ (証明終)

問 3 の解答

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

$$=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+2\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{b}|^2$$

＜ 26 ページ. 内積の計算 2 ＞

問 1 の解答

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}|^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{b}|^2=2|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{b}|^2$$

問 2 の解答

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ より

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2$$

問 3 の解答

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{r}-k\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}-k\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})$$

$$=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\times|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0$$

よって $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交する。

＜ 27 ページ. 平面の直交系 ＞

問 1 の解答

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ など

問 2 の解答

問 1 の $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ に対し $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{5}$， $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{5}$ より

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{e}_2{}' = \frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

＜ 28 ページ. 空間の直交系 1 ＞

問の解答

$$k = \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^{\boldsymbol{2}}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r} - 2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

＜ 29 ページ. 空間の直交系 2 ＞

問の解答

(1)$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$ $\qquad |\boldsymbol{c}| = \sqrt{9+25+36} = \sqrt{70}$

(2)$\boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\sqrt{14}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$ $\qquad \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{70}} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix}$

(3)$|\boldsymbol{e_2}| = \sqrt{\dfrac{1^2+3^2+(-2)^2}{14}} = 1$ $\qquad |\boldsymbol{e_3}| = \sqrt{\dfrac{(-3)^2+5^2+6^2}{70}} = 1$

(4)$\boldsymbol{e_1} \cdot \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} = 0$ $\qquad \boldsymbol{e_2} \cdot \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} = 0$

$$\boldsymbol{e_3} \cdot \boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{5}{\sqrt{70}} \\ \frac{6}{\sqrt{70}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 0$$

＜ 29 ページ. 空間の直交系 2 ＞

解答の続き

$$(5)\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&\frac{3}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt{14}}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{14}}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{14}}\\0&\frac{3}{\sqrt{14}}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\\\frac{6}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{e_3}$$

$$\boldsymbol{e_2}\times\boldsymbol{e_3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\\\frac{6}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{70}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{6}{\sqrt{70}}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{6}{\sqrt{70}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{3}{\sqrt{70}}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{3}{\sqrt{70}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{70}}\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{28}{14\sqrt5}\\0\\\frac{14}{14\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\boldsymbol{e_1}$$

$$\boldsymbol{e_3}\times\boldsymbol{e_1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}\\\frac{5}{\sqrt{70}}\\\frac{6}{\sqrt{70}}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\0\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}\frac{5}{\sqrt{70}}&0\\\frac{6}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt5}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}\frac{6}{\sqrt{70}}&\frac{1}{\sqrt5}\\-\frac{3}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt5}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}-\frac{3}{\sqrt{70}}&\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{5}{\sqrt{70}}&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{5\sqrt{14}}\\\frac{15}{5\sqrt{14}}\\-\frac{10}{5\sqrt{14}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\\-\frac{2}{\sqrt{14}}\end{pmatrix}=\boldsymbol{e_2}$$

$$(6)\begin{vmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{14}}&-\frac{3}{\sqrt{70}}\\0&\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{5}{\sqrt{70}}\\\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{6}{\sqrt{70}}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt5}\times\frac{1}{\sqrt{14}}\times\frac{1}{\sqrt{70}}\times\begin{vmatrix}2&1&-3\\0&3&5\\1&-2&6\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{70}\left\{2\begin{vmatrix}3&5\\-2&6\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&-3\\3&5\end{vmatrix}\right\}=\frac{1}{70}\{2\times28+14\}=\frac{70}{70}=1$$

(**6 の別解**)

$$\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}=(\boldsymbol{e_1}\times\boldsymbol{e_2})\cdot\boldsymbol{e_3}=\boldsymbol{e_3}\cdot\boldsymbol{e_3}=|\boldsymbol{e_3}|^2=1$$

＜ 30 ページ. 行列 ＞

問 1 の解答

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ は $\underline{3\,\textbf{行}\,4\,\textbf{列の行列}}$, または $\underline{(3,4)\,\textbf{型の行列}}$。

第 1 行は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, 第 3 列は $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

$(1,3)$ 成分は 3, $(3,2)$ 成分は 10

問 2 の解答

4 次の行ベクトルの例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3 次の列ベクトルの例 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 次の正方行列の例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ など

< 31 ページ. 行列の計算 1 >

問の解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $-3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -15 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

< 32 ページ. 行列の計算 2 >

問の解答

(1) $3X - 2A + B = O \qquad X = \dfrac{1}{3}(2A - B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $3(2X - 3A) = -5(B - X) \qquad X = 9A - 5B = \begin{pmatrix} 2 & -21 \\ -17 & -4 \end{pmatrix}$

< 33 ページ. 行列の積 1 >

問の解答

(1) $(6 \quad 5)\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = -1$

(2) $(3 \;\; 0 \;\; 4)\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 65$

(3) $(2 \quad -5 \quad 3 \quad 4)\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$

＜ 34 ページ. 行列の積 2 ＞

問の解答

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 23 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

＜ 35 ページ. 行列の積 3 ＞

問の解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 10 \\ 12 & 2 & 5 \\ -8 & 2 & 35 \end{pmatrix}$

< 36 ページ. 行列の積 4 >

問の解答

(1) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 28 & 35 & 18 \\ 16 & -7 & 22 \\ -4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 25 & 16 \\ 10 & 1 & 0 \\ 38 & 8 & 20 \end{pmatrix}$

＜ 37ページ. 行列の積 5 ＞

問の解答

$$(1)C(A+B)=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 16 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(2)AB-BC=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(3)CC+BC=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 17 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

＜(3) の別解＞

$$(C+B)C=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 17 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

＜ 38 ページ. 行列の積 6 ＞

問の解答

(1)$A^2 - B^2 = AA - BB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

(2)$A^2 - BA + AB - B^2$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

＜ (2) の別解 ＞

$A^2 - BA + AB - B^2 = (A - B)A + (A - B)B = (A - B)(A + B)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

< 39 ページ. 単位行列 >

問 1 の解答

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{pmatrix}$$

問 2 の解答

$$(1) AI = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad IA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(2) AI = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad IA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$<$ 40ページ. 零因子 $>$

問 1 の解答

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問 2 の解答

(1) $AB = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

(2) $AC = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

(3) $A(B-C) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$<$ (3) の別解 $>$

$$A(B-C) = AB - AC = \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 39 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 3

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$