

大学数学への道

TEXclub

基礎数学
シリーズ 1

『方程式』が
よくわからないときに開く本

改訂版

例題で式の計算がよくわかる！

内容

- ★ 文字式の計算
- ★ 整式の計算
- ★ 因数分解
- ★ 1次方程式
- ★ 2次方程式



井上昌昭 山崎和雄 著

Copyright(C) Masaaki Inoue
Kazuo Yamasaki



高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

< 割合 >

例1 「5 m は 10 m のいくらに当たるか?」という問題に対する答えは「5 m は 10 m の $\frac{1}{2}$ に当たる。」となる。 $\frac{1}{2}$ は $\frac{5}{10}$ を約分したものである。

この例のように、割合とは

$$\boxed{\text{比べる量} \div \text{もとになる量} = \text{割合}}$$

である。割合は分数または小数で表される。日常では割合を百分率や歩合で表したりする。

割合(分数)	割合(小数)	歩合	百分率(%)
1	1	10割(わり)	100%
$\frac{1}{10}$	0.1	1割(わり)	10%
$\frac{1}{100}$	0.01	1分(ぶ)	1%
$\frac{1}{1000}$	0.001	1厘(りん)	0.1%

例2 プロ野球選手の打率が3割2分1厘とは $\frac{321}{1000}$ のこと、つまり1000回に321回ヒットがでることを意味する。百分率で表すと $\frac{321}{1000} = \frac{32.1}{100} = 32.1\%$ である。

問1 次の割合を歩合と百分率の両方で表せ。

(1) $\frac{73}{100}$

(2) 0.425

例3 割合と同様に2つの量の大きさを比べるのに比がある。2つの量の割合が $\frac{3}{4}$ のとき比では3:4と書き3対4と読む。

すなわち $3:4 = \frac{3}{4}$

例4 体重40kgの人と体重60kgの人の体重の比は

$$40:60 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} (= 2:3)$$

である。

問2 次の比を(できるだけ簡単な)分数になおせ。

(1) 5:6

(2) 12:18

(3) 18:45

(4) 1.5:2.5

(5) 0.72:1.44

< 比と比例配分 >

例1 (比)

右図において三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。この場合、対応する辺の比はすべて等しい。つまり

$$AE : AC = AD : AB = DE : BC$$

となる。今は $AE : AC = 2 : 5$ なので「三角形 ADE と三角形 ABC の相似比は $2 : 5$ である」という。AD の長さを求めたい。AD の長さを \square cm とすると

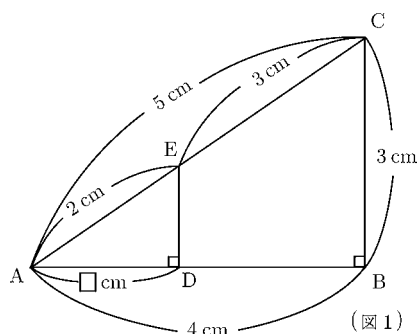
$$AE : AC = AD : AB$$

より

$$2 : 5 = \square : 4 \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{\square}{4}$$

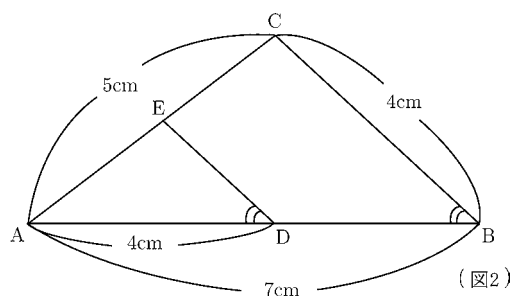
であるから両辺を4倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = \square \Rightarrow \underline{\underline{(\text{答}) \square = \frac{8}{5} = 1.6 \text{ (cm)}}}$$



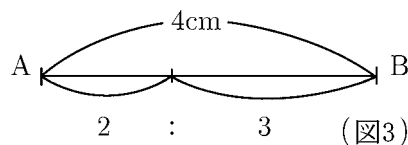
問1 図1でDEの長さを求めよ。

問2 図2で三角形 ADE と三角形 ABC は相似である。DE の長さ と AE の長さを求めよ。(答は仮分数でよい)



例2 (比例配分)

「長さ4cmの棒を2:3に分ける。短い方の棒の長さを求めよ。」という問題を考える。図3をよく見ると、図1の□を求める問題と同じであり、4cmを2:5の比にするので



$$\underline{\underline{(\text{答}) 4 \times \frac{2}{5} = 1.6 \text{ (cm)}}}$$

(注) 例2のような比例配分の問題は比の問題と似てはいるが、解き方は全くちがう。

$$\text{「}2:3\text{に分ける」} = \begin{cases} \text{小さい方} \Rightarrow \text{全体の} \frac{2}{2+3} \\ \text{大きい方} \Rightarrow \text{全体の} \frac{3}{2+3} \end{cases}$$

問3 6万円を3:5に分ける。高い方の金額を求めよ。

< 累乗 >

同じ数をいくつか掛けるとき

$$7 \times 7 \text{ は } 7^2 \text{ と表し, } 7 \text{ の } 2 \text{ 乗}$$

$$5 \times 5 \times 5 \text{ は } 5^3 \text{ と表し, } 5 \text{ の } 3 \text{ 乗}$$

という。このように同じ数をいくつか掛けたものを、その数の**累乗**という。 5^3 の3のように右かたの小さい数を**指数**という。累乗の指数はかけた数の個数を示している。2乗を**自乗**または**平方**、3乗を**立方**ということもある。

例1 (1) $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^4$

(2) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

(3) $(-5) \times (-5) \times 4 \times 4 \times 4 = (-5)^2 \times 4^3$

問1 次の積を累乗の指数を使って表せ。

(1) $10 \times 10 \times 10$

(2) $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$

(3) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

例2 (1) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

(2) $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$

(3) $2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$

(4) $(2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$

(5) $(-2)^4 \times 3^2 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times 3 \times 3 = 16 \times 9 = 144$

(6) $(2^3)^2 = 8^2 = 64$

問2 次の計算をせよ。

(1) $(-1)^2$

(2) $(-1)^3$

(3) $(-1)^4$

(4) $(-1)^5$

(5) -2^4

(6) $(-2)^4$

(7) -5^2

(8) $(-3) \times 4^2$

(9) $(-3^4) \times (-10)^3$

(10) $(-2)^3 \times (-5^2)$

(11) $(3^2)^3$

(12) $(2^2)^3 \div (-4)^2$

< 素因数分解 >

6は3で割り切れる。このとき3は6の約数または因数という。

6は2でも割り切れ、もちろん1でも割り切れ、6自身でも割り切れる。

従って

$$6 \text{ の約数は } 1, 2, 3, 6$$

の合計4個である。

問1 次の約数を全て書け。

(1) 18の約数

(2) 24の約数

7の約数は1と7だけである。1より大きい数でその数自身と1以外に約数をもたない数を素数という。2から20までの素数は

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$$

である。

問2 20から50までの素数を全て書け。

素数でない数は素数の積で表される。たとえば12は

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

となる。このような素数の積の形にすることを素因数分解という。

例1 66を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2×3で割ると11になるから

$$\begin{array}{r} 2) \underline{66} \\ 3) \underline{33} \\ 11 \end{array}$$

$$66 = 2 \times 3 \times 11$$

例2 720を素因数分解したい。右のように素数で割っていく。2で4回割り切れ、3で2回割り切れ、5で1回割り切れるから

$$\begin{array}{r} 2) \underline{720} \\ 2) \underline{360} \\ 2) \underline{180} \\ 2) \underline{90} \\ 3) \underline{45} \\ 3) \underline{15} \\ 5 \end{array}$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

問3 次の数を素因数分解せよ。

(1) 68

(2) 108

(3) 140

(4) 144

(5) 156

(6) 196

(7) 225

(8) 324

(9) 512

(10) 1024

(11) 1296

(12) 1536

< 分数と小数 1 >

よく間違えやすい問題の検算方法を示す。

例1 (小数の積) 小数の積は位どり(小数点の位置)が難しい。

$$0.3 \times 0.12 = 0.036$$

この検算は分数になおして確かめる。

$$\text{(検算)} \quad \frac{3}{10} \times \frac{12}{100} = \frac{36}{1000} = 0.036$$

問1 次の積を分数になおして計算し、答を小数で出せ。

$$(1) 0.2 \times 1.3 =$$

$$(2) 0.4 \times 0.15 =$$

$$(3) 0.03 \times 1.04 =$$

例2 (分数の商) 商の検算は出した答に割る数をかけて確かめる。

$$\text{商} \quad \bigcirc \div \triangle = \square \Rightarrow \text{検算} \quad \square \times \triangle = \bigcirc$$

$$(1) \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \Rightarrow \text{検算} \quad \frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{9 \times 5}{10 \times 6} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{6} \times 4 \times 6}{\frac{3}{4} \times 4 \times 6} = \frac{5 \times 4}{3 \times 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \text{検算} \quad \frac{10}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{10 \times 3}{9 \times 4} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

問2 次の商を計算し、さらに検算せよ。

$$(1) \frac{6}{5} \div \frac{3}{4} \qquad \text{検算}$$

$$(2) \frac{5}{12} \div \frac{8}{3} \qquad \text{検算}$$

$$(3) \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} \qquad \text{検算}$$

$$(4) \frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}} \qquad \text{検算}$$

< 分数と小数 2 >

例 分数の通分は小数になおして検算する。

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} + \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

この計算を $\frac{3}{8}$ と間違える場合があるが、小数になおすと

$$\frac{1}{3} \doteq 0.33 \quad , \quad \frac{2}{5} = 0.4 \quad , \quad \frac{11}{15} \doteq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8} = 0.375$$

↓

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \doteq 0.73 \quad , \quad \frac{3}{8} = 0.375$$

より $\frac{3}{8}$ が間違いであることがわかる。

問1 次の分数を小数(第2位まで)で表せ。

$$(1) \frac{1}{2} = \quad , \quad \frac{1}{3} = \quad \quad (2) \frac{3}{4} = \quad , \quad \frac{5}{6} =$$

$$\frac{5}{6} = \quad , \quad \frac{2}{5} = \quad \quad \frac{8}{10} = \quad , \quad \frac{19}{12} =$$

$$(3) \frac{1}{6} = \quad , \quad \frac{1}{2} = \quad \quad (4) \frac{11}{12} = \quad , \quad \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2}{8} = \quad , \quad \frac{2}{3} = \quad \quad \frac{12}{16} = \quad , \quad \frac{7}{6} =$$

問2 次の分数を通分せよ。(答が仮分数になっても帯分数になおさなくてよい。)

$$(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad (2) \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \quad (3) \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \quad (4) \frac{11}{12} - \frac{5}{8}$$

$$(5) \frac{5}{4} + \frac{7}{6} \quad (6) \frac{7}{8} + \frac{11}{6} \quad (7) \frac{7}{5} - \frac{3}{10} \quad (8) \frac{13}{8} - \frac{7}{6}$$

$$(9) \frac{1.2}{2} + \frac{3.2}{3} \quad (10) \frac{5}{4} + \frac{4.5}{6} \quad (11) \frac{9.3}{8} - \frac{3.4}{4} \quad (12) \frac{7.6}{8} - \frac{3.7}{6}$$

< 分数と小数 3 >

例 0.84 , $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ の大小関係を調べる。

分数を小数になおすと

$$\frac{6}{7} \doteq 0.857 \quad , \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \doteq 0.833$$

で $0.833 < 0.84 < 0.857$ より

$$\text{(答)} \quad \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}}}$$

(注) 上の答を逆向きに並べて

$$\underline{\underline{\frac{6}{7} > 0.84 > \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}}$$

と答えても間違いではないが、通常は大きい数を右側に書く。

(別解) 共通因子 $100 \times 7 \times 2 \times 3$ で通分すると

$$0.84 = \frac{84}{100} = \frac{84 \times 42}{100 \times 42} = \frac{3528}{4200} \quad , \quad \frac{6}{7} = \frac{6 \times 600}{7 \times 600} = \frac{3600}{4200}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = \frac{5 \times 700}{6 \times 700} = \frac{3500}{4200}$$

$$\frac{3500}{4200} < \frac{3528}{4200} < \frac{3600}{4200} \quad \text{より} \quad \text{(答)} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 0.84 < \frac{6}{7}$$

問 次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, 0.2

(2) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{17}{9}$, 1.9

(3) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, $-\frac{9}{8}$, -1.13

(4) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$, $\frac{1}{3}$, 0.34

(5) $-\frac{1}{6} - \frac{3}{4}$, $-\frac{8}{9}$, $-\frac{7}{8}$

(6) $\frac{25}{8} - \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} + \frac{3}{2}$, $\frac{12}{5}$

< 通分 >

例1 $\frac{5}{6}$ と $\frac{7}{4}$ の和を通分するときは分母の6と4の最小公倍数である12を
共通分母にして

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} + \frac{7 \times 3}{4 \times 3} = \frac{10}{12} + \frac{21}{12} = \frac{31}{12}$$

とやるのが普通であるが、この最小公倍数12を求めるのが難しい。その代わりに共通分母を 6×4 にして、最後に約分の方が簡単である。

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{4} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} + \frac{7 \times 6}{4 \times 6} = \frac{20}{24} + \frac{42}{24} = \frac{62}{24} = \frac{31}{12}$$

例2

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{8} = \frac{7 \times 8}{6 \times 8} + \frac{5 \times 6}{8 \times 6} = \frac{56 + 30}{48} = \frac{86}{48} = \frac{43}{24}$$

例3

$$\frac{8}{9} - \frac{7}{12} = \frac{8 \times 12}{9 \times 12} - \frac{7 \times 9}{12 \times 9} = \frac{96 - 63}{9 \times 12} = \frac{33}{9 \times 12} = \frac{11}{3 \times 12} = \frac{11}{36}$$

例4

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{8} = \frac{x \times 8}{6 \times 8} - \frac{y \times 6}{8 \times 6} = \frac{8x - 6y}{48} = \frac{4x - 3y}{24}$$

最後の式 $\frac{4x - 3y}{24}$ はこれ以上簡単にならない。

例5

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2 \times y}{x \times y} + \frac{3 \times x}{y \times x} = \frac{2y + 3x}{xy} = \frac{3x + 2y}{xy}$$

最後の式 $\frac{3x + 2y}{xy}$ はこれ以上簡単にならない。

例6

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3 \times (b \times c)}{a \times (b \times c)} + \frac{2 \times (a \times c)}{b \times (a \times c)} + \frac{1 \times (a \times b)}{c \times (a \times b)} = \frac{3bc + 2ac + ab}{abc} = \frac{ab + 2ac + 3bc}{abc}$$

最後の式 $\frac{ab + 2ac + 3bc}{abc}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次式を通分せよ。

(1) $\frac{7}{6} - \frac{7}{8}$

(2) $\frac{2}{9} + \frac{5}{12}$

(3) $\frac{5}{4} - \frac{7}{8}$

(4) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2}$

(5) $\frac{a}{12} - \frac{b}{8}$

(6) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6}$

(7) $\frac{y}{x} - \frac{a}{3}$

(8) $\frac{b}{a} + \frac{d}{c}$

(9) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

< 分数の簡略化 >

分数は分母と分子に同じ数をかけても元の分数と等しい。また同じ数で割っても元の分数と等しい(約分)。この性質を利用すると複雑な分数を簡単な分数になおすことができる。

$$\text{例 (1)} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1 \times 3}{\frac{2}{3} \times 3} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{4}} = \frac{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 4)}{\left(\frac{5}{4}\right) \times (6 \times 4)} = \frac{7 \times 4}{5 \times 6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

$$(3) \quad \frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5-2}{5}}{\frac{4+3}{6}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{6}} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right) \times (6 \times 5)}{\left(\frac{7}{6}\right) \times (6 \times 5)} = \frac{3 \times 6}{7 \times 5} = \frac{18}{35}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{1 \times ab}{\left(\frac{b+a}{ab}\right) \times ab} = \frac{ab}{b+a} = \frac{ab}{a+b}$$

最後の式 $\frac{ab}{a+b}$ はこれ以上簡単にできない。

$$(5) \quad \frac{\frac{z}{2} + \frac{w}{5}}{\frac{x}{4} - \frac{y}{6}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{6x-4y}{24}} = \frac{\frac{5z+2w}{10}}{\frac{3x-2y}{12}} = \frac{\left(\frac{5z+2w}{10}\right) \times (12 \times 10)}{\left(\frac{3x-2y}{12}\right) \times (12 \times 10)}$$

$$= \frac{(5z+2w) \times 12}{(3x-2y) \times 10} = \frac{(5z+2w) \times 6}{(3x-2y) \times 5} = \frac{30z+12w}{15x-10y}$$

最後の式 $\frac{30z+12w}{15x-10y}$ はこれ以上簡単にならない。

問 次の分数を簡単にせよ。

$$(1) \quad \frac{1}{\frac{7}{5}}$$

$$(2) \quad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}}$$

$$(3) \quad \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$

$$(4) \quad \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$$

$$(5) \quad \frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}}$$

$$(6) \quad \frac{1}{\frac{zw}{xy}}$$

$$(7) \quad \frac{1}{\frac{y}{x} + \frac{w}{z}}$$

$$(8) \quad \frac{1}{\frac{ac}{b} - \frac{d}{c}}$$

$$(9) \quad \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

< 数としての文字 >

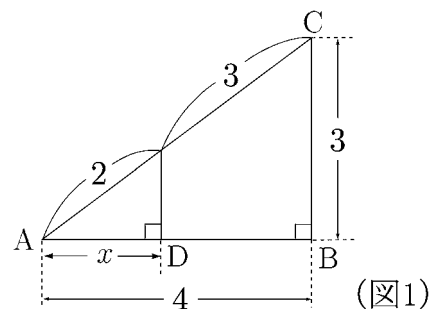
わからない数を□で表すかわりに x や y などの文字を使って表す。わからない数を表す文字を**未知数**といい、数の代わりに文字を使うことを**代数**という。

例1 図1のADの長さを x とおくと

$$2:5 = x:4 \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x}{4}$$

両辺を4倍すると

$$4 \times \frac{2}{5} = x \Rightarrow \underline{\underline{(\text{答}) } x = \frac{8}{5} = 1.6}$$



(注) この例1の場合は文字 x は(結果的に)分数 $\frac{8}{5}$ または少数 1.6 を意味する。

例2 図2において各直線上の数字の和が同じになるよう x, y, z, w を決めたい。

上段の和は

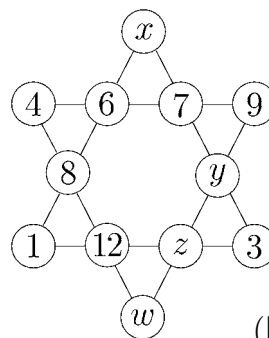
$$4 + 6 + 7 + 9 = 26$$

だから

$$x + 6 + 8 + 1 = 26$$

より

$$x = 26 - (6 + 8 + 1) = 11$$



(図2)

問1 例2で y, z, w にあてはまる数を求めよ。

問2 図3, 図4で縦・横・ななめの数字の和が等しくなるよう, x, y, z, w を求めよ。

(1)

4	9	w
3	x	7
8	z	y

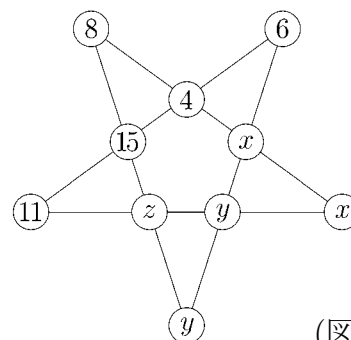
(図3)

(2)

16	2	3	13
5	11	10	z
9	x	y	12
4	14	15	w

(図4)

問3 図5において各直線上の数字の和が等しくなるよう x, y, z を求めよ。



(図5)

< 1次方程式 >

例題 次の方程式を解け。

(1) $0.3x - 5 = 0.1(x - 20)$

(2) $\frac{2x - 3}{3} + \frac{3x - 4}{5} = 2$

(3) $x : (x - 1) = 5 : 3$

(解) (1) $0.3x - 5 = 0.1x - 2 \Rightarrow 0.2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{0.2} = 15$

(2) 両辺を 3×5 倍すると

$$(2x - 3) \times 5 + (3x - 4) \times 3 = 30 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = \frac{57}{19} = 3$$

(3) $\frac{x}{x - 1} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 5(x - 1) \Rightarrow -2x = -5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

問 次の方程式を解け。

(1) $1.2x - 0.2 = 0.6x$

(2) $\frac{1}{4}x - 10 = 2x + \frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{2}x - 5 = -\frac{2}{3}x + 2$

(4) $-3(x - 6) + 8 = 19$

(5) $4(x - 1) = 12 - 3(x + 3)$

(6) $8x - \{3x - 2(x - 6)\} = 0$

(7) $9x - \{1 - 3(x + 5)\} = 2x - 6$

(8) $\frac{x}{6} - \frac{3 - 5x}{2} = x$

(9) $\frac{x + 2}{3} - \frac{x - 1}{2} = 3$

(10) $x - \frac{x - 1}{4} = 6$

(11) $\frac{x + 3}{3} - \frac{2x - 3}{2} = x - \frac{5}{6}$

(12) $\frac{4}{3}\left(x + \frac{7}{4}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1 - x}{4}$

(13) $\frac{x + 3}{x + 1} = \frac{5}{4}$

(14) $2x : (x + 1) = 6 : 5$

< 1次方程式の応用 >

例題 1冊120円のA4版ノートと1冊90円のB5版ノートを合わせて16冊買った合計金額は1740円であった。A4版のノートを何冊買ったか。

(解) A4版ノートを x 冊買ったとすると、B5版ノートは $16 - x$ 冊買ったことになる。それぞれの金額は

$$\text{A4版ノートの金額} = (\text{単価}) \times (\text{冊数}) = 120x \text{ (円)}$$

$$\text{B5版ノートの金額} = (\text{単価}) \times (\text{冊数}) = 90(16 - x) \text{ (円)}$$

だから、合計金額は

$$\text{合計金額} = 120x + 90(16 - x) = 1740 \text{ (円)}$$

この一次方程式より

$$(120 - 90)x = 1740 - 90 \times 16$$

$$30x = 300$$

$$x = 10$$

よって (答) A4版ノートを10冊買った。

問1 リンゴ10個とみかん15個を買って1700円払った。リンゴ1個の値段はみかん1個の値段より20円高い。リンゴとみかんの値段を求めよ。

問2 Aは4800円、Bは3600円もっている。今この2人が同じ本を買ったら、Aの残金はBの残金の2倍になったという。買った本の値段を求めよ。

問3 修学旅行で旅館の部屋割りをするのに生徒を1室に7人ずつ入れると6人余り、8人ずつ入れると1室だけ5人になる。部屋数および生徒数を求めよ。

< 連立1次方程式 >

例 次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} 5x + 6y = 9 & \cdots \text{①} \\ 4x + 7y = 5 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

(1) y を消去するためには①式を7倍した式から②式を6倍した式をひく。

$$\begin{array}{r} 35x + 42y = 63 \quad \cdots \text{①} \times 7 \\ -) \quad 24x + 42y = 30 \quad \cdots \text{②} \times 6 \\ \hline 11x \quad = 33 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 3} \end{array}$$

(2) x を消去するためには①式を4倍した式から②式を5倍した式をひく。

$$\begin{array}{r} 20x + 24y = 36 \quad \cdots \text{①} \times 4 \\ -) \quad 20x + 35y = 25 \quad \cdots \text{②} \times 5 \\ \hline -11y = 11 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = -1} \end{array}$$

よって (答) $x = 3$, $y = -1$

問 次の連立方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} 7x - y = 11 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 7x + 5y = 18 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ x + 5y = 13 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 5x - 3y = 13 \\ 2x + 4y = 26 \end{cases}$$

< 連立1次方程式の応用 1 >

例題 ある店で80円のノートと200円の手帳をあわせて10冊購入したら合計1280円であった。ノートと手帳は何冊購入したか。

(解) ノートを x 冊, 手帳を y 冊購入したとすると, 全部で10冊なので
冊数 : $x + y = 10$ … ①

である。また金額は

$$\text{金額 : } 80x + 200y = 1280 \quad \dots \text{ ②}$$

である。① $\times 20$ - ② $\div 10$ より

$$\begin{array}{r} 20x + 20y = 200 \quad \dots \text{ ①} \times 20 \\ -) \quad 8x + 20y = 128 \quad \dots \text{ ②} \div 10 \\ \hline 12x \quad \quad = 72 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{72}{12} = 6, \quad y = 10 - x = 4 \end{array}$$

よって (答) ノートを6冊, 手帳を4冊購入した。

問1 1冊120円のA4版ノートと1冊90円のB5版ノートをあわせて20冊購入した。合計金額は2010円であった。A4版ノートとB5版ノートを何冊購入したか。

問2 ある演奏会の入場料は大人が500円, 子供が200円である。ある日の入場者数は100人であり, 入場料の合計は38000円であった。この日の入場者数は大人, 子供それぞれ何人か。

問3 ある高等学校の昨年度の生徒数は600人であった。本年度の男生徒数は昨年度の男生徒数に比べて3%増加し, 女生徒数は3%減少した。また全体としては1%増加した。昨年度の男女生徒数および本年度の男女生徒数を求めよ。

< 連立1次方程式の応用 2 >

例題 ある店で原価 80 円のノートと原価 170 円の手帳を何冊か仕入れ、ノートは 100 円、手帳は 200 円で売りつくした。ノートと手帳の仕入れ金額は 8400 円であり、売上金は 10000 円であった。ノートと手帳はそれぞれ何冊仕入れたか。

(解) ノートを x 冊、手帳を y 冊仕入れたとする。

$$\text{仕入れ金額} : 80x + 170y = 8400 \quad \dots \text{①}$$

$$\text{売り上げ金額} : 100x + 200y = 10000 \quad \dots \text{②}$$

連立方程式①, ②を解くと $x = 20$, $y = 40$ より

(答) ノートを 20 冊 , 手帳を 40 冊仕入れた。

問1 ある果物店でリンゴを原価 50 円、みかんを原価 20 円で何個か仕入れ、リンゴは 100 円、みかんは 50 円で売りつくした。リンゴとみかんの仕入れ金額は 2500 円であり、売り上げ金額は 5500 円であった。リンゴとみかんはそれぞれ何個仕入れたか。

問2 ある文房具店の売り出しで、鉛筆 10 本とノート 5 冊を組み合わせると 1250 円、鉛筆 12 本とノート 8 冊を組み合わせると 1760 円の値段がついていた。鉛筆 1 本およびノート 1 冊の値段はそれぞれいくらか。

問3 ケーキ屋でイチゴのケーキとチーズのケーキをあわせて 10 個買う。イチゴのケーキ 3 個とチーズのケーキ 7 個では合計 1060 円であり、イチゴのケーキ 7 個とチーズのケーキ 3 個では合計 1140 円である。イチゴのケーキ 5 個とチーズのケーキ 5 個では合計いくらになるか。

< 3元連立1次方程式 >

例題 ある店で、ケーキとプリンとドーナツを販売している。

ケーキ1個、プリン2個、ドーナツ3個では390円

ケーキ2個、プリン3個、ドーナツ1個では460円

ケーキ3個、プリン4個、ドーナツ2個では680円

であった。ケーキ、プリン、ドーナツはそれぞれ1個いくらになるか。

この問題を式で表すと、1組の方程式ができる。このような方程式の組を3元連立1次方程式という。この方程式を解くには、順に一文字ずつ消去するとよい。

問1 上の問題を解きなさい。

問2 100円硬貨1枚、50円硬貨1枚、1円硬貨1枚、の重さは10g、
100円硬貨2枚、50円硬貨3枚、1円硬貨4枚、の重さは26g、
100円硬貨3枚、50円硬貨1枚、1円硬貨2枚、の重さは21g、
である。100円硬貨、50円硬貨、1円硬貨の重さは、それぞれいくらか。

< 省略記号の変更 >

1. 積の記号 \times は省略する

文字式の場合、積の記号 \times は未知数 x と混同しやすいので、積の記号 \times を省略する。例えば $x + x = 2 \times x$ を $2x$ と略記する。また $x \times x$ は xx であるがこれは通常 x^2 と書く。

例 $x + x + x = 3x$, $2 \times x + 5 \times x = 7x$, $a \times b \times c = abc$

$$4 \times x \times x - 7 \times x \times x = -3x^2, \quad a \times (a + b) = a^2 + ab$$

$$5 \times x \times x \times x \times 7 \times y \times y = 35x^3y^2, \quad a \times 2 \times a \times 4 \times a \times 5 = 40a^3$$

(注) (1) 数字と文字との積の場合は $40a^3$ のように数字を左側に書く。

(2) abc を答案用紙に書くとき、筆記体で abc のように続けて書いてはならない。 $a \times b \times c$ の意味なので必ず一文字ずつくぎって $a \ b \ c$ と書く。

問1 次の式を積の記号 \times を省略して簡単にせよ。

(1) $3 \times x + x + x$

(2) $2 \times x \times x \times 3 \times y \times y \times y \times y \times y$

(3) $a \times a \times (a - 3 \times b)$

(4) $3 \times x \times x \times (x \times 4 - 3 \times y)$

2. プラス記号は省略しない(帯分数は使わない)

帯分数の $1\frac{1}{2}$ は本来は $1 + \frac{1}{2}$ という意味であるから、間のプラスが省略されている。積の記号を省略するので、まぎらわしいから、今後は帯分数を使用してはならない。 $1\frac{1}{2}$ を表したいときは、 $1 + \frac{1}{2}$ か、または仮分数 $\frac{3}{2}$ の形を使う。特に分数の積の場合は仮分数の方が便利である。たとえば

$$1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{2}$$

ここで仮分数 $\frac{7}{2}$ を $3 + \frac{1}{2}$ の形になおす必要はない。仮分数の方が場所をとらないので、整数+分数の形にしない方がよい。

問2 次の帯分数を仮分数になおせ。

(1) $1\frac{1}{3}$

(2) $3\frac{3}{4}$

(3) $4\frac{1}{5}$

(4) $6\frac{2}{3}$

< 文字式のきまり >

数のかわりに文字を用いて計算するとき、その計算式を**文字式**という。文字式は前ページのようなきまりがある。さらに文字式では割り算を分数で表す。たとえば

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

と書く。文字式では割り算の記号 \div 使わない。このようなきまりをまとめると

- <文字式のきまり>
1. 文字式では積の記号 \times は省略する。
 2. 数と文字の積は数を左側、文字を右側に書く。
 3. 同じ文字の積は指数を使う。
 4. 文字式では割り算を分数で表す。
 5. $+$, $-$ より \times , \div を優先する。

となる。

- (注) 1. 積の記号 \times は通常は省略するが、 $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ のような素因数分解の場合は省略しない。ただし文字式の計算では $a \times a \times a \times a \times b \times b \times c = a^4 \times b^2 \times c = a^4 b^2 c$ のように \times を全て省略する。
2. アルファベットの積は $a^4 b^2 c$ のようにアルファベットの順に $a, b, c \cdots, x, y, z$ に従って左側から書いていく。
3. 積の記号 \times のかわりに文字と文字の間に点を打って $a \times b = a \cdot b$ のように書く場合もあるが $2 \cdot 3 = 2 \times 3 = 6$, $2.3 = 2 + 0.3$ のように小数点と混同するので使用しない方がよい。
4. 数の計算と同様に文字の計算でも和 ($+$), 差 ($-$) より、積 (\times) や商 (\div) を優先する。たとえば

$$a \times b + c - d \div e \times f = (a \times b) + c - (d \div e \times f) = ab + c - \frac{df}{e}$$

例1 $5 \times (2 \times x + 3 \times y) - 4 \times (x - 2 \times y) = 10x + 15y - 4x + 8y = 6x + 23y$

- (注) 最後の式 $6x + 23y$ はこれ以上簡単にはできない。これが数の計算とちがうところである。たとえば $x = 7$, $y = 9$ のときは最後まで計算する。

$$5 \times (2 \times 7 + 3 \times 9) - 4 \times (7 - 2 \times 9) = 6 \times 7 + 23 \times 9 = 249$$

例2 $(4a^2b) \div (6ab^2) = \frac{4a^2b}{6ab^2} = \frac{4 \times a \times a \times b}{6 \times a \times b \times b} = \frac{2a}{3b}$

- (注) 最後の式 $\frac{2a}{3b}$ はこれ以上簡単にできない。

問 次の式をできるだけ簡単にせよ。

(1) $3 \times a \times b \times x \times a \times b \times 2 \times b$ (2) $5(x - y) - 3(y + 2x) + x(2 + y)$

(3) $6 \times x \times y \times y \div (x \times y \times 5 \times x \times 3)$ (4) $21ab^3 \div 28a^2b$

(5) $(5xy^2) \times (9x^3y^2) \div (15x^2y^3)$ (6) $(3ab^2c) \div (2a^2bc^3) \times (6abc^2)$

< 等式の変形 >

等号(=)で結ばれる文字式を**等式**という。等式は次の法則がある。

$$\begin{aligned} \odot A = B \text{ ならば } & A + C = B + C, \quad A - C = B - C \\ \odot A = B \text{ ならば } & AC = BC, \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \quad (C \neq 0) \end{aligned}$$

例 等式 $2x = 4a + 3b - 5 \quad \dots (1)$

を考える。両辺を2で割ると

$$x = \frac{4a + 3b - 5}{2} \quad \dots (2)$$

また、(1)式の両辺に $5 - 3b$ を足して4で割り、左辺と右辺を入れかえると

$$a = \frac{2x + 5 - 3b}{4} \quad \dots (3)$$

(1)式から(2)式の形にすることを「 x について解く」といい、(1)式から(3)式の形にすることを「 a について解く」という。

問 次の等式を指定された形になおせ。

$$(1) E = IR, \quad R = \qquad (2) V = \frac{2\pi R}{P}, \quad P =$$

$$(3) H = KA \frac{T_2 - T_1}{L}, \qquad (4) P = \frac{TN}{9.74 \times 10^5},$$

$$T_1 = \qquad N =$$

$$(5) \sigma = \alpha E(t - \tau), \qquad (6) G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

$$\alpha = \qquad E =$$

$$(7) \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\psi} - \frac{1}{\omega}, \qquad (8) \frac{1}{R} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$

$$\psi = \qquad R =$$

$$(9) \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)gh, \quad (10) v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

$$v = \qquad x =$$

< 文字式の展開 1 >

例題 図1の斜線部分の面積 S を a, b, c, d を用いて表せ。

(解1) 2辺の長さが $a+b$ と $c+d$ の長方形だから

$$\underline{(答) S = (a+b)(c+d)}$$

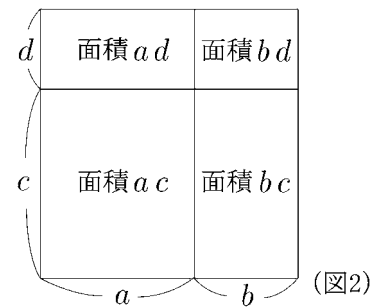
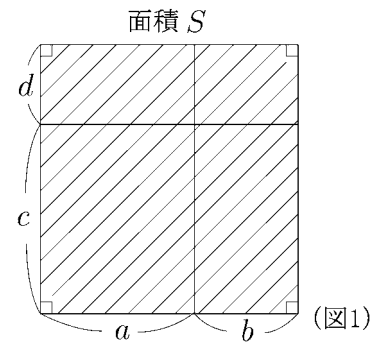
(解2) 図2より

$$\underline{(答) S = ac + ad + bc + bd}$$

(注) 解1と解2はどちらも正しい。
すなわち

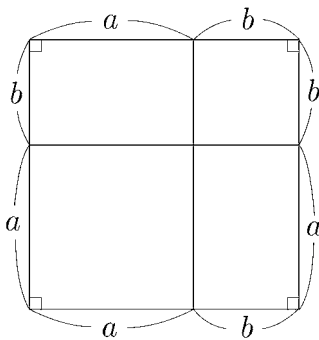
$$\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$$

が成り立つ。

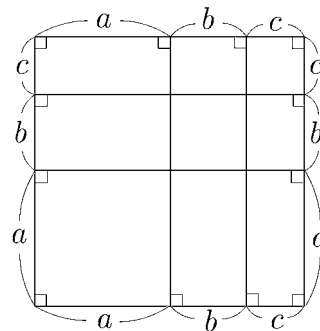


問1 次の正方形の面積 S を2通りに表せ。

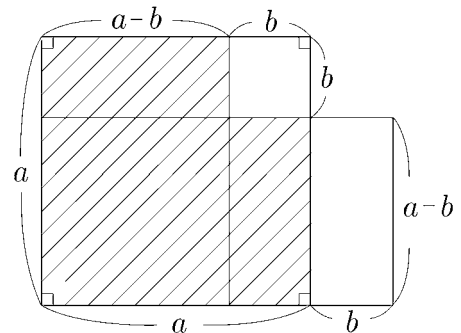
(1)



(2)



問2 次の斜線部分の面積 S を a, b を用いて、2通りに表せ。



< 文字式の展開 2 >

例1 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

を計算で示すには

$$\begin{aligned} (a+b) \times (c+d) &= a \times (c+d) + b \times (c+d) \\ &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \\ &= ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

とすればよい。

このようにカッコのついた積の式をカッコのつかない式になおすことを
展開するという。

例2 $(a+b)^2$ を展開する。

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b) \times (a+b) = a \times (a+b) + b \times (a+b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

例3 $(a+b)(a-b) = a \times (a-b) + b \times (a-b)$

$$\begin{aligned} &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a-b)^2$

(2) $(a+b)(a+c)$

(3) $(a+b)(a-c)$

(4) $(a-b)(a-c)$

(5) $(a+b)(-a+b)$

(6) $(a+b+c)^2$

(7) $(a+b-c)^2$

(8) $(a-b-c)^2$

< 文字式の展開 3 >

例 1 $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$= a \times (a^2 + ab + b^2) - b \times (a^2 + ab + b^2)$$

$$= a \times a^2 + a \times ab + a \times b^2 - b \times a^2 - b \times ab - b \times b^2$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

例 2 $(a + b)^3 = (a + b) \times (a + b) \times (a + b) = (a + b) \times (a + b)^2$

$$= (a + b) \times (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a \times (a^2 + 2ab + b^2) + b \times (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$= a \times a^2 + a \times 2ab + a \times b^2 \\ + b \times a^2 + b \times 2ab + b \times b^2$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

問 次の式を展開せよ。

(1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) $(a - b)^3$

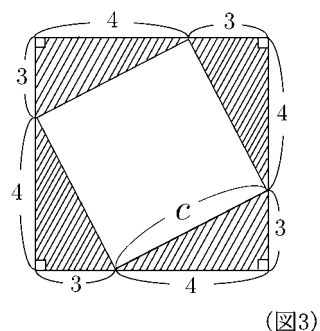
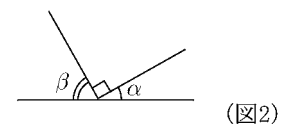
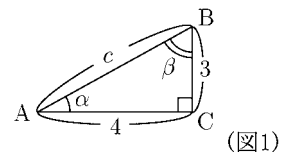
(3) $(a - b)(a + b)^2$

(4) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$

(5) $(a - b)^2(a + b)^2$

< ピタゴラスの定理 1 >

例 図1のような底辺4(cm)、高さ3(cm)の直角三角形ABCの斜辺の長さ c を求めたい。 $\angle BAC = \alpha$ 、 $\angle ABC = \beta$ とおくと三角形の内角の和は 180° より $\alpha + \beta = 90^\circ$ となる。従って図2のように直線上に角 α と角 β をおけば残った角度は 90° となる。そこで図1の三角形ABCを4個用意して、図3のようにおく。図3の大きい正方形(一辺 $3+4$ の正方形)から斜線部分を除いた部分は(図2の性質より)一辺 c の正方形になる。よって図3の面積を斜線部分とそれ以外に分けると



$$\underbrace{(3+4)^2}_{\text{全体の面積}} = \underbrace{\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right)}_{\text{斜線部分の面積}} \times 4 + c^2$$

これから

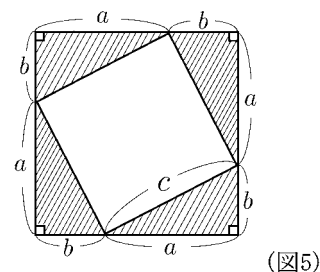
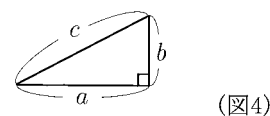
$$c^2 = (3+4)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) \times 4 = 3^2 + 2 \times 3 \times 4 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 = 3^2 + 4^2 = 25$$

よって $c = 5$ (cm) である。

問 底辺 a 、高さ b の直角三角形の斜辺の長さを c とする(図4)。例を参考にして

$$c^2 = a^2 + b^2$$

であることを証明せよ。この関係式をピタゴラスの定理または三平方の定理という。(ヒント...21ページ 例2)

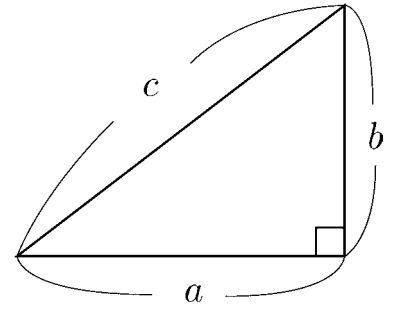


< ピタゴラスの定理 2 >

右図のような直角三角形に対し 前ページより

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \quad (\text{三平方の定理} = \text{ピタゴラスの定理})$$

が成り立つ。



例 直角三角形の三辺の長さ a, b, c (c は斜辺の長さ) が

$$a = 8, \quad c = 10$$

であるとき b の長さは

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = c^2 - a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

より $b = 6$ である。

問 直角三角形の三辺の長さ a, b, c (c は斜辺の長さ) が次の各場合に、
残りの辺の長さを求めよ。

(1) $a = 12, b = 5, c =$

(2) $a = 16, c = 20, b =$

(3) $b = 15, c = 17, a =$

(4) $a = 16, c = 34, b =$

(5) $b = 60, c = 61, a =$

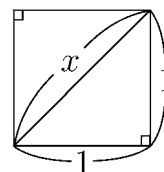
< 平方根 1 >

例1 一辺の長さが1の正方形の対角線の長さを x とすると、ピタゴラスの定理より

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

となる。この長さを測ってみると

$$x = 1.41421356\dots$$



となって小数が限りなく続き、しかも不規則である。この数 x は2つの整数の比 (*ratio*) で表されないことが発見され、当時の人はこの秘密を他へ口外することを禁じた。今日ではこのような数は**無理数** (*irrational number*) と呼ばれている。

又、この場合の x は2乗すれば2になる数であり、2の**平方根**と呼ばれ、

$$x = \sqrt{2}$$

という記号で表される。

一般に正の数 a に対し、2乗して a になる正の数を a の平方根と呼び \sqrt{a} で表す。この記号 $\sqrt{\quad}$ を**根号**という。

例2 平方根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

などは無理数ではない。

問1 次の平方根は全て無理数ではない。根号を使わずに表せ。

(1) $\sqrt{16}$

(2) $\sqrt{256}$

(3) $\sqrt{\frac{36}{49}}$

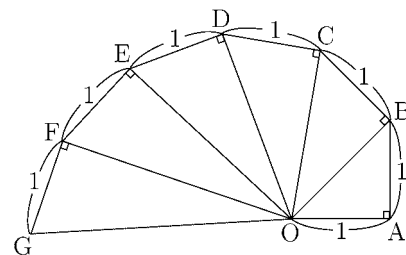
(4) $\sqrt{0.25}$

例3 右図において OB の長さは $\sqrt{2}$ である。三平方の定理より

$$(OC)^2 = (OB)^2 + (BC)^2 = (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

であるから $OC = \sqrt{3}$ である。

問2 右図で OD, OE, OF, OG の長さを求めよ。(単位不要)



< 平方根 2 >

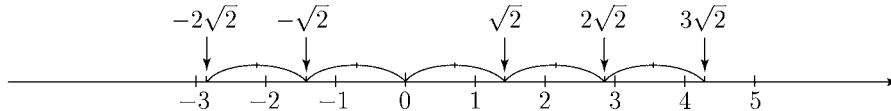
$\sqrt{2}$ と同様に $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ などもすべて無理数で、その値は約

$$\sqrt{3} \doteq 1.7320508 \quad , \quad \sqrt{5} \doteq 2.2360679 \quad , \quad \sqrt{6} \doteq 2.44949$$

である。また文字式と同様に

$$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad , \quad (-1) \times \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

と表し、これらはそれ以上簡単にできない無理数である。 $3\sqrt{2}$ や $-\sqrt{2}$ 等の数値は数直線上の位置関係で理解する。



例 1 文字式の計算で

$$2a + 3b - 4a + 7b = (2a - 4a) + (3b + 7b) = -2a + 10b$$

と同様に

$$2\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{5} = (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}) + (3\sqrt{5} + 7\sqrt{5}) = -2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$

と計算する。最後の式 $-2\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$ はこれ以上簡単にできない。

問 1 次式を計算せよ。

$$(1) (6\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) + (3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$$

$$(2) (5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) - (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(3) 3(\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) + 2(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})$$

$$(4) 5(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - 3(2\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

例 2 (1) $(-\sqrt{7})^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$

(2) $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7$

問 2 次を計算せよ。

$$(1) (-\sqrt{11})^2 \quad (2) \sqrt{(-5)^2} \quad (3) \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 \quad (4) \sqrt{(-0.12)^2}$$

例 3 $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ を求めたい。その2乗を計算すると

$$(\sqrt{3} \times \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5})^2 = 3 \times 5 = 15$$

であるから $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15} = \sqrt{3 \times 5}$

問 3 次を計算せよ。

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3}$$

$$(2) \sqrt{5} \times \sqrt{7}$$

$$(3) \sqrt{4} \times \sqrt{11}$$

$$(4) \sqrt{3} \times \sqrt{12}$$

< 平方根 3 >

前ページ例3から一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}}$$

が成り立つ。

例1 (1) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3 \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

問1 次の平方根を例1のようになおせ。

(1) $\sqrt{18}$ (2) $\sqrt{40}$ (3) $\sqrt{75}$ (4) $\sqrt{80}$ (5) $\sqrt{147}$

例2 $\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{144} = 12$

(別解)

$$\sqrt{8} \times \sqrt{18} = (2\sqrt{2}) \times (3\sqrt{2}) = 6 \times (\sqrt{2})^2 = 6 \times 2 = 12$$

問2 次の値を求めよ。

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$ (2) $\sqrt{7} \times \sqrt{63}$ (3) $\sqrt{21} \times \sqrt{84}$

例3 $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ とおくと $x^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3}{5}$

より $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ よって $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$ が成り立つ。

一般に正の数 a と b に対して、

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

が成り立つ。

例4 $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{54}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

問3 次を簡単にせよ。

(1) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ (2) $\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{15}}$ (3) $\frac{\sqrt{3} \times \sqrt{18}}{\sqrt{2}}$

< 平方根 4 >

$$\begin{aligned}\text{例 1 } (\sqrt{5} + \sqrt{10})^2 &= (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} + (\sqrt{10})^2 \\ &= 5 + 2\sqrt{50} + 10 \\ &= 15 + 2 \times 5\sqrt{2} = 15 + 10\sqrt{2}\end{aligned}$$

(注) ここで文字式の展開式 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を用いた。

問 1 21 ページを参考にして次の計算をせよ。

$$(1) (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 \quad (2) (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 \quad (3) (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$(4) (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 \quad (5) (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \quad (6) (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$$

$$\text{例 2 } (1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \quad (2) \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6 \times \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

このように変形することを「分母を有理化する」という。

問 2 次の分数の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3) \frac{3}{\sqrt{3}} \quad (4) \frac{4}{\sqrt{12}} \quad (5) \frac{2}{\sqrt{18}}$$

例 3 $\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化したい。分母と分子に $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ をかけると

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \times (\sqrt{5} - \sqrt{3})} \times (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$$

(注) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ を用いた。

問 3 次の分母を有理化せよ。

$$(1) \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

$$(3) \frac{3}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \quad (4) \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

< 数の表示 1 >

十進法以外にも数の表現のしかたがある。時計は60進法であり、コンピューターは2進法で計算する。ここでは8進法を紹介する。10進法で3桁の整数は、たとえば

$$457 = 400 + 50 + 7 = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

であり、10進法の数(=10進数という)であることを明記するため

$$(457)_{10} = 4 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7$$

と書く。これに対し8進法で三桁目が4, 二桁目が5, 一桁目が7である数を

$$(457)_8 = 4 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7$$

と書く。8進法で表される数を8進数という。4 × 8² + 5 × 8 + 7 = 303 より

$$(457)_8 = (303)_{10}$$

である。

例 1 ① $(10)_8 = 1 \times 8 + 0 = (8)_{10}$

② $(45)_8 = 4 \times 8 + 5 = 32 + 5 = (37)_{10}$

③ $(356)_8 = 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 6 = 192 + 40 + 6 = (238)_{10}$

④ $(1057)_8 = 1 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 5 \times 8 + 7 = (559)_{10}$

問 1 次の8進数を10進数になおせ。

① $(12)_8$ ② $(33)_8$ ③ $(234)_8$ ④ $(707)_8$ ⑤ $(2001)_8$

例 2 ① $51 = 6 \times 8 + 3$ より $(51)_{10} = (63)_8$

② $215 = 3 \times 64 + 23 = 3 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7$ より $(215)_{10} = (327)_8$

問 2 次の10進数を8進数になおせ。

① $(21)_{10}$ ② $(45)_{10}$ ③ $(79)_{10}$ ④ $(156)_{10}$

例 3 ① $(2.39)_{10} = 2 + 0.3 + 0.09 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{9}{10^2}$

② $(4.57)_8 = 4 + \frac{5}{8} + \frac{7}{8^2}$

問 3 次の小数を例3のように分数で表せ。

① $(3.14)_{10}$ ② $(1.5)_8$ ③ $(5.73)_8$

< 数の表示 2 >

例題 3桁の10進数で各桁の数の和が9の倍数になっているもの、たとえば

$$(162)_{10}, (414)_{10}, (738)_{10}$$

等はいずれも9の倍数である。一般に3桁の10進数

$$(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

に対して

$$a + b + c = 9 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は9の倍数であることを証明せよ。

(証明) $a + b + c$ は9の倍数だから $a + b + c = 9n$ (n は自然数)とおく。

$$(abc)_{10} = 100a + 10b + c = 99a + 9b + a + b + c$$

$$= 9(11a + b) + 9n = 9(11a + b + n)$$

より $(abc)_{10} = 9 \times (11a + b + n)$ は9の倍数になる。(証明終)

問1 3桁の10進数 $(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$ に対して

$$a + b + c = 3 \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_{10}$ は3の倍数であることを証明せよ。

(証明)

問2 3桁の x 進数 $(abc)_x = a \times x^2 + b \times x + c$ に対して

$$a + b + c = (x - 1) \text{ の倍数}$$

であれば $(abc)_x$ は $(x - 1)$ の倍数であることを証明せよ。

(証明)

< 整式 1 >

10進法で2桁、3桁の整数は

$$2\text{桁}\cdots(ab)_{10} = a \times 10 + b \quad , \quad 3\text{桁}\cdots(abc)_{10} = a \times 10^2 + b \times 10 + c$$

となる。一般に x 進法で2桁、3桁の整数は

$$2\text{桁}\cdots(ab)_x = ax + b \quad , \quad 3\text{桁}\cdots(abc)_x = ax^2 + bx + c$$

となる。このように x 進法で整数を表す式を「 x に関する**整式**」という。

これに対し、 $(2.37)_{10} = 2 + \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2}$ のような小数

$$(2.37)_x = 2 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}$$

を表す x の式を「 x に関する**分数式**」という。

問 x 進法で4桁の整数 $(abcd)_x$ を x の式で表せ。

$$(abcd)_x =$$

10進法で百, 十, 一をそれぞれ図1のような四角形で表すと, 243は図2のように表せる。

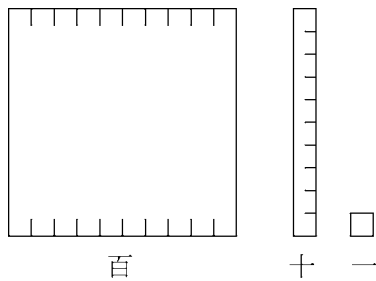


図1

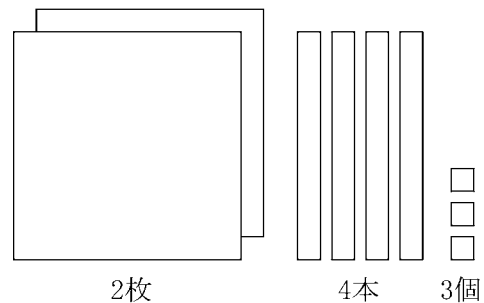
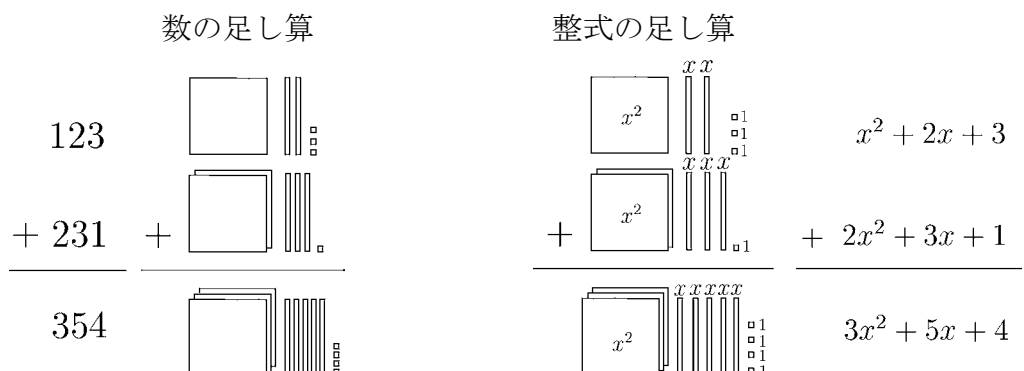


図2

x に関する整式の計算は x 進法の計算と考えれば良い。

例 $(x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + 3x + 1) = 3x^2 + 5x + 4$



< 整式 2 >

整式は式の形で区別する。

x に関する1次式 $\cdots ax + b$ の形

x に関する2次式 $\cdots ax^2 + bx + c$ の形

x に関する3次式 $\cdots ax^3 + bx^2 + cx + d$ の形

x に関する整式では、 x 以外の文字 (a, b, c, d 等) を**定数**という。

ax^3 の a , bx^2 の b , cx の c のように x との積になっている定数を**係数**という。

(注1) x の整式は“ x 進法”よりもっと広い意味で使われる。 a, b, c 等の定数は小数や分数または負の数や無理数でもよい。

(注2) $2x + 7 - 5x^2 + 6x^3 = 6x^3 - 5x^2 + 2x + 7$ のように x の整式は x の次式(指数)の大きい順に並べる。このことを「**降べきの順に並べる**」という。

(注3) 整式の計算(和, 差, 積 等)は文字式の計算と同様であり、最後に降べきの順に並べる。

$$\begin{aligned} \text{例 (1)} \quad & (3 - x + 2x^2) + (4x + 5 + 3x^2) \\ &= (2x^2 - x + 3) + (3x^2 + 4x + 5) \\ &= (2x^2 + 3x^2) + (-x + 4x) + (3 + 5) \\ &= 5x^2 + 3x + 8 \end{aligned}$$

筆算では

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + 3 \\ +) 3x^2 + 4x + 5 \\ \hline 5x^2 + 3x + 8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad & (-4x + 3 + 5x^2) - (7 - 2x) \\ &= (5x^2 - 4x + 3) - (-2x + 7) \\ &= 5x^2 + (-4x - (-2x)) + (3 - 7) \\ &= 5x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

筆算では

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 4x + 3 \\ -) \quad -2x + 7 \\ \hline 5x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{(3)} \quad & (2x - 3)(4x + 5) \\ &= (2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5 \\ &= 8x^2 - 12x + 10x - 15 \\ &= 8x^2 - 2x - 15 \end{aligned}$$

筆算では

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ \times) \quad 4x + 5 \\ \hline 10x - 15 \quad \cdots \cdots (2x - 3) \times 5 \\ +) 8x^2 - 12x \quad \cdots \cdots (2x - 3) \times 4x \\ \hline 8x^2 - 2x - 15 \end{array}$$

(注) 整式の計算は必ず降べきの順に並べて答える。

問 次の計算をせよ。

$$(1) (3x - x^2 + 4) + (2x^2 - 1 + 2x)$$

$$(2) (1 - x^2) - (4 + x^2 - 3x)$$

$$(3) (x - 3)(2 + x)$$

$$(4) (4x - 3)(6 - 5x)$$

< 整式 3 >

$$\begin{aligned}\text{例1} \quad (3+2x)(4-x) &= 3(4-x) + 2x(4-x) = 12 - 3x + 8x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 5x + 12\end{aligned}$$

問1 次式を計算せよ。

$$(1) \quad 2(3x - 4x^2 + 1) + 3(x - 5 + 2x^2)$$

$$(2) \quad (3x - 1)(4 - 5x)$$

$$\text{例2} \quad (x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab$$

(注) x の係数 $a+b$ は1つにまとめる。

$$\text{例3} \quad (x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$$

問2 次式を展開せよ。

$$(1) \quad (x+a)^2$$

$$(2) \quad (x-a)^2$$

$$(3) \quad (x+a)(x-a)$$

$$(4) \quad (x-a)(x-b)$$

$$(5) \quad (x-a)(x^2+ax+a^2)$$

$$(6) \quad (x+a)^3$$

< 整式の除法 1 >

数の割り算 $679 \div 32$ について考えてみよう。

整式の割り算 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$ について考えてみよう。

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 3 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \end{array}$$

下ろす

$$\begin{array}{r} 2x \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \end{array}$$

立てる

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \\ 32 \end{array}$$

掛ける

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \\ 3x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 32 \overline{) 679} \\ 64 \\ \hline 39 \\ 32 \\ \hline 7 \end{array}$$

引く

$$\begin{array}{r} 2x + 1 \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ 6x^2 + 4x \\ \hline 3x + 9 \\ 3x + 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$679 = 32 \times 21 + 7$$

$$6x^2 + 7x + 9 = (3x + 2)(2x + 1) + 7$$

< 整式の除法 2 >

$$\begin{array}{r} 21 \text{ --- 商} \\ 32 \overline{) 679} \\ \underline{64} \\ 39 \\ \underline{32} \\ 7 \text{ -- 余り} \end{array}$$

図1 $679 \div 32$ 

$$\begin{array}{r} 2 \times 10 + 1 \text{ ----- 商} \\ 3 \times 10 + 2 \overline{) 6 \times 10^2 + 7 \times 10 + 9} \\ \underline{6 \times 10^2 + 4 \times 10} \\ 3 \times 10 + 9 \\ \underline{3 \times 10 + 2} \\ 7 \text{ --- 余り} \end{array}$$

図2



$$\begin{array}{r} 2x + 1 \text{ ----- 商} \\ 3x + 2 \overline{) 6x^2 + 7x + 9} \\ \underline{6x^2 + 4x} \\ 3x + 9 \\ \underline{3x + 2} \\ 7 \text{ ----- 余り} \end{array}$$

図3 $(6x^2 + 7x + 9) \div (3x + 2)$

多項式 A を多項式 B で割ったとき、商が Q で余りが R となったとすると、 $A = BQ + R$ がなりたつ。このとき、 R の次数は必ず B の次数より低くなることに注意する。

また、多項式の割り算は整数のときと同じように、「商を立てる」、「掛ける」、「引く」、「下ろす」の4種類の計算を繰り返して求めることができる。ただ、整数の計算と違って、係数が分数であってもよい。

問1 下の□のなかに適当な数を入れて、 $(6x^2 + 7x + 3) \div (2x + 1)$ を計算せよ。

$$\begin{array}{r} \square x + \square \text{ ----- 商} \\ 2x + 1 \overline{) 6x^2 + 7x + 3} \\ \underline{\square x^2 + \square x} \\ \square x + 3 \\ \underline{\square x + \square} \\ \square \text{ ----- 余り} \end{array}$$

問2 次の割り算を行い、商と余りを求めよ。

(1) $(x^2 + 5x + 9) \div (x + 2)$

(2) $(3x^2 + 5x + 7) \div (x + 2)$

(3) $(2x^3 + 3x^2 + 5x + 7) \div (2x + 1)$

(4) $(2x^3 + 5x^2 - 2x + 1) \div (x^2 - x + 2)$

(5) $(x^3 - 8) \div (x - 2)$

< 整式の除法 3 >

例1 136を11で割ると商が12で余り4である。

これを式で書くと

$$136 = 12 \times 11 + 4$$

かまたは

$$\frac{136}{11} = 12 + \frac{4}{11}$$

となる。整式の除法も同様に

$x^2 + 3x + 6$ を $x + 1$ で割ると商が

$x + 2$ で余りが4である。これを式で

書くと

$$x^2 + 3x + 6 = (x + 2)(x + 1) + 4$$

かまたは

$$\frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1} = x + 2 + \frac{4}{x + 1}$$

となる。

$$\begin{array}{r} 12 \\ 11 \overline{) 136} \\ \underline{11 } \\ 26 \\ \underline{22} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 1 \overline{) x^2 + 3x + 6} \\ \underline{x^2 + x} \quad \dots (x + 1) \times x \\ 2x + 6 \\ \underline{2x + 2} \quad \dots (x + 1) \times 2 \\ 4 \end{array}$$

例2 右の筆算より

$$\frac{4x^3 - 2x^2 + 6x - 1}{2x + 3} = 2x^2 - 4x + 9 - \frac{28}{2x + 3}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 9 \\ 2x + 3 \overline{) 4x^3 - 2x^2 + 6x - 1} \\ \underline{4x^3 + 6x^2} \quad \dots (2x + 3) \times 2x^2 \\ -8x^2 + 6x \quad \dots (2x + 3) \times (-4x) \\ \underline{-8x^2 - 12x} \quad \dots (2x + 3) \times (-4x) \\ 18x - 1 \\ \underline{18x + 27} \quad \dots (2x + 3) \times 9 \\ -28 \end{array}$$

問 次の割り算を実行し、例の分数式の右辺の形にせよ。

(1) $\frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

(2) $\frac{x^2 + 3x + 5}{x - 2}$

(3) $\frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 1}$

(4) $\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x - 3}$

< 方程式と恒等式 >

文字 x に関する等式には2種類ある。

- 例1** (1) 等式 $3x - 10 = 2$ を満たす数 x は $x = 4$ だけである。
 (2) 等式 $x^2 - 9 = 0$ を満たす数 x は $x = 3$ または $x = -3$ の2個しかない。

- 例2** (1) 等式 $2(x - 1) + 3(x + 4) = 5x + 10$ は x がどんな数でも成り立つ。
 (2) 等式 $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ は x がどんな数でも成り立つ。

例1のように x が特別な数でしか等式が成立しない式を**方程式**という。
 例1の(1)を未知数 x に関する1次方程式、例1の(2)を未知数 x に関する2次方程式という。

これに対し、例2は x がどのような数でも等式が成立する。このような等式を(常に成り立つ等式という意味で) **恒等式** こうとう という。例2の(2)のような展開によってできる等式は必ず恒等式である。

問1 例2の(2)を確かめたい。以下の x の値を代入して、 $(x + 2) \times (x + 3)$ と $x^2 + 5x + 6$ の式の値をそれぞれ求めよ。

- (1) $x = 0$ のとき $(x + 2)(x + 3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$
 (2) $x = 1$ のとき $(x + 2)(x + 3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$
 (3) $x = 2$ のとき $(x + 2)(x + 3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$
 (4) $x = 3$ のとき $(x + 2)(x + 3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$
 (5) $x = 4$ のとき $(x + 2)(x + 3) =$, $x^2 + 5x + 6 =$

問2 次の式を展開せよ。

- (1) $(x + \alpha)^2$ (2) $(x - \alpha)^2$
 (3) $(x + \alpha)(x - \alpha)$ (4) $(x + \alpha)(x + \beta)$
 (5) $(x - \alpha)(x - \beta)$ (6) $(x + \alpha)(x - \beta)$

問3 次の等式は恒等式か方程式か判定せよ。

- (1) $3x - 1 = 2(2x - 1) + x$ (2) $3(x + 1) - 1 = 2(x + 1) + x$
 (3) $(x + 3)(x + 1) = x^2 + 4x + 3$ (4) $(x - 2)(x - 1) = x^2 - 4x - 3$

< 因数分解 1 >

例 169 を素因数分解すると $169 = 13^2$ となる。この式は次のようにも書ける。

$$169 = 10^2 + 6 \times 10 + 9 = (10 + 3)^2$$

この式と同様な式がいくつも作れる。

$$1^2 + 6 \times 1 + 9 = (1 + 3)^2$$

$$2^2 + 6 \times 2 + 9 = (2 + 3)^2$$

$$3^2 + 6 \times 3 + 9 = (3 + 3)^2$$

$$4^2 + 6 \times 4 + 9 = (4 + 3)^2$$

$$5^2 + 6 \times 5 + 9 = (5 + 3)^2$$

実はこのような式は無限に多く作れる。一般に任意の数 x に対して

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \quad \dots\dots (1)$$

が成り立つ。すなわち (1) は恒等式である。

問 以下の式に共通する関係式を例の (1) 式のように x を使って表せ。

$$(1) \quad 1^2 + 4 \times 1 + 4 = (1 + 2)^2$$

$$(2) \quad 2^2 - 10 \times 2 + 25 = (2 - 5)^2$$

$$2^2 + 4 \times 2 + 4 = (2 + 2)^2$$

$$4^2 - 10 \times 4 + 25 = (4 - 5)^2$$

$$3^2 + 4 \times 3 + 4 = (3 + 2)^2$$

$$6^2 - 10 \times 6 + 25 = (6 - 5)^2$$

$$4^2 + 4 \times 4 + 4 = (4 + 2)^2$$

$$8^2 - 10 \times 8 + 25 = (8 - 5)^2$$

$$(3) \quad 5^2 - 9 = (5 + 3) \times (5 - 3)$$

$$(4) \quad 1^2 + 5 \times 1 + 6 = (1 + 2) \times (1 + 3)$$

$$6^2 - 9 = (6 + 3) \times (6 - 3)$$

$$2^2 + 5 \times 2 + 6 = (2 + 2) \times (2 + 3)$$

$$7^2 - 9 = (7 + 3) \times (7 - 3)$$

$$3^2 + 5 \times 3 + 6 = (3 + 2) \times (3 + 3)$$

$$8^2 - 9 = (8 + 3) \times (8 - 3)$$

$$4^2 + 5 \times 4 + 6 = (4 + 2) \times (4 + 3)$$

< 因数分解 2 >

$$\begin{aligned} \text{前ページより} \quad & x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \\ & x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \\ & x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \\ & x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \\ & x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \end{aligned}$$

等がわかる。これらの等式は x がどんな数でも成り立つ。すなわち恒等式である。それを確かめるには右辺を展開して左辺になればよい。たとえば、最後の式は

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (x+2)(x+3) = (x+2) \times x + (x+2) \times 3 \\ &= x^2 + 2x + 3x + 6 && \begin{array}{r} x+2 \\ \times) x+3 \\ \hline 3x+6 \cdots (x+2) \times 3 \\ +) x^2+2x \cdots (x+2) \times x \\ \hline x^2+5x+6 \end{array} \\ &= x^2 + 5x + 6 \\ &= \text{左辺} \end{aligned}$$

となる。この x はどんな数でも成り立つ。それは文字式の計算が数の計算と同じ規則によって行われるからである。たとえば $x = 10$ のときは

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= (10+2)(10+3) && \begin{array}{r} 12 \\ \times) 13 \\ \hline 36 \cdots 12 \times 3 \\ +) 120 \cdots 12 \times 10 \\ \hline 156 \end{array} \\ &= (10+2) \times 10 + (10+2) \times 3 \\ &= 10^2 + 2 \times 10 + 3 \times 10 + 2 \times 3 \\ &= 10^2 + 5 \times 10 + 6 = \text{左辺} \end{aligned}$$

より等しい。右側に書いた筆算でも同じであることがわかる。

この式を

$$\text{左辺} = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = (x+2)(x+3) = \text{右辺}$$

と考え、2と3のかわりに一般の数 α と β で置き換えても成り立つ。すなわち

$$\boxed{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)}$$

が成り立つ。このように整式を積の形に表すことを**因数分解**という。

問 37 ページの問 2 を参考にして、次を因数分解せよ。

$$(1) x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

$$(2) x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

$$(3) x^2 - \alpha^2$$

$$(4) x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$(5) x^2 + (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$$

< 因数分解 3 >

前ページの結果から任意の数 α , β に対して次の因数分解の公式が得られた。

$$(I) \quad x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 = (x + \alpha)^2$$

$$(II) \quad x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 = (x - \alpha)^2$$

$$(III) \quad x^2 - \alpha^2 = (x + \alpha)(x - \alpha)$$

$$(IV) \quad x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

例 1 上の公式 (I), (II) の例をあげる。

$$(1) \quad x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x + 5)^2$$

$$(2) \quad x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x - 6)^2$$

例 2 上の公式 (III) の例をあげる。

$$(1) \quad x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$$

$$(2) \quad x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

例 3 上の公式 (IV) の例をあげる。

$$(1) \quad x^2 + 4x + 3 = x^2 + (3 + 1)x + 3 \times 1 = (x + 3)(x + 1)$$

$$(2) \quad x^2 + 7x + 10 = x^2 + (5 + 2)x + 5 \times 2 = (x + 5)(x + 2)$$

問 次式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^2 + 6x + 9$$

$$(2) \quad x^2 - 10x + 25$$

$$(3) \quad x^2 + 12x + 36$$

$$(4) \quad x^2 - 9$$

$$(5) \quad x^2 - 8$$

$$(6) \quad x^2 - 1$$

$$(7) \quad x^2 + 3x + 2$$

$$(8) \quad x^2 + 5x + 6$$

$$(9) \quad x^2 + 7x + 10$$

$$(10) \quad x^2 + 7x + 12$$

< 因数分解 4 >

多項式の積 $(x+3)(x+4)$ を展開すると、

$$x^2 + 7x + 12$$

となる。逆に $x^2 + 7x + 12$ は

$$(x+3)(x+4)$$

と表されることがわかる。このように、1つの多項式をいくつかの多項式の積で表すことを**因数分解する**という。ここで、 $x+3$ と $x+4$ を $x^2 + 7x + 12$ の**因数**という。

例1 $x^2 + 14x + 45$ を因数分解せよ。

$$x^2 + 14x + 45 = (x + \bigcirc)(x + \square)$$

としたい。

右辺を展開すると $x^2 + (\bigcirc + \square)x + \bigcirc \times \square$ となる。両辺を比較して、

$$\bigcirc + \square = 14$$

$$\bigcirc \times \square = 45$$

となる \bigcirc と \square を見つければよいことがわかる。

\bigcirc を5、 \square を9にすれば、和が14、積が45となるから、

$$x^2 + 14x + 45 = (x + 5)(x + 9).$$

問1 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 8x + 15$

(2) $x^2 + 6x + 5$

(3) $x^2 + 10x + 21$

(4) $x^2 - 11x + 24$

(5) $x^2 + 2x - 15$

(6) $x^2 - 6x - 7$

例2 次に、 $2x^2 + 11x + 15$ のように、 x^2 の係数が1以外の2次式の因数分解を考えてみる。

$$2x^2 + 11x + 15 = (x + \bigcirc)(2x + \square)$$

とおくと

$$2 \times \bigcirc + \square = 11$$

$$\bigcirc \times \square = 15$$

となる。

\bigcirc と \square は図-1のような図式で見つけることができる。

$$\begin{array}{r} 2 \quad 15 \\ \hline 1 \quad \textcircled{3} \rightarrow 6 \\ 2 \quad \boxed{5} \rightarrow 5 \quad (+) \\ \hline 11 \end{array}$$

図-1 \bigcirc と \square を見つける

問2 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2 + 5x + 2$

(2) $4x^2 + 16x + 15$

(3) $2x^2 - 5x - 3$

(4) $3x^2 - 4x - 4$

(5) $3x^2 - 10x + 3$

(6) $6x^2 - x - 2$

< 因数分解 5 >

$m(a+b)$ を展開すると、 $ma+mb$ になる。したがって、

$ma+mb$ は $m(a+b)$ と因数分解される。

すなわち、多項式の中に共通の因数があれば、それを括弧(カッコ)の外にくくり出すことによって因数分解ができる。

例1 $3xy^2+6x^2y$ を因数分解せよ。

$3xy$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$3xy^2+6x^2y=3xy(y+2x)$$

と因数分解できる。

例2 $x(3a+5)-y(3a+5)$ を因数分解せよ。

$(3a+5)$ が共通の因数であるので、これをくくり出して

$$x(3a+5)-y(3a+5)=(3a+5)(x-y)$$

と因数分解できる。

次に、 a^2-b^2 は $(a+b)(a-b)$ と因数分解される。

すなわち、多項式が2乗の差の形をしている場合は、和と差の積として因数分解できる。

問1 次の式を因数分解せよ。

(1) $3ax^2-27a$

(2) $2a^3-18ab^2$

(3) $(x-y)a+(y-x)b$

(4) $ax^2-5ax+6a$

(5) $(a-b)x^2-(a-b)y^2$

(6) $11x^2-99$

問2 次の式を因数分解せよ。

(1) $2x^2y+6xy^2$

(2) $(a+2b)^2-3(a+2b)$

(3) $9x^2-49$

(4) $(x+y)a-(x+y)b$

(5) $3a^2-75b^2$

(6) $1-9x^2$

< 2次方程式の解の公式 >

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求める。以下の①~⑥の順に式変形せよ。

① x^2 の係数を1にするために、両辺を a で割ると

② 定数項を右辺に移項すると

③ 両辺に、 x の係数の半分の2乗を加えると

④ 左辺を平方の形 $(x + \square)^2$ にすると

⑤ 両辺の平方根をとると

⑥ 解は

問 解の公式を使って次の方程式を解け。

(1) $x^2 + x - 1 = 0$

(2) $2x^2 + 2x - 1 = 0$

< 2次方程式 >

2次方程式

$$x^2 = 1, \quad x^2 + 2x + 1 = 0, \quad 3x^2 - 5x = 1$$

のように x^2 を含む方程式を2次方程式といい、 x のように未知の値を表す文字を**未知数**という。

次に、未知数 x の値を**解**といい、**解を求めることを方程式を解く**という。

(1) 因数分解による方法

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

左辺を因数分解すると

$$(x + 3)(2x - 1) = 0$$

となるから

$$x + 3 = 0 \quad \text{または} \quad 2x - 1 = 0$$

したがって

$$x = -3 \quad \text{または} \quad x = \frac{1}{2}$$

(2) 解の公式による方法

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は、

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{と} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の2つである。これを解の公式という。

問 次の方程式を解け。

(1) $(x + 2)(3x - 4) = 0$

(2) $x(x + 7) = 0$

(3) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(5) $x^2 = 12$

(6) $(x + 3)^2 = 2$

(7) $x^2 + 5x + 1 = 0$

(8) $3x^2 - 7x + 3 = 0$

(9) $12x - 4 = x^2$

(10) $x^2 - 9 = 8x$

< 2次方程式の応用 1 >

問 1 2 つの正の整数があり, その差は 4 で, 積が 96 である。この 2 数を求めよ。

問 2 n 角形の対角線は $\frac{n(n-3)}{2}$ 本ある。対角線が 20 本ある対角線は何角形か。

問 3 一辺の長さが 1 である正五角形の対角線の長さ x を求めたい。

- (1) $AC = AD = BD = BE = x$ である。
線分 BE と CD は平行であり,
線分 AC と DE も平行である。
次の長さを数字または x を用いて表せ。

① $FE =$

② $BF =$

③ $EH =$

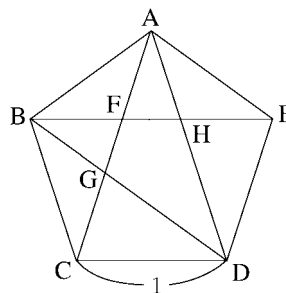
④ $FH =$

⑤ $FG =$

- (2) 三角形 ACD と三角形 BFG は相似だから

$$AD : CD = BF : FG$$

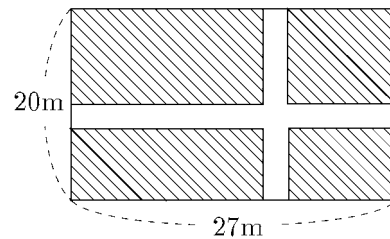
より x に関する 2 次方程式を導き、 x を求めよ。



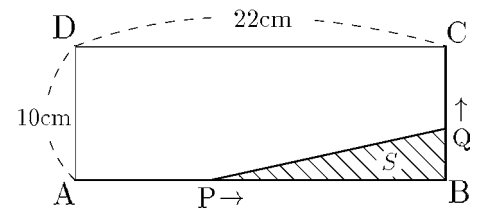
< 2次方程式の応用 2 >

問1 周囲の長さが40cmで、面積が 96cm^2 の長方形を作りたい。この長方形の2辺の長さをどれだけにすればよいか。

問2 縦が20m、横が27mの長方形の畑がある。これに右図のように、縦と横に同じ幅の道をつくり、残った畑の面積が 450m^2 になるようにしたい。道幅を何mにすればよいか。



問3 $AB = 22\text{cm}$, $BC = 10\text{cm}$ の長方形ABCDがある。点Pは、辺AB上をAからBまで毎秒2cmの速さで動く。同時に、点Qは、辺BC上をBからCまで毎秒1cmの速さで動く。



(1) x 秒後の $\triangle PBQ$ の面積 S を x で表せ。

(2) $S = 28\text{cm}^2$ となるのは何秒後か。

問4 速さ 60m/s で、物体を真上に投げ上げるとき、始めから t 秒後の高さを h mとすると、およそ

$$h = 60t - 5t^2$$

となる。

(1) 6秒後の高さを求めよ。

(2) この物体の高さが 175m となるのは何秒後か。

(3) もとの位置にもどってくるのは何秒後か。

< 2次方程式と因数分解 >

2次方程式の解と因数分解の関係は

$x^2 + \square x + \triangle = 0$ の解が α と β $\iff x^2 + \square x + \triangle = (x - \alpha)(x - \beta)$ となる。

例1 $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は $x = -3$ と $x = 1$ であるから

$$x^2 + 2x - 3 = (x - (-3))(x - 1) = (x + 3)(x - 1)$$

と因数分解できる。

例2 $x^2 - x - 1 = 0$ の解は $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ であるから

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

と因数分解できるはずである。

問1 次を展開せよ。(途中式も書くこと)

$$\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

例3 $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2(x + 3)(x - 1)$

この式は例1の結果を使った。

(注) $2x^2 + 4x - 6 = 0$ の解と $x^2 + 2x - 3 = 0$ の解は同じ。

一般に

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解が } x = \alpha \text{ または } x = \beta} \cdots (1)$$

であれば

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)} \cdots (2)$$

と因数分解できる。逆に(2)であれば(1)がわかる。

問2 次式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2x - 3$

(2) $x^2 + 3x - 4$

(3) $x^2 - 3$

(4) $x^2 - x - 4$

(5) $2x^2 - 6x - 20$

(6) $3x^2 + 3x - 18$

(7) $9x^2 + 6x + 1$

(8) $3x^2 - 5x - 2$

< 因数定理 >

例1 2次式 $f(x) = x^2 - 7x + 10$ を因数分解したい。 $x = 2$ を代入すると

$$f(2) = 2^2 - 7 \times 2 + 10 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 2) \times (x + \square)$$

の形であれば $f(2) = 0$ となる。そこで $x - 2$ で割ると右の筆算より

$$\frac{f(x)}{x-2} = \frac{x^2 - 7x + 10}{x-2} = x - 5$$

$$\begin{array}{r} x-5 \\ x-2 \overline{) x^2 - 7x + 10} \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -5x + 10 \\ \underline{-5x + 10} \\ 0 \end{array}$$

となるから

$$\underline{f(x) = x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \times (x - 5)}$$

例2 3次式 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ を因数分解したい。 $x = 1$ を代入する。

$$f(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 23 \times 1 - 15 = 1 - 9 + 23 - 15 = 0$$

である。もし

$$f(x) = (x - 1)(x^2 + \triangle x + \square)$$

の形であれば $f(1) = 0$ となる。そこで $x - 1$ で割ると右の筆算より

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{x^3 - 9x^2 + 23x - 15}{x-1} = x^2 - 8x + 15$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 8x + 15 \\ x-1 \overline{) x^3 - 9x^2 + 23x - 15} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -8x^2 + 23x \\ \underline{-8x^2 + 8x} \\ 15x - 15 \\ \underline{15x - 15} \\ 0 \end{array}$$

より

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1) \times (x^2 - 8x + 15)$$

となる。2次式 $x^2 - 8x + 15$ をさらに因数分解すると $(x - 3)(x - 5)$ となるから

$$\underline{x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = (x - 1)(x - 3)(x - 5)}$$

一般に関数 $f(x)$ が n 次の整式するとき、 $x = a$ を代入して $f(a) = 0$ となれば $f(x)$ は $x - a$ で割り切れる。すなわち

$$\boxed{f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - a) \times ((n - 1) \text{ 次の整式})} \quad (\text{因数定理})$$

と表される。これを**因数定理**という。

問 次の3次式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

(2) $x^3 - 6x + 5$

< 3次方程式 >

例1 3次方程式

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \quad \dots \quad (1)$$

を考える。前ページより因数分解すると

$$(x-1)(x-3)(x-5) = 0$$

より(1)の解は $x=1$ または $x=3$ または $x=5$ である。

例2 3次方程式

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-1)(x-2)^2 = 0$$

より(2)の解は $x=1$ または $x=2$ である。

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ x-1 \overline{) x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -4x^2 + 8x \\ \underline{-4x^2 + 4x} \\ 4x - 4 \\ \underline{4x - 4} \\ 0 \end{array}$$

例3 3次方程式

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

を考える。因数定理を用いて因数分解すると

$$(x-2)^3 = 0$$

より(3)の解は $x=2$ である。

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 4 \\ x-2 \overline{) x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -4x^2 + 12x \\ \underline{-4x^2 + 8x} \\ 4x - 8 \\ \underline{4x - 8} \\ 0 \end{array}$$

問 次の3次方程式の解を求めよ。

$$(1) x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$(2) x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(3) x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(4) x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$

< 解答 1 ~ 7 >

< 1 ページ. 割合 >

問1の解答

(1) 7割3分, 73% (2) 4割2分5厘, 42.5%

問2の解答

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{5}$ (4) $\frac{3}{5}$ (5) $\frac{1}{2}$

< 2 ページ. 比と比列配分 >

問1の解答

$$3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ (cm)}$$

問2の解答

$$DE = 4 \times \frac{4}{7} = \frac{16}{7} \text{ (cm)}$$

$$AE = 5 \times \frac{4}{7} = \frac{20}{7} \text{ (cm)}$$

問3の解答

$$6000 \times \frac{5}{8} = \frac{300000}{8} = 37500 \text{ (円)}$$

< 3 ページ. 累乗 >

問1の解答

(1) 10^3 (2) 7^5 (3) $(-2)^3 \times 3^4$

問2の解答

(1) 1 (2) -1 (3) 1 (4) -1
(5) -16 (6) 16 (7) -25 (8) -48
(9) 81000 (10) 200 (11) 729 (12) 4

< 4 ページ. 素因数分解 >

問1の解答

(1) 1, 2, 3, 6, 9, 18
(2) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

問2の解答

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

問3の解答

(1) $2^2 \times 17$ (2) $2^2 \times 3^3$ (3) $2^2 \times 5 \times 7$
(4) $2^4 \times 3^2$ (5) $2^2 \times 3 \times 13$ (6) $2^2 \times 7^2$
(7) $3^2 \times 5^2$ (8) $2^2 \times 3^4$ (9) 2^9
(10) 2^{10} (11) $2^4 \times 3^4$ (12) $2^9 \times 3$

< 5 ページ. 分数と少数 1 >

問1の解答

(1) $\frac{2}{10} \times \frac{13}{10} = 0.26$
(2) $\frac{4}{10} \times \frac{15}{100} = 0.06$
(3) $\frac{3}{100} \times \frac{104}{100} = 0.0312$

問2の解答

(1) $\frac{6}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{5}$, 検算: $\frac{8}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{5}$
(2) $\frac{5}{12} \div \frac{8}{3} = \frac{5}{32}$, 検算: $\frac{5}{32} \times \frac{8}{3} = \frac{5}{12}$
(3) $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{24}$, 検算: $\frac{5}{24} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{8}$
(4) $\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{12}} = \frac{18}{35}$, 検算: $\frac{18}{35} \times \frac{7}{12} = \frac{3}{10}$

< 6 ページ. 分数と少数 2 >

問1の解答

(1) $\frac{1}{2} = 0.50$, $\frac{1}{3} = 0.33$, $\frac{5}{6} = 0.83$, $\frac{2}{5} = 0.40$
(2) $\frac{3}{4} = 0.75$, $\frac{5}{6} = 0.83$, $\frac{8}{10} = 0.80$, $\frac{19}{12} = 1.58$
(3) $\frac{1}{6} = 0.16$, $\frac{1}{2} = 0.50$, $\frac{2}{8} = 0.25$, $\frac{2}{3} = 0.66$
(4) $\frac{11}{12} = 0.91$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{12}{16} = 0.75$, $\frac{7}{6} = 1.16$

問2の解答

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{19}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{7}{24}$
(5) $\frac{29}{12}$ (6) $\frac{65}{24}$ (7) $\frac{11}{10}$ (8) $\frac{11}{24}$
(9) $\frac{5}{3}$ (10) 2 (11) $\frac{2.5}{8} = \frac{5}{16}$ (12) $\frac{1}{3}$

< 7 ページ. 分数と少数 3 >

問の解答

(1) $\frac{1}{7} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} < 0.2$
(2) $\frac{3}{2} + \frac{1}{3} < \frac{17}{9} < 1.9$
(3) $-\frac{3}{4} - \frac{2}{5} < -1.13 < -\frac{9}{8}$
(4) $\frac{1}{3} < 0.34 < \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$
(5) $-\frac{1}{6} - \frac{3}{4} < -\frac{8}{9} < -\frac{7}{8}$
(6) $\frac{5}{6} + \frac{3}{2} < \frac{25}{8} - \frac{3}{4} < \frac{12}{5}$

< 解答 8 ~ 14 >

< 8 ページ. 通分 >

問の解答

$$\begin{array}{lll}
 (1) \frac{7}{24} & (2) \frac{23}{36} & (3) \frac{3}{8} \\
 (4) \frac{2x+3y}{6} & (5) \frac{2a-3b}{24} & (6) \frac{3x+y}{6} \\
 (7) \frac{3y-ax}{3x} & (8) \frac{bc+ad}{ac} & (9) \frac{yz+xz+xy}{xyz}
 \end{array}$$

< 9 ページ. 分数の簡略化 >

問の解答

$$\begin{array}{lll}
 (1) \frac{5}{7} & (2) \frac{3}{2} & (3) \frac{1}{7} \\
 (4) \frac{12}{13} & (5) \frac{ad}{bc} & (6) \frac{xy}{zw} \\
 (7) \frac{xz}{yz+xw} & (8) \frac{1}{bc-ad} & (9) \frac{abc}{bc+ac+ab}
 \end{array}$$

< 10 ページ. 数としての文字 >

問 1 の解答

$$y = 5, z = 10, w = 2$$

問 2 の解答

$$(1) \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = 1 \\ w = 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \\ z = 8 \\ w = 1 \end{cases}$$

問 3 の解答

$$x = 12, y = 9, z = 4$$

< 11 ページ. 1 次方程式 >

問の解答

$$\begin{array}{lll}
 (1) x = \frac{1}{3} & (2) x = -6 & (3) x = 6 \\
 (4) x = \frac{7}{3} & (5) x = 1 & (6) x = \frac{12}{7} \\
 (7) x = -2 & (8) x = \frac{9}{10} & (9) x = -11 \\
 (10) x = \frac{23}{3} & (11) x = 2 & (12) x = -1 \\
 (13) x = 7 & (14) x = \frac{3}{2} &
 \end{array}$$

< 12 ページ. 1 次方程式の応用 >

問 1 の解答

リンゴ 1 個 80 円

(答) みかん 1 個 60 円

問 2 の解答

本 : x 円

$$A \text{ の残金 : } 4800 - x = 2(3600 - x)$$

$$4800 - x = 7200 - 2x$$

$$x = 7200 - 4800 = 2400$$

(答) 2400 円

問 3 の解答

部屋数 : x 円

$$A \text{ の残金 : } 7x + 6 = 8(x - 1) + 5$$

$$7x + 6 = 8x - 3$$

$$x = 9$$

部屋数 9 室

(答) 生徒数 69 人

< 13 ページ. 連立 1 次方程式 >

問の解答

$$(1) x = 2, y = 3 \quad (2) x = 4, y = -2$$

$$(3) x = -2, y = 3 \quad (4) x = 5, y = 4$$

< 14 ページ. 連立 1 次方程式の応用 1 >

問 1 の解答

A4 版ノート 7 冊

(答) B5 版ノート 13 冊

問 2 の解答

大人 60 人

(答) 子供 40 人

問 3 の解答

昨年度男生徒 : x 人昨年度女生徒 : y 人

昨年度男生徒 400 人

$$x + y = 600$$

昨年度女生徒 200 人

$$1.03x + 0.97y = 606$$

今年男生徒 412 人

(答) 今年女生徒 194 人

< 解答 15 ~ 21 >

< 15 ページ. 連立1次方程式の応用 2 >

問1の解答

リンゴ 30 個

(答) みかん 50 個

問2の解答

鉛筆 1 本 60 円

(答) ノート 1 冊 130 円

問3の解答

(答) 1100 円

< 16 ページ. 3元連立1次方程式 >

問1の解答

ケーキ x (円), プリン y (円), ドーナツ z (円) とすると

$$x + 2y + 3z = 390$$

$$2x + 3y + z = 460$$

$$3x + 4y + 2z = 680$$

これを解くと, $x = 100$, $y = 70$, $z = 50$

(答) ケーキ 100 (円), プリン 70 (円), ドーナツ 50 (円)

問2の解答

100 円硬貨 x (g), 50 円硬貨 y (g), 1 円硬貨 z (g) とすると

$$x + y + z = 10$$

$$2x + 3y + 4z = 26$$

$$3x + y + 2z = 21$$

これを解くと, $x = 5$, $y = 4$, $z = 1$

(答) 100 円硬貨は 5 (g), 50 円硬貨は 4 (g), 1 円硬貨は 1 (g)

< 17 ページ. 省略記号の変更 >

問1の解答

(1) $5x$ (2) $6x^2y^5$

(3) $a^3 - 3a^2b$ (4) $12x^3 - 9x^2y$

問2の解答

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{21}{5}$ (4) $\frac{20}{3}$

< 18 ページ. 文字式のきまり >

問の解答

(1) $6a^2b^3x$ (2) $x - 8y + xy$

(3) $\frac{2y}{5x}$ (4) $\frac{3b^2}{4a}$

(5) $3x^2y$ (6) $9b^2$

< 19 ページ. 等式の変形 >

問の解答

(1) $R = \frac{E}{I}$

(2) $P = \frac{2\pi R}{V}$

(3) $T_1 = T_2 - \frac{LH}{KA}$

(4) $N = 9.74 \times 10^5 \frac{P}{T}$

(5) $\alpha = \frac{\sigma}{E(t - \tau)}$

(6) $E = 2(1 + \mu)G$

(7) $\psi = \frac{\lambda\omega}{\lambda + \omega}$

(8) $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}$

(9) $v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$

(10) $x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$

< 20 ページ. 文字式の展開 1 >

問1の解答

(1) $S = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $S = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

問2の解答

$$S = a^2 - b^2$$

$$= (a + b)(a - b)$$

< 21 ページ. 文字式の展開 2 >

問の解答

(1) $a^2 - 2ab + b^2$

(2) $a^2 + ab + ac + bc$

(3) $a^2 + ab - ac - bc$

(4) $a^2 - ab - ac + bc$

(5) $b^2 - a^2$

(6) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

(7) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

(8) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

< 解答 22 ~ 29 >

< 22 ページ. 文字式の展開 3 >

問の解答

$$(1) a^3 + b^3 \qquad (2) a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(3) a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 \qquad (4) a^4 - b^4$$

$$(5) a^4 - 2a^2b^2 + b^4$$

< 23 ページ. ピタゴラスの定理 1 >

問の解答

図5の全体の面積は $(a+b)^2$ であるがそれは斜線部分の4つの直角三角形(面積 $\frac{ab}{2} \times 4$)と内部の正方形(面積 c^2)の和であるから

$$\frac{ab}{2} \times 4 + c^2 = (a+b)^2$$

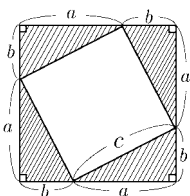
より移項して展開すると求める式が得られる。

$$c^2 = (a+b)^2 - \frac{ab}{2} \times 4$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$= a^2 + b^2$$

(証明終)



(図5)

< 24 ページ. ピタゴラスの定理 2 >

問の解答

$$(1) c = 13 \qquad (2) b = 12 \qquad (3) a = 8$$

$$(4) b = 30 \qquad (5) a = 11$$

< 25 ページ. 平方根 1 >

問1の解答

$$(1) 4 \qquad (2) 16 \qquad (3) \frac{6}{7} \qquad (4) \frac{1}{2} (= 0.5)$$

問2の解答

$$OD = 2 \quad , \quad OE = \sqrt{5} \quad , \quad OF = \sqrt{6} \quad , \quad OG = \sqrt{7}$$

< 26 ページ. 平方根 2 >

問1の解答

$$(1) \sqrt{3} + \sqrt{2} \qquad (2) 6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$$

$$(3) 7\sqrt{5} \qquad (4) -\sqrt{5} + 5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$$

問2の解答

$$(1) 11 \quad , \quad (2) 5 \quad , \quad (3) \frac{2}{3} \quad , \quad (4) 0.12$$

問3の解答

$$(1) \sqrt{6} \quad , \quad (2) \sqrt{35} \quad , \quad (3) 2\sqrt{11} \quad , \quad (4) 6$$

< 27 ページ. 平方根 3 >

問1の解答

$$(1) 3\sqrt{2} \qquad (2) 2\sqrt{10} \qquad (3) 5\sqrt{3}$$

$$(4) 4\sqrt{5} \qquad (5) 7\sqrt{3}$$

問2の解答

$$(1) 10 \qquad (2) 21 \qquad (3) 42$$

問3の解答

$$(1) 2 \qquad (2) 3\sqrt{3} \qquad (3) 3\sqrt{3}$$

< 28 ページ. 平方根 4 >

問1の解答

$$(1) 7 + 2\sqrt{10} \qquad (2) 8 + 4\sqrt{3} \qquad (3) 5 - 2\sqrt{6}$$

$$(4) 9 - 6\sqrt{2} \qquad (5) 3 \qquad (6) 1$$

問2の解答

$$(1) \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (2) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3) \sqrt{3} \quad (4) \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad (5) \frac{\sqrt{2}}{3}$$

問3の解答

$$(1) 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \qquad (2) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$$

$$(3) \frac{3(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \qquad (4) 5 - 2\sqrt{6}$$

< 29 ページ. 数の表示 1 >

問1の解答

$$\textcircled{1} (10)_{10} \quad \textcircled{2} (27)_{10} \quad \textcircled{3} (156)_{10}$$

$$\textcircled{4} (455)_{10} \quad \textcircled{5} (1025)_{10}$$

問2の解答

$$\textcircled{1} (25)_8 \quad \textcircled{2} (55)_8 \quad \textcircled{3} (117)_8 \quad \textcircled{4} (234)_8$$

問3の解答

$$\textcircled{1} 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} \quad \textcircled{2} 1 + \frac{5}{8} \quad \textcircled{3} 5 + \frac{7}{8} + \frac{3}{8^2}$$

< 解答 30 ~ 37 >

< 30 ページ. 数の表示 2 >

問1の解答

$a + b + c = 3n$ (n は自然数) とおく、

$$\begin{aligned}(abc)_{10} &= 100a + 10b + c \\ &= 99a + 9b + (a + b + c) \\ &= 3(33a + 3b) + 3n = 3(33a + 3b + n)\end{aligned}$$

より $(abc)_{10} = 3 \times (33a + 3b + n)$ は 3 の倍数になる。
(証明終)

問2の解答

$a + b + c = (x - 1)n$ (n は自然数) とおく、

$$\begin{aligned}(abc)_x &= ax^2 + bx + c = a(x^2 - 1) + b(x - 1) + a + b + c \\ &= a(x - 1)(x + 1) + b(x - 1) + (x - 1)n \\ &= (x - 1)\{a(x + 1) + b + n\}\end{aligned}$$

より $(abc)_x = (x - 1)\{a(x + 1) + b + n\}$ は
 $(x - 1)$ の倍数になる。
(証明終)

< 31 ページ. 整式 1 >

問の解答

$$(abcd)_x = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

< 32 ページ. 整式 2 >

問の解答

$$\begin{array}{ll}(1) x^2 + 5x + 3 & (2) -2x^2 + 3x - 3 \\ (3) x^2 - x - 6 & (4) -20x^2 + 39x - 18\end{array}$$

< 33 ページ. 整式 3 >

問1の解答

$$(1) -2x^2 + 9x - 13 \quad (2) -15x^2 + 17x - 4$$

問2の解答

$$\begin{array}{ll}(1) x^2 + 2ax + a^2 & (2) x^2 - 2ax + a^2 \\ (3) x^2 - a^2 & (4) x^2 - (a + b)x + ab \\ (5) x^3 - a^3 & (6) x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3\end{array}$$

< 35 ページ. 整式の除法 2 >

問1の解答

$$\begin{array}{r} \boxed{3}x + \boxed{2} \quad \text{----- 商} \\ 2x + 1 \overline{) 6x^2 + 7x + 3} \\ \underline{\boxed{6}x^2 + \boxed{3}x} \\ \boxed{4}x + 3 \\ \underline{\boxed{4}x + \boxed{2}} \\ \boxed{1} \quad \text{----- 余り} \end{array}$$

問2の解答

- (1) 商 $x + 3$, 余り 3
(2) 商 $3x - 1$, 余り 9
(3) 商 $x^2 + x + 2$, 余り 5
(4) 商 $2x + 7$, 余り $x - 13$
(5) 商 $x^2 + 2x + 4$, 余り 0

< 36 ページ. 整式の除法 3 >

問の解答

$$\begin{array}{ll}(1) x + 2 - \frac{2}{x + 1} & (2) x + 5 + \frac{15}{x - 2} \\ (3) 2x - 1 - \frac{2}{x - 1} & (4) x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x - 3}\end{array}$$

< 37 ページ. 方程式と恒等式 >

問1の解答

$$\begin{array}{lll}(1) x = 0 \text{ のとき} & (x + 2)(x + 3) = 6 & x^2 + 5x + 6 = 6 \\ (2) x = 1 \text{ のとき} & (x + 2)(x + 3) = 12 & x^2 + 5x + 6 = 12 \\ (3) x = 2 \text{ のとき} & (x + 2)(x + 3) = 20 & x^2 + 5x + 6 = 20 \\ (4) x = 3 \text{ のとき} & (x + 2)(x + 3) = 30 & x^2 + 5x + 6 = 30 \\ (5) x = 4 \text{ のとき} & (x + 2)(x + 3) = 42 & x^2 + 5x + 6 = 42\end{array}$$

問2の解答

$$\begin{array}{ll}(1) x^2 + 2\alpha x + \alpha^2 & (2) x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 \\ (3) x^2 - \alpha^2 & (4) x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\ (5) x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta & (6) x^2 + (\alpha - \beta)x - \alpha\beta\end{array}$$

問3の解答

- (1) 方程式 (2) 恒等式 (3) 恒等式 (4) 方程式

< 解答 38 ~ 44 >

< 38 ページ. 因数分解 1 >

問の解答

- (1) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
 (2) $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
 (3) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$
 (4) $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

< 39 ページ. 因数分解 2 >

問の解答

- (1) $(x + \alpha)^2$ (2) $(x - \alpha)^2$
 (3) $(x - \alpha)(x + \alpha)$ (4) $(x - \alpha)(x - \beta)$
 (5) $(x + \alpha)(x - \beta)$

< 40 ページ. 因数分解 3 >

問の解答

- (1) $(x + 3)^2$ (2) $(x - 5)^2$
 (3) $(x + 6)^2$ (4) $(x - 3)(x + 3)$
 (5) $(x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})$ (6) $(x - 1)(x + 1)$
 (7) $(x + 1)(x + 2)$ (8) $(x + 2)(x + 3)$
 (9) $(x + 2)(x + 5)$ (10) $(x + 3)(x + 4)$

< 41 ページ. 因数分解 4 >

問 1 の解答

- (1) $(x + 3)(x + 5)$ (2) $(x + 1)(x + 5)$
 (3) $(x + 3)(x + 7)$ (4) $(x - 3)(x - 8)$
 (5) $(x - 3)(x + 5)$ (6) $(x + 1)(x - 7)$

問 2 の解答

- (1) $(2x + 1)(x + 2)$ (2) $(2x + 3)(2x + 5)$
 (3) $(2x + 1)(x - 3)$ (4) $(x - 2)(3x + 2)$
 (5) $(x - 3)(3x - 1)$ (6) $(2x + 1)(3x - 2)$

< 42 ページ. 因数分解 5 >

問 1 の解答

- (1) $3a(x + 3)(x - 3)$ (2) $2a(a + 3b)(a - 3b)$
 (3) $(x - y)(a - b)$ (4) $a(x - 2)(x - 3)$
 (5) $(a - b)(x + y)(x - y)$ (6) $11(x + 3)(x - 3)$

問 2 の解答

- (1) $2xy(x + 3y)$ (2) $(a + 2b)(a + 2b - 3)$
 (3) $(3x + 7)(3x - 7)$ (4) $(x + y)(a - b)$
 (5) $3(a + 5b)(a - 5b)$ (6) $(1 + 3x)(1 - 3x)$

< 43 ページ. 2 次方程式の解の公式 >

- ① $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
 ② $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
 ③ $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$
 ④ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
 ⑤ $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 ⑥ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

問の解答

- (1) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ (2) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

< 44 ページ. 2 次方程式 >

問の解答

- (1) $x = -2, \frac{4}{3}$ (2) $x = 0, -7$
 (3) $x = 3, -5$ (4) $x = 2, 4$
 (5) $x = \pm 2\sqrt{3}$ (6) $x = -3 \pm \sqrt{2}$
 (7) $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ (8) $x = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$
 (9) $x = 6 \pm 4\sqrt{2}$ (10) $x = -1, 9$

< 解答 45 ~ 49 >

< 45 ページ.2 次方程式の応用 1 >

問1の解答

2数を a, b とすると $(a \leq b)$

$$a - b = 4$$

$$ab = 96$$

これを解いて

$$a = 12, b = 8 \quad \underline{8, 12}$$

問2の解答

$$\frac{n(n-3)}{2} = 20$$

$$n(n-3) = 40$$

$$n^2 - 3n - 40 = 0$$

$$(n+5)(n-8) = 0$$

$$n = 8$$

8 角形

問3の解答

(1) ① FE=1

② BF= $x-1$

③ EH= $x-1$

④ FH= $2-x$

⑤ FG= $2-x$

(2) $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

< 46 ページ.2 次方程式の応用 2 >

問1の解答

8cm と 12cm

問2の解答

道幅を x (m) とすると

$$(20-x)(27-x) = 450$$

$$x = 45, 2$$

$$0 < x < 20 \text{ より } \underline{x = 2}$$

問3の解答

(1) $S = -x^2 + 11x$

(2) 4 秒後, 7 秒後

問4の解答

(1) 180 (m)

(2) $\begin{cases} 5 \text{ 秒後} \\ 7 \text{ 秒後} \end{cases}$

(3) 12 秒後

< 47 ページ.2 次方程式と因数分解 >

問1の解答

$$x^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= x^2 - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}x + \frac{(1+\sqrt{5}) \times (1-\sqrt{5})}{2 \times 2}$$

$$= x^2 - \frac{2}{2}x + \frac{1^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = x^2 - x - 1$$

問2の解答

(1) $(x-3)(x+1)$

(2) $(x+4)(x-1)$

(3) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

(4) $\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$

(5) $2(x-5)(x+2)$

(6) $3(x+3)(x-2)$

(7) $(3x+1)^2 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

(8) $(3x+1)(x-2)$

< 48 ページ. 因数定理 >

問の解答

(1) $(x^2-1)(x-3) = (x-3)(x-1)(x+1)$

(2) $(x-1)(x^2+x-5)$

$$= (x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 5 \\ x-1 \overline{) x^3 - 6x + 5} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 6x + 5 \\ \underline{x^2 - x} \\ -5x + 5 \\ \underline{-5x + 5} \\ 0 \end{array}$$

< 49 ページ.3 次方程式 >

問の解答

(1) $x = -3$ または $x = -1$ または $x = 1$

(2) $x = -3$ または $x = -1$ または $x = 2$

(3) $x = -2$ または $x = 1$

(4) $x = -1$