大学数学への道

基礎数学
シリーズ 2

TEXclub

『関数』が
よくわからないときに開く本

改訂版

例題で式の計算がよくわかる！

内容

- ★1次関数
- ★2次関数
- ★指数関数
- ★対数関数

井上昌昭　山﨑和雄 著

高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

＜関数の意味＞

関数

　ある量とそれにともなって変わる他の量があり，それぞれを変数（いろいろな値をとる文字のこと）x，y で表す。x **の値をきめるとそれに応じて** y **の値もきまるとき**，y **は** x **の関数である**という。

例 1　ある車は，ガソリン 1 リットルで 15km 走行できる。このとき，この車はガソリン x リットルで走行できる距離を y km とすると，$y = 15x$ と表すことができる。

例 2　風呂に水を入れるとき，水の深さとその時間がわかれば水を入れ始めてから何分後に水を止めればよいか推測できる。

例 3　気温は，上空へ行けば行くほど低くなる。調査の結果

1km 高くなると　6 ℃だけ気温が下がる

ということがわかった。地上の気温が 15 ℃のとき，高さ x km の場所の気温を y ℃とする。高さを決めると，そのときの気温がきまるから，この働きは関数になっている。この関係を式で表すと

$$y = 15 - 6x$$

となる。

問 1　50 リットルのお湯がたまっているバスタブに，1 分間に 10 リットルの割合でお湯を入れる。x 分後にたまったお湯の量を y リットルとする。y を x の式で表せ。

問 2　長さ 30cm のろうそくに火をつけたら，毎分 $\dfrac{1}{3}$ cm の速さで短くなっていった。火をつけてから x 分後の長さを y cm とするとき，y を x の式で表せ。

＜いろいろな関数＞

問 1　時速 36km で走っている車が x 秒間に ym 走ったとする。次の表を完成し，y を x で表せ。

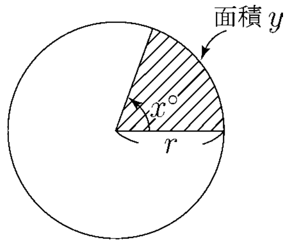
			1分		1時間	
時間 (秒) x	1	10	60	600		x
距離 (m) y					36000	

$y =$

問 2　周の長さが 8 cm である長方形の縦の長さを x cm とし，そのときの長方形の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする。　y を x で表せ。

問 3　半径 r (cm)，中心角 x° の扇形の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ とする。次の表を完成し，y を r と x で表せ。

中心角　x°	1°	10°	30°	45°	90°	180°	360°	x°
面 積　$y\,\mathrm{cm}^2$							πr^2	



問 4　ばねに重りをひっかけて，ばねの長さを計ったら次の表のようになった。

重り	100 g	600 g	1 kg	1.3 kg	1.7 kg
ばねの長さ (cm)	15.2	16.2	17	17.6	18.4

x kg の重りをひっかけたときのばねの長さを y cm とする。y を x で表せ。

問 1，問 3，問 4 のように y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数**という。問 2 のように y が x の 2 次式で表されるとき,y は x の **2 次関数**という。

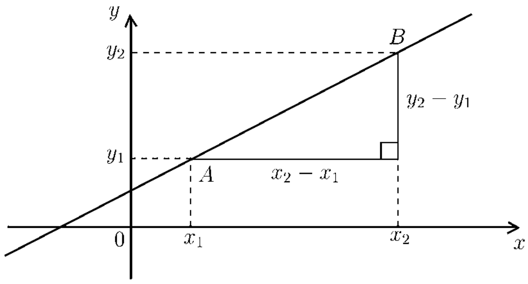
また問 1，問 3 のように $y =$ (定数) $\times\, x$ の形で表されるとき **y は x に比例する**という。

< 傾きの意味 (直線の傾き) >

あなたは，直線というと何を思い浮かべますか。ピンと張った糸，まっすぐな棒などでしょうか。数学では，直線は平面上の異なる 2 点を結ぶ最短の図形，または平面と平面が交わってできる図形であると考えています。

では，平面に描かれたいろいろな直線にある共通な性質として，傾きということを考えてみます。平面上に x 軸，y 軸をとる。そのとき，平面上の異なる 2 点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ を通る直線の傾き m を

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$



と決めます。これは坂道の勾配を表していると考えてもよいでしょう。
また，定点 $A(a,b)$ を通る直線上の任意の点を $P(x,y)$ とするとその直線の傾き m は

$$\frac{y-b}{x-a}=m$$

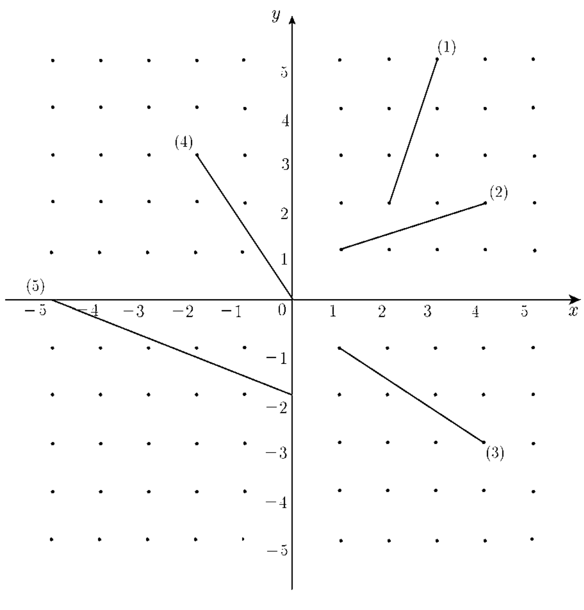
となる。この両辺に $x-a$ をかけると次式が得られる。

$$y-b=m(x-a)$$

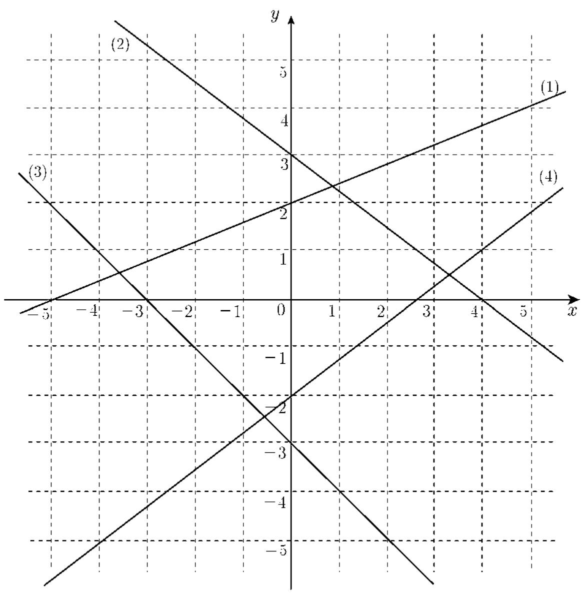
この式は定点 (a,b) を通り傾きが m である直線の式を表すことになる。

また，傾きが同じ直線は同じ性質を持つ直線と考えてよい。なぜなら，平行移動すれば重なるからである。

問 1　(1)〜(5) の線分の傾きを求めよ。



問 2　(1)〜(4) の直線の傾きを求めよ。



＜１次関数のグラフ１＞

座標軸を書きこんだ平面上に直線があり,
この直線は，x 軸の正の方向に１増加すると，
y 軸の正の方向には m 増加したとする。
このようなとき，m を直線の傾きという。
また,

$$\frac{(y\text{ の増加量})}{(x\text{ の増加量})} = m \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

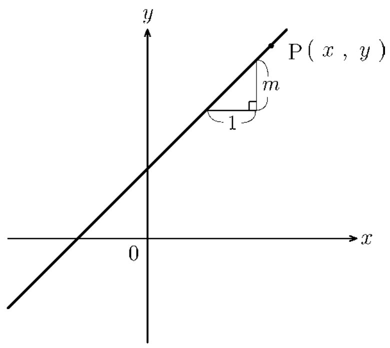
と考えてもよい。
したがって，右の図-1 と図-2 を見比べてみると，
点 (a , b) を通り傾き m の直線の式は
①の式を利用して,

$$\frac{y-b}{x-a} = m$$

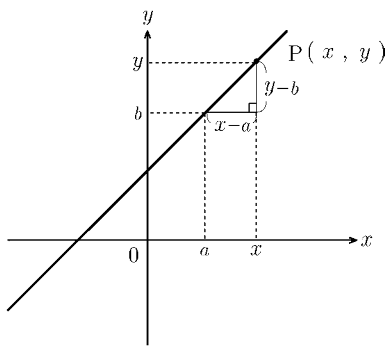
である。この両辺に $x-a$ をかけると,

$$\boxed{y-b = m(x-a)}$$

で与えられる。



図－１



図－２

問　次の直線を表す１次関数の方程式を求めよ。

(1)　点 (0 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(2)　点 (3 , 0) を通り，傾き 5 の直線

(3)　点 (2 , 3) を通り，傾き 4 の直線

(4)　点 (−1 , 2) を通り，傾き −1 の直線

(5)　点 (−2 , 3) を通り，傾き 0 の直線

(6)　2 点 (0 , 1) , (3 , 2) を通る直線

(7)　2 点 (1 , 0) , (2 , 2) を通る直線

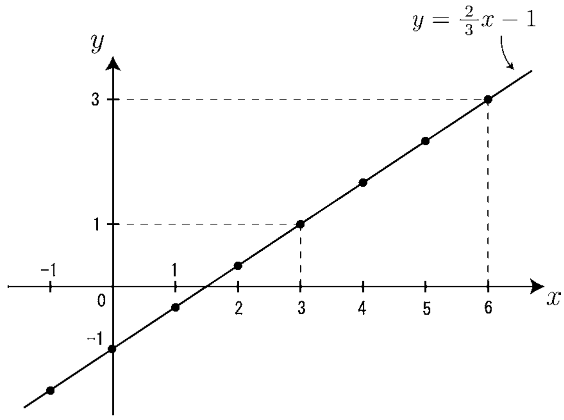
(8)　2 点 (0 , 4) , (3 , 0) を通る直線

＜１次関数のグラフ２＞

例　１次関数 $y=\frac{2}{3}x-1$ のグラフは

次の対応表より右図のような直線になる。

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3



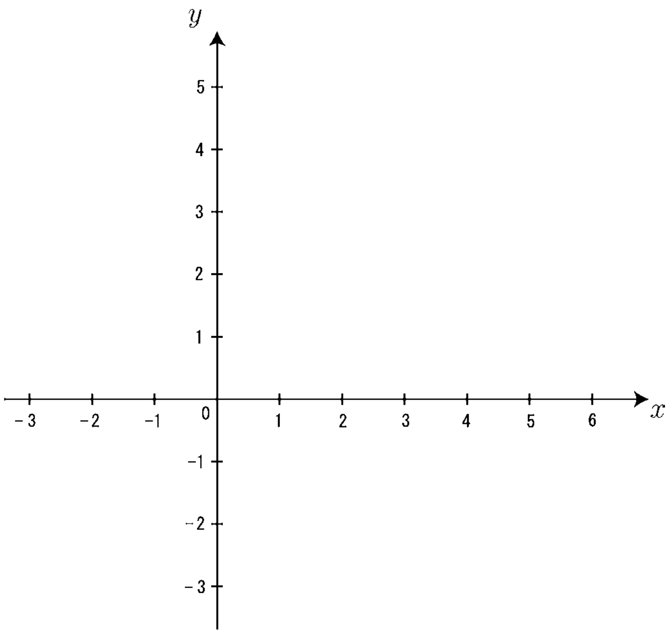
問１　次の１次関数のグラフを描け。

(1)　$y=\frac{3}{4}x+3$

(2)　$y=2x-3$

(3)　$y=-x+5$

(4)　$y=-1.5x+3$



問２　右図の直線が表す１次関数の式を求めよ。

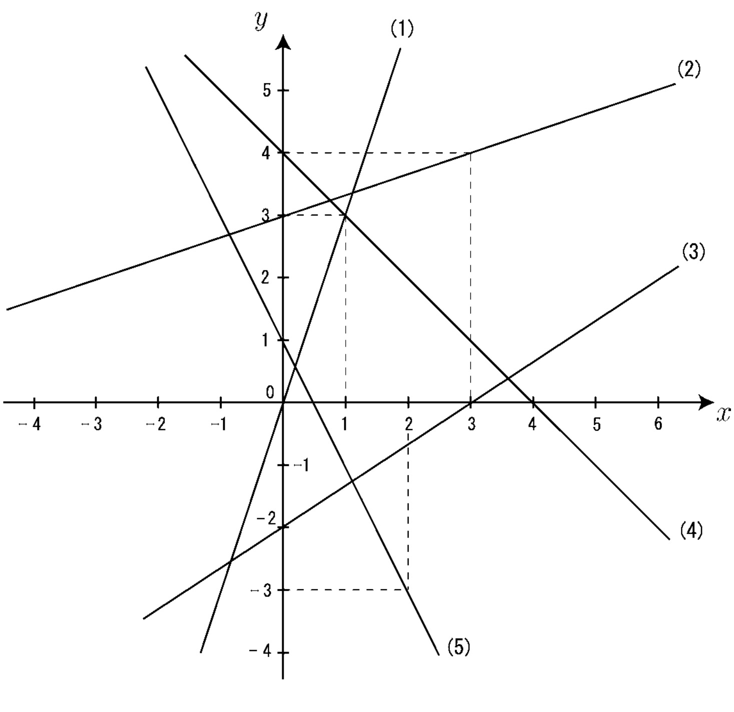
(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

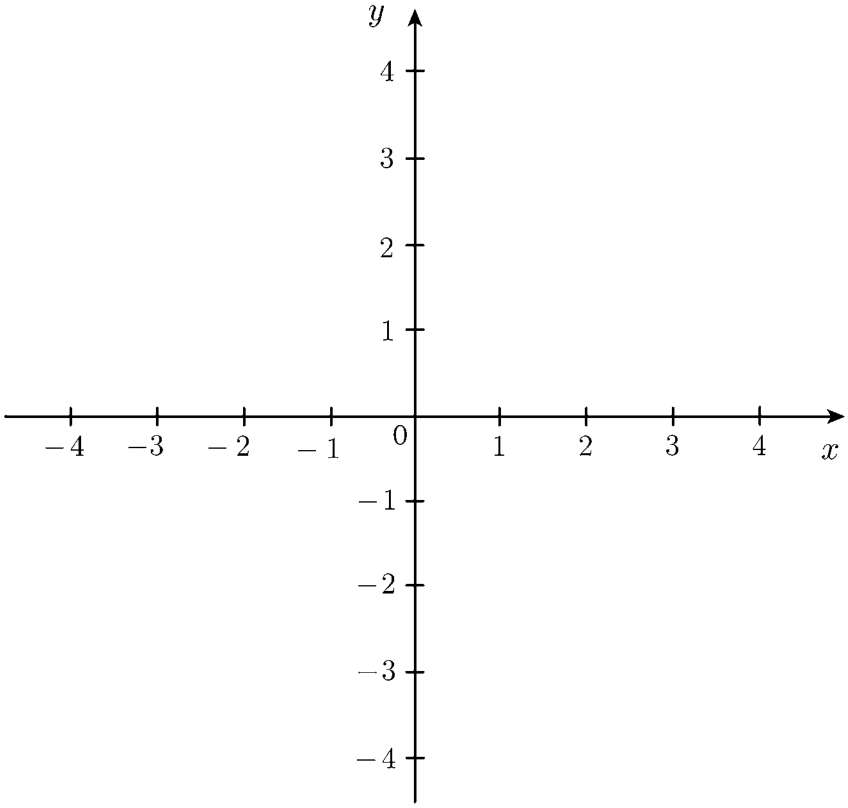


＜1次関数のグラフの問題 1＞

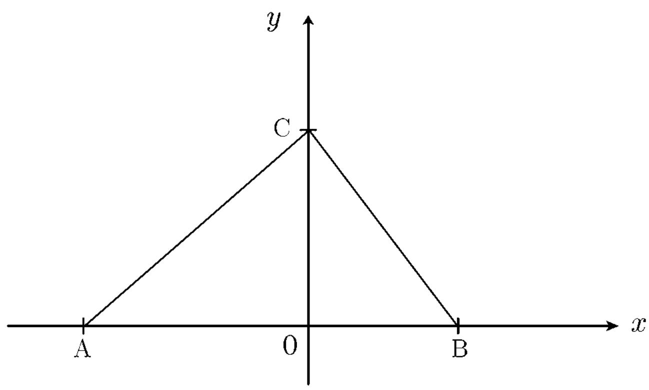
1　次の方程式のグラフをかけ。

(1)　$2x-3y=9$　　　　(2)　$x+2y=3$

(3)　$y-2=0$　　　　(4)　$4x-12=0$

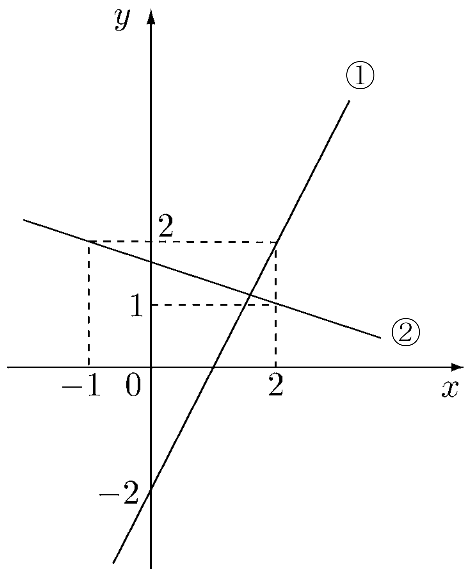


問 2　下の図のように，3 点 A(-6,0)，B(4,0)，C(0,5) がある。
点 C を通り，△ ABC の面積を 2 等分する直線の式を求めよ。



＜ 1 次関数のグラフの問題 2 ＞

例題　右図の直線①, ②の方程式と交点の座標を求めよ。



(解)　直線①は 2 点 $(0\ ,\ -2)$, $(2\ ,\ 2)$ を通るから, 傾きは $\dfrac{2-(-2)}{2-0}=2$ で, ①の直線の方程式は

$$\underline{y=2x-2 \quad \cdots \quad ①}$$

である。また直線②は 2 点 $(-1\ ,\ 2)$, $(2\ ,\ 1)$ を通るから, 傾きは $\dfrac{1-2}{2-(-1)}=-\dfrac{1}{3}$ で, ②の直線の方程式は

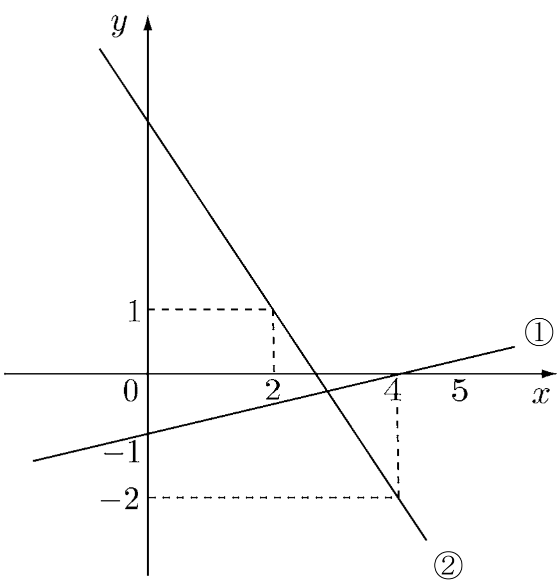
$$\underline{y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\cdots ②}$$

である。直線①と直線②の交点の座標を (x,y) とおくと, (x,y) は直線①と直線②の方程式を共にみたすので, ①と②の連立方程式から

$$\begin{cases} y=2x-2 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2x-2\ =\ -\frac{1}{3}x+\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{8}{7}\ ,\ y=\frac{11}{7}$$

となる。よって交点の座標は $\left(\dfrac{8}{7}\ ,\ \dfrac{11}{7}\right)$ である。

問　右図の直線①, ②の方程式と交点の座標を求めよ。

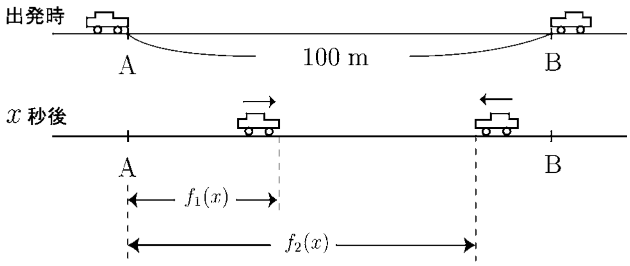


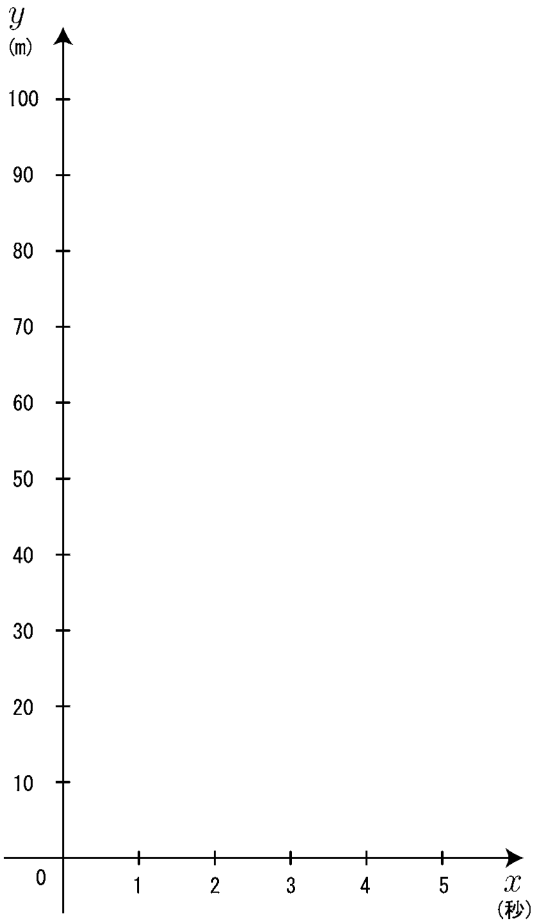
＜１次関数のグラフの問題 3 ＞

問 1　長さ 15cm のロウソクに火をつけると , 毎分 0.5cm の割合でロウソクが短くなっていく。火をつけてから x 分後のロウソクの長さを y cm とするとき , 火をつけてからロウソクが燃えつきるまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

問 2　ある人が家から 800m 離れた駅まで分速 80m で歩いていく。
家を出発してから x 分後の駅までの残りの道のりを y m とするとき , 家を出発してから駅に着くまでの x と y の関係を表すグラフをかけ。

問 3　100m ある直線道路を 2 つの車が走る。A 地点から B 地点に向かって走る車は秒速 20m で走る。B 地点から A 地点に向かって走る車は秒速 10m で走る。同時に出発し , x 秒後の A 地点からの距離をそれぞれ $f_1(x)$, $f_2(x)$ とする。





(1)　$f_1(x)$ と $f_2(x)$ を x の式で表せ。

$f_1(x) =$　　　　　　,　$f_2(x) =$

(2)　$y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフを右図に描け。

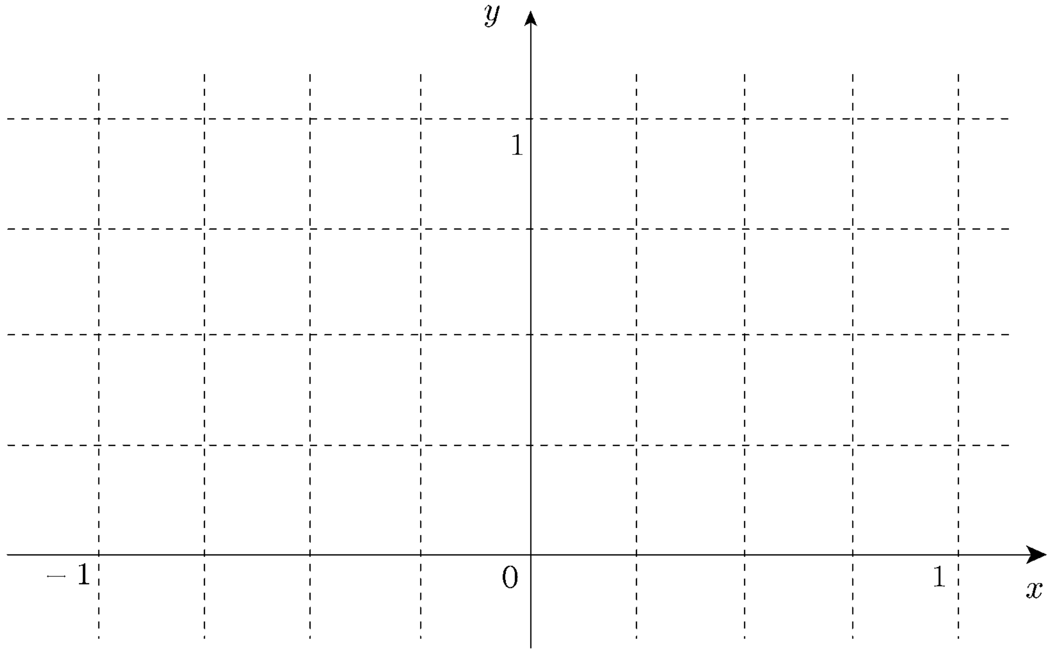
(3)　2 直線 ($y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$) の交点の座標を求めよ。

(4)　交点の座標は何を意味するか詳しく 答えよ。

＜ $y = x^2$ のグラフ ＞

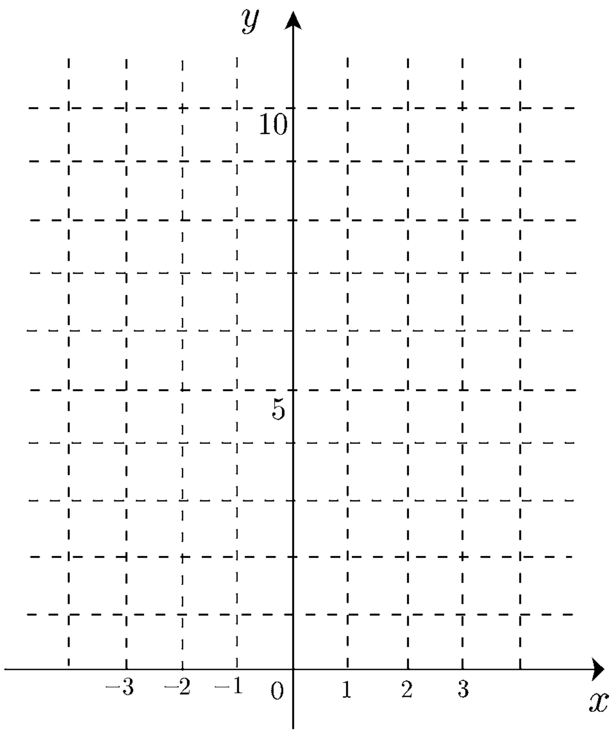
問 1　次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	$\cdots$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\cdots$
y	$\cdots$												$\cdots$



問 2　次の表を完成してから，$y = x^2$ のグラフをかけ。

x	y
$\vdots$	$\vdots$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
$\vdots$	$\vdots$



＜2次関数のグラフ 1＞

① 2次関数とそのグラフ

2次関数の中で，最も基本的な関数は

$$y = x^2$$

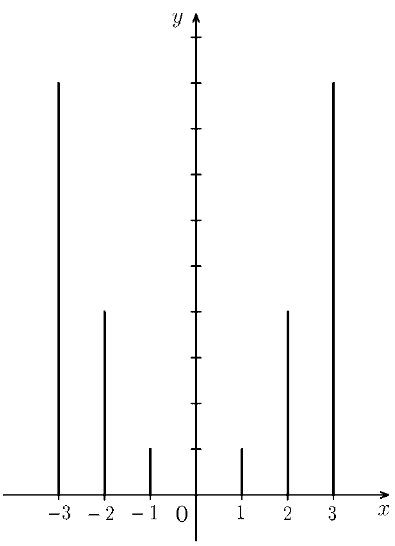
である。この関数のグラフをかいてみよう。

最初に，x の値が整数であるときの y の値を求める。

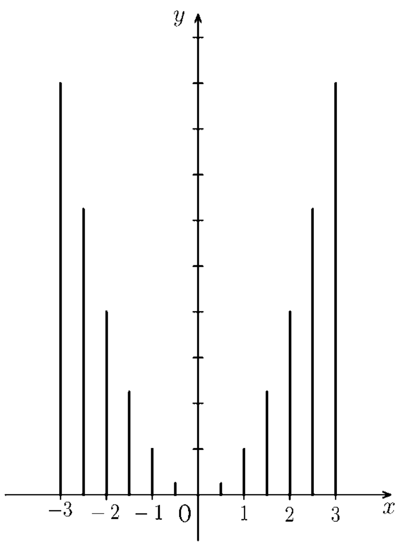
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

次に，x 軸上の目盛りの上に，対応する y の長さの棒を立てる。

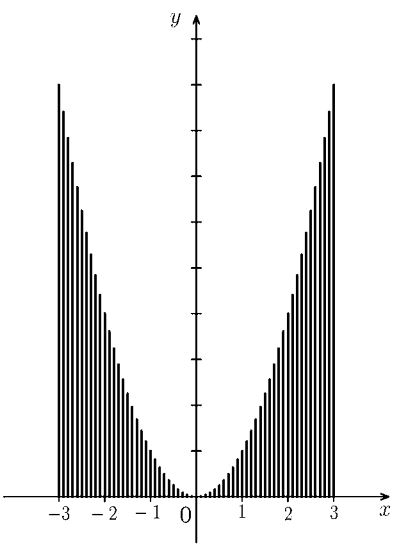
x の値の間隔を 1 ずつにすると



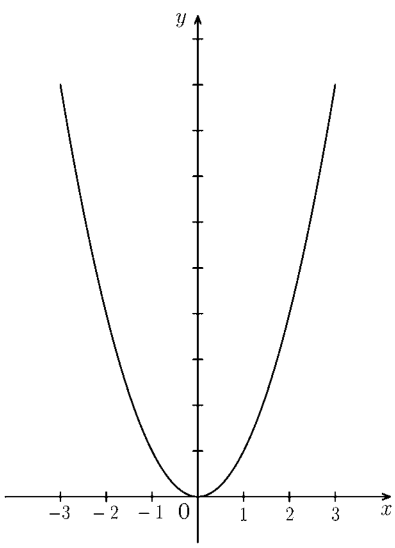
x の値の間隔を 0.5 ずつにすると



x の値の間隔を 0.1 ずつにすると



$y = x^2$ のグラフ



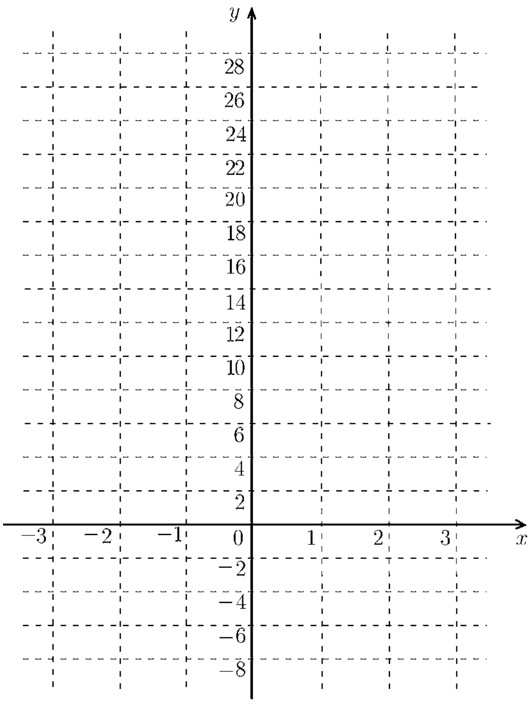
「関数のグラフとは，棒グラフのことである」を理解すること。

＜２次関数のグラフ２＞

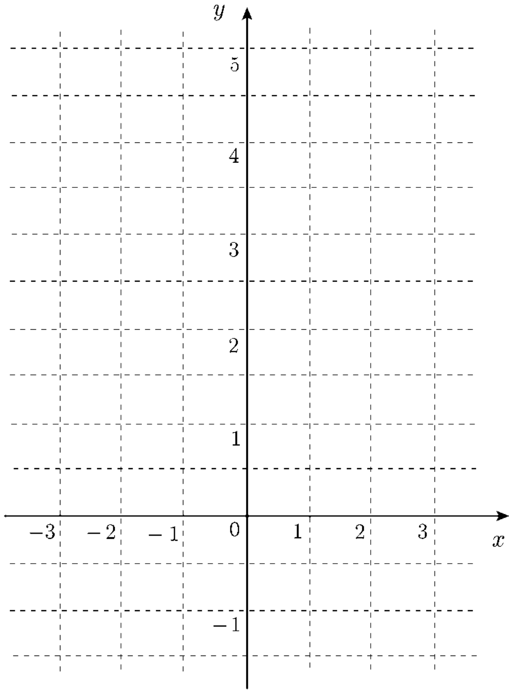
② $y = ax^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

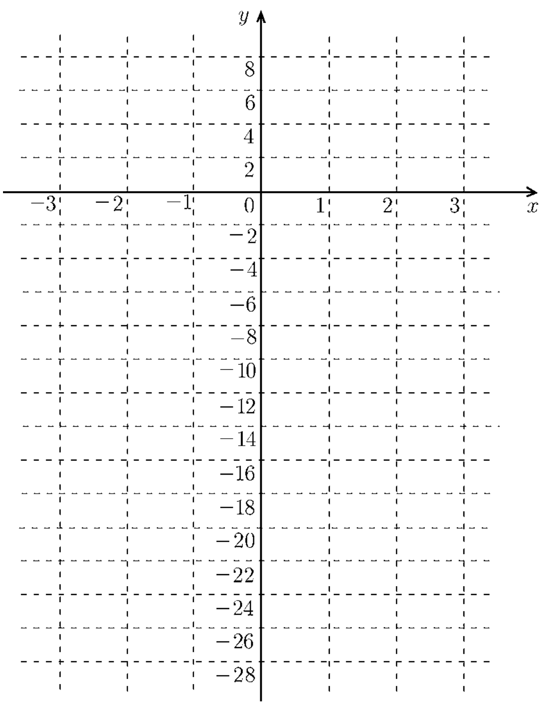
(1) $y = 2x^2,\quad y = 3x^2$



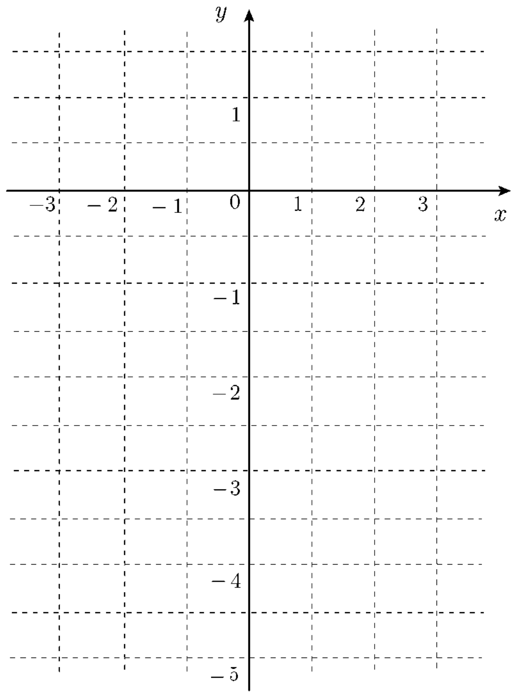
(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2,\quad y = \dfrac{1}{4}x^2$



(3) $y = -2x^2,\quad y = -3x^2$



(4) $y = -\dfrac{1}{2}x^2,\quad y = -\dfrac{1}{4}x^2$

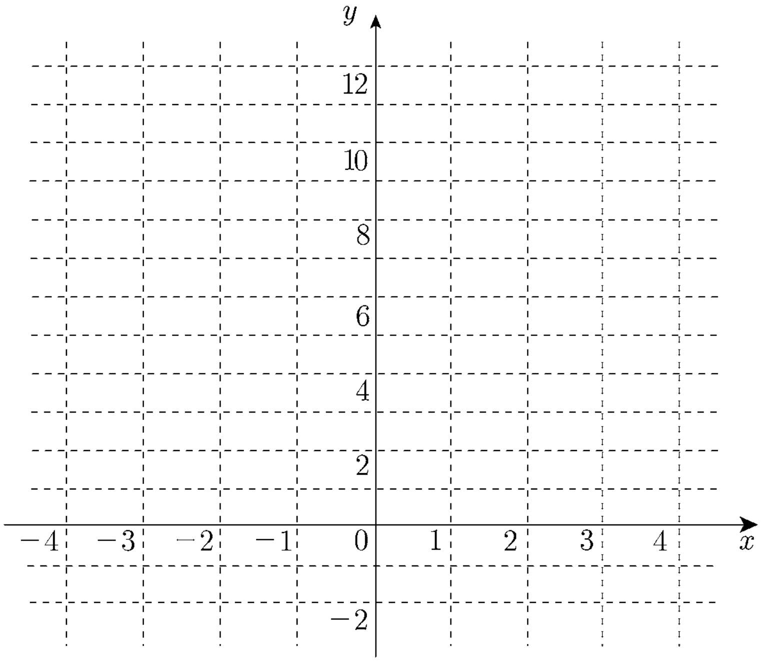


＜ 2 次関数のグラフ 3 ＞

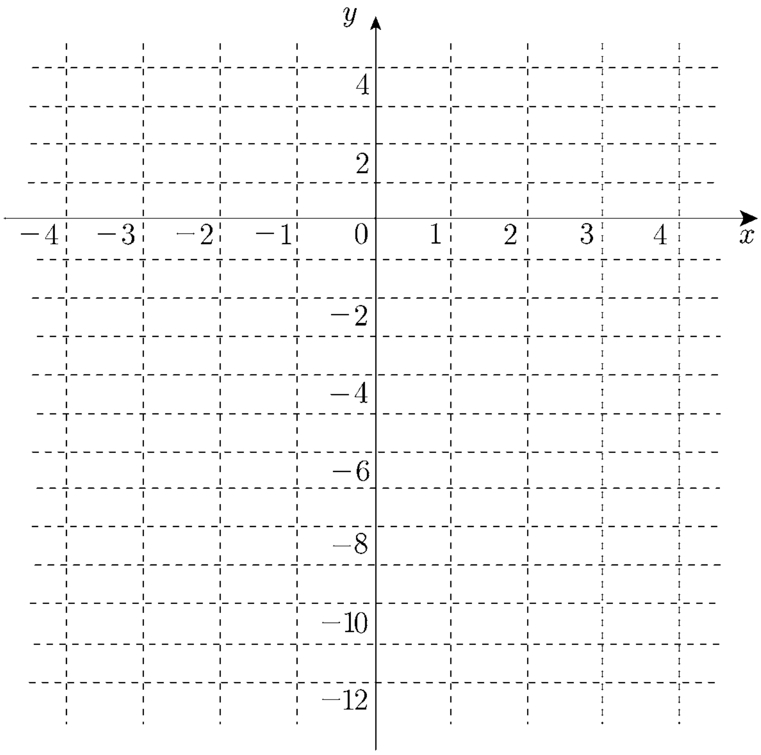
③ $y = x^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$



(2) $y = -x^2 + 1$, $y = -x^2 + 3$, $y = -x^2 - 3$

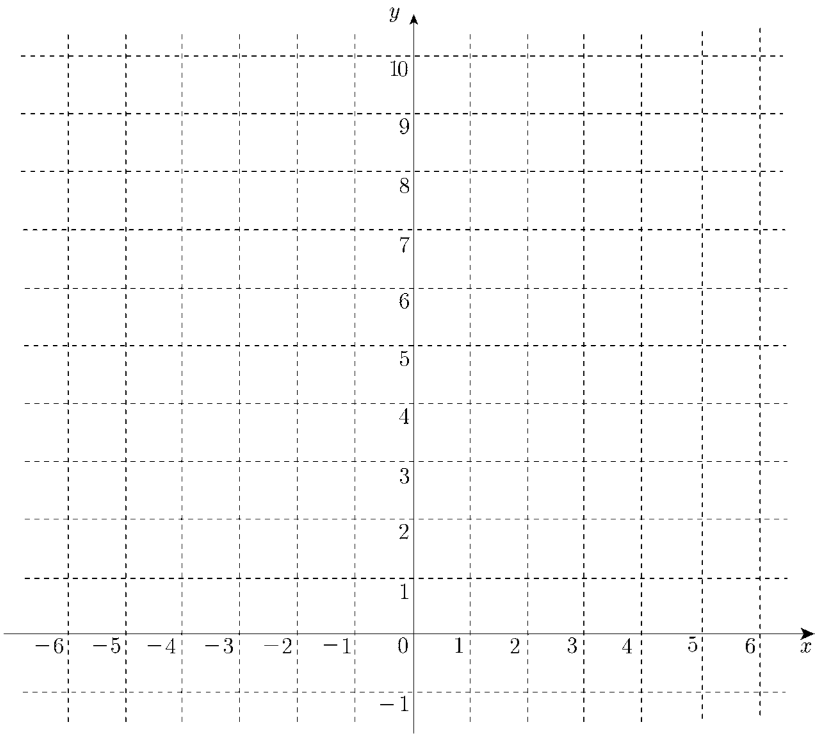


＜ 2次関数のグラフ 4 ＞

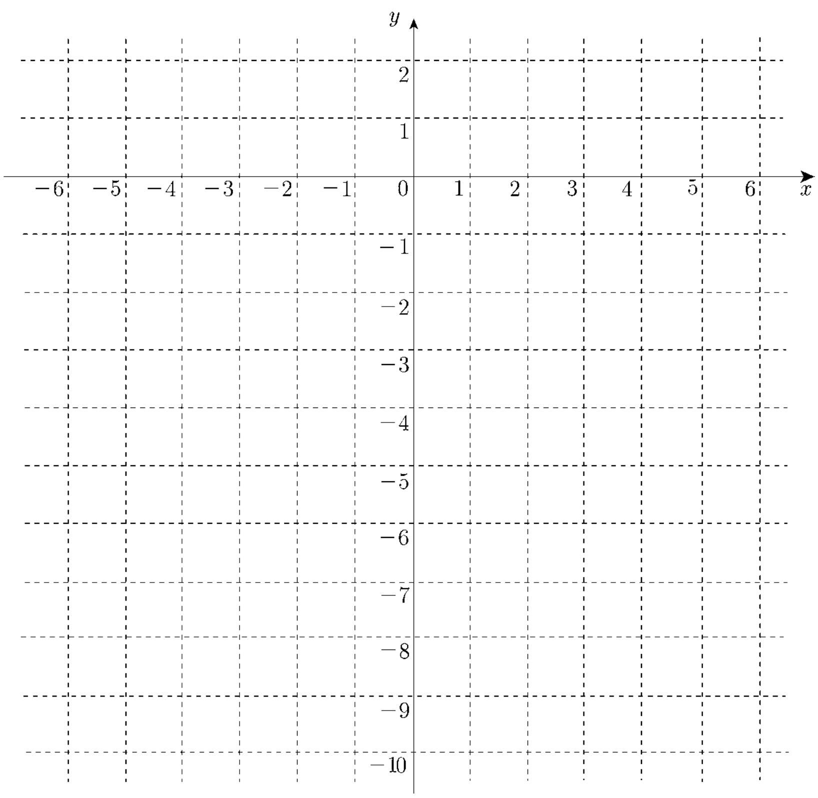
④ $y = (x-p)^2$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x-1)^2$,　　$y = (x+1)^2$



(2) $y = -(x-1)^2$,　　$y = -(x+1)^2$



＜ 2 次式の変形 ＞

定数　a , b , c $(a \neq 0)$　に対して，2 次式を

$$ax^2 + bx + c = a(x + \square)^2 + \bigcirc$$

の形に変形する。

例　$2x^2 + 12x = 2(x^2 + 6x)$

$$= 2(x^2 + 2 \times 3x + 3^2 - 3^2)$$

$$= 2\left\{(x+3)^2 - 3^2\right\}$$

$$= 2(x+3)^2 - 18$$

問　次の□と○に適する数をかけ。

(1) $x^2 + 8x = \left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

(2) $x^2 - 2x + 3 = \left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

(3) $x^2 + x + 1 = \left(x + \square\right)^2 + \bigcirc$

(4) $x^2 - 3x - 1 = \left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(5) $2x^2 - 8x + 3 = 2\left(x - \square\right)^2 - \bigcirc$

(6) $-2x^2 + 4x - 1 = -2\left(x - \square\right)^2 + \bigcirc$

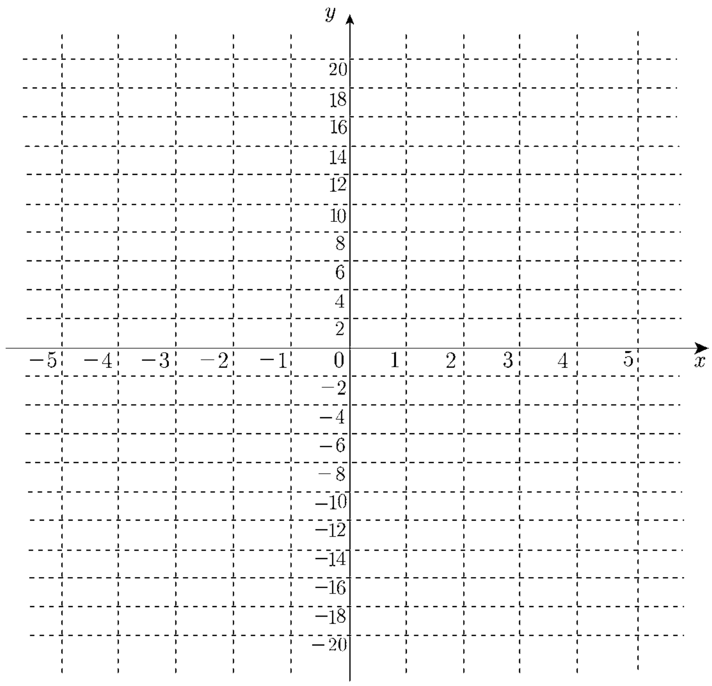
(7) $2x^2 + 5x + 2 = 2\left(x + \square\right)^2 - \bigcirc$

＜ 2 次関数のグラフ 5 ＞

⑤ $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフ

次の関数のグラフを同一座標平面上にかけ。

(1) $y = (x-1)^2 + 2$, 　　$y = -(x-1)^2 - 2$

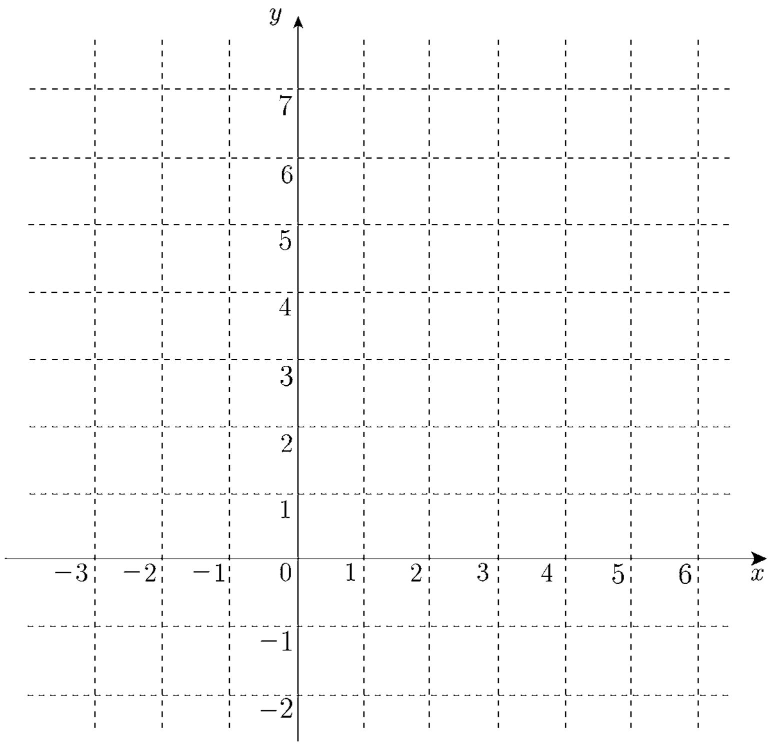


問　次の関数のグラフをかけ。

(1) $y = x^2 - 6x + 13$

(2) $y = 2x^2 - 8x + 8$

(3) $y = -x^2 + 6x$



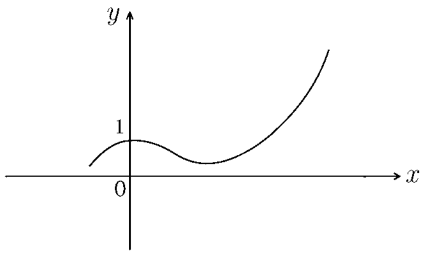
まとめると，2 次関数のグラフは，頂点の位置と x^2 の係数だけで決まる。

x^2 の係数は，2 次関数のグラフの形を決める。頂点は，グラフの移動に関係する。

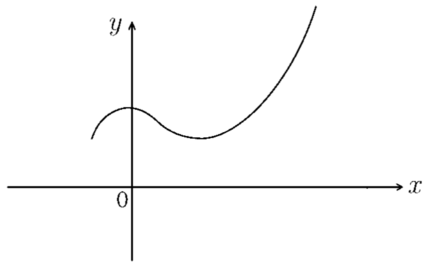
＜練習問題＞

問 1　$y = f(x)$ のグラフが次のようなグラフであるとき，次の関数のグラフをかけ。

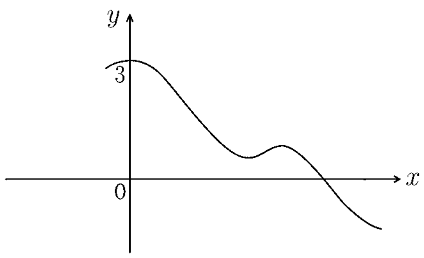
(1) $y = f(x) + 1$



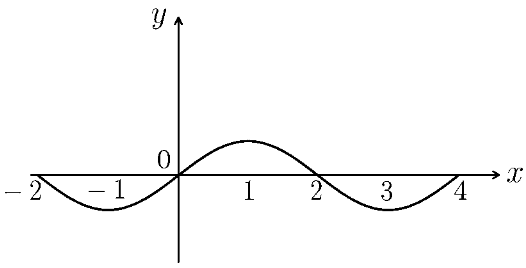
(2) $y = \dfrac{1}{2} f(x)$



(3) $y = f(x) - 3$

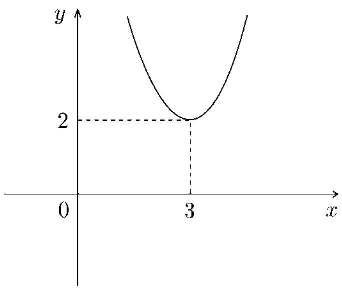


(4) $y = f(x - 1)$

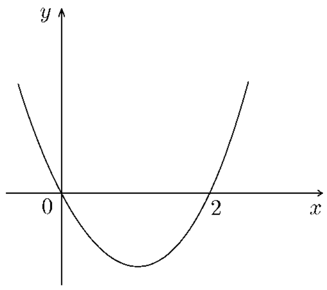


問 2　次の曲線は $y = x^2$ のグラフを平行移行したり, 折り返えしたりしてできた曲線である。この曲線の方程式を求めよ。

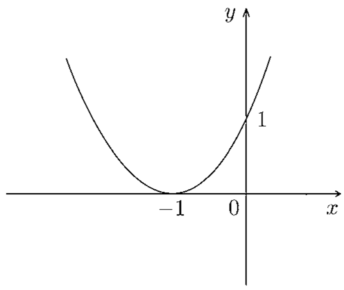
(1)



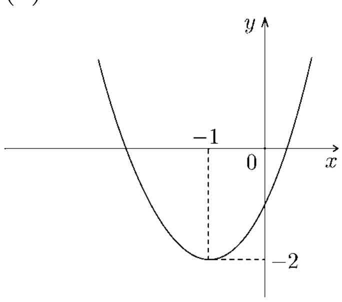
(2)



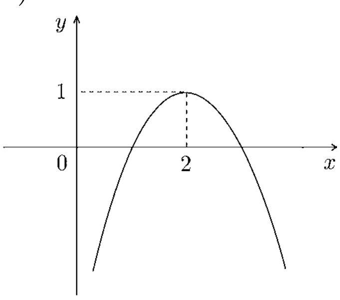
(3)



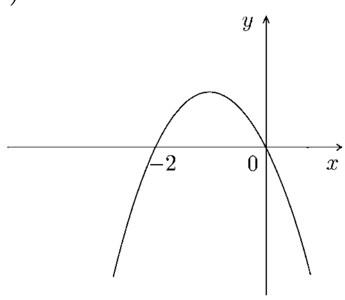
(4)



(5)



(6)



＜ 1 次不等式 ＞

1 次不等式は 1 次方程式と同様に式変形して x の範囲を求めるわけだが, 負の数を不等式の両辺に掛けたり割ったりすると不等号の向きが逆になることに注意する。

例題　次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

(1) $2x < 6$　　(2) $-2x < 6$　　(3) $-4x-(x+10) \leqq 5$

(解) (1) 両辺を 2 で割ると　$\underline{(答)\ x < 3}$

(2) 両辺に $2x-6$ を加えると $-6 < 2x$ となり, 両辺を 2 で割ると $-3 < x$ より　$\underline{(答)\ x > -3}$

(別解) 両辺に $-\dfrac{1}{2}$ を掛けると　$\underline{(答)\ x > -3}$　(負の数を掛けると不等号の向きが逆になる)

(3) $-4x-(x+10) = -5x-10$ より (3) 式は $-5x-10 \leqq 5$ となる。
両辺に 10 を加えると $-5x \leqq 15$ 。両辺を -5 で割ると $\underline{(答)\ x \geqq -3}$
(負の数で割ると不等号の向きが逆になる)

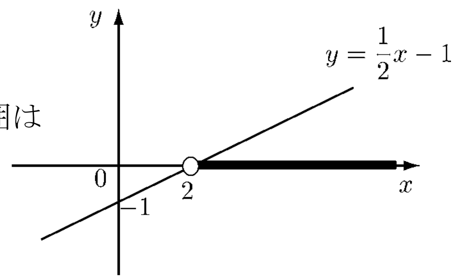
問 1　次の不等式をみたす x の範囲を求めよ。

(1) $-3x-6 > -18$　　(2) $4x-10 \leqq 8x-8$

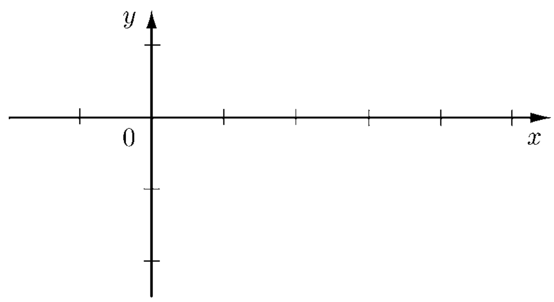
(3) $5x-2(x-3) > x-7$

例　不等式 $\dfrac{1}{2}x-1 > 0$ を考える。

直線 $y = \dfrac{1}{2}x-1$ のグラフは右図であり $\dfrac{1}{2}x-1 > 0$ の範囲は $y > 0$ となる x の範囲だから, 右図より $\underline{x > 2}$ である。



問 2　直線 $y = \dfrac{2}{3}x-2$ のグラフを描き, 不等式 $\dfrac{2}{3}x-2 \geqq 0$ をみたす x の範囲を求めよ。



＜ 2 次不等式 ＞

不等式

$$x^2 - 1 > 0, \qquad x^2 - 2x - 1 < 0$$

のように，左辺が x の 2 次式となるように整理できる不等式を 2 次不等式という。

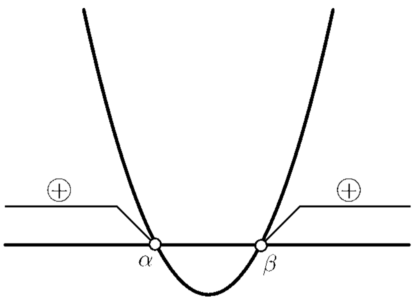
$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a > 0)$ の 2 つの解を α，$\beta \ \ (\alpha < \beta)$ とすると，

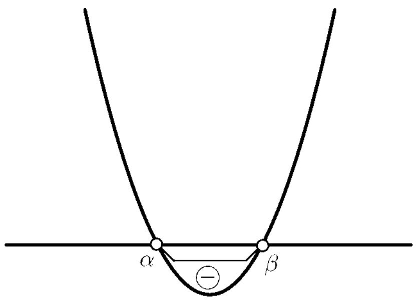
$ax^2 + bx + c > 0$ の解は

$$x < \alpha, \quad \beta < x$$

$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$$\alpha < x < \beta$$





問　次の 2 次不等式を解け。

(1) $(x-2)(x-3) > 0$

(2) $x(x+7) < 0$

(3) $x^2 + 2x - 3 > 0$

(4) $x^2 - 4 < 0$

(5) $-x^2 - x + 12 \geqq 0$

(6) $-3x^2 + 2x + 4 \leqq 1$

＜ 2 次関数のグラフと x 軸の共有点 ＞

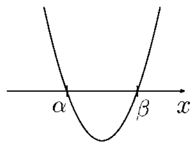
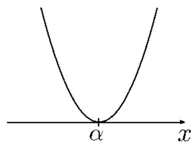
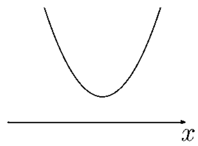
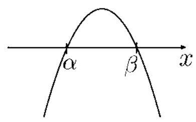
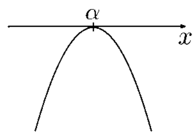
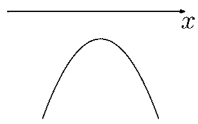
2 次式 $ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ は

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

と式変形できる。ここで $D=b^2-4ac$ である。従って
2 次関数

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}$$

の頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$ となる。y 座標 $-\dfrac{D}{4a}$ の符号から,
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との共有点の個数は次の表のようになる。

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x 軸との共有点	2 個	1 個	なし
$a>0$			
$a<0$			

(注)　x 軸は直線 $y=0$ であるから, $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との
共有点の x 座標は 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解である。
すなわち 2 次方程式の解の個数が D の符号によって決まる。
そういう意味でこの式 $D=b^2-4ac$ を **判別式** という。

問　次の 2 次関数と x 軸との共有点の個数を調べよ。

(1) $y=x^2-4x+3$　　(2) $y=x^2-4x+4$　　(3) $y=x^2-4x+5$

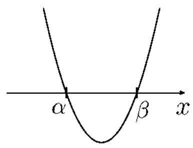
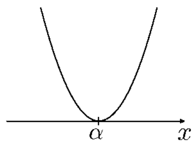
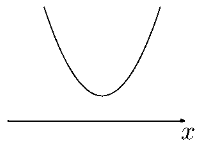
(4) $y=-x^2+6x-7$　　(5) $y=8x^2+8x+2$　　(6) $y=-2x^2-x-1$

＜ 2 次関数のグラフと 2 次不等式 ＞

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{D}{4a} \quad (D = b^2 - 4ac)$

のグラフと x 軸との位置関係から, 2 次不等式の解が次の表のように分類される。

$\langle\ a > 0$ のときの 2 次不等式の解 $\rangle$

D の符号	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との位置関係			
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の実数解	2 つの実数解 $x = \alpha\ ,\ \beta$	重解 $x = \alpha$	実数解なし
$ax^2 + bx + c > 0$ の解	$x < \alpha\ ,\ \beta < x$	α 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$ の解	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2 + bx + c \geqq 0$ の解	$x \leqq \alpha\ ,\ \beta \leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \leqq 0$ の解	$\alpha \leqq x \leqq \beta$	$x = \alpha$	解なし

問　次の 2 次不等式を解け。

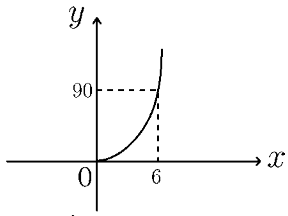
(1) $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$　　　(2) $9x^2 - 6x + 1 > 0$

(3) $3x^2 - 5x + 2 < 0$　　　(4) $-5x^2 + 20x - 25 \leqq 0$

＜ 2 次関数の問題 ＞

問 1　自動車が O 地点を出発してから，x 秒間に進む距離を y m とする。$0 \leqq x \leqq 6$ の範囲で，y は x の 2 乗に比例した。下のグラフはそのときの様子を表したものである。

(1)　y を x の式であらわせ。



(2)　自動車が O 地点を出発すると同時に，秒速 12 m で走っているバイクが O 地点を通過した。自動車がバイクに追いつくのは，O 地点を出発してから何秒後か求めよ。

問 2　傾きが一定の坂の頂上からボールを転がしたところ，ボールが転がり始めてから x 秒間に転がった距離を y m とすると，x と y には $y = \dfrac{1}{2}x^2$ という関係があるという。

(1)　ボールが転がると同時に，A 君は頂上からこの坂を秒速 $1m$ の速さで歩き始めた。A 君は，ボールが転がり始めてから何秒後にボールに追いつかれるか。

(2)　B 君は，ボールが転がり始めてからしばらくして，頂上から一定の速さで走り始めた。B 君は，ボールが転がり始めてから 3 秒後にボールに追いつき，7 秒後にボールに追い抜かれた。B 君は毎秒何m で走ったか。

問 3　時速 x km で走っている自動車にブレーキをかけて，ブレーキが効き始めてから停止するまで進む距離を y m とする。x と y の間には $y = ax^2$ の関係がある。時速 60 km で走っている自動車にブレーキをかけると，効き始めてから $18m$ 走って止まる。

(1)　y を x の式であらわせ。

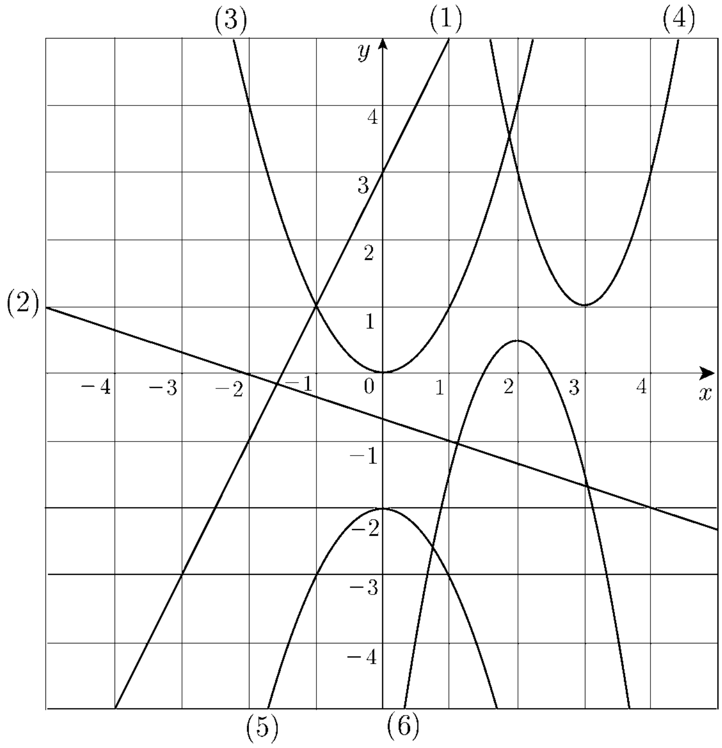
(2)　時速 80km で走っている自動車にブレーキをかけると，効き始めてから何m 走って止まるか。

(3)　ブレーキが効き始めてから 50m 走って止まるときの速さを求めよ。

＜ 練習問題 1 ＞

問 1

右のグラフ (1)〜(6) に
相当する 1 次関数または
2 次関数の方程式をかけ。



(1)

(2)

(3)

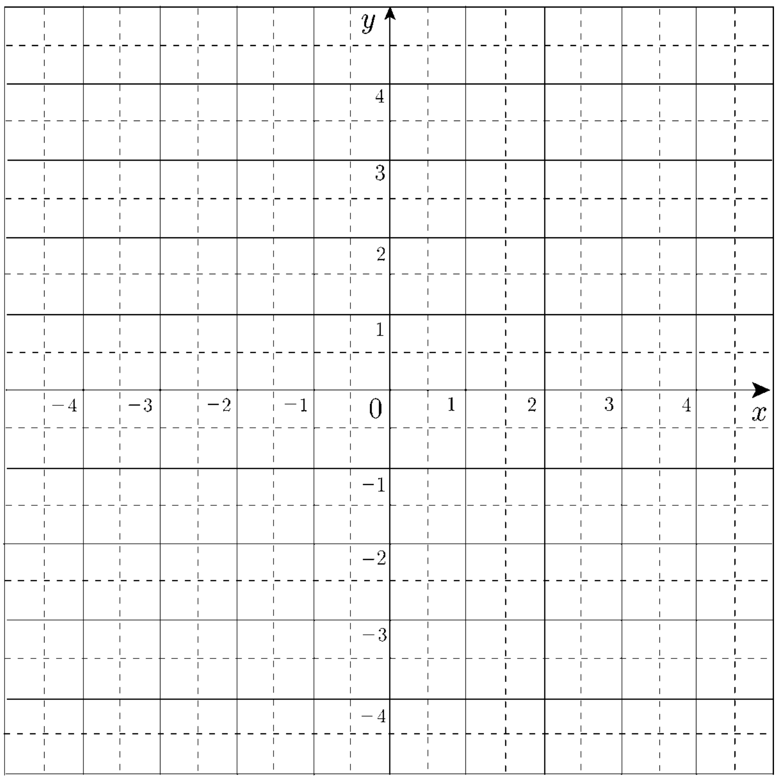
(4)

(5)

(6)

問 2

次の 1 次関数または
2 次関数のグラフをかけ。



(1) $y = 2x - 1$

(2) $x = -2$

(3) $y = 3$

(4) $y = x^2 + 1$

(5) $y = (x-2)^2$

(6) $y = -x^2 - 2x$

< 練習問題 2 >

問 1　次の連立方程式を解け。

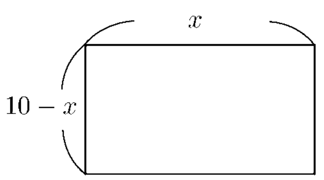
(1) $\begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a - 2b + 3c = -14 \\ 2a - 3b + c = -11 \\ 3a + b - 2c = 5 \end{cases}$

問 2　関数 $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ において次の値を求めよ。

(1) $f(-1)$　　(2) $f(-2)$

(3) $f(0)$　　(4) $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

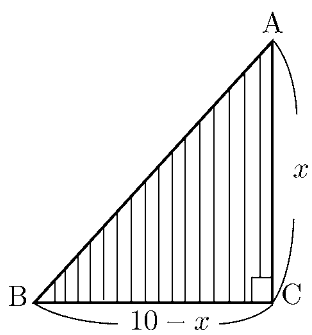
問 3　長さ 20cm の針金を折り曲げて長方形を作る。



(1) 横の長さを x とするとき，x の値の範囲を求めよ。

(2) 長方形の面積が 16cm^2 以上となる x の値の範囲を求めよ。

問 4



直角三角形 ABC があり直角をはさむ 2 辺 AC，BC の長さの和は 10cm である。辺 AC の長さを x とおくとき，次の問に 答えよ。

(1) x のとり得る範囲はいくらか。

(2) 直角三角形 ABC の面積を y とするとき y を x で表せ。

(3) y の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(4) 辺 AB の長さの平方を z とするとき，z を x で表せ。

(5) z の最小値およびそのときの x の値を求めよ。

＜練習問題 3＞

問 1　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点の座標を求めよ。

(1) $y = -(x+2)^2 + 4$　　(2) $y = x^2 - 4x + 1$

(3) $y = 2x^2 - 2x$　　(4) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$

問 2　$y = x^2$ の放物線がある。この放物線をどのように平行移動すると (1) , (2) のグラフになるか。

(1) $y = x^2 + 2x + 1$　　(2) $y = x^2 - 4x + 3$

問 3　2 点 (2 , −0.25) , (4 , 1.75) を通る直線を①とする。頂点が (2 , −1) で点 (3 , 0) を通る放物線を②とする。

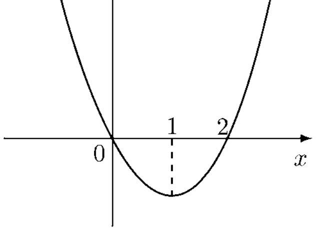
(1) 直線①の方程式を求めよ。

(2) 放物線②の方程式を求めよ。

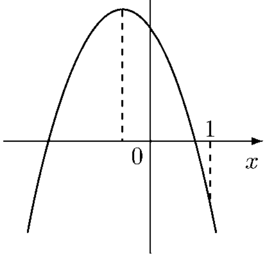
(3) 直線①と放物線②の交点の座標を求めよ。

問 4　次の図は 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである。各場合について, $a,\ b,\ c,\ a+b+c,\ b^2 - 4ac$ は正, 0 , 負のいずれかを言え。

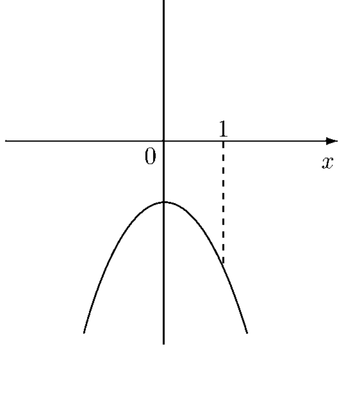
(1)



(2)



(3)



< 累乗の指数 >

n が正の整数であるとき，a の n 乗 (a の n 個の積)

$$a \times a \times a \times \cdots \times a = a^n$$

を a の **累乗** といい，n をその **指数** という。

例　百 : $100 = 10^2$

千 : $1000 = 10^3$

問 1　次の数を 10^n の形に表せ。

(1) 1 万　(2) 10 万　(3) 100 万

(4) 1000 万　(5) 1 億　(6) 10 億

(7) 100 億　(8) 1000 億　(9) 1 兆

問 2　次式を計算し，結果を 10^n の形で表せ。

(1) $10^4 \times 10^6$　(2) $10^8 \times 10^9$

(3) $10^{15} \times 10^{27}$　(4) $10^5 \div 10^2$

(5) $10^9 \div 10^5$　(6) $10^{23} \div 10^{15}$

＜ 指数法則 ＞

例 1 (1) $a^3 \times a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5$

(2) $a^5 \div a^3 = \dfrac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2$

一般に m，n を正の整数，$m > n$ のとき次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} a^m \times a^n = a^{m+n} \ \cdots\cdots \ ① \\ a^m \div a^n = a^{m-n} \ \cdots\cdots \ ② \end{array}}$$

この公式を用いると例 1 は次のように求められる。

$a^3 \times a^2 = a^{3+2} = a^5$ ， $a^5 \div a^2 = a^{5-2} = a^3$

問 1 次の計算をせよ。

(1) $a^2 \times a^5$ (2) $a^6 \times a^3$ (3) $a^8 \div a^3$

例 2 (1) $(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3} = a^6$

(2) $(ab)^2 = ab \times ab = a \times a \times b \times b = a^2b^2$

一般に m，n を正の整数としたとき次の公式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} (a^m)^n = a^{mn} \ \cdots\cdots \ ③ \\ (ab)^n = a^n b^n \ \cdots\cdots \ ④ \end{array}}$$

例 3 $(a^3b^4)^2 = (a^3)^2(b^4)^2 = a^{3\times 2}b^{4\times 2} = a^6b^8$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $(a^5)^3$ (2) $(ab^2)^3$ (3) $(a^2b^3)^4$

(注) 上の公式①〜④を**指数法則**という。

問 3 次の計算をせよ。

(1) $a^4 \times a^5 \times a^3$ (2) $(a^3)^2 \times a^4$

(3) $a^{10} \div (a^3)^3$ (4) $(a^2b)^3 \times (ab^2)^2$

＜負の指数＞

指数 n を 0 や負の整数としたとき，累乗 a^n をどう定義すればよいか考えてみよう。

例えば　十　，　百　，　千　，　万　，10 万　，100 万　，$\cdots$　は

$$10\ ,\ 10^2\ ,\ 10^3\ ,\ 10^4\ ,\ 10^5\ ,\ 10^6\ ,\ \cdots$$

のように 10^n の形で表される。これらは 10 倍するごとに指数 n が 1 ずつ大きくなり，$\dfrac{1}{10}$ 倍するごとに指数 n が 1 ずつ小さくなる。この規則が 0 や負の指数のときも成り立つように 10^0，10^{-1}，10^{-2}，$\cdots$ を次のように定める。

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & 1000 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 100 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 10 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & 1 & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10} & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10^2} & \xrightarrow{\times\frac{1}{10}} & \dfrac{1}{10^3} & ,\ \cdots \\
 & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & \\
 & 10^3 & & 10^2 & & 10^1 & & 10^0 & & 10^{-1} & & 10^{-2} & & 10^{-3} &
\end{array}$$

一般に 0 または負の整数 $-n$ を指数とする累乗を次のように定める。

$$\boxed{a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad (a^0,\ a^{-n} \text{ の定義})$$

例　$5^0 = 1$　　，　$4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = \dfrac{1}{16}$

$(3^{-1})^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$　　，　$(2^3)^{-2} = \dfrac{1}{(2^3)^2} = \dfrac{1}{2^6} = \dfrac{1}{64}$

問　次の値を求めよ。

(1)　2^0　　(2)　1^{-1}　　(3)　2^{-5}

(4)　3^0　　(5)　3^{-2}　　(6)　4^{-3}

(7)　$(2^{-3})^2$　　(8)　$(3^2)^{-2}$　　(9)　$(2^2)^{-3}$

＜整数指数 1＞

前ページより 0 または負の整数 $-n$ を指数とする累乗を

$$\boxed{a^0 = 1 \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

と定める。

例 1 $a^2 \times a^{-5} = a^2 \times \dfrac{1}{a^5} = \dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

例 2 $a^{-2} \times a^{-3} = \dfrac{1}{a^2} \times \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{(a \times a) \times (a \times a \times a)} = \dfrac{1}{a^5} = a^{-5}$

問 1 次の積を a^{-n} の形にせよ。

(1) $a^3 \times a^{-5}$

(2) $a^{-3} \times a^2$

(3) $a^4 \times a^{-7}$

(4) $a^{-8} \times a^5$

(5) $a^{-3} \times a^{-4}$

(6) $a^{-5} \times a^{-6}$

例 3 $a^2 \div a^5 = \dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{a \times a}{a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^3} = a^{-3}$

例 4 $a^{-5} \div a^{-3} = \dfrac{1}{a^5} \div \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{a^5} \times a^3 = \dfrac{a^3}{a^5} = \dfrac{1}{a^2} = a^{-2}$

問 2 次の商を a の累乗の形にせよ。

(1) $a^4 \div a^6$

(2) $a^3 \div a^{-2}$

(3) $a^{-2} \div a^3$

(4) $a^4 \div a^{-5}$

(5) $a^{-7} \div a^{-4}$

(6) $a^{-7} \div a^{-9}$

＜整数指数 2＞

例 1 $\left(a^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(a^2\right)^3} = \dfrac{1}{a^2 \times a^2 \times a^2} = \dfrac{1}{a \times a \times a \times a \times a \times a} = \dfrac{1}{a^6} = a^{-6}$

例 2 $\left(a^{-2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{a^2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{a^6}} = a^6$

問 1 次式を a の累乗の形にせよ。

(1) $\left(a^4\right)^{-2}$　　(2) $\left(a^{-2}\right)^4$

(3) $\left(a^5\right)^{-2}$　　(4) $\left(a^{-3}\right)^4$

(5) $\left(a^{-3}\right)^{-3}$　　(6) $\left(a^{-6}\right)^{-5}$

例 3 $(ab)^3 \;=\; ab \times ab \times ab \;=\; a \times a \times a \times b \times b \times b \;=\; a^3\, b^3$

例 4 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{a \times a \times a}{b \times b \times b} = \dfrac{a^3}{b^3} = a^3\, b^{-3}$

例 5 $\left(ab^2\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(ab^2\right)^3} = \dfrac{1}{ab^2 \times ab^2 \times ab^2} = \dfrac{1}{a \times a \times a \times b^2 \times b^2 \times b^2} = \dfrac{1}{a^3 b^6} = a^{-3}\, b^{-6}$

問 2 次式を $a^{\bigcirc}\, b^{\bigcirc}$ の形にせよ。

(1) $\left(ab\right)^4$　　(2) $\left(a^2 b\right)^3$

(3) $\left(ab^{-1}\right)^2$　　(4) $\left(ab\right)^{-3}$

(5) $\left(a^{-1} b^2\right)^3$　　(6) $\left(a^{-2} b^3\right)^{-2}$

(7) $\left(ab^2\right)^{-3} \times \left(a^2 b\right)^2$　　(8) $\left(a^3 b^2\right)^3 \div \left(ab^3\right)^4$

＜整数指数 3＞

m と n がどんな整数であっても次の指数法則が成り立つ。

[1]	$a^m \times a^n = a^{m+n}$	[1′]	$a^m \div a^n = a^{m-n}$
[2]	$(a^m)^n = a^{mn}$		
[3]	$(ab)^n = a^n b^n$	[3′]	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

(指数法則)

例 1　$10^5 \times 10^{-8} = 10^{5+(-8)} = 10^{-3}$　,　$10^{-7} \times 10^{-8} = 10^{(-7)+(-8)} = 10^{-15}$

$10^{-2} \div 10^{-7} = 10^{(-2)-(-7)} = 10^5$　,　$(10^{-3})^{-6} = 10^{(-3)\times(-6)} = 10^{18}$

問 1　次の計算を行い，結果を 10 の累乗の形にせよ。

(1)　$10^3 \times 10^{-20}$　　(2)　$10^5 \div 10^{-6}$　　(3)　$10^{-7} \div 10^{-8}$

(4)　$1 \div 10^{-20}$　　(5)　$(10^{-2})^3$　　(6)　$(10^{-3})^{-1}$

問 2　次の計算を行い，結果を a の累乗の形にせよ。

(1)　$a^{-3} \times a^{-1}$　　(2)　$a^{-3} \times a^{-5}$　　(3)　$a^4 \div a^{-2}$

(4)　$a^{-4} \div a^{-2}$　　(5)　$(a^3)^{-3}$　　(6)　$(a^{-4})^{-1}$

例 2　$5^6 \times 5^{-4} = 5^{6+(-4)} = 5^2 = 25$　,　$3^{-6} \div 3^{-4} = 3^{(-6)-(-4)} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

$(2^{-3})^{-2} = 2^{(-3)\times(-2)} = 2^6 = 64$

問 3　次の計算をせよ。

(1)　$4^7 \times 4^{-4}$　　(2)　$5^{-7} \div 5^{-6}$

(3)　$2^{-2} \div 2^{-5}$　　(4)　$(3^{-2})^{-2}$

問 4　次の計算を行い，結果を 0 や負の指数を用いないで表せ。

(1)　$a^3 \times a^{-6}$　　(2)　$a^{-4} \div a^{-10}$　　(3)　$a^{-5} \div a^{-5}$

(4)　$(ab^{-1})^2$　　(5)　$(a^{-1}b)^{-3}$　　(6)　$(a^{-2}b^3)^2$

< 整数指数 4 >

例　大きい数, あるいは 0 に近い数を, 例えば

$$360000 = 3.6 \times 10^5 \qquad , \qquad 0.000567 = 5.67 \times 10^{-4}$$

のように整数部分が 1 けたの数と 10 の累乗との積として表すことがある。

(注)　電卓では「3.6×10^5」を「3.6 E 5」と表示する。また「5.67×10^{-4}」を「5.67 E −4」と表示する。

問 1　次の数を $a \times 10^n$ の形にせよ。ただし $1 \leqq a < 10$ とする。

(1)　43000　　(2)　2730000000

(3)　0.000045　　(4)　0.000000000000368

問 2　次の計算を行い, 結果を $a \times 10^n$　$(1 \leqq a < 10)$ の形にせよ。

(1)　$\left(1.5 \times 10^4\right) \times \left(4 \times 10^8\right)$

(2)　$\left(4.2 \times 10^{-2}\right) \times \left(2.5 \times 10^{-7}\right)$

(3)　$\left(6.8 \times 10^{-2}\right) \div \left(5 \times 10^3\right)$

(4)　$\left(4.8 \times 10^2\right) \div \left(1.2 \times 10^{-10}\right)$

(5)　$1 \div \left(2.5 \times 10^{-15}\right)$

問 3　アルミニウムの原子 1 個の質量は約 4.5×10^{-23}g である。アルミニウム 1g の中には，およそ何個の原子が含まれているのか。$a \times 10^n$ の形に表せ。ただし $1 \leqq a < 10$ で, a は四捨五入によって小数点第 1 位まで求めよ。

< 単位の接頭語 >

問 1　1 億は 1 万の 1 万倍であり，1 兆は 1 億の 1 万倍であり，1 京 (けい) は 1 兆の 1 万倍である。1 万を 10^4 として 1 億，1 兆，1 京 を 10^n の形にせよ。

1 億 =　　　　　　1 兆 =　　　　　　1 京 =

問 2　メートル法で倍数を書き表す場合，次の接頭語を用いる。
10 倍はデカ (da)，100 倍はヘクト (h)，1000 倍はキロ (k)，
1000 キロを 1 メガ (M)，1000 メガを 1 ギガ (G)，1000 ギガを
1 テラ (T) という。次の各倍数を 10^n の形にせよ。

$1\,\overset{\text{デカ}}{\mathrm{da}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{ヘクト}}{\mathrm{h}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{キロ}}{\mathrm{k}} =$

$1\,\overset{\text{メガ}}{\mathrm{M}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{ギガ}}{\mathrm{G}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{テラ}}{\mathrm{T}} =$

問 3　1 割 (わり) は $\dfrac{1}{10}$，1 分 (ぶ) は $\dfrac{1}{10}$ 割，1 厘 (りん) は $\dfrac{1}{10}$ 分，
1 毛 (もう) は $\dfrac{1}{10}$ 厘，1 糸 (し) は $\dfrac{1}{10}$ 毛である。1 割 $= 10^{-1}$ として
次の各割合を 10^{-n} の形にせよ。

1 分 =　　　　1 厘 =　　　　1 毛 =　　　　1 糸 =

問 4　メートル法で分数を書き表す場合，次の接頭語を用いる。
$\dfrac{1}{10}$ はデシ (d)，$\dfrac{1}{100}$ はセンチ (c)，$\dfrac{1}{1000}$ はミリ (m)，$\dfrac{1}{1000}$ ミリを
マイクロ (μ)，$\dfrac{1}{1000}$ マイクロをナノ (n)，$\dfrac{1}{1000}$ ナノをピコ (p) という。

次の分数を 10^{-n} の形にせよ。

$1\,\overset{\text{デシ}}{\mathrm{d}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{センチ}}{\mathrm{c}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{ミリ}}{\mathrm{m}} =$

$1\,\overset{\text{マイクロ}}{\mu} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{ナノ}}{\mathrm{n}} =$　　　　　　$1\,\overset{\text{ピコ}}{\mathrm{p}} =$

< 単位の計算 1 >

< **長さ** > 長さの単位を示す。

1km (キロメートル)	1m (メートル)	1dm (デシメートル)	1cm (センチメートル)	1mm (ミリメートル)	1μm (マイクロメートル)	1nm (ナノメートル)	1 Å (オングストローム)
1000	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{1000000000}$	$\frac{1}{10000000000}$

例 1 3.5km = 3500m , 2.4m = 240cm , 1m = 10^{10} Å

問 1 次の□にあてはまる数を入れよ。

(1) 123m = $\boxed{}$ km　(2) 7500mm = $\boxed{}$ m　(3) 1mm = $\boxed{}$ Å

例 2 「12.5km と 740m とあわせて何 km になるか?」という問題では

740m = 0.74km だから

12.5km + 0.74km = <u>13.24km</u>

(注) 12.5km + 740m と書いてはならない。計算するときは必ず単位をそろえてする。

問 2 (1) 1050cm と 2.4m を足すと何 m になるか?

(2) 2km から 140m を引くと何 m になるか?

< **時間** > 1h(時間) = 60min(分) , 1min(分) = 60s(秒) で計算する。

例 3 1h = 60min , 1min = $\frac{1}{60}$h

1min = 60s , 1s = $\frac{1}{60}$min

4h = 4×60min = 240min

150min = $150\times\frac{1}{60}$h = $\frac{5}{2}$h = 2.5h

例 4 1.3 時間を分になおしたい。

$$1.3\text{h} = \frac{13}{10}\text{h} = \frac{13}{10}\times 60\text{min} = 78\text{min}$$

より <u>(答) 78 分</u>

問 3 次の□にあてはまる数を入れよ。

(1) 0.6min = $\boxed{}$ s　(2) 36s = $\boxed{}$ h　(3) 1h = $\boxed{}$ s

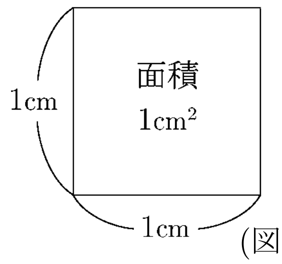
(4) 156s = $\boxed{}$ min　(5) 2.3h = $\boxed{}$ min　(6) 15min = $\boxed{}$ h

＜単位の計算 2＞

＜**面積**＞

$1\mathrm{km}^2$ (1 平方キロメートル) ＝ 1 辺が 1km の正方形の面積
$1\mathrm{m}^2$ (1 平方メートル) ＝ 1 辺が 1m の正方形の面積
$1\mathrm{cm}^2$ (1 平方センチメートル) ＝ 1 辺が 1cm の正方形の面積
$1\mathrm{mm}^2$ (1 平方ミリメートル) ＝ 1 辺が 1mm の正方形の面積

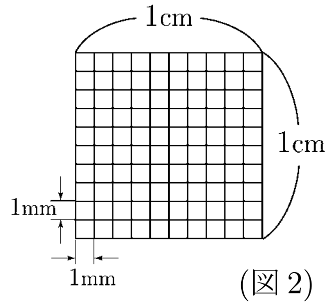
(注) $1\mathrm{km}^2=1\mathrm{km}\times1\mathrm{km}$, $1\mathrm{m}^2=1\mathrm{m}\times1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^2=1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^2=1\mathrm{mm}\times1\mathrm{mm}$ と考える。



(図 1)

例 1 図 1 は $1\mathrm{cm}^2$ を表す正方形であり，縦と横を 10 等分したものが図 2 である。図 2 の小正方形の 1 個の面積は $1\mathrm{mm}^2$ であり，それが 100 個あるから $1\mathrm{cm}^2=100\mathrm{mm}^2$ となる。これを式で表すと

$$1\mathrm{cm}^2=1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}=10\mathrm{mm}\times10\mathrm{mm}=100\mathrm{mm}^2$$



(図 2)

例 2 $7.5\mathrm{m}^2=7.5\mathrm{m}\times1\mathrm{m}=750\mathrm{cm}\times100\mathrm{cm}=75000\mathrm{cm}^2$

問 1 次の □ にあてはまる数を入れよ。

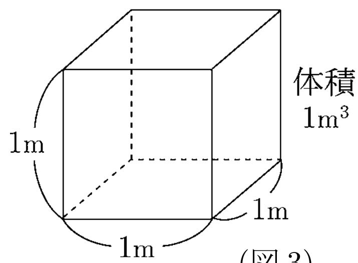
(1) $1\mathrm{m}^2=\boxed{\quad}\ \mathrm{cm}^2$ (2) $1\mathrm{km}^2=\boxed{\quad}\ \mathrm{m}^2$

(3) $0.5\mathrm{cm}^2=\boxed{\quad}\ \mathrm{mm}^2$ (4) $600\mathrm{mm}^2=\boxed{\quad}\ \mathrm{m}^2$

＜**体積**＞

$1\mathrm{m}^3$ (1 立方メートル) ＝ 1 辺が 1m の立方体の体積 (図 3)
$1\mathrm{cm}^3$ (1 立方センチメートル) ＝ 1 辺が 1cm の立方体の体積
$1\mathrm{mm}^3$ (1 立方ミリメートル) ＝ 1 辺が 1mm の立方体の体積

(注) $1\mathrm{m}^3=1\mathrm{m}\times1\mathrm{m}\times1\mathrm{m}$, $1\mathrm{cm}^3=1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}$, $1\mathrm{mm}^3=1\mathrm{mm}\times1\mathrm{mm}\times1\mathrm{mm}$ と考える。



(図 3)

例 3 $6.4\mathrm{cm}^3=6.4\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}\times1\mathrm{cm}=64\mathrm{mm}\times10\mathrm{mm}\times10\mathrm{mm}=6400\mathrm{mm}^3$

問 2 次の □ にあてはまる数を入れよ。

(1) $1\mathrm{cm}^3=\boxed{\quad}\ \mathrm{mm}^3$ (2) $1\mathrm{m}^3=\boxed{\quad}\ \mathrm{cm}^3$

(3) $1\mathrm{m}^3=\boxed{\quad}\ \mathrm{mm}^3$ (4) $0.001\mathrm{km}^3=\boxed{\quad}\ \mathrm{m}^3$

< 単位の計算 3 >

< 速度 > 速度は「移動した距離 (長さ)」を「移動にかかった時間」で割ったものである。その単位としては

$$1\text{km/h}（時速 1\text{km}）= \frac{1\text{km}}{1\text{h}} = 1 時間に 1\text{km} 移動する速度$$

$$1\text{m/min}（分速 1\text{m}）= \frac{1\text{m}}{1\text{min}} = 1 分間に 1\text{m} 移動する速度$$

$$1\text{m/s}（秒速 1\text{m}）= \frac{1\text{m}}{1\text{s}} = 1 秒間に 1\text{m} 移動する速度$$

$$1\text{cm/s}（秒速 1\text{cm}）= \frac{1\text{cm}}{1\text{s}} = 1 秒間に 1\text{cm} 移動する速度$$

などがよく使われる。

例 1 27km/h（時速 27km）を分速になおすと

$$27\text{km/h} = \frac{27\text{km}}{1\text{h}} = \frac{27000\text{m}}{60\text{min}} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = 450\text{m/min}（分速 450\text{m}）$$

であり，秒速になおすと

$$450\text{m/min} = \frac{450\text{m}}{1\text{min}} = \frac{450\text{m}}{60\text{s}} = \frac{7.5\text{m}}{1\text{s}} = 7.5\text{m/s}（秒速 7.5\text{m}）$$

となる。ここで 7.5m=750cm より，7.5m/s=750cm/s（秒速 750cm）としてもよい。

問 1 次の $\boxed{}$ にあてはまる数を入れよ。

$$18\text{km/h} = \boxed{}\ \text{m/min} = \boxed{}\ \text{m/s}$$

問 2 5m を 6 秒で走る速度を時速になおせ。

例 2 「2km/min（分速 2km）のスピードで走ると 100m を何秒で走るか？」という問題では，

$$2\text{km/min} = \frac{2\text{km}}{1\text{min}} = \frac{2000\text{m}}{60\text{s}} = \frac{100\text{m}}{3\text{s}}$$

より <u>（答）100m を 3 秒で走る</u>

問 3 54km を 1 時間 39 分で走る速度では，100m を何秒で走るか？

＜累乗根 1＞

整数 n と m の比 $\dfrac{n}{m}$ で表される数を**有理数**という。$m=1$ のときは $\dfrac{n}{1}=n$ だから整数は有理数の一部である。有理数でない数を**無理数**という。$\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ は無理数である。実は有理数より無理数の方が多い。

例 1　面積が 2 である正方形の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^2=2}$ である。この x は無理数で約 1.4142 である。この x を 2 の **2 乗根**または**平方根**といい $\boxed{x=\sqrt{2}}$ と書く。

例 2　体積が 2 である立方体の一辺の長さを x とすると $\boxed{x^3=2}$ である。この x は無理数で約 1.25992 である。この x を 2 の **3 乗根**または**立方根**といい $\boxed{x=\sqrt[3]{2}}$ と書く。

例 3　$x=\sqrt{\sqrt{2}}$ は 4 乗すると 2 になる。つまり $\boxed{x^4=2}$ である。x は無理数で約 1.18921 である。この x を 2 の **4 乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[4]{2}}$ と書く。

一般に正の数 a と自然数 n に対して，n 乗すると a になる正の数を x とする。つまり $\boxed{x^n=a}$ $(x>0)$ である。この x を a の n **乗根**といい $\boxed{x=\sqrt[n]{a}}$ と書く。平方根，立方根，n 乗根等をまとめて**累乗根**という。また記号 $\sqrt{}$，$\sqrt[3]{}$，$\sqrt[n]{}$ をまとめて**根号**という。

(注) 2 乗根 (平方根) の場合は $\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\boxed{\sqrt[2]{a}=\sqrt{a}}$ と書く。

例 4　累乗根は常に無理数とは限らない。例えば

$$\sqrt{49}=7 \quad , \quad \sqrt[3]{0.125}=0.5 \quad , \quad \sqrt[4]{81}=3 \quad , \quad \sqrt[5]{32}=2$$

は無理数ではない。

問　次の累乗根は全て無理数ではない。根号をはずして表せ。

(1) $\sqrt{169}$　　(2) $\sqrt[3]{8}$　　(3) $\sqrt[3]{125}$

(4) $\sqrt[4]{256}$　　(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$　　(6) $\sqrt[5]{3125}$

＜累乗根 2＞

例 1 $\sqrt[3]{2}$ は 3 乗して 2 になる数だから $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$ である。また $\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$ である。

一般に $\boxed{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$ が成り立つ。

例 2 $x = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5}$ とおくと

$$x^3 = (\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5})^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \times (\sqrt[3]{5})^3 = 2 \times 5 = 10$$

より $x = \sqrt[3]{10}$ つまり $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \times 5}$ が成り立つ。

一般に $\boxed{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}}$ が成り立つ。

例 3 $y = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}$ とおくと

$$y^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}}\right)^3 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{(\sqrt[3]{5})^3} = \frac{2}{5}$$

より $y = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ つまり $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5}}$ が成り立つ。

一般に $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$ が成り立つ。

(注) $\sqrt[n]{}$ などの根号の中の数は常に正の数 (または 0 (ゼロ)) がはいる。
負の数は根号の中に入れない。

例 4 (1) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{42}$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{12}{2}} = \sqrt[4]{6}$

問 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{15}}$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}}$

< 累乗根 3 >

例 1 (1) $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times 5}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}=2\times\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

(2) $\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{2^5}=\sqrt[4]{2^4\times 2}=\sqrt[4]{2^4}\times\sqrt[4]{2}=2\times\sqrt[4]{2}=2\sqrt[4]{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[3]{54}$　　(2) $\sqrt[4]{112}$　　(3) $\sqrt[5]{64}$

例 2 $x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ とおく。

$$x^3=\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\left(\sqrt[3]{5}\right)^6$$

$$=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3\times\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5\times 5=5^2$$

よって $x^3=5^2$ より $x=\sqrt[3]{5^2}$ となる。従って

$$x=\left(\sqrt[3]{5}\right)^2=\sqrt[3]{5^2}$$

が成り立つ。

一般に正の数 a と自然数 m と n に対して次式が成り立つ。

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}}$$

例 3 (1) $\left(\sqrt[6]{25}\right)^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{\left(5^2\right)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(2) $\sqrt[3]{8^4}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^4=2^4=16$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\left(\sqrt[4]{25}\right)^2$　　(2) $\left(\sqrt[6]{4}\right)^3$

(3) $\sqrt[4]{16^2}$　　(4) $\sqrt[3]{27^2}$

＜分数指数 1 ＞

例 1　自然数 n と m に対して

$$(2^m)^n = \underbrace{2^m \times 2^m \times \cdots \times 2^m}_{n\text{ 個の積}} = 2^{m\times n}$$

が成り立つ。n 乗すると $2^{m\times n}$ になる数は n 乗根だから

$$2^m = \sqrt[n]{2^{m\times n}}$$

である。ここで $m \times n = k$ とおくと $m = \dfrac{k}{n}$ より

(1)　$$2^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{2^k}$$

である。そこで普通の分数 $\dfrac{k}{n}$ に対する指数を (1) で定めると

(2)　$$2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}\ ,\ \ 2^{\frac{k}{n}} = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^k = \left(\sqrt[n]{2}\,\right)^k$$

が成り立つ。

一般の正の数 a に対しても分数指数を

$$\boxed{a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

で定義する。

例 2　(1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$　,　(2) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

(3) $27^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$　,　(4) $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{16^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

問 1　次の値を求めよ。

(1) $121^{\frac{1}{2}}$　　(2) $27^{\frac{1}{3}}$　　(3) $25^{\frac{3}{2}}$

(4) $343^{\frac{2}{3}}$　　(5) $81^{\frac{5}{4}}$　　(6) $32^{\frac{4}{5}}$

(7) $16^{-\frac{1}{2}}$　　(8) $27^{-\frac{4}{3}}$　　(9) $64^{-\frac{2}{3}}$

問 2　次式を $a^{\frac{k}{n}}$ の形に書け。

(1) $\sqrt[3]{a}$　　(2) $\sqrt[3]{a^2}$　　(3) $(\sqrt[4]{a})^5$　　(4) $(\sqrt[4]{a})^{-3}$

＜分数指数 2 ＞

例 1 $x=\sqrt[6]{5^2}$ とおくと $x^3=\left(\sqrt[6]{5^2}\right)^3=\sqrt[6]{(5^2)^3}=\sqrt[6]{5^6}=5$ より $x=\sqrt[3]{5}$

すなわち $\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[3]{5}$ である。この計算は指数になおすと簡単である。

$$\sqrt[6]{5^2}=5^{\frac{2}{6}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$$

例 2 $\sqrt[6]{2^3}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

問 1 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[6]{4^3}$　　(2) $\sqrt[12]{7^4}$　　(3) $\sqrt[3]{5^9}$　　(4) $\sqrt[6]{27^4}$

例 3 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^3}{2}}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

(別解)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

例 4 $\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5}\times\sqrt[6]{5^3}\times\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{5\times5^3\times5^2}=\sqrt[6]{5^6}=5$

(別解)　$\sqrt[6]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{6}}\times5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=5^1=5$

例 5 $\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^3}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$

(別解)　$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^2}}\right)^3=\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

問 2 次式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt[2]{10}\times\sqrt[4]{100}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9}}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{9}}$　　(4) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{27}}\right)^2$

< 指数法則の拡張 >

分数指数や整数指数を定義しておくと，次の指数法則が成立する。

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して	
$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{}}$,	$2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{}}$
$3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{}}$,	$4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 1 上の指数法則の $\boxed{}$ の中をうめよ。

累乗根の計算は指数を使う方が簡単になる場合が多い。

例 1 (1) $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{3}} = a^{\frac{9}{3}} = a^3$

(2) $\sqrt[6]{a^5} \div \sqrt[3]{a} = a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(3) $(\sqrt{a})^{-\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}\times(-\frac{2}{3})} = a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

問 2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^3}$ (2) $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a}$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^2}$ (4) $\sqrt[3]{a^7} \div (\sqrt[3]{a})^4$

(5) $(\sqrt[4]{a})^{\frac{8}{3}}$ (6) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}}\right)^{-2}$

例 2 $\sqrt[5]{48} \times \sqrt[5]{162} = (48)^{\frac{1}{5}} \times (162)^{\frac{1}{5}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{5}} \times (2 \times 3^4)^{\frac{1}{5}}$

$= (2^{\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}}) \times (2^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}}) = (2^{\frac{4}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}}) \times (3^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{4}{5}})$

$= 2^{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{5}+\frac{4}{5}} = 2^1 \times 3^1 = 6$

(注) ここで素因数分解 $48 = 2^4 \times 3$, $162 = 2 \times 3^4$ を用いた。

問 3 次の計算をせよ。

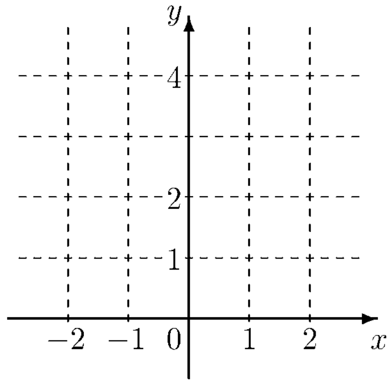
(1) $(3^3 \times 5^2)^{\frac{1}{7}} \times (3^4 \times 5^5)^{\frac{1}{7}}$ (2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{72}$

＜ 指数関数 ＞

問 関数が以下の場合に，表を完成し，グラフを書け。

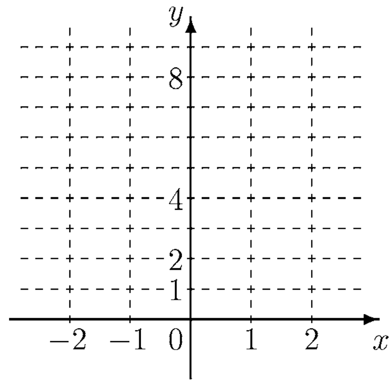
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y						



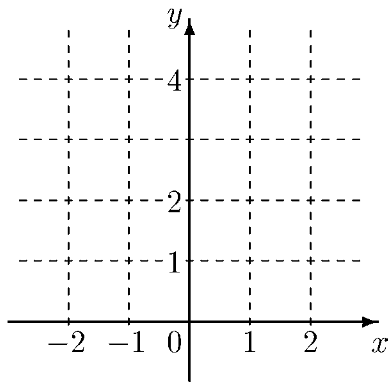
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y						



(3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					



< 指数方程式 >

例題 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $2^x = 8\sqrt{2}$　　(2) $4^x = 0.5$　　(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4}$

(解答) (1) $2^x = 8\sqrt{2} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{2}}$ より $\underline{(答)\ \ x = \dfrac{7}{2}}$

(2) $4^x = 0.5 \ \Rightarrow\ \left(2^2\right)^x = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ 2^{2x} = 2^{-1} \ \Rightarrow\ 2x = -1$ より $\underline{(答)\ \ x = -\dfrac{1}{2}}$

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt[3]{4} \ \Rightarrow\ \left(2^{-1}\right)^x = \sqrt[3]{2^2} \ \Rightarrow\ 2^{-x} = 2^{\frac{2}{3}} \ \Rightarrow\ -x = \dfrac{2}{3}$ より $\underline{(答)\ \ x = -\dfrac{2}{3}}$

問 次の式を満たす数 x を求めよ。

(1) $3^x = 1$　(2) $3^x = 3$　(3) $3^x = 9$　(4) $3^x = \dfrac{1}{3}$

(5) $3^x = \sqrt{3}$　(6) $10^x = 1$　(7) $10^x = 100$　(8) $10^x = \sqrt[3]{10}$

(9) $10^x = 0.1$　(10) $10^x = 0.01$　(11) $2^x = 1$　(12) $2^x = 4$

(13) $2^x = 32$　(14) $2^x = \sqrt[4]{2}$　(15) $2^x = 2\sqrt{2}$　(16) $2^x = 0.5$

(17) $2^x = 0.125$　(18) $2^x = \dfrac{1}{4}$　(19) $2^x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(20) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 1$

(21) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.5$　(22) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0.125$　(23) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{4}$　(24) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2$

(25) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 4$　(26) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$　(27) $4^x = 1$　(28) $4^x = 16$

(29) $4^x = 2$　(30) $4^x = 8$　(31) $4^x = 0.25$　(32) $4^x = \sqrt{2}$

＜ 対数 1 ＞

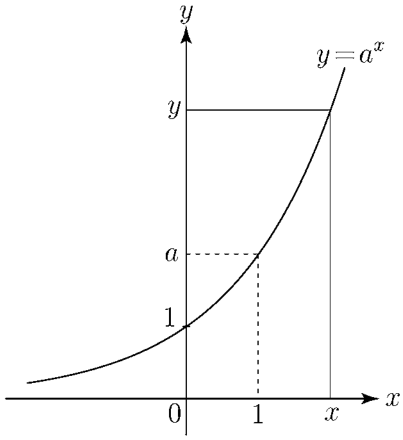
正の数 $a(\neq 1)$ と y に対して
指数方程式

$$\boxed{a^x = y}$$

をみたす数 x を，a を底とする y の**対数**
といい

$$\boxed{x = \log_a y}$$

と書く。



例 1　(1)　$2^3 = 8 \iff 3 = \log_2 8$

(2)　$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$

問 1　次の式で $a^x = y$ の形 (指数の形) で書かれているものは $x = \log_a y$ の形 (対数の形) に，対数で書かれているものは指数の形にせよ。

(1) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　　(2) $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$　　(3) $3 = \log_3 27$　　(4) $\dfrac{3}{2} = \log_9 27$

(注) 記号 $\boxed{\log_a \bigcirc}$ は $\boxed{a\text{ を何乗すれば○になるか？}}$ という意味である。

例 2　(1)　$\log_2 16 = \log_2 (2^4) = 4$

(2)　$\log_3 243 = \log_3 (3^5) = 5$

問 2　次の対数の値を求めよ。

(1)　$\log_2 64$

(2)　$\log_3 243$

(3)　$\log_{10} 1000$

(4)　$\log_5 625$

＜ 対数 2 ＞

例 1 (1) $\log_4 2 = \log_4\left(\sqrt{4}\right) = \log_4\left(4^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

(2) $\log_5 1 = \log_5\left(5^0\right) = 0$

(3) $\log_2 0.25 = \log_2\left(\dfrac{25}{100}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{1}{2^2}\right) = \log_2\left(2^{-2}\right) = -2$

問 1 次の対数の値を求めよ。

(1) $\log_2 64$　　(2) $\log_2 \sqrt{2}$　　(3) $\log_2 0.5$

(4) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$　　(5) $\log_4 64$　　(6) $\log_4 1$

(7) $\log_6 \sqrt[3]{6}$　　(8) $\log_5 0.2$　　(9) $\log_{10} 0.01$

(10) $\log_7 \sqrt[3]{49}$　　(11) $\log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$　　(12) $\log_4 8$

例 2

$$\log_2(8\times 16) = \log_2\left(2^3\times 2^4\right) = \log_2\left(2^{3+4}\right) = \log_2\left(2^7\right) = 7$$

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(2^4\right) = 3+4 = 7$$

より

$$\log_2(8\times 16) = \log_2 8 + \log_2 16$$

が成り立つ。

問 2 $\log_2 M = \alpha$, $\log_2 N = \beta$ とおくと $M = 2^\alpha$, $N = 2^\beta$ と表せる。

このことを利用して次式を証明せよ。

$$\log_2(M\times N) = \log_2 M + \log_2 N$$

(証明)

< 対数 3 >

例 1 $\log_2\left(\dfrac{128}{8}\right)=\log_2\left(\dfrac{2^7}{2^3}\right)=\log_2\left(2^{7-3}\right)=\log_2\left(2^4\right)=4$

$\log_2 128-\log_2 8=\log_2\left(2^7\right)-\log_2\left(2^3\right)=7-3=4$

より

$$\log_2\left(\frac{128}{8}\right)=\log_2 128-\log_2 8$$

が成り立つ。

問 1 $\log_2 M=\alpha$, $\log_2 N=\beta$ とおくと $M=2^\alpha$, $N=2^\beta$ と表せる。

このことを利用して次式を証明せよ。

$$\log_2\left(\frac{M}{N}\right)=\log_2 M-\log_2 N$$

(証明)

例 2 $\log_2 8^5=\log_2\left(\left(2^3\right)^5\right)=\log_2\left(2^{3\times5}\right)=\log_2\left(2^{15}\right)=15$

$5\times\log_2 8=5\times\log_2\left(2^3\right)=5\times3=15$

より

$$\log_2\left(8^5\right)=5\times\log_2 8$$

が成り立つ。

問 2 $\log_2 M=\alpha$ とおくと $M=2^\alpha$ と表せる。

このことを利用して次式を証明せよ。

$$\log_2(M^r)=r\times\log_2 M$$

(証明)

＜ 対数 4 ＞

45 ページと同様に一般の対数でも

$$\boxed{\log_a(\,M \times N\,) = \log_a M + \log_a N}$$

が成り立つ。

問 1　次式を $\log_a M$ と $\log_a N$ で表せ。

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) =$$

問 2　次式を r と $\log_a M$ で表せ。

$$\log_a(\,M^r\,) =$$

例　(1) $\log_3 54 + \log_3 1.5 = \log_3(54 \times 1.5) = \log_3 81 = 4$

(2) $\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50 \times 20) = \log_{10} 1000 = 3$

(3) $2\log_3 6 - \log_3 4 = \log_3(\,6^2\,) - \log_3 4 = \log_3\left(\frac{6^2}{4}\right) = \log_3 9 = 2$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 12 + \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$

(2) $\log_3 108 - \log_3 4$

(3) $\log_6 12 + \log_6 2 + 2\log_6 3$

(4) $\log_{10} 4 + \log_{10} 25 - \log_{10} 0.1$

＜ 底の変換 ＞

対数には次の性質がある。

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}} \text{ (底の変換)}$$

ただし a, b, c は正の数であり $a \neq 1,\ \ c \neq 1$ である。

[証明]　$\log_c a = \alpha$, $\log_c b = \beta$ とおくと

$a = c^{\alpha}$, $b = c^{\beta}$ より　$c^{\beta} = (c^{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}} = a^{\frac{\beta}{\alpha}}$

$$\log_a b = \log_a(a^{\frac{\beta}{\alpha}}) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \text{(証明終)}$$

例　$\log_9 27 = \dfrac{\log_3 27}{\log_3 9} = \dfrac{3}{2}$

問 1　次式の値を求めよ。

(1) $\log_8 16$　　(2) $\log_{16} 64$

(3) $\log_{27} 81$　　(4) $\log_8 2$

(5) $\log_4 \sqrt{2}$　　(6) $\log_{27} \sqrt{3}$

問 2　底の変換公式を用いて等式 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ を示せ。

問 3　次式の値を求めよ。

(1) $\log_4 32 + \log_{16} 64$　　(2) $\bigl(\log_3 4\bigr) \times \bigl(\log_4 9\bigr)$

(3) $\bigl(\log_2 3\bigr) \times \bigl(\log_3 4\bigr) \times \bigl(\log_4 2\bigr)$

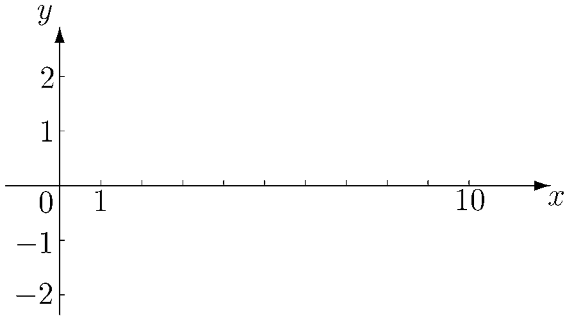
＜ 対数関数 ＞

問　次の関数に対し，表を完成させ，定義域 (括弧内の x の範囲) 内で，
グラフの概形を書け。

(1)　$y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

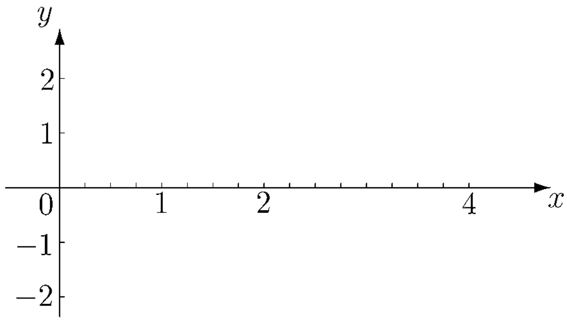
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y				

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



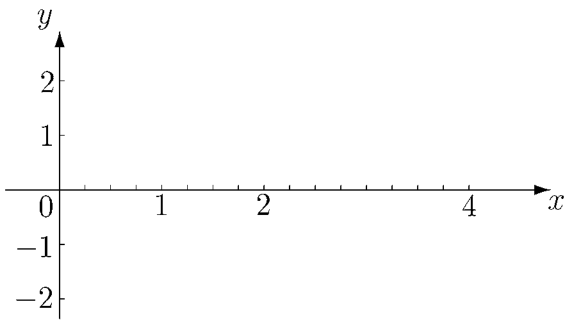
(2)　$y = \log_2 x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



(3)　$y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y					



＜ 常用対数 1 ＞

10 を底とする対数を**常用対数**という。常用対数表には，a が 1.00，1.01，1.02，$\cdots$，9.99 のときの $\log_{10} a$ の近似値を，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで載せてある。

＜ 常用対数表 ＞

数	0	1	2	3
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553
1.5	.1761	.1792	.1818	.1847
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814

例　常用対数表より

$$\log_{10} 1.72 = 0.2355$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 172000 &= \log_{10}(1.72 \times 10^5)\\ &= \log_{10} 1.72 + \log_{10} 10^5\\ &= 0.2355 + 5 = 5.2355\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 0.0172 &= \log_{10}(1.72 \times 10^{-2})\\ &= \log_{10} 1.72 + \log_{10} 10^{-2}\\ &= 0.2355 - 2 = -1.7645\end{aligned}$$

問 1　常用対数表を用いて，次の値を小数第 4 位まで求めよ。

(1)　$\log_{10}(1410)$　　(2)　$\log_{10}(203000)$　　(3)　$\log_{10}(0.00302)$

例題　2^{30} は何桁の数か。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(解)　$x = 2^{30}$ とおき両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} x = \log_{10} 2^{30} = 30 \times \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$$

より

$$x = 10^{9.03}$$

となる。よって

$$10^9 < x < 10^{10}$$

であり，$10^9 = 1000000000$ は 10 桁の数だから　　(答)　10 桁

問 2　3^{50} は何桁の数か。ただし $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

< 常用対数 2 >

問 1 $\log_{10} 2 = 0.301$ を用いて $\log_{10} \sqrt[4]{5}$ の値を求めよ。

問 2 前ページの表と底の変換公式を用いて, $\log_2 3$ の値を, 小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで求めよ。

問 3 $(0.5)^{20}$ は, 小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

例題 1 時間に 2 倍の割合で増殖するバクテリアは, 約何時間何分後に 100 倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

(解) 求める時間を x とすると $2^x = 100$

両辺の常用対数をとると $\log_{10} 2^x = \log_{10} 100$

すなわち $x \log_{10} 2 = 2$

$$x = \frac{2}{\log_{10} 2} = \frac{2}{0.301} \fallingdotseq 6.644$$

$0.644\text{h} = 0.644 \times 60\,\text{min} = 38.64\,\text{min}$ より

(答) 約 6 時間 39 分後

問 4 30 分に 2 倍の割合で増殖するバクテリアは約何時間何分後に 1000 倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.301$ とする。

< 指数・対数の練習 1 >

問 1　次の値を求めよ。

(1) $27^{-\frac{2}{3}}$　(2) $(0.25)^{0.5}$　(3) $\dfrac{1}{(0.2)^{-2}}$

(4) $\log_9 27$　(5) $\log_{\frac{1}{2}} 16$　(6) $\log_{0.2} 125$

問 2　次の計算をせよ。

(1) $36^{1.5} \times 32^{-0.2}$　(2) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} \div 16}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$

(3) $(a^3b)^{\frac{1}{6}} \times (ab^2)^{\frac{2}{3}} \div (ab^{-3})^{\frac{1}{6}}$　(4) $\sqrt[6]{a^5b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^4b^{-1}}$

(5) $108^{0.2} \times 72^{0.2}$　(6) $\sqrt[14]{800} \times \sqrt[14]{12500}$

問 3　次式を簡単にせよ。

(1) $\log_5 20 + \log_5 100 - 2\log_5 4$　(2) $4\log_3 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 2 + \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24}$　(4) $(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 8)$

(5) $\log_3 \dfrac{3}{2} + \log_9 \dfrac{81}{4} + \log_{27} \dfrac{64}{27}$　(6) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$

< 指数・対数の練習 2 >

問 1　次の方程式を解け。

(1) $2^{x-1} = 16\sqrt{2}$　　(2) $3^{2x+1} = \sqrt[3]{9}$

(3) $\log_2 x(x+2) = 3$　　(4) $\log_3(x-3) + \log_3(2x-9) = 2$

問 2　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。

(1) $8^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$　　(2) $\log_2(2x-5) \leqq -1$

問 3　次の各組の数を小さい方から順に並びかえ、不等式（○ < ○ < ○）で表せ。

(1) 1 , $(0.9)^{0.5}$, $(0.9)^{-\frac{1}{3}}$　　(2) $\log_2 10$, 3 , $\frac{1}{2}\log_2 81$

(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[6]{7}$　　(4) $\log_2 3$, $\log_4 7$, $\log_8 10$

問 4　$\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき, 次の各式を a , b で表せ。

(1) $\log_{10}\sqrt{\frac{8}{9}}$　　(2) $\log_2 6$　　(3) $\log_9 \sqrt{5}$

問 5　$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ として次の問に答えよ。

(1) 6^{40} は何桁の数か。

(2) $\left(\frac{1}{12}\right)^{10}$ は小数第何位にはじめて 0 でない数字が現れるか。

問 6　3 時間ごとに 2 倍の割合で増殖するバクテリアは, 約何時間何分後に 10 万倍となるか。ただし $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

< 力の単位 >

< 加速度 > 加速度は「速度変化の割り合い」であり,「速度の変化量」を「時間」で割ったものである。たとえば

$$1\mathrm{km/h^2} = \frac{1\mathrm{km/h}}{1\mathrm{h}} = 1 \text{ 時間に時速 } 1\mathrm{km} \text{ だけ加速する}$$

$$1\mathrm{m/s^2} = \frac{1\mathrm{m/s}}{1\mathrm{s}} = 1 \text{ 秒間に秒速 } 1\mathrm{m} \text{ だけ加速する}$$

$$-1\mathrm{m/min^2} = \frac{-1\mathrm{m/min}}{1\mathrm{min}} = 1 \text{ 分間に分速 } 1\mathrm{m} \text{ だけ減速する}$$

問 1 次の $\boxed{}$ に適当な分数を入れよ。$81\mathrm{km/h^2} = \boxed{}\ \mathrm{m/min^2} = \boxed{}\ \mathrm{m/s^2}$

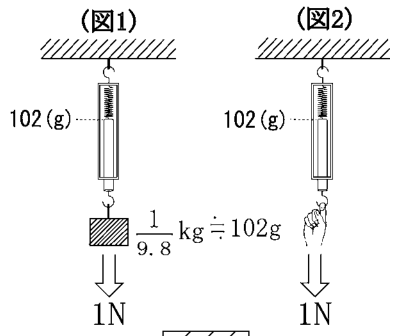
< 力 > 力 = 質量 × 加速度である。力の単位を N(ニュートン) という。

1N(ニュートン) $=$ $1\mathrm{kg \cdot m/s^2}$ $=$ $1\mathrm{kg} \times 1\mathrm{m/s^2}$ $=$ 質量 1kg の物体に力を加えて 1 秒間に 1m/s だけ加速する力

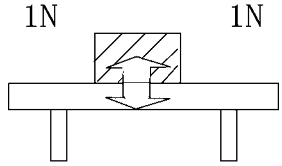
$= \dfrac{1}{9.8}\mathrm{kg} \times 9.8\ \mathrm{m/s^2}$(重力加速度)

$= \dfrac{1}{9.8}\mathrm{kg}$ の物体が地球の重力によって引っ張られる力 (図 1)

$=$ ばね計りを手でひっぱって, 目盛りが $\dfrac{1}{9.8}$ kg ($\fallingdotseq 102$ g) になる力 (図 2)



< 圧力 > ある物体を机の上に置いたとき, 重力によって物体は机を押し, 作用・反作用の法則により机は物体を押し返す。
このように押し合う力を**圧力**という。



圧力の大きさは単位面積に対し加わる力の大きさで表す。
単位は $\mathrm{N/m^2}$ を用いる。この単位をパスカル (Pa) という。

$$1\mathrm{Pa}(\text{パスカル}) = 1\mathrm{N/m^2} = \frac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{m^2}} = 1 \text{ 平方メートルの面に } 1\mathrm{N}(\text{ニュートン})\text{ の力が加わっている。}$$

問 2 1Pa(パスカル) の力では, $1\mathrm{cm^2}$ の面に何 N(ニュートン) の力が加わるか？

問 3 地球の大気圧は約 1000 ヘクトパスカル (hPa) である。この圧力では $1\mathrm{m^2}$ の面に何 N(ニュートン) の力が加わっているか？

< 音圧 >

人が声を発すると，口から息が押し出される。すると口の前の空気が圧縮され，圧力の変化が生じて，まわりの空気を押す。次にこの空気が圧縮され，再び余分の圧力を生じ，そのまわりの空気を押す。これが繰り返されることによって，空気の振動 (= 波) が伝わる。この振動が人の耳にはいると，耳の鼓膜を振動させ，その振動が神経によって脳に伝わり，音として感じられ理解される。このとき耳の鼓膜を押す空気の圧力を**音圧**という。人間が感じる音圧を p とすると，その範囲は

$$20\mu\text{Pa}(\text{マイクロパスカル}) \leqq p \leqq 10\text{Pa}(\text{パスカル})$$

である。20μPa は人間が聞き取れる最小の音の音圧であり，これを基準音圧という。

問 1 20μPa は何 Pa(パスカル) か？　20×10^n Pa の形で表せ。

人間が感じる音圧の大きさは基準音圧の倍数に比例しないで，その対数に比例することがわかっている。これを**音圧レベル**といい，音圧 p に対し

$$\boxed{p\text{ の音圧レベル} = 10 \log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2} \qquad (\text{dB})$$

と定める。ここで p_0 は基準音圧 20μPa である。その大きさの単位は**デシベル** (記号 dB) を用いる。

(注)　$\log_{10}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2$ の単位を**ベル** (B) という。このベルは電話の発明者グラハム・ベルにちなんでいる。

問 2 次の各場合に音圧レベルを求めよ。

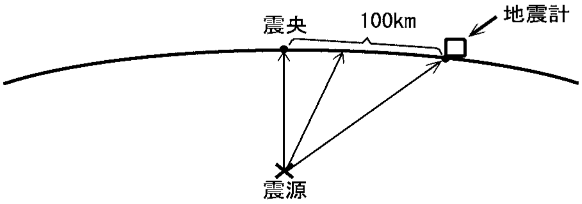
(1) $p = 20\mu$Pa　　(2) $p = 200\mu$Pa

(3) $p = 2$mPa(ミリパスカル)　　(4) $p = 20$mPa

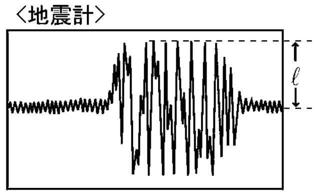
(5) $p = 0.2$Pa　　(6) $p = 2\sqrt{10}$Pa

< マグニチュード >

地震の大きさを表すのにマグニチュードがあり，それは次のように定められる。



地震の発生した地点を震源といい, 震源に最も近い地表の場所を震央という。



震央から 100km 離れた地表の 1 点に地震計をおく。その地震計は実際のゆれを 2800 倍して記録させたものであり, その最大振幅 ℓ を単位ミクロンで計ったものの対数を**マグニチュード**という。

$$\boxed{M = \log_{10} \ell} \quad \text{(マグニチュード)}$$

問 1 ℓ が次の場合に，マグニチュード M を求めよ。

(1) $\ell = 1\mu\mathrm{m}$(ミクロン)　　(2) $\ell = 1\mathrm{mm}$　　(3) $\ell = 1\mathrm{cm}$

(4) $\ell = 10\mathrm{cm}$　　(5) $\ell = 10^{1.5}\mathrm{cm}$　　(6) $\ell = 1\mathrm{m}$

地震のエネルギー E とマグニチュード M の間には

$$\boxed{\log_{10} E = 11.8 + 1.5M}$$

の関係がある。

問 2 E を M で表せ。

問 3 広島型原爆は地震にするとマグニチュード 5.2 のエネルギーである。阪神大震災はマグニチュード 7.2 である。阪神大震災のエネルギーは広島型原爆のエネルギーの何倍か？

＜解答 1 ～ 5＞

＜ 1 ページ. 関数の意味 ＞

問 1 の解答

$y = 10x + 50$

問 2 の解答

$y = 30 - \dfrac{1}{3}x \qquad (0 \leqq x \leqq 90)$

＜ 2 ページ. いろいろな関数 ＞

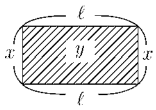
問 1 の解答

時間 (秒) x	1	10	60	600	3600	x
距離 (m) y	10	100	600	6000	36000	$10x$

$y = 10x$

問 2 の解答

$2x + 2\ell = 8 \quad \Rightarrow \quad \ell = 4 - x$



$y = x\ell = x(4 - x)$

(答) $y = 4x - x^2$

問 3 の解答

中心角 $x°$	1°	10°	30°	45°	90°	180°	360°	$x°$
面積 $y\,\mathrm{cm}^2$	$\frac{\pi r^2}{360}$	$\frac{\pi r^2}{36}$	$\frac{\pi r^2}{12}$	$\frac{\pi r^2}{8}$	$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{\pi r^2}{2}$	πr^2	$\frac{\pi r^2}{360}x$

(答) $y = \dfrac{\pi r^2}{360}x$

問 4 の解答

500g 増えると 1cm のびる　→　1kg 増えると 2cm のびる

100g 増えると 0.2cm のびる　⇒　重り 0 のとき 15cm

(答) $y = 15 + 2x$

＜ 3 ページ. 傾きの意味 ＞

問 1 の解答

(1) 3

(2) $\dfrac{1}{3}$

(3) $-\dfrac{2}{3}$

(4) $-\dfrac{3}{2}$

(5) $-\dfrac{2}{5}$

問 2 の解答

(1) $\dfrac{2}{5}$

(2) $-\dfrac{3}{4}$

(3) -1

(4) $\dfrac{3}{4}$

＜ 4 ページ.1 次関数のグラフ 1 ＞

問の解答

(1) $y = 4x + 3$

(2) $y = 5x - 15$

(3) $y = 4x - 5$

(4) $y = -x + 1$

(5) $y = 3$

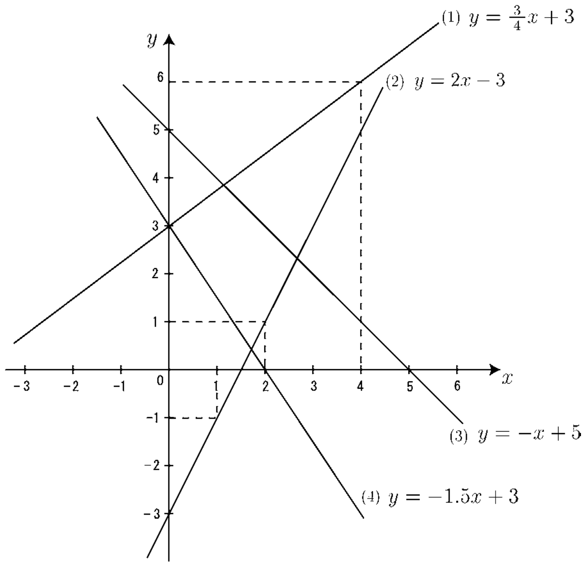
(6) $y = \dfrac{1}{3}x + 1$

(7) $y = 2x - 2$

(8) $y = -\dfrac{4}{3}x + 4$

＜ 5 ページ.1 次関数のグラフ 2 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

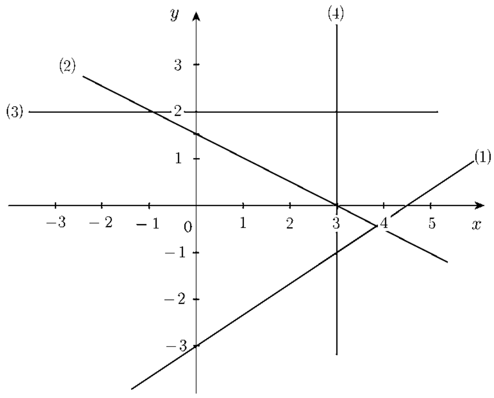
(1) $y = 3x$　　(2) $y = \dfrac{1}{3}x + 3$　　(3) $y = \dfrac{2}{3}x - 2$

(4) $y = -x + 4$　　(5) $y = -2x + 1$

＜解答 6 〜 8 ＞

＜ 6 ページ.1 次関数のグラフの問題 1 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

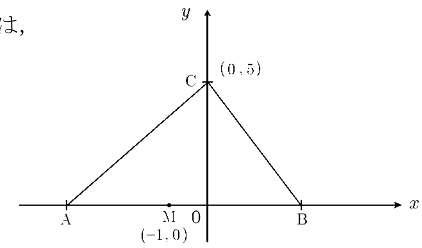
A，B の中点 M は $\left(\dfrac{-6+4}{2}\,,\ \dfrac{0+0}{2}\right) = (-1\,,\,0)$ であるから，

C，M を通る直線の式は，

$m = \dfrac{5-0}{0-(-1)} = 5$

$y - 5 = 5(x-0)$

$\underline{y = 5x + 5}$



＜ 7 ページ.1 次関数のグラフの問題 2 ＞

SMALL 問の解答

直線①の方程式は $y = \dfrac{1}{4}x - 1$

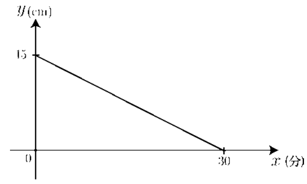
直線②の方程式は $y = -\dfrac{3}{2}x + 4$

①と②の交点の座標は $\left(\dfrac{20}{7},\ -\dfrac{2}{7}\right)$

＜ 8 ページ.1 次関数のグラフの問題 3 ＞

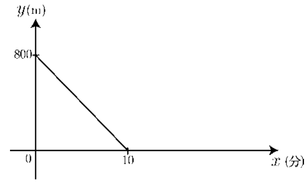
問 1 の解答

$y = 15 - 0.5x \qquad (0 \leqq x \leqq 30)$



問 2 の解答

$y = 800 - 80x \qquad (0 \leqq x \leqq 10)$



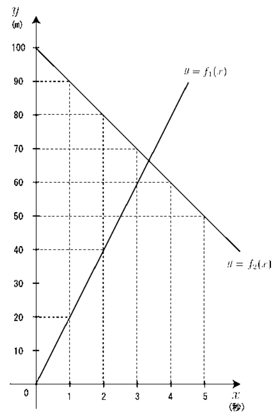
問 3 の解答

(1) $f_1(x) = 20x$, $f_2(x) = 100 - 10x$

(2) 右図

(3) $\left(\dfrac{10}{3}\,,\ \dfrac{200}{3}\right)$

(4) 2 つの車は，$\dfrac{10}{3}$ 秒後に，A 地点から $\dfrac{200}{3}$m の位置で，出会う。

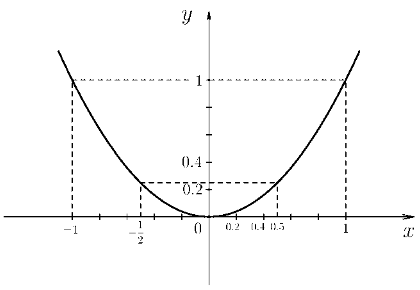


＜解答 9 〜 13＞

＜ 9 ページ.$y = x^2$ のグラフ ＞

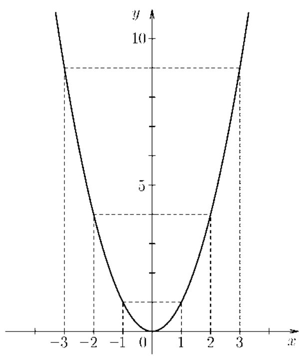
問 1 の解答

x	$\cdots$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\cdots$
y	$\cdots$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$	0	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	$\cdots$



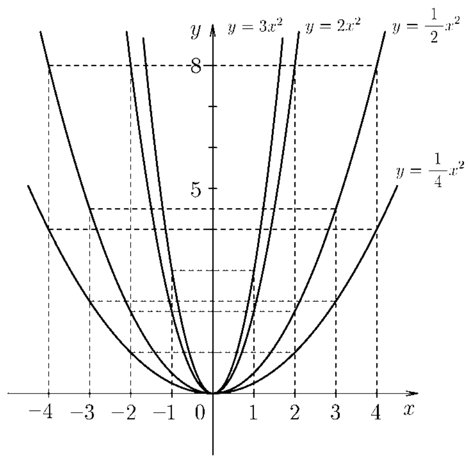
問 2 の解答

x	y
$\vdots$	$\vdots$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
$\vdots$	$\vdots$



＜ 11 ページ.2 次関数のグラフ 2 ＞

(1)，(2) の解答

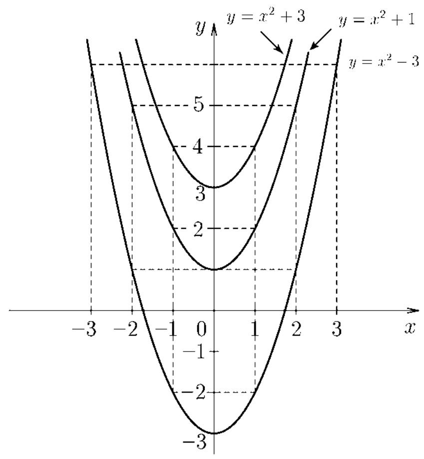


(3)，(4) の解答

略

＜ 12 ページ.2 次関数のグラフ 3 ＞

(1) の解答

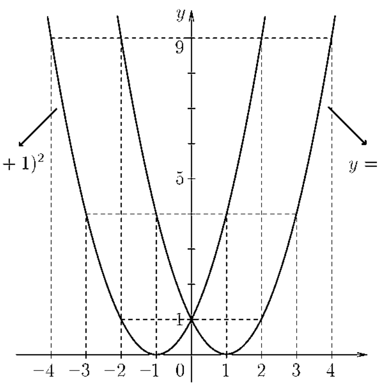


(2) の解答

略

＜ 13 ページ.2 次関数のグラフ 4 ＞

(1) の解答



(2) の解答

略

＜解答 14 〜 17＞

＜ 14 ページ.2 次方程式の変形 1 ＞

問の解答

(1) $x^2+8x=\left(x+\boxed{4}\right)^2-16$

(2) $x^2-2x+3=\left(x-\boxed{1}\right)^2+2$

(3) $x^2+x+1=\left(x+\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2+\frac{3}{4}$

(4) $x^2-3x-1=\left(x-\boxed{\frac{3}{2}}\right)^2-\frac{13}{4}$

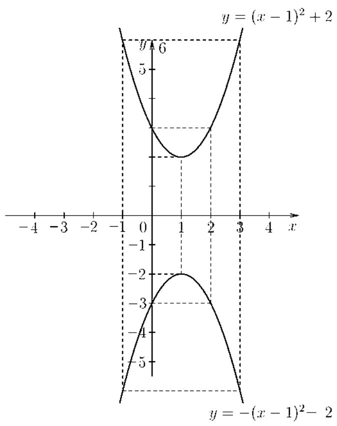
(5) $2x^2-8x+3=2\left(x-\boxed{2}\right)^2-5$

(6) $-2x^2+4x-1=-2\left(x-\boxed{1}\right)^2+1$

(7) $2x^2+5x+2=2\left(x+\boxed{\frac{5}{4}}\right)^2-\frac{9}{8}$

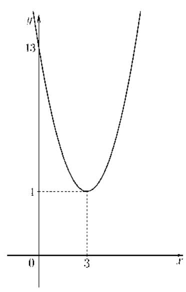
＜ 15 ページ.2 次関数のグラフ 5 ＞

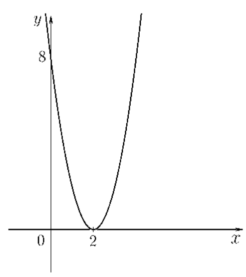
(1) の解答



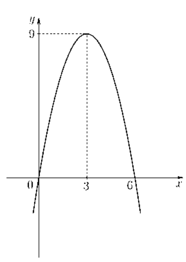
問の解答

(1) $y=(x-3)^2+4$ (2) $y=2(x-2)^2$





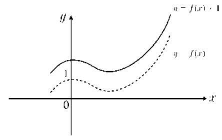
(3) $y=-(x-3)^2+9$



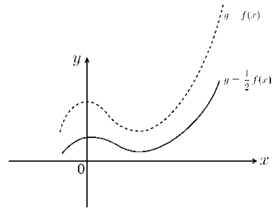
＜ 16 ページ. 練習問題 ＞

問 1 の解答

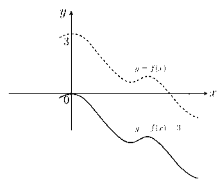
(1)



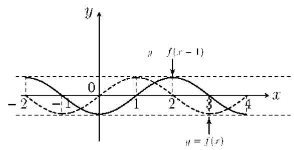
(2)



(3)



(4)



問 2 の解答

(1) $y=(x-3)^2+2$ (2) $y=x^2-2x$

(3) $y=(x+1)^2$ (4) $y=(x+1)^2-2$

(5) $y=-(x-2)^2+1$ (6) $y=-x^2-2x$

＜ 17 ページ.1 次不等式 ＞

問 1 の解答

(1) $x<4$, (2) $x\geqq-\frac{1}{2}$, (3) $x>-\frac{13}{2}$

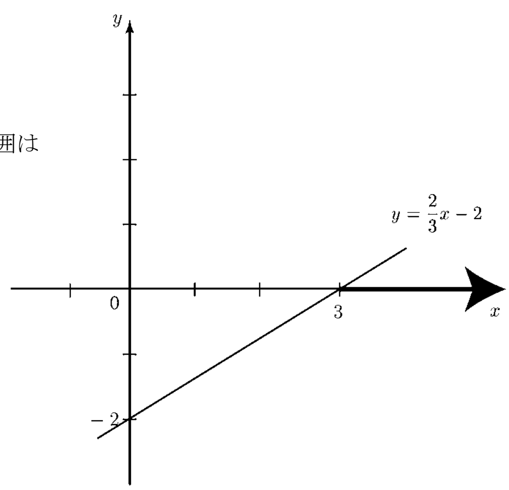
問 2 の解答

$\frac{2}{3}x-2\geqq0$ を

みたす x の範囲は

右図より

$\underline{x\ \geqq\ 3}$



＜解答 18 ～ 23＞

＜ 18 ページ.2 次不等式 ＞

問の解答

(1) $x < 2$, $3 < x$

(2) $-7 < x < 0$

(3) $x < -3$, $1 < x$

(4) $-2 < x < 2$

(5) $-4 \leqq x \leqq 3$

(6) $x \leqq \dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$, $\dfrac{1+\sqrt{10}}{3} \leqq x$

＜ 19 ページ.2 次関数のグラフと x 軸の共有点 ＞

問の解答

(1) 2 個,　(2) 1 個,　(3) なし

(4) 2 個,　(5) 1 個,　(6) なし

＜ 20 ページ.2 次関数のグラフと 2 次不等式 ＞

問の解答

(1) $x = 2$　　(2) $\dfrac{1}{3}$ 以外のすべての実数

(3) $\dfrac{2}{3} < x < 1$　　(4) すべての実数

＜ 21 ページ.2 次関数の問題 ＞

問 1 の解答

(1) $y = \dfrac{5}{2}x^2$

(2) 4.8 (秒後)

問 2 の解答

(1) 2 (秒後)

(2) 5 m/ 秒

問 3 の解答

(1) $\dfrac{1}{200}x^2$

(2) 32 m

(3) 100 m/ 時

＜ 22 ページ. 練習問題 1 ＞

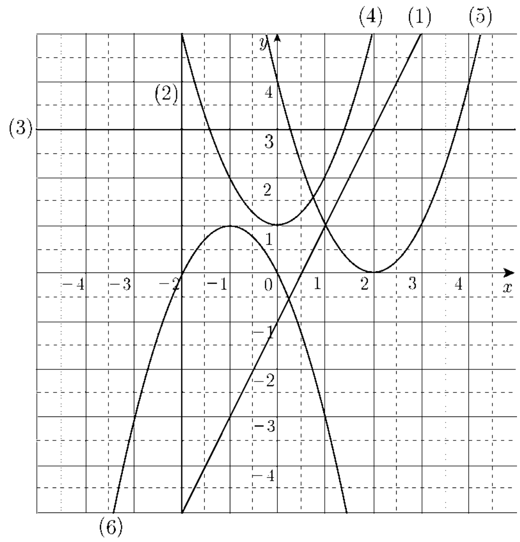
問 1 の解答

(1) $y = 2x + 3$　　(2) $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}$

(3) $y = x^2$　　(4) $y = 2(x-3)^2 + 1$

(5) $y = -x^2 - 2$　　(6) $y = -2(x-2)^2 + \dfrac{1}{2}$

問 2 の解答



＜ 23 ページ. 練習問題 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases}$

問 2 の解答

(1) -6　　(2) -15

(3) -1　　(4) $\dfrac{1}{8}$

問 3 の解答

(1) $0 < x < 10$　　(2) $2 \leqq x \leqq 8$

問 4 の解答

(1) $0 < x < 10$　　(2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 5x$

(3) $y = \dfrac{25}{2}$　$(x = 5)$　　(4) $z = 2x^2 - 20x + 100$

(5) 50　$(x = 5)$

< 解答 24 〜 27 >

< 24 ページ. 練習問題 3 >

問 1 の解答

(1) 軸　$x = -2$,　頂点 $(-2,\ 4)$

(2) 軸　$x = 2$,　頂点 $(2,\ -3)$

(3) 軸　$x = \dfrac{1}{2}$,　頂点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

(4) 軸　$x = 1$,　頂点 $\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

問 2 の解答

(1) x 軸方向に -1 だけ平行移動したもの

(2) x 軸方向に $+2$, y 軸方向に -1 だけ平行移動したもの

問 3 の解答

(1) $y = x - 2.25$

(2) $y = (x-2)^2 - 1$　$(y = x^2 - 4x + 3)$

(3) $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{4}\right)$, $\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{5}{4}\right)$

問 4 の解答

(1) $a > 0,\ b < 0,\ c = 0,\ a + b + c < 0,\ b^2 - 4ac > 0$

(2) $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ a + b + c < 0,\ b^2 - 4ac > 0$

(3) $a < 0,\ b = 0,\ c < 0,\ a + b + c < 0,\ b^2 - 4ac < 0$

< 25 ページ. 累乗の指数 >

問 1 の解答

(1) 10^4,　(2) 10^5,　(3) 10^6

(3) 10^7,　(4) 10^8,　(5) 10^9

(7) 10^{10},　(8) 10^{11},　(9) 10^{12}

問 2 の解答

(1) 10^{10},　(2) 10^{17}

(3) 10^{42},　(4) 10^3

(5) 10^4,　(6) 10^8

< 26 ページ. 指数法則 >

問 1 の解答

(1)　$a^2 \times a^5 = a^7$

(2)　$a^6 \times a^3 = a^9$

(3)　$a^8 \div a^3 = a^5$

問 2 の解答

(1)　$(a^5)^3 = a^{15}$

(2)　$(ab^2)^3 = a^3 b^6$

(3)　$(a^2 b^3)^4 = a^8 b^{12}$

問 3 の解答

(1)　$a^4 \times a^5 \times a^3 = a^{4+5+3} = a^{12}$

(2)　$(a^3)^2 \times a^4 = a^{6+4} = a^{10}$

(3)　$a^{10} \div (a^3)^3 = a$

(4)　$(a^2 b)^3 \times (ab^2)^2 = a^6 b^3 \times a^2 b^4 = a^8 b^7$

< 27 ページ. 負の指数 >

問の解答

(1)　$2^0 = 1$

(2)　$1^{-1} = 1$

(3)　$2^{-5} = \dfrac{1}{32}$

(4)　$3^0 = 1$

(5)　$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(6)　$4^{-3} = \dfrac{1}{64}$

(7)　$(2^{-3})^2 = \dfrac{1}{64}$

(8)　$(3^2)^{-2} = \dfrac{1}{81}$

(9)　$(2^2)^{-3} = \dfrac{1}{64}$

＜解答 28 〜 31 ＞

＜ 28 ページ. 整数指数 1 ＞

問 1 の解答

(1) $a^3 \times a^{-5} = a^{-2}$

(2) $a^{-3} \times a^2 = a^{-1}$

(3) $a^4 \times a^{-7} = a^{-3}$

(4) $a^{-8} \times a^5 = a^{-3}$

(5) $a^{-3} \times a^{-4} = a^{-7}$

(6) $a^{-5} \times a^{-6} = a^{-11}$

問 2 の解答

(1) $a^4 \div a^6 = a^{-2}$

(2) $a^3 \div a^{-2} = a^5$

(3) $a^{-2} \div a^3 = a^{-5}$

(4) $a^4 \div a^{-5} = a^9$

(5) $a^{-7} \div a^{-4} = a^{-3}$

(6) $a^{-7} \div a^{-9} = a^2$

＜ 29 ページ. 整数指数 2 ＞

問 1 の解答

(1) $(a^4)^{-2} = a^{-8}$

(2) $(a^{-2})^4 = a^{-8}$

(3) $(a^{-5})^{-2} = a^{-10}$

(4) $(a^{-3})^4 = a^{-12}$

(5) $(a^{-3})^{-3} = a^9$

(6) $(a^{-6})^{-5} = a^{30}$

問 2 の解答

(1) $(ab)^4 = a^4b^4$

(2) $(a^2b)^3 = a^6b^3$

(3) $(ab^{-1})^2 = a^2b^{-2}$

(4) $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

(5) $(a^{-1}b^2)^3 = a^{-3}b^6$

(6) $(a^{-2}b^3)^{-2} = a^4b^{-6}$

(7) $(ab^2)^{-3} \times (a^2b)^2 = a^{-3}b^{-6} \times a^4b^2 = ab^{-4}$

(8) $(a^3b^2)^3 \div (ab^3)^4 = (a^9b^6) \div (a^4b^{12}) = a^5b^{-6}$

＜ 30 ページ. 整数指数 3 ＞

問 1 の解答

(1) $10^3 \times 10^{-20} = 10^{-17}$　(2) $10^5 \div 10^{-6} = 10^{11}$

(3) $10^{-7} \div 10^{-8} = 10$　(4) $1 \div 10^{-20} = 10^{20}$

(5) $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$　(6) $(10^{-3})^{-1} = 10^3$

問 2 の解答

(1) $a^{-3} \times a^{-1} = a^{-4}$　(2) $a^{-3} \times a^{-5} = a^{-8}$

(3) $a^4 \div a^{-2} = a^6$　(4) $a^{-4} \div a^{-2} = a^{-2}$

(5) $(a^3)^{-3} = a^{-9}$　(6) $(a^{-4})^{-1} = a^4$

問 3 の解答

(1) $4^7 \times 4^{-4} = 4^3 = 64$　(2) $5^{-7} \div 5^{-6} = 5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

(3) $2^{-2} \div 2^{-5} = 2^3 = 8$　(4) $(3^{-2})^{-2} = 3^4 = 81$

問 4 の解答

(1) $a^3 \times a^{-6} = \dfrac{1}{a^3}$　(2) $a^{-4} \div a^{-10} = a^6$

(3) $a^{-5} \div a^{-5} = 1$　(4) $(ab^{-1})^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

(5) $(a^{-1}b)^{-3} = \dfrac{a^3}{b^3}$　(6) $(a^{-2}b^3)^2 = \dfrac{b^6}{a^4}$

＜ 31 ページ. 整数指数 4 ＞

問 1 の解答

(1) $43000 = 4.3 \times 10^4$

(2) $2730000000 = 2.73 \times 10^9$

(3) $0.000045 = 4.5 \times 10^{-5}$

(4) $0.000000000000368 = 3.68 \times 10^{-13}$

問 2 の解答

(1) $(1.5 \times 10^4) \times (4 \times 10^8) = 6.0 \times 10^{12}$

(2) $(4.2 \times 10^{-2}) \times (2.5 \times 10^{-7}) = 4.2 \times 2.5 \times 10^{-9}$
$= 1.05 \times 10^{-10}$

(3) $(6.8 \times 10^{-2}) \div (5 \times 10^3) = \dfrac{6.8}{5} \times 10^{-5} = 1.36 \times 10^{-5}$

(4) $(4.8 \times 10^2) \div (1.2 \times 10^{-10}) = \dfrac{4.8}{1.2} \times 10^{12} = 4.0 \times 10^{12}$

(5) $1 \div (2.5 \times 10^{-15}) = \dfrac{1}{2.5} \times 10^{15} = \dfrac{4}{10} \times 10^{15}$
$= 0.4 \times 10^{15} = 4.0 \times 10^{14}$

問 3 の解答

$$1 \div (4.5 \times 10^{-23}) = \frac{1}{4.5} \times 10^{23} = \frac{2}{9} \times 10^{23}$$

$$= 0.222 \times 10^{23}$$

$$\fallingdotseq 2.2 \times 10^{22}$$

＜解答 32 ～ 38 ＞

＜ 32 ページ．単位の接頭語 ＞

問 1 の解答

1 億 $= 10^8$　　1 兆 $= 10^{12}$　　1 京 $= 10^{16}$

問 2 の解答

1da$= 10^1$　　1h$= 10^2$　　1k$= 10^3$

1M$= 10^6$　　1G$= 10^9$　　1T$=10^{12}$

問 3 の解答

1 分 $= 10^{-2}$　　1 厘 $= 10^{-3}$　　1 毛 $= 10^{-4}$　　1 糸 $= 10^{-5}$

問 4 の解答

1d$= 10^{-1}$　　1c$= 10^{-2}$　　1m$= 10^{-3}$

1 μ $= 10^{-6}$　　1n$= 10^{-9}$　　1p$= 10^{-12}$

＜ 33 ページ．単位の計算 1 ＞

問 1 の解答

(1) 0.123　　(2) 7.5　　(3) 10000000 $(= 10^7)$

問 2 の解答

(1) 10.5 m + 2.4 m = 12.9 m

(2) 2000 m − 140m = 1860m

問 3 の解答

(1) 36　　(2) 0.01　　(3) 3600

(4) 2.6　　(5) 138　　(6) 0.25 $\left(= \frac{1}{4}\right)$

＜ 34 ページ．単位の計算 2 ＞

問 1 の解答

(1) 10000 $(= 10^4)$　　(2) 1000000 $(= 10^6)$

(3) 50　　(4) 0.0006

問 2 の解答

(1) 1000 $(= 10^3)$　　(2) 1000000 $(= 10^6)$

(3) 1000000000 $(= 10^9)$　　(4) 1000000 $(= 10^6)$

＜ 35 ページ．単位の計算 3 ＞

問 1 の解答

18 km/h = $\boxed{300}$ m/min = $\boxed{5}$ m/s

問 2 の解答

$$\frac{5\text{m}}{6\text{s}} = \frac{50\text{m}}{60\text{s}} = \frac{50\text{m}}{1\text{min}} = \frac{50 \times 60\text{m}}{60\text{min}} = \frac{3000\text{m}}{1\text{h}} = 3000\text{m/h} = 3\text{km/h}$$

問 3 の解答

$$\frac{54\text{km}}{(60+39)\text{min}} = \frac{54000\text{m}}{99 \times 60\text{s}} = \frac{900\text{m}}{99\text{s}} = \frac{100\text{m}}{11\text{s}}$$

(答) 100m を 11 秒で走る

＜ 36 ページ．累乗根 1 ＞

問の解答

(1) $\sqrt{169} = 13$

(2) $\sqrt[3]{8} = 2$

(3) $\sqrt[3]{125} = 5$

(4) $\sqrt[4]{256} = 4$

(5) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}} = \dfrac{3}{5}$

(6) $\sqrt[5]{3125} = 5$

＜ 37 ページ．累乗根 2 ＞

問の解答

(1) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{15}$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{8}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{15}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{5}} \quad \left(= \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$

(4) $\dfrac{\sqrt[5]{128}}{\sqrt[5]{4}} = \sqrt[5]{\dfrac{128}{4}} = \sqrt[5]{32} = 2$

＜ 38 ページ．累乗根 3 ＞

問 1 の解答

(1) $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

(2) $\sqrt[4]{112} = 2\sqrt[4]{7}$

(3) $\sqrt[5]{64} = 2\sqrt[5]{2}$

問 2 の解答

(1) $(\sqrt[4]{25})^2 = 5$

(2) $(\sqrt[6]{4})^3 = 2$

(3) $\sqrt[4]{16^2} = 4$

(4) $\sqrt[3]{27^2} = 9$

＜解答 39 〜 42＞

＜ 39 ページ．分数指数 1 ＞

問 1 の解答

(1) $121^{\frac{1}{2}} = 11$

(2) $27^{\frac{1}{3}} = 3$

(3) $25^{\frac{3}{2}} = 125$

(4) $343^{\frac{2}{3}} = 49$

(5) $81^{\frac{5}{4}} = 243$

(6) $32^{\frac{4}{5}} = 16$

(7) $16^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{16}} = \dfrac{1}{4}$

(8) $27^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{81}$

(9) $64^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{16}$

問 2 の解答

(1) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

(2) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

(3) $(\sqrt[4]{a})^5 = a^{\frac{5}{4}}$

(4) $(\sqrt[4]{a})^{-3} = a^{-\frac{3}{4}}$

＜ 40 ページ．分数指数 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\sqrt[6]{4^3} = 2$

(2) $\sqrt[12]{7^4} = \sqrt[3]{7}$

(3) $\sqrt[3]{5^9} = 125$

(4) $\sqrt[6]{27^4} = 9$

問 2 の解答

(1) $\sqrt[2]{10} \times \sqrt[4]{100} = 10$

(2) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9}} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3}$

(4) $(\sqrt[3]{\sqrt{27}})^2 = (((3^3)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^2 = 3^{3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 2} = 3$

＜ 41 ページ．指数法則の拡張 ＞

問 1 の解答

正の数 a と b、および有理数 p と q に対して

$1^\circ : a^p \times a^q = a^{\boxed{p+q}}$,　$2^\circ : a^p \div a^q = a^{\boxed{p-q}}$

$3^\circ : (a^p)^q = a^{\boxed{pq}}$,　$4^\circ : (ab)^p = a^p b^p$

問 2 の解答

(1) $\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^3} = a$

(2) $\sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a} = a$

(3) $(\sqrt[3]{a})^4 \times \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} = a^2$

(4) $\sqrt[3]{a^7} \div (\sqrt[3]{a})^4 = a^{\frac{7}{3}-\frac{4}{3}} = a$

(5) $(\sqrt[4]{a})^{\frac{8}{3}} = a^{\frac{1}{4}\times\frac{8}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

(6) $\left(\sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{-3}}}\right)^{-2} = \left(\left((a^{-3})^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{-2} = a^{-3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times(-2)} = a^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{a^3}$

問 3 の解答

(1) $(3^3 \times 5^2)^{\frac{1}{7}} \times (3^4 \times 5^5)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{3}{7}+\frac{4}{7}} \times 5^{\frac{2}{7}+\frac{5}{7}} = 3 \times 5 = 15$

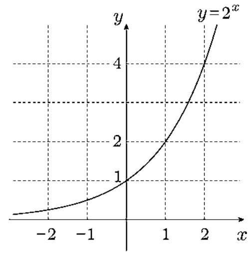
(2) $\sqrt[4]{18} \times \sqrt[4]{72} = (2 \times 3^2)^{\frac{1}{4}} \times (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} = 6$

＜ 42 ページ．指数関数 ＞

問の解答

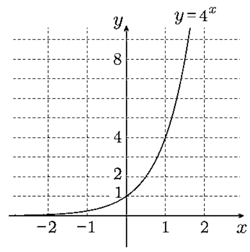
(1) $y = 2^x$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	4



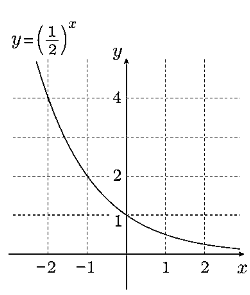
(2) $y = 4^x$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



(3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



＜解答 43 〜 47 ＞

＜ 43 ページ. 指数方程式 ＞

問の解答

(1) $x=0$　(2) $x=1$　(3) $x=2$　(4) $x=-1$

(5) $x=\frac{1}{2}$　(6) $x=0$　(7) $x=2$　(8) $x=\frac{1}{3}$

(9) $x=-1$　(10) $x=-2$　(11) $x=0$　(12) $x=2$

(13) $x=5$　(14) $x=\frac{1}{4}$　(15) $x=\frac{3}{2}$　(16) $x=-1$

(17) $x=-3$　(18) $x=-2$　(19) $x=-\frac{1}{2}$　(20) $x=0$

(21) $x=1$　(22) $x=3$　(23) $x=2$　(24) $x=-1$

(25) $x=-2$　(26) $x=-\frac{1}{2}$　(27) $x=0$　(28) $x=2$

(29) $x=\frac{1}{2}$　(30) $x=\frac{3}{2}$　(31) $x=-1$　(32) $x=\frac{1}{4}$

＜ 44 ページ. 対数 1 ＞

問 1 の解答

(1) $\frac{1}{2}=\log_2\sqrt{2}$

(2) $-1=\log_5\frac{1}{5}$

(3) $27=3^3$

(4) $27=9^{\frac{3}{2}}$

問 2 の解答

(1) $\log_2 64=6$

(2) $\log_3 243=5$

(3) $\log_{10} 1000=3$

(4) $\log_5 625=4$

＜ 45 ページ. 対数 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\log_2 64=6$　(2) $\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$　(3) $\log_2 0.5=-1$

(4) $\log_2(2\sqrt{2})=\frac{3}{2}$　(5) $\log_4 64=3$　(6) $\log_4 1=0$

(7) $\log_6\sqrt[3]{6}=\frac{1}{3}$　(8) $\log_5 0.2=-1$　(9) $\log_{10} 0.01=-2$

(10) $\log_7\sqrt[3]{49}=\frac{2}{3}$　(11) $\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{2}$　(12) $\log_4 8=\frac{3}{2}$

問 2 の解答

$\log_2(M\times N)=\log_2(2^\alpha\times 2^\beta)=\log_2(2^{\alpha+\beta})=\alpha+\beta$

$\log_2 M+\log_2 N=\log_2 2^\alpha+\log_2 2^\beta=\alpha+\beta$

よって　$\log_2(M\times N)=\log_2 M+\log_2 N$

＜ 46 ページ. 対数 3 ＞

問 1 の解答

$\log_2\left(\frac{M}{N}\right)=\log_2\left(\frac{2^\alpha}{2^\beta}\right)=\log_2(2^{\alpha-\beta})=\alpha-\beta$

$\log_2 M-\log_2 N=\log_2(2^\alpha)-\log_2(2^\beta)=\alpha-\beta$

より　$\log_2\left(\frac{M}{N}\right)=\log_2 M-\log_2 N$

問 2 の解答

$\log_2(M^r)=\log_2\left((2^\alpha)^r\right)=\log_2(2^{\alpha r})=\alpha r$

$r\times\log_2 M=r\times\log_2(2^\alpha)=r\times\alpha=\alpha r$

よって $\log_2(M^r)=r\times\log_2 M$

＜ 47 ページ. 対数 4 ＞

問 1 の解答

$\log_a(\frac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

問 2 の解答

$\log_a(M^r)=r\times\log_a M$

問 3 の解答

(1) $\log_2 12+\log_2(\frac{1}{3})=\log_2 4=2$

(2) $\log_3 108-\log_3 4=\log_3\frac{108}{3}=\log_3 27=3$

(3) $\log_6 12+\log_6 2+2\log_6 3=\log_6(12\times 2\times 3^2)$

$$=\log_6(2^3\times 3^3)$$

$$=\log_6(6^3)=3$$

(4) $\log_{10} 4+\log_{10} 25+\log_{10} 0.1=\log_{10}(\frac{4\times 25}{0.1})$

$$=\log_{10}(\frac{100\times 10}{1})=3$$

＜解答 48 〜 51＞

＜ 48 ページ. 底の変換 ＞

問 1 の解答

(1) $\log_8 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 8} = \dfrac{4}{3}$

(2) $\log_{16} 64 = \dfrac{\log_4 64}{\log_4 16} = \dfrac{3}{2}$

(3) $\log_{27} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{4}{3}$

(4) $\log_8 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 8} = \dfrac{1}{3}$

(5) $\log_4 \sqrt{2} = \dfrac{\log_2 \sqrt{2}}{\log_2 4} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4}$

(6) $\log_{27} \sqrt{3} = \dfrac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 27} = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}$

問 2 の解答

$\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$

問 3 の解答

(1) $\log_4 32 + \log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} + \dfrac{\log_4 64}{\log_4 16} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

(2) $(\log_3 4) \times (\log_4 9) = \log_3 4 \times \dfrac{\log_3 9}{\log_3 4} = 2$

(3) $(\log_2 3) \times (\log_3 4) \times (\log_4 2) = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \dfrac{1}{\log_2 4} = 1$

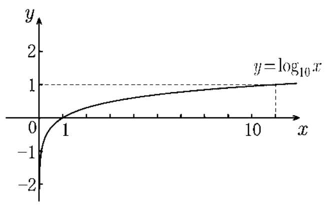
＜ 49 ページ. 対数関数 ＞

問の解答

(1) $y = \log_{10} x \quad (x > 0)$

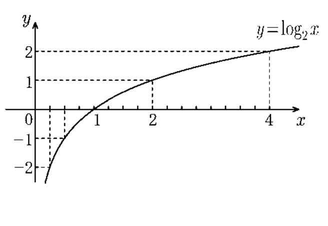
x	0.1	1	$\sqrt{10}$	10
y	1	0	$\frac{1}{2}$	1

注) $\sqrt{10} \fallingdotseq 3.16$



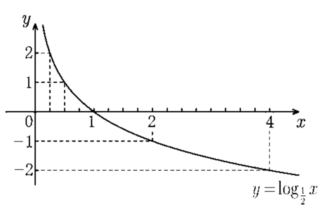
(2) $y = \log_2 x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−2	−1	0	1	2



(3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad (x > 0)$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	−1	−2



＜ 50 ページ. 常用対数 1 ＞

問 1 の解答

(1) $\log_{10}(1410) = \log_{10} 1.41 + \log_{10} 1000 = 0.1492 + 3 = 3.1492$

(2) $\log_{10}(203000) = \log_{10} 2.03 + \log_{10} 100000 = 0.3075 + 5 = 5.3075$

(3) $\log_{10} 0.00302 = \log_{10}(3.02 \times 10^{-3}) = 0.48 - 3 = -2.5200$

問 2 の解答

$x = 3^{50}$ とおくと

$\log_{10} x = \log_{10} 3^{50} = 50 \times \log_{10} 3 = 50 \times 0.4771 = 23.855$

$\Rightarrow x = 10^{23.855} \Rightarrow 10^{23} < x < 10^{24}$

(答) 24 桁

＜ 51 ページ. 常用対数 2 ＞

問 1 の解答

$$\log_{10} \sqrt[4]{5} = \frac{1}{4}\log_{10} 5 = \frac{1}{4}\log_{10}\frac{10}{2} = \frac{1}{4}(\log_{10} 10 - \log_{10} 2)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 0.301) = \frac{1}{4} \times 0.699 = 0.17475$$

問 2 の解答

$\log_2 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = \dfrac{0.4771}{0.301} \fallingdotseq 1.5850$

問 3 の解答

$$x = 0.5^{20} \Rightarrow \log_{10} x = 20 \log_{10} 0.5 = 20 \times \log_{10}\frac{1}{2}$$

$$= -20 \times \log_{10} 2$$

$$= -20 \times 0.301 = -6.02$$

$x = 10^{-6.02} \Rightarrow 10^{-7} < x < 10^{-6} \Rightarrow 0.0000001 < x < 0.000001$

(答) 小数第 7 位

問 4 の解答

時間		倍率
30 分	$\cdots$	$2 = 2^1$
1 時間	$\cdots$	$4 = 2^2$
1.5 時間	$\cdots$	$8 = 2^3$
2 時間	$\cdots$	$16 = 2^4$
2.5 時間	$\cdots$	$32 = 2^5$
3 時間	$\cdots$	$64 = 2^6$
x 時間	$\cdots$	2^{2x}

より求める時間を x とすると

$2^{2x} = 1000$

$\log_{10}(2^{2x}) = \log_{10} 1000$

$2x \log_{10} 2 = 3$

$x = \dfrac{3}{2\log_{10} 2} = \dfrac{3}{0.602} = \dfrac{3000}{602} \fallingdotseq 4.983$

$x = 4.983\mathrm{h}$

$0.983\mathrm{h} = 0.983 \times 60\mathrm{min} = 58.98\mathrm{min}$

(答) 約 4 時間 59 分後

＜解答 52 〜 53＞

＜ 52 ページ. 指数対数の練習 1 ＞

問 1 の解答

(1) $27^{-\frac{2}{3}} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

(2) $(0.25)^{0.5} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\dfrac{1}{(0.2)^{-2}} = \dfrac{1}{(\frac{1}{5})^{-2}} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

(4) $\log_9 27 = \dfrac{3}{2}$

(5) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \dfrac{4}{-1} = -4$

(6) $\log_{0.2} 125 = \log_{\frac{1}{5}} 125 = \dfrac{\log_5 125}{\log_5 \frac{1}{5}}$

$$= \frac{3}{-1} = -3$$

問 2 の解答

(1) $36^{1.5} \times 32^{-0.2} = (2^2 \times 3^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^5)^{-\frac{1}{5}} = 2^3 \times 3^3 \times 2^{-1} = 108$

(2) $\dfrac{(\frac{1}{4})^2 \times (\frac{1}{8})^{-4} \div 16}{(\frac{1}{2})^3} = (2^{-2})^2 \times (2^{-3})^{-4} \div (2^4 \times 2^{-3}) = 128$

(3) $(a^3b)^{\frac{1}{6}} \times (ab^2)^{\frac{2}{3}} \div (ab^{-3})^{\frac{1}{6}} = (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{6}}) \times (a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}) \div (a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{2}})$

$$= a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} \times b^{\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}} = ab^2$$

(4) $\sqrt[6]{a^5b} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^4b^{-1}} = a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$

$$= a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = b$$

(5) $108^{0.2} \times 72^{0.2} = (2^2 \times 3^3)^{\frac{1}{5}} \times (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{5}} = 2 \times 3 = 6$

(6) $\sqrt[14]{800} \times \sqrt[14]{12500} = (2^5 \times 5^2)^{\frac{1}{14}} \times (2^2 \times 5^5)^{\frac{1}{14}} = \sqrt{10}$

問 3 の解答

(1) $\log_5 20 + \log_5 100 - 2\log_5 4 = \log_5\left(\dfrac{20 \times 100}{16}\right) = 3$

(2) $4\log_3 \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 2 + \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} = \log_3\left(\dfrac{9 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times 3}\right) = 1$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_5 3 + 3\log_5 \sqrt{2} - \log_5 \sqrt{24} = \log_5\left(\dfrac{\sqrt{3} \times 2\sqrt{2}}{\sqrt{24}}\right) = \log_5 1 = 0$

(4) $(\log_4 5)(\log_5 6)(\log_6 8) = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \dfrac{\log_2 6}{\log_2 5} \times \dfrac{\log_2 8}{\log_2 6} = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{3}{2}$

(5) $\log_3 \dfrac{3}{2} + \log_9 \dfrac{81}{4} + \log_{27} \dfrac{64}{27} = \log_3 \dfrac{3}{2} + \dfrac{\log_3 \frac{81}{4}}{\log_3 9} + \dfrac{\log_3 \frac{64}{27}}{\log_3 27}$

$$= \log_3 \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_3(\frac{81}{4}) + \frac{1}{3}\log_3(\frac{64}{27}) = \log_3\left(\frac{3}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{4}{3}\right)$$

$$= \log_3 9 = 2$$

(6) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) = \log_2 3\log_3 4 + \log_2 3\log_9 2 + \log_4 9\log_3 4 + \log_4 9\log_9 2$

$$= \log_2 4 + \log_2 3 \times \frac{\log_3 2}{\log_3 9} + \log_3 9 + \log_4 2 = 5$$

＜ 53 ページ. 指数対数の練習 2 ＞

問 1 の解答

(1) $x = 5.5 \ \left(= \dfrac{11}{2}\right)$

(2) $x = -\dfrac{1}{6}$

(3) $x = 2,\ \ -4$

(4) $x = 6$

問 2 の解答

(1) $x > -\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{5}{2} < x \leqq \dfrac{11}{4}$

問 3 の解答

(1) $(0.9)^{0.5} < 1 < (0.9)^{-\frac{1}{3}}$

(2) $3 < \dfrac{1}{2}\log_2 81 < \log_2 10$

(3) $\sqrt[6]{7} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

(4) $\sqrt[3]{10} < \sqrt{7} < 3$

問 4 の解答

(1) $\log_{10}\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{1}{2}\log_{10} 8 - \dfrac{1}{2}\log_{10} 9 = \dfrac{3}{2}a - b$

(2) $\log_2 6 = \dfrac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} = \dfrac{a+b}{a} \ \left(= 1 + \dfrac{b}{a}\right)$

(3) $\log_9 \sqrt{5} = \dfrac{\log_{10}\sqrt{5}}{\log_{10} 9} = \dfrac{\log_{10} 10 - \log_{10} 2}{4\log_{10} 3} = \dfrac{1-a}{4b}$

問 5 の解答

(1) $x = 6^{40} \Rightarrow \log_{10} x = 40(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 31.124$

$\Rightarrow x = 10^{31.124}$ （答） 32 桁

(2) $x = \left(\dfrac{1}{12}\right)^{10} \Rightarrow \log_{10} x = 10\log_{10}\dfrac{1}{12} = 10(-2\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$

$$= -10.791$$

$x = 10^{-10.791}$ （答） 少数第 11 位

問 6 の解答

x 時間後に 10 万倍になるとすると

$2^{\frac{x}{3}} = 100000 = 10^5$

$\log_{10} 2^{\frac{x}{3}} = 5$

$x = \dfrac{15}{\log_{10} 2} = \dfrac{15000}{301} = 49.833$

0.834h = 50.04min （答） 49 時間 50 分

＜ 解答 54 〜 56 ＞

＜ 54 ページ. 力の単位 ＞

問 1 の解答

$81\mathrm{km/h^2} = \boxed{\dfrac{45}{2}}\ \mathrm{m/min^2} = \boxed{\dfrac{1}{160}}\ \mathrm{m/s^2}$

問 2 の解答

$1\mathrm{Pa} = \dfrac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{m}^2} = \dfrac{1\mathrm{N}}{10000\mathrm{cm}^2} = \dfrac{10^{-4}\mathrm{N}}{1\mathrm{cm}^2}$　　(答) $10^{-4}\mathrm{N}$

問 3 の解答

$1000\mathrm{hPa} = 10^5\mathrm{Pa} = \dfrac{10^5\mathrm{N}}{1\mathrm{m}^2}$　　(答) $1\mathrm{m}^2$ の面に $10^5\mathrm{N}$

＜ 55 ページ. 音圧 ＞

問 1 の解答

$20 \times 10^{-6}\mathrm{Pa}$

問 2 の解答

(1) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 0$ (dB)　　(2) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 20$ (dB)

(3) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 40$ (dB)　　(4) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 60$ (dB)

(5) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 80$ (dB)　　(6) $10\log_{10}\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^2 = 110$ (dB)

＜ 56 ページ. マグニチュード ＞

問 1 の解答

(1) $M = 0$　　(2) $M = 3$　　(3) $M = 4$

(4) $M = 5$　　(5) $M = 5.5$　　(6) $M = 6$

問 2 の解答

$E = 10^{11.8+1.5M}$

問 3 の解答

広島型原爆のエネルギーを E_1

阪神大震災のエネルギーを E_2

とすると

$E_1 = 10^{11.8+1.5\times5.2}$

$E_2 = 10^{11.8+1.5\times7.2}$

$\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{10^{1.5\times7.2}}{10^{1.5\times5.2}} = 10^3$　　(答) 10^3 倍