大学数学への道

TEXclub

基礎数学
シリーズ 3

改訂版

★ T

★

★

★

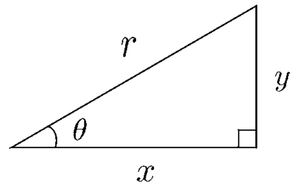
★

★

井上昌昭　山﨑和雄 著

< 三角比 1 >

右の図のように，直角三角形の鋭角のひとつを θ とする。
斜辺の長さを r，他の辺の長さを x, y とするとき，



$$\frac{y}{r},\qquad \frac{x}{r},\qquad \frac{y}{x},$$

の値は，三角形の大きさに関係なく，角 θ の大きさだけで決まる。
これらを，それぞれ θ の

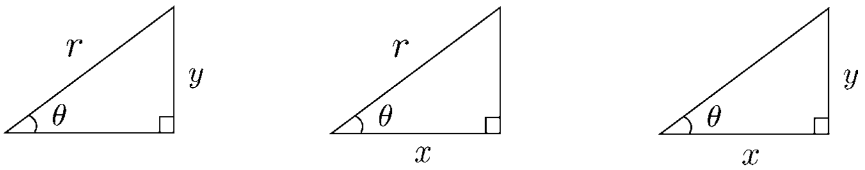
正弦 (sine)，　**余弦** (cosine)，　**正接** (tangent)

といい，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ と表す。すなわち

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\qquad \cos\theta = \frac{x}{r},\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

となる。

三角比の定義

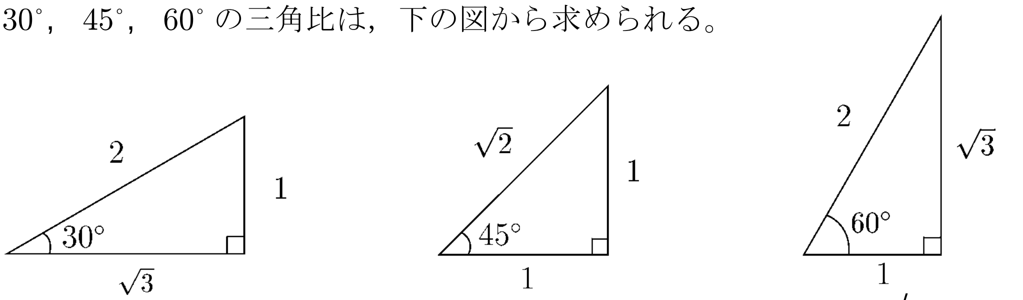


$$\sin\theta = \frac{y}{r}\qquad \cos\theta = \frac{x}{r}\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

この定義により，辺の長さは，次のように表せる。

$$y = r\sin\theta\qquad x = r\cos\theta\qquad y = x\tan\theta$$

30°，45°，60° の三角比は，下の図から求められる。



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\qquad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

問　下の表を完成せよ。

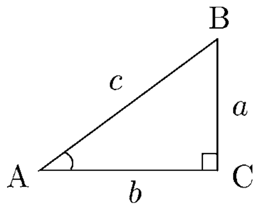
θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$			
$\cos\theta$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tan\theta$			

< 三角比 2 >

右の直角三角形 ABC で,

$$a = c\sin A$$

$$b = c\cos A$$



$\frac{a}{c} = \sin A$ より
$a = c\sin A$

$\frac{b}{c} = \cos A$ より
$b = c\cos A$

であるから,

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c\sin A}{c\cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

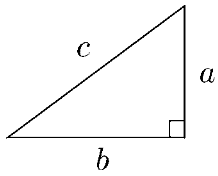
となる。したがって,

$$\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad (1)}$$

また，三平方の定理から，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

三平方の定理



$a^2 + b^2 = c^2$

上の式に，$a = c\sin A$ と，$b = c\cos A$ を代入して

$$(c\sin A)^2 + (c\cos A)^2 = c^2$$

$$c^2(\sin A)^2 + c^2(\cos A)^2 = c^2$$

両辺を，c^2 で割ると

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$

$(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$ と表すと，次の式が成り立つ。

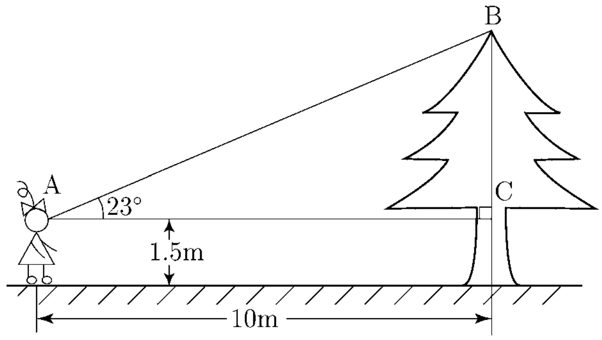
$$\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad (2)}$$

(1), (2) の式を使うと，$\sin A, \cos A, \tan A$ のうち，どれかひとつがわかると残りのふたつの値を求めることができる。

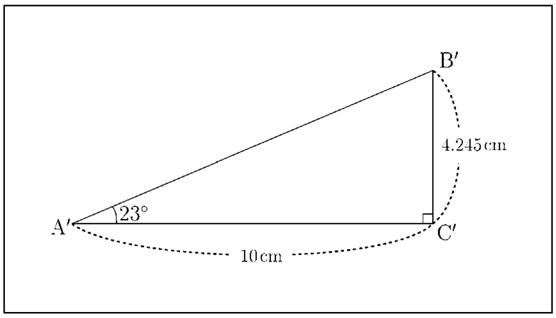
問　$\sin A = \frac{2}{3}$ のとき，$\cos A, \tan A$ の値を求めよ。

＜ 三角比 3 ＞

例　昔の人は三角形の相似を利用して，ピラミッドや山の高さを測った。ここでは最も簡単な場合を考える。右図のような木の高さを測りたい。ある人が木から 10m 離れた場所から木の頂点 B を見上げたら，水平から 23° であった。人の目の位置を A(目の高さは地上 1.5m とする)，木の中心線上で地上 1.5m の位置を C とする。三角形 ABC と相似な三角形を右下図のように紙に正確に描く。



$\mathrm{A}^0\mathrm{C}^0$ の長さを 10 cm にすると $\mathrm{B}^0\mathrm{C}^0$ の長さは 4.245 cm になった。



$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A}^0\mathrm{B}^0\mathrm{C}^0$ は相似より

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{B}^0\mathrm{C}^0}{\mathrm{A}^0\mathrm{C}^0} = \frac{4.245}{10} = 0.4245$$

であるから

$$\mathrm{BC} = 0.4245 \times 10 = 4.245\,(\mathrm{m})$$

よって木の高さに 1.5 (m) をたして

(答) 5.745 (m)

(別解)　図を描かずに求める方法を示す。

$\tan \mathsf{A} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ より　$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan \mathsf{A} = 10 \times \tan 23^\circ$

ここで三角関数表 (9 ページ) より　$\tan 23^\circ = 0.4245$ だから

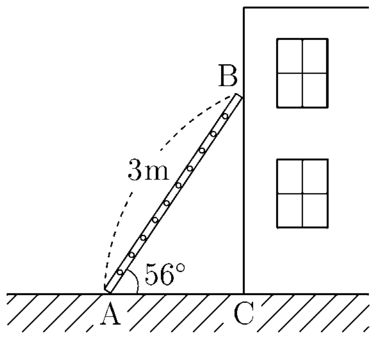
$$\mathrm{BC} = 10 \times \tan 23^\circ = 10 \times 0.4245 = 4.245\,(\mathrm{m})$$

よって　(答) 木の高さ $= 4.245 + 1.5 = 5.745\,(\mathrm{m})$

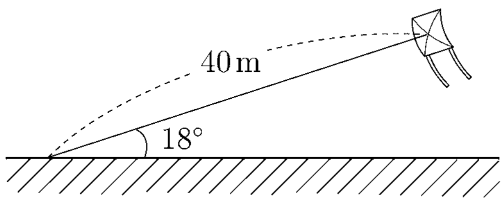
問　例と同じ問題で見上げる角度が 35° のとき，三角関数表を用いて木の高さを求めよ。

＜ 三角比 4 ＞

問 1　長さ 3m のはしご AB が壁に立てかけてある。はしごと地面のつくる角が 56° であるとき，はしごがとどいている高さ BC, およびはしごの端 A から壁までの距離 AC を三角関数表 (P9) を見て少数第 1 位まで求めよ。



問 2　たこあげをしていて，糸の長さが 40 m になったとき，地面と糸のなす角が 18° であった。三角関数表を見て以下の問題に答えよ。

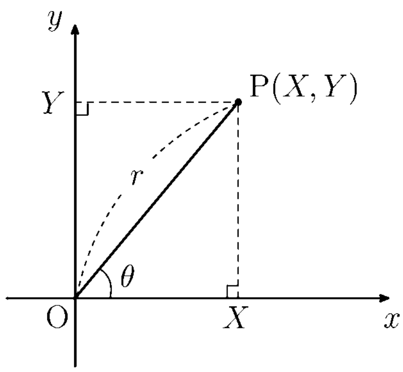


(1) たこの高さを少数第 1 位まで求めよ。

(2) 立っている地点からたこの真下までの距離を少数第 1 位まで求めよ。

問 3　正の数 X, Y に対して，座標平面の点 P(X, Y) と原点 O(0, 0) との距離を r とする。また 線分 OP と x 軸とのなす角を θ とする。
X, Y を r と θ で表せ。

X ＝　　　　　　　，Y ＝

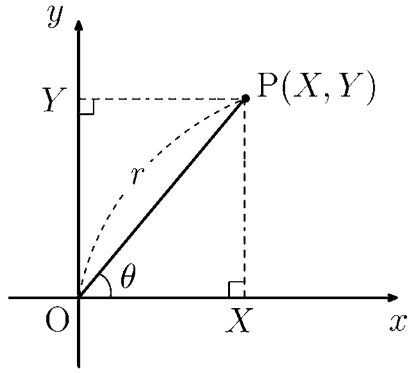


＜ 三角比 5 ＞

右図の場合に

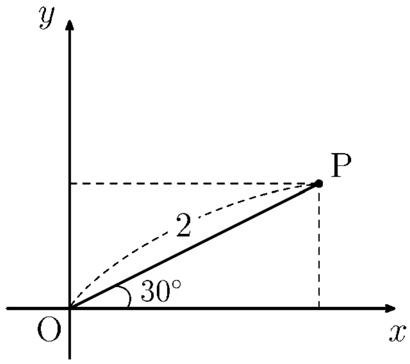
$$\sin\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{r}}\ ,\ \ \cos\theta = \frac{\mathsf{X}}{\mathsf{r}}\ ,\ \ \tan\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}$$

である。



問　次の各場面に点 P の座標を求め，正弦，余弦，正接を求めよ。

(1)



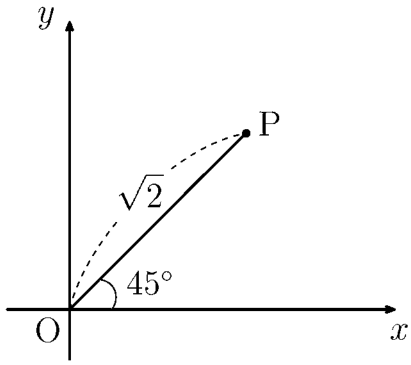
P (　　　,　　　)

$\sin 30^\circ =$

$\cos 30^\circ =$

$\tan 30^\circ =$

(2)



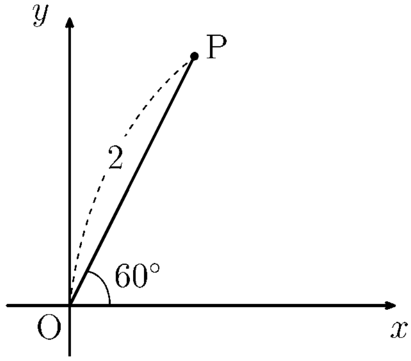
P (　　　,　　　)

$\sin 45^\circ =$

$\cos 45^\circ =$

$\tan 45^\circ =$

(3)



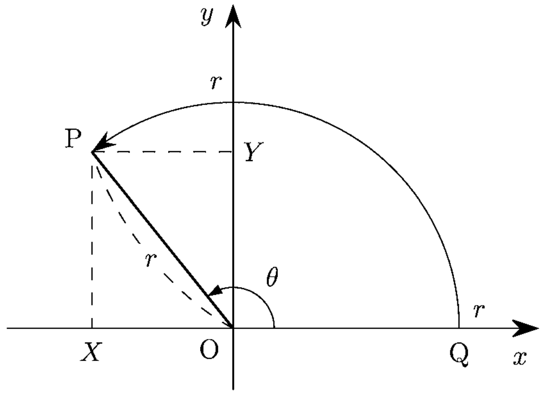
P (　　　,　　　)

$\sin 60^\circ =$

$\cos 60^\circ =$

$\tan 60^\circ =$

＜ 鈍角の三角比 1 ＞



角度 θ が 90° 以上の場合の三角比を次で定める。

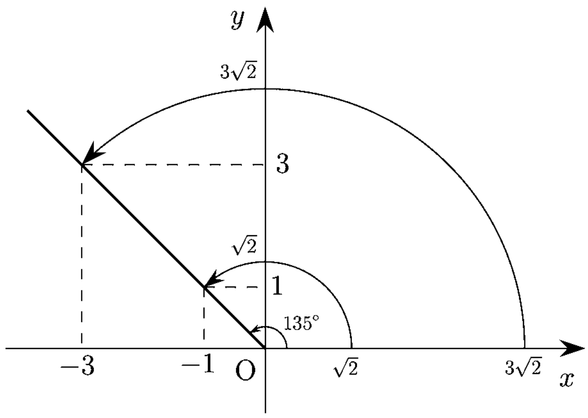
正の数 r に対し，点 $\mathrm{Q}(\mathsf{r}, 0)$ を原点 $\mathrm{O}(0,0)$ を中心として反時計まわりに角度 θ だけ回転した点を $\mathrm{P}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ とする。このとき角度 θ における三角比を

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{r}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\mathsf{X}}{\mathsf{r}} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}}$$

で定める。

(注) この値は r によらない。

例　$\theta = 135^\circ$ の場合を考える。



(1)　$\mathsf{r} = \sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $\mathrm{P}(-1, 1)$ より

$\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　,　$\cos 135^\circ = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$　,

$\tan 135^\circ = \dfrac{1}{-1} = -1$

となる。

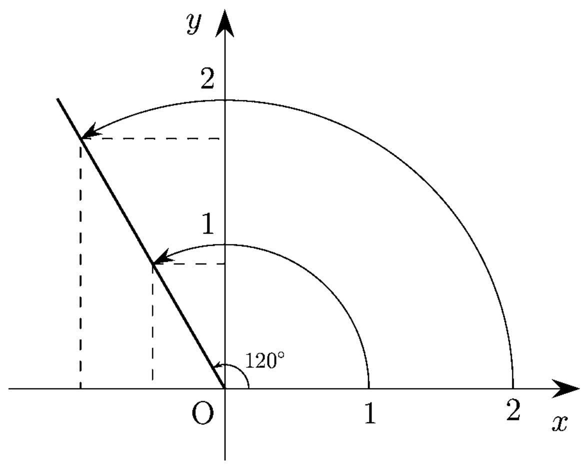
(2)　$\mathsf{r} = 3\sqrt{2}$ のとき点 P の座標は $\mathrm{P}(-3, 3)$ より

$\sin 135^\circ = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　,　$\cos 135^\circ = \dfrac{-3}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　,

$\tan 135^\circ = \dfrac{3}{-3} = -1$

よって (1) と (2) は同じ結果になる。

問　$\theta = 120^\circ$ の場合に $\mathsf{r} = 1$ と $\mathsf{r} = 2$ のときの点 P の座標を求め，三角比を計算せよ。



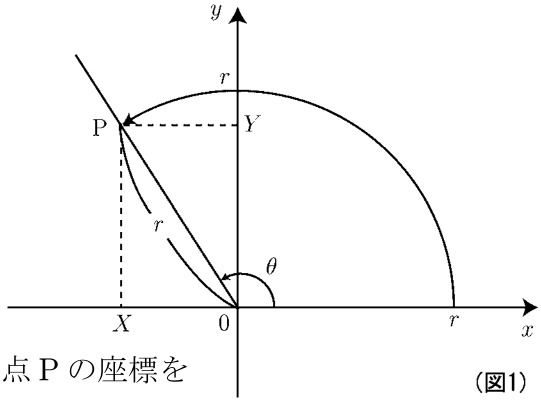
(1)　$\mathsf{r} = 1$ のとき　P(　　,　　)

$\sin 120^\circ =$　　　$\cos 120^\circ =$　　　$\tan 120^\circ =$

(2)　$\mathsf{r} = 2$ のとき　P(　　,　　)

$\sin 120^\circ =$　　　$\cos 120^\circ =$　　　$\tan 120^\circ =$

< 鈍角の三角比 2 >



(図1)

図 1 の場合

$\sin\theta = \dfrac{\mathsf{Y}}{\mathsf{r}}$ ，　$\cos\theta = \dfrac{\mathsf{X}}{\mathsf{r}}$ ，　$\tan\theta = \dfrac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}$

である。

問 1　$\theta = 150^\circ$ の場合に $\mathsf{r} = 1$ と $\mathsf{r} = 2$ のときの点 P の座標を求め，三角比を計算せよ。

(1)　$\mathsf{r} = 1$ のとき　　P (　　,　　)

$\sin 150^\circ =$　　　　$\cos 150^\circ =$　　　　$\tan 150^\circ =$

(2)　$\mathsf{r} = 2$ のとき　　P (　　,　　)

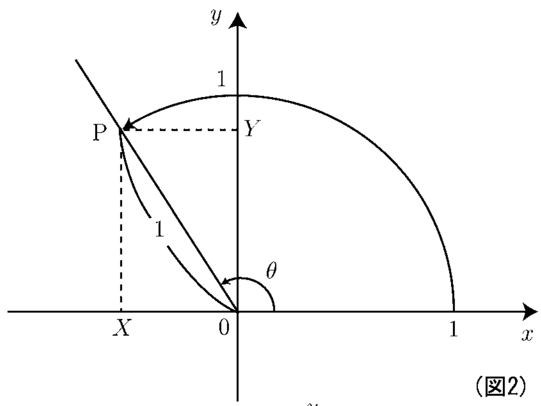
$\sin 150^\circ =$　　　　$\cos 150^\circ =$　　　　$\tan 150^\circ =$

問 2　図 2 の場合の三角比を X，Y で表せ。

$\sin\theta =$

$\cos\theta =$

$\tan\theta =$



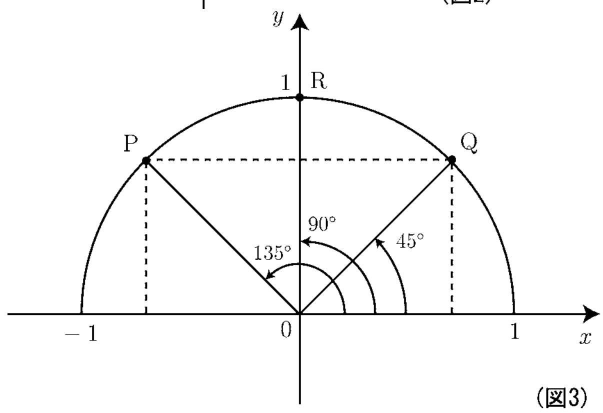
(図2)

問 3　図 3 を見て次の問に答えよ。

(1) 点 P の座標を求め，135° の三角比を求めよ。

P (　　,　　)

$\sin 135^\circ =$　　　$\cos 135^\circ =$　　　$\tan 135^\circ =$



(図3)

(2) 点 Q の座標を求め，45° の三角比を求めよ。

Q (　　,　　)

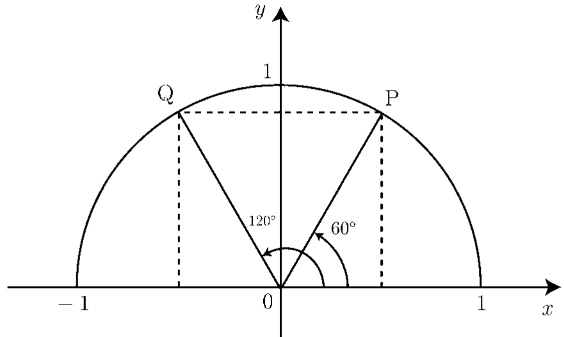
$\sin 45^\circ =$　　　$\cos 45^\circ =$　　　$\tan 45^\circ =$

(3) 点 R の座標を求め，90° の三角比を求めよ。

R (　　,　　)

$\sin 90^\circ =$　　　　　$\cos 90^\circ =$

< 鈍角の三角比 3 >



(図1)

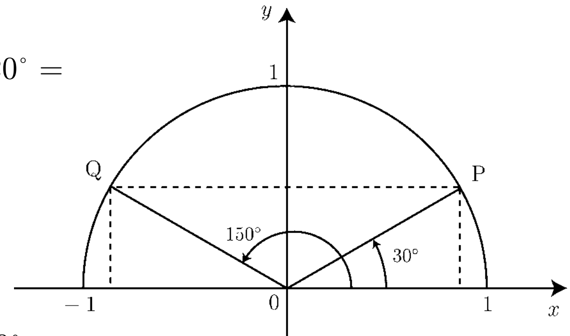
問 1　図 1 の点 P，Q の座標を求め，

60° と 120° の三角比を求めよ。

P (　　，　　)，Q (　　，　　)

$\sin 60^\circ =$　　　　$\cos 60^\circ =$　　　　$\tan 60^\circ =$

$\sin 120^\circ =$　　　　$\cos 120^\circ =$　　　　$\tan 120^\circ =$



(図2)

問 2　図 2 の点 P，Q の座標を求め，

30° と 150° の三角比を求めよ。

P (　　，　　)，Q (　　，　　)

$\sin 30^\circ =$　　　　$\cos 30^\circ =$　　　　$\tan 30^\circ =$

$\sin 150^\circ =$　　　　$\cos 150^\circ =$　　　　$\tan 150^\circ =$

例　次ページの三角関数表より

$\sin 25^\circ = 0.4226$，$\cos 25^\circ = 0.9063$，$\tan 25^\circ = 0.4663$

であるから図 3 の点 P の座標は

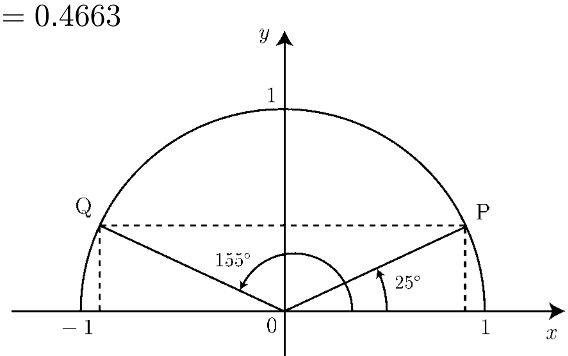
P (0.9063　,　0.4226)

であり　$\frac{0.4226}{0.9063} = 0.4663$　である。

従って点 Q の座標は

Q (−0.9063　,　0.4226)

であるから 155° の三角比は



(図3)

$\sin 155^\circ = 0.4226$　,　$\cos 155^\circ = -0.9063$　,　$\tan 155^\circ = \dfrac{0.4226}{-0.9063} = -0.4663$

である。

問 3　次ページの三角関数表を見て，次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 110^\circ =$　　　　$\cos 110^\circ =$　　　　$\tan 110^\circ =$

(2)　$\sin 140^\circ =$　　　　$\cos 140^\circ =$　　　　$\tan 140^\circ =$

(3)　$\sin 165^\circ =$　　　　$\cos 165^\circ =$　　　　$\tan 165^\circ =$

< 三角関数表 >

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1,0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	———

問　前ページの例を参考にして次の三角比の値を求めよ。

(1) $\sin 95^\circ =$　　　$\cos 95^\circ =$　　　$\tan 95^\circ =$

(2) $\sin 127^\circ =$　　　$\cos 127^\circ =$　　　$\tan 127^\circ =$

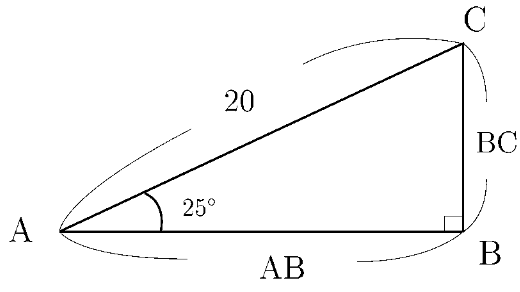
(3) $\sin 143^\circ =$　　　$\cos 143^\circ =$　　　$\tan 143^\circ =$

(4) $\sin 180^\circ =$　　　$\cos 180^\circ =$　　　$\tan 180^\circ =$

< 三角比と辺の長さ >

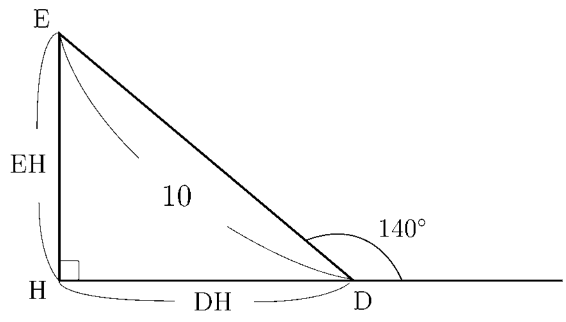
問 1　三角関数表を用いて次の問に答えよ。

(1) 図 1 の AB，BC の長さを求めよ。



(図1)

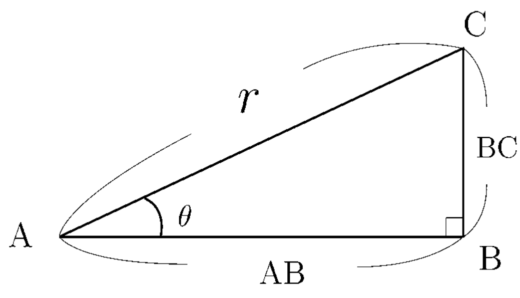
(2) 図 2 の DH，EH の長さを求めよ。



(図2)

問 2　図 3 の三角形 ABC において，

AB と BC を r と θ で表せ。

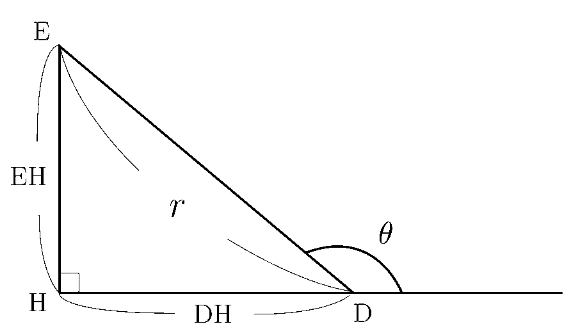


(図3)

問 3　図 4 において EH と DH の

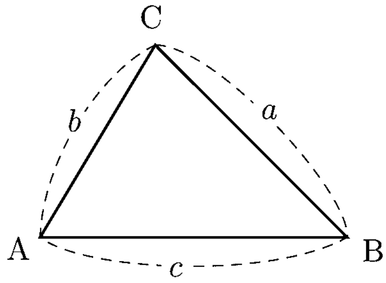
長さを r と θ で表せ。

(ただし θ は鈍角である。)



(図4)

< 正弦定理 1 >



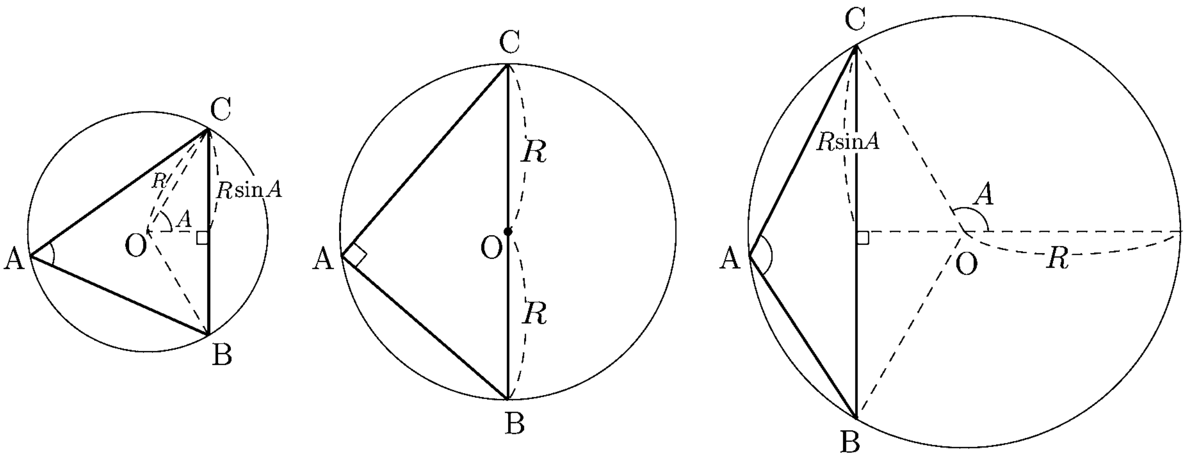
三角形 ABC で，頂点 A, B, C に対する辺の長さを，それぞれ，a, b, c とする。また ∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C と書くことにする。
このとき次の定理が成立する。

< 正弦定理 >

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ここで R は三角形 ABC の外接円の半径である。

[証明] 外接円の中心を O とする。円周角と中心角との関係から図のように ∠BOC の大きさの半分が A になる。



A が鋭角, 90°, 鈍角のどの場合についても

$$\text{BC の長さ} \quad = \quad a \quad = \quad 2R\sin A$$

が成り立つ。従って

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

である。同様にして

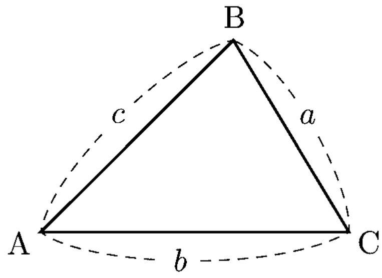
$$\frac{b}{\sin B} = 2R \qquad , \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

が得られる。(証明終)

問 角度 A が次の各場合に a を外接円の半径 R で表せ。

(1)$A = 70^\circ$ (2)$A = 90^\circ$ (3)$A = 120^\circ$

< 正弦定理 2 >

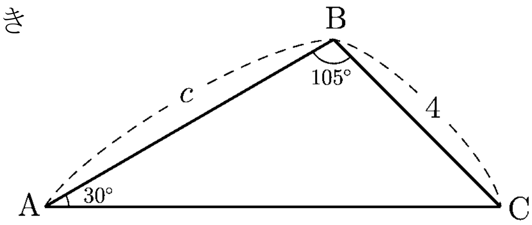


$\triangle$ABC において

$$\boxed{\frac{\mathsf{a}}{\sin \mathsf{A}} = \frac{\mathsf{b}}{\sin \mathsf{B}} = \frac{\mathsf{c}}{\sin \mathsf{C}} = 2\mathsf{R}}$$ (正弦定理)

R は $\triangle$ ABC の外接円の半径である。

例題 $\triangle$ABC で, $\mathsf{a} = 4$, $\mathsf{A} = 30^\circ$, $\mathsf{B} = 105^\circ$ のとき



(1) c を求めよ。

(2) 外接円の半径 R を求めよ。

(解)

(1) $\mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C} = 180^\circ$ より $\mathsf{C} = 45^\circ$。
正弦定理から

$$\frac{\mathsf{c}}{\sin 45^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ}$$

よって

$$\mathsf{c} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \times \sin 45^\circ = \frac{4}{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

(2) $2\mathsf{R} = \dfrac{4}{\sin 30^\circ} = 8$ より $\underline{\mathsf{R} = 4}$

問 1 $\triangle$ABC で $\mathsf{a} = 8$, $\mathsf{A} = 45^\circ$, $\mathsf{B} = 60^\circ$ のとき b を求めよ。

問 2 $\triangle$ABC で $\mathsf{b} = 2$, $\mathsf{B} = 45^\circ$, $\mathsf{C} = 120^\circ$ のとき c を求めよ。

問 3 $\triangle$ABC で $\mathsf{c} = 10$, $\mathsf{A} = 60^\circ$, $\mathsf{B} = 75^\circ$ のとき

(1) a を求めよ。

(2) 外接円の半径 R を求めよ。

< 正弦定理の応用 >

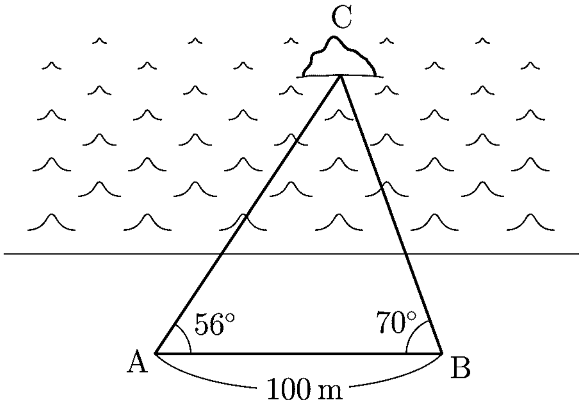
問 1 100m 離れた 2 地点 A, B から島 C を見たところ

$$\angle\mathrm{CAB} = 56^\circ,\ \angle\mathrm{CBA} = 70^\circ$$

であった。A, C 間の距離を求めよ。ただし

$$\sin 54^\circ = 0.8\ ,\quad \sin 70^\circ = 0.94$$

とする。

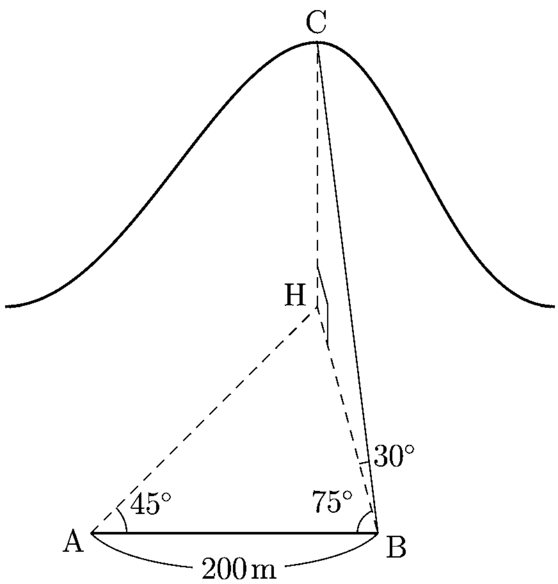


問 2 山の高さ CH を求めたい。ふもとの 2 地点 A, B で測量した結果右図のようになった。

$\angle\mathrm{BAH} = 45^\circ$, $\angle\mathrm{ABH} = 75^\circ$

$\angle\mathrm{HBC} = 30^\circ$, $\angle\mathrm{BHC} = 90^\circ$

$\mathrm{AB} = 200\mathrm{m}$



(1) $\angle\mathrm{AHB}$ を求めよ。

(2) BH を求めよ。

(3) CH を求めよ。

＜ 余弦定理 1 ＞

$\triangle$ABC で，2 辺の長さ b，c とその間の角 A がわかっているとき，
残りの辺の長さ a を求めることを考える。

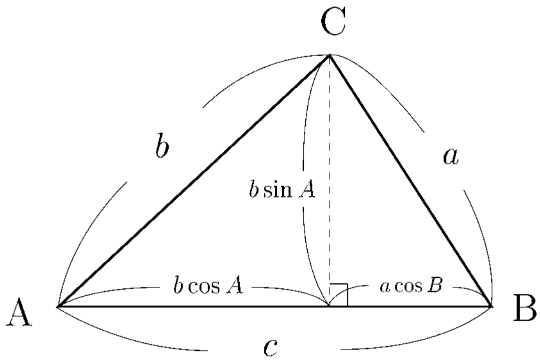
図 1 のような場合に

$$a^2 = (a\cos B)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= (c - b\cos A)^2 + b^2\sin^2 A$$
$$= c^2 - 2bc\cos A + b^2(\cos^2 A + \sin^2 A)$$

であり， $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ だから

( ) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

が成り立つ。この関係式を**余弦定理**という。



(図1)

図 2 の場合，B は鈍角だから

$\cos B < 0$

であり

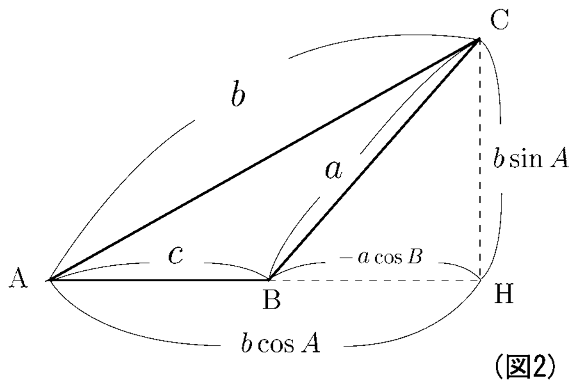
$\mathrm{BH} = a\cos(180^\circ - B) = -a\cos B$

となる。

$b\cos A = c + \mathrm{BH} = c - a\cos B$

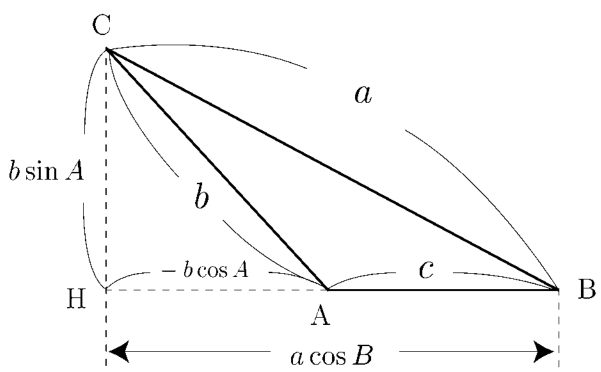
より

$$a^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 = (-a\cos B)^2 + (b\sin A)^2$$
$$= (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$



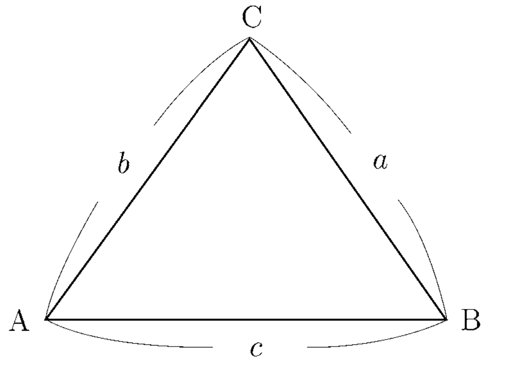
(図2)

問 図 3 の場合に余弦定理 ( ) を証明せよ。



(図3)

< 余弦定理 2 >



三角形 ABC に対し，前ページより

( )　$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

が成り立つ。これを**余弦定理**という。

問 1　( ) 式を参考にして，b^2 を a，c と角度 B で表せ。

$b^2 =$

問 2　( ) 式を参考にして，c^2 を a，b と角度 C で表せ。

$c^2 =$

例　△ABC において $b = 7$，$c = 6$，$A = 120^\circ$ のとき，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 7^2 + 6^2 - 2 \times 7 \times 6 \times \cos 120^\circ = 49 + 36 + 42 = 127$$

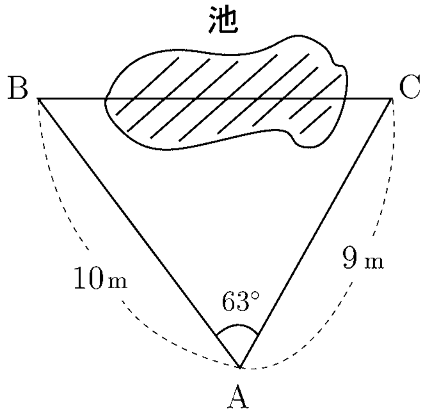
より　$\underline{a = \sqrt{127}}$

問 3　次の △ABC について，(　) 内の値を求めよ。

(1)　$b = \sqrt{6}$，$c = \sqrt{2}$，$A = 30^\circ$　(a)　　(2)　$a = \sqrt{2}$，$c = 3$，$B = 45^\circ$　(b)

(3)　$a = \sqrt{3}$，$b = 1$，$C = 150^\circ$　(c)　　(4)　$a = \sqrt{6}$，$c = \sqrt{3}$，$B = 135^\circ$　(b)

＜ 余弦定理 3 ＞



問 1　右図のような 3 つの地点 A , B , C がある。AB=10 m , AC=9 m , ∠BAC=63° のとき B , C 間の距離 BC を求めよ。ただし $\cos 63^\circ = 0.45$ とする。

例 1　△ABC において余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ である。よって

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

と表される。

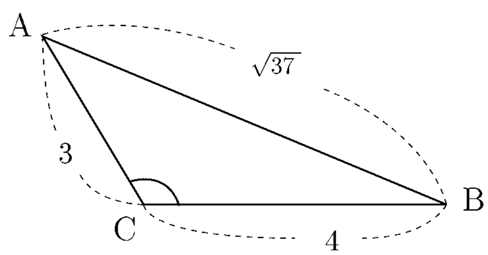
問 2　△ABC において , 次の値を辺の長さ a , b , c で表せ。

$\cos A =$ 　　　　　　　　　　　　, $\cos B =$

例 2　△ABC において
$a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{37}$
のとき

$$\cos C = \frac{4^2+3^2-(\sqrt{37})^2}{2\times4\times3} = -\frac{1}{2}$$

より角度 C は <u>120°</u> である。



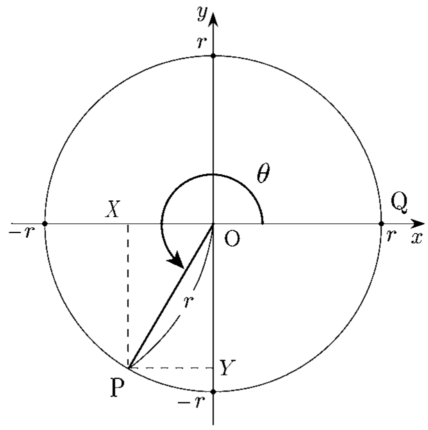
問 3　△ABC が次の各場合に (　) 内の角度を求めよ。

(1) $a = \sqrt{5}$, $b = 3$, $c = \sqrt{2}$ 　(A)

(2) $a = 3$, $b = \sqrt{39}$, $c = 2\sqrt{3}$ 　(B)

< 三角関数 1 >

$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ である角度 θ に対して，右図のように始線 OQ を反時計方向に θ だけ回転した線分を OP とする。OP= r であり，P の座標が (X ， Y) であるとき，



$$\cos\theta = \frac{\mathsf{X}}{\mathsf{r}},\ \sin\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{r}},\ \tan\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}$$

と定義する。

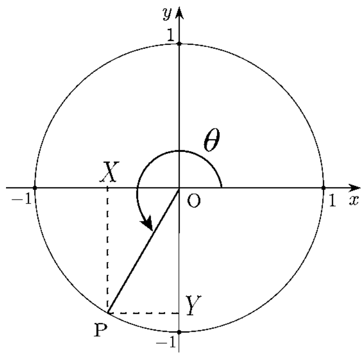
(注 1) この値は r の大きさによらない。

(注 2) (90° や 270° などのような) X $= 0$ の場合は $\tan\theta$ の値は定義されない。

(注 3) r $= 1$ のとき

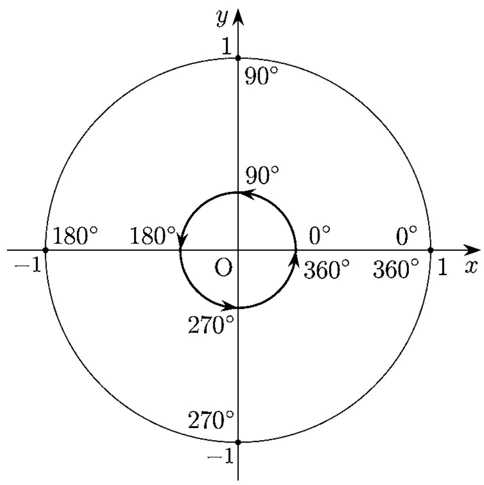
$$\cos\theta = \mathsf{X},\ \sin\theta = \mathsf{Y},\ \tan\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}$$

のように簡単になる。この式を三角関数の定義としてもよい。



例 1　$\theta = 0^\circ$ のとき点 P の座標は (1 , 0) だから X $= 1$, Y $= 0$ である。よって

$$\sin 0^\circ = 0,\ \cos 0^\circ = 1,\ \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$



例 2　$\theta = 90^\circ$ のとき点 P の座標は (0 , 1) だから X $= 0$, Y $= 1$ である。よって

$$\sin 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0$$

である。$\tan 90^\circ$ の値は定義されない。

問　次の値を求めよ。

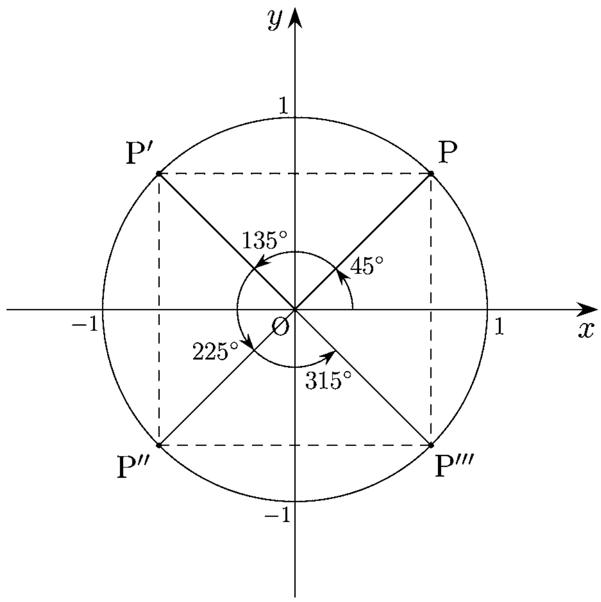
$\sin 180^\circ =$　　　　$\cos 180^\circ =$　　　　$\tan 180^\circ =$

$\sin 270^\circ =$　　　　$\cos 270^\circ =$

$\sin 360^\circ =$　　　　$\cos 360^\circ =$　　　　$\cos 360^\circ =$

< 三角関数 2 >

問 1 右図で点 P, P^0, P^{00}, P^{000} の座標を求め，図の下に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 45^\circ =$ $\sin 45^\circ =$ $\tan 45^\circ =$

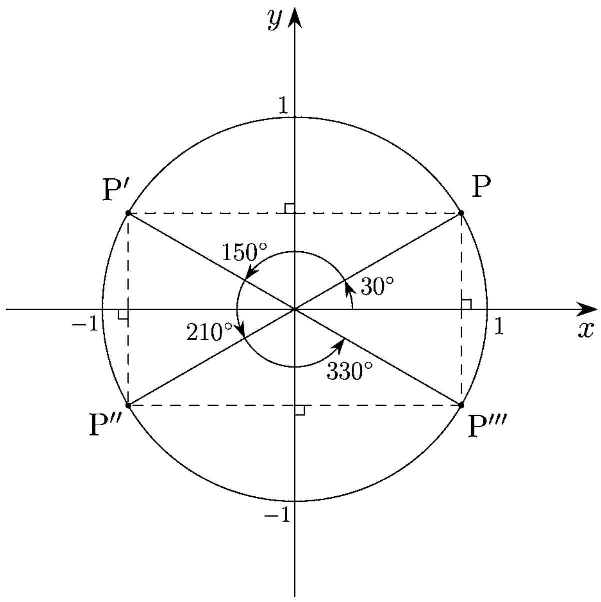
$\cos 135^\circ =$ $\sin 135^\circ =$ $\tan 135^\circ =$

$\cos 225^\circ =$ $\sin 225^\circ =$ $\tan 225^\circ =$

$\cos 315^\circ =$ $\sin 315^\circ =$ $\tan 315^\circ =$

P (,)
P^0 (,)
P^{00} (,)
P^{000} (,)

問 2 右図で点 P, P^0, P^{00}, P^{000} の座標を求め，図の下に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



$\cos 30^\circ =$ $\sin 30^\circ =$ $\tan 30^\circ =$

$\cos 150^\circ =$ $\sin 150^\circ =$ $\tan 150^\circ =$

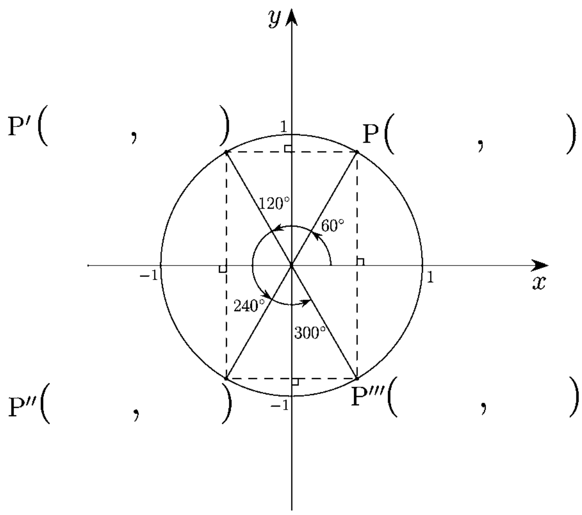
$\cos 210^\circ =$ $\sin 210^\circ =$ $\tan 210^\circ =$

$\cos 330^\circ =$ $\sin 330^\circ =$ $\tan 330^\circ =$

P (,)
P^0 (,)
P^{00} (,)
P^{000} (,)

< 三角関数 3 >

問 1 右図で点 P, P^0, P^{00}, P^{000} の座標を求め，図に記入せよ。
また次の三角関数の値を求めよ。



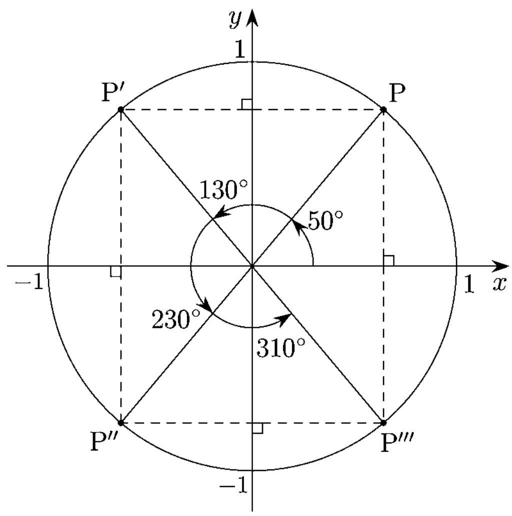
$\cos 60^\circ =$ $\sin 60^\circ =$ $\tan 60^\circ =$

$\cos 120^\circ =$ $\sin 120^\circ =$ $\tan 120^\circ =$

$\cos 240^\circ =$ $\sin 240^\circ =$ $\tan 240^\circ =$

$\cos 300^\circ =$ $\sin 300^\circ =$ $\tan 300^\circ =$

問 2 三角関数表より
$\cos 50^\circ = 0.6428$, $\sin 50^\circ = 0.7660$
であるので右図の点 P の座標は
P(0.6428, 0.766)
である。



(1) 右図の点 P^0, P^{00}, P^{000} の座標を記入せよ。

P^0(,)

P^{00}(,)

P^{000}(,)

(2) 次の値を求めよ。

$\cos 130^\circ =$ $\sin 130^\circ =$

$\cos 230^\circ =$ $\sin 230^\circ =$

$\cos 310^\circ =$ $\sin 310^\circ =$

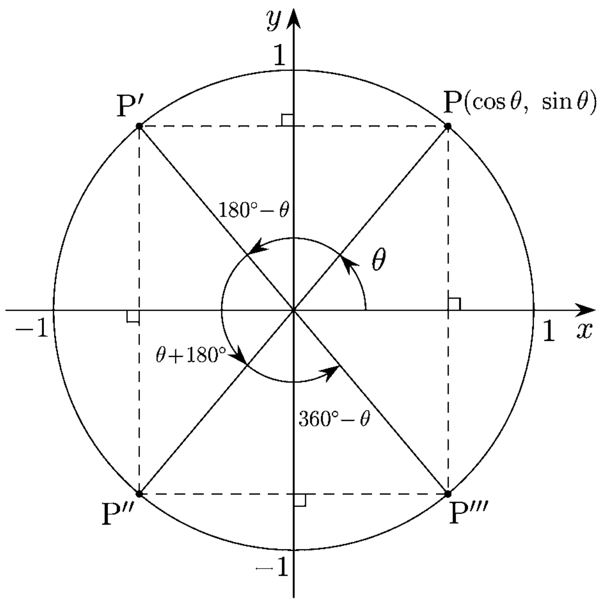
(3) $\tan 50^\circ = \dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} = \dfrac{0.7660}{0.6428} = 1.1918$ であることを用いて次の値を求めよ。

$\tan 130^\circ =$ $\tan 230^\circ =$ $\tan 310^\circ =$

< 三角関数 4 >

問 1　前ページの性質を一般化する。

(1)　右図を参考にして次式を $\cos\theta$ または $\sin\theta$ で表せ。



$\sin(180^\circ - \theta) =$

$\cos(180^\circ - \theta) =$

$\sin(\theta + 180^\circ) =$

$\cos(\theta + 180^\circ) =$

$\sin(360^\circ - \theta) =$

$\cos(360^\circ - \theta) =$

(2)　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であることを用いて次式を $\tan\theta$ で表せ。

$\tan(180^\circ - \theta) =$

$\tan(\theta + 180^\circ) =$

$\tan(360^\circ - \theta) =$

問 2　三角関数表 (9 ページ) と問 1 の結果より次の値を求めよ。

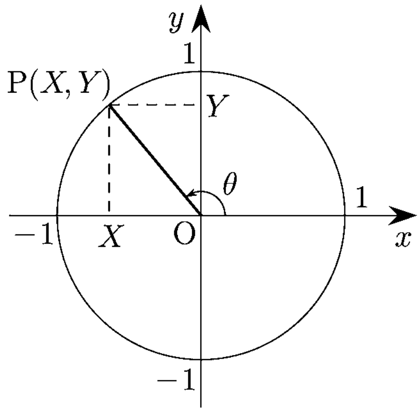
$\cos 20^\circ =$	$\sin 20^\circ =$	$\tan 20^\circ =$
$\cos 160^\circ =$	$\sin 160^\circ =$	$\tan 160^\circ =$
$\cos 200^\circ =$	$\sin 200^\circ =$	$\tan 200^\circ =$
$\cos 340^\circ =$	$\sin 340^\circ =$	$\tan 340^\circ =$

< 三角関数の相互関係 >

角度 θ を表す点を $\mathrm{P}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ とすると，三角関数の定義から

$$\sin\theta = \mathsf{Y},\ \cos\theta = \mathsf{X},\ \tan\theta = \frac{\mathsf{Y}}{\mathsf{X}}$$

である。原点 O と点 P の距離は 1 だから $\mathsf{X}^2 + \mathsf{Y}^2 = 1$ より



$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

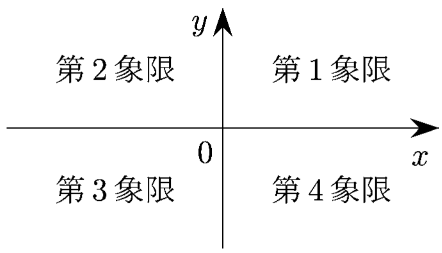
が成り立つ。

(注)　記号 $\cos^2\theta$ は $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta)\times(\cos\theta)$ の意味であり，$\cos(\theta^2)$ と区別するために用いられる。すなわち
$\cos^2\theta = (\cos\theta)^2 \neq \cos(\theta^2)$,　$\sin^2\theta = (\sin\theta)^2 \neq \sin(\theta^2)$

問 1　$\tan\theta$ を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表せ。

問 2　$1 + \tan^2\theta$ を $\cos\theta$ で表せ。

問 3　三角関数の定義から，sin は y 座標だから第 1 象限と第 2 象限が正であり，第 3 象限と第 4 象限が負である。すなわち



θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$				
$\tan\theta$				

となる。表を完成させよ。

例　角度 θ は 0° から 180° までの間の角で，$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ である。このとき

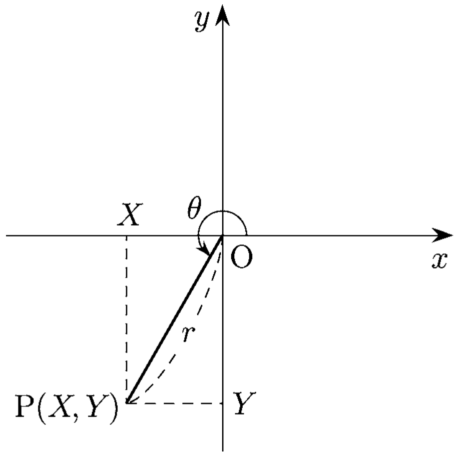
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　だから　　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

よって $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{8}{9}} = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

問 4　角度 θ は 0° から 180° までの角で，$\cos\theta = \dfrac{12}{13}$ である。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。

< 平面座標の三角表示 >

座標平面内で原点以外の任意の点を P(X, Y) とする。点 P と原点 O(0, 0) との距離を r とする。線分 OP と x 軸との角度 θ を右図のように測る。三角関数の定義 (p17) より



$$\cos\theta = \frac{X}{r}\ ,\quad \sin\theta = \frac{Y}{r}$$

となるので, 点 P の座標は

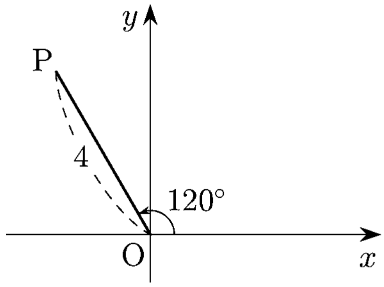
$$\boxed{\text{P の座標}\quad : \quad (X, Y) = (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta)}$$ (平面座標の三角表示)

と表される。これを平面座標の三角表示ということにする。

例 右図の点 P の座標は

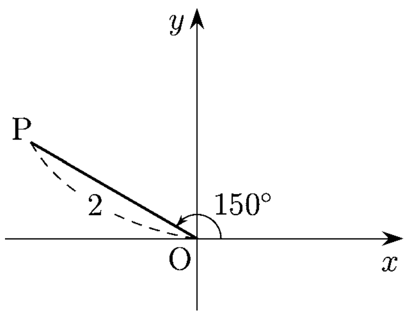
$$\text{P} : (r\cos\theta\ ,\ r\sin\theta) = (4\cos 120^\circ\ ,\ 4\sin 120^\circ)$$
$$= \left(4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\ 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-2\ ,\ 2\sqrt{3}\right)$$

である。

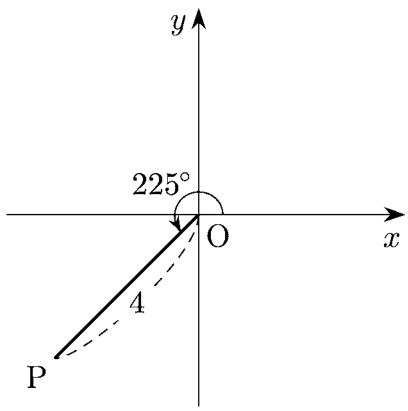


問 次の各場合に点 P の座標を求めよ。((4) は三角関数表を用いる)

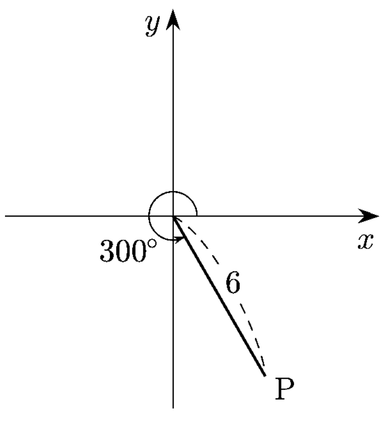
(1)



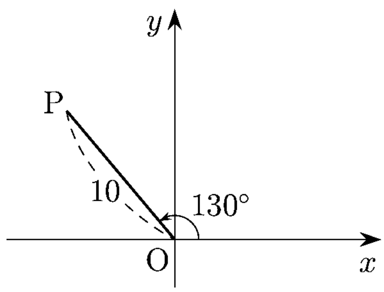
(2)



(3)

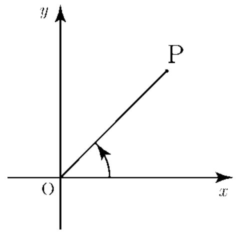


(4)

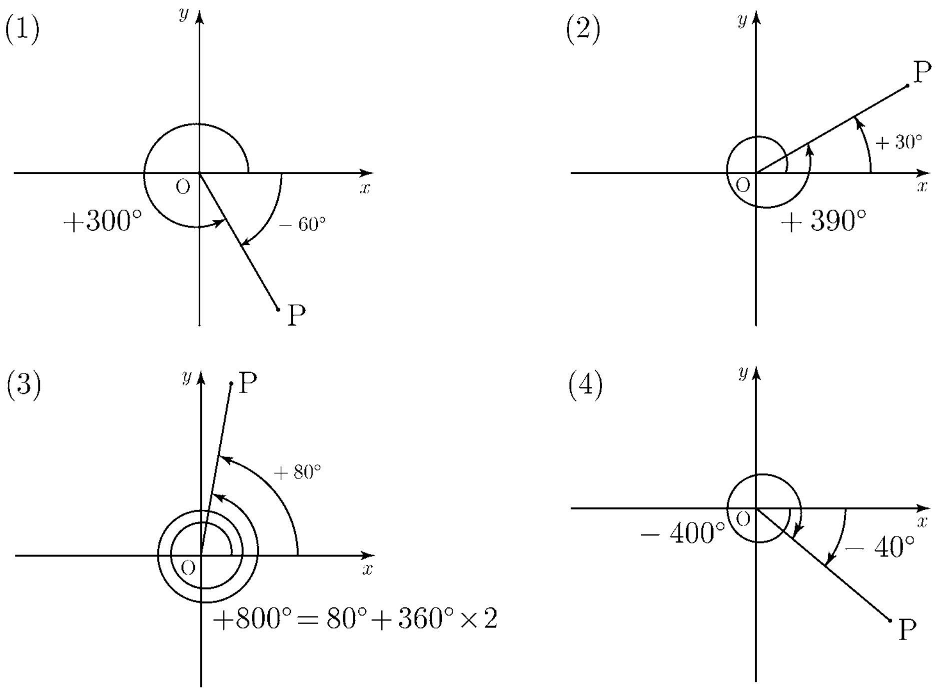


＜ 一般角 ＞

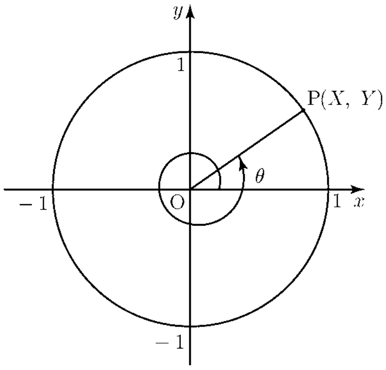
座標平面上の原点 O を中心として線分 OP が回転する。このとき x 軸を**始線**といい，OP を**動径**という。反時計まわりをプラス方向，時計まわりをマイナス方向として，始線に対する動径の回転の大きさと向きを表す角を**一般角**という。



例 1



＜ 一般角の三角関数 ＞



点 P が原点を中心とした半径 1 の円周上にあるとき，一般角 θ に対する三角関数を 360° までの場合と同様に，点 P の座標 (X, Y) で

$$\cos\theta = \mathrm{X}, \qquad \sin\theta = \mathrm{Y}, \qquad \tan\theta = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$$

と定める。任意の一般角 θ に対して

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$$

が成り立つ。

(注) $\mathrm{X} = 0$ のとき $\tan\theta$ の値は定義されない。

例 2　$\sin 400^\circ = \sin 40^\circ$　,　$\cos(-60^\circ) = \cos 300^\circ$　,　$\tan 800^\circ = \tan 80^\circ$

問　次の三角関数の値を 0° から 360° までの角度の三角関数で表せ。

(1) $\sin 460^\circ$　　(2) $\cos(-70^\circ)$　　(3) $\tan 500^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ)$　　(5) $\cos 650^\circ$　　(6) $\tan 860^\circ$

< 一般角の三角関数 >

問 1 20 ページおよび前ページを参考にして，次の値を $\cos\theta$，$\sin\theta$，$\tan\theta$ で表せ。

$\cos(\theta+360^\circ)=$ $\sin(\theta+360^\circ)=$ $\tan(\theta+360^\circ)=$

$\cos(\theta-360^\circ)=$ $\sin(\theta-360^\circ)=$ $\tan(\theta-360^\circ)=$

$\cos(180^\circ-\theta)=$ $\sin(180^\circ-\theta)=$ $\tan(180^\circ-\theta)=$

$\cos(\theta+180^\circ)=$ $\sin(\theta+180^\circ)=$ $\tan(\theta+180^\circ)=$

$\cos(360^\circ-\theta)=$ $\sin(360^\circ-\theta)=$ $\tan(360^\circ-\theta)=$

$\cos(-\theta)=$ $\sin(-\theta)=$ $\tan(-\theta)=$

例 1 $\cos 405^\circ=\cos(45^\circ+360^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\sin 540^\circ=\sin(180^\circ+360^\circ)=\sin 180^\circ=0$,

$\tan(-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$

問 2 次の値を求めよ。

$\sin 420^\circ=$ $\cos 450^\circ=$ $\tan 495^\circ=$

$\sin(-45^\circ)=$ $\cos(-90^\circ)=$ $\tan(-120^\circ)=$

例 2 $\cos 400^\circ=\cos 40^\circ=0.766$, $\sin 500^\circ=\sin 140^\circ=\sin 40^\circ=0.6428$

$\tan(-100^\circ)=-\tan 100^\circ=\tan 80^\circ=5.6713$

問 3 三角関数表を見て，次の値を求めよ。

$\sin 380^\circ=$ $\cos 400^\circ=$ $\tan 510^\circ=$

$\sin(-40^\circ)=$ $\cos(-100^\circ)=$ $\tan(-50^\circ)=$

< 三角関数の値 >

問 1　角度 θ が次の各場合の三角関数の値を求めて表に記入せよ。

角度 θ	-90°	-60°	-45°	-30°	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$													

角度 θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	390°	405°	420°	450°
$\sin\theta$													
$\cos\theta$													
$\tan\theta$													

問 2　三角関数表をみて，次の値を求めよ。

$\sin(-50^\circ)$　　$\cos(-40^\circ)$　　$\tan(-20^\circ)$

$\sin 130^\circ$　　$\cos 140^\circ$　　$\tan 160^\circ$

$\sin 200^\circ$　　$\cos 190^\circ$　　$\tan 220^\circ$

$\sin 280^\circ$　　$\cos 290^\circ$　　$\tan 310^\circ$

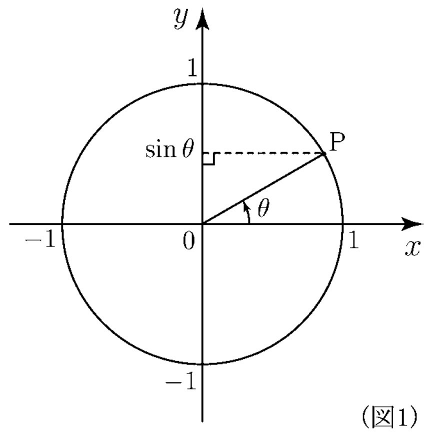
$\sin 370^\circ$　　$\cos 380^\circ$　　$\tan 410^\circ$

< 三角方程式 1 >

17 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると，

$$\boxed{\sin\theta = \text{点 P の y 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

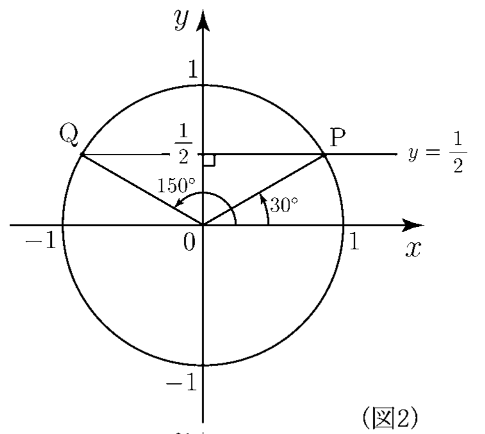
例題 1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，y 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(y = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , Q とする。x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答)　$\theta = 30^\circ$ または $\theta = 150^\circ$



(図2)

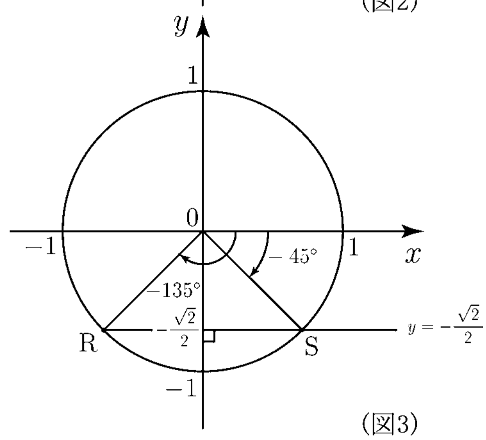
例題 2　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　例題 1 と同様に単位円に直線 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き，単位円との交点を R , S とすると図 3 のようになる。

(答)　$\theta = -45^\circ$ または $\theta = -135^\circ$



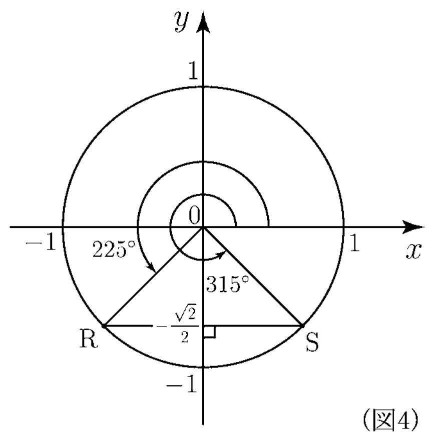
(図3)

例題 3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 より　(答)　$\theta = 225^\circ$ または $\theta = 315^\circ$



(図4)

問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

(2)　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

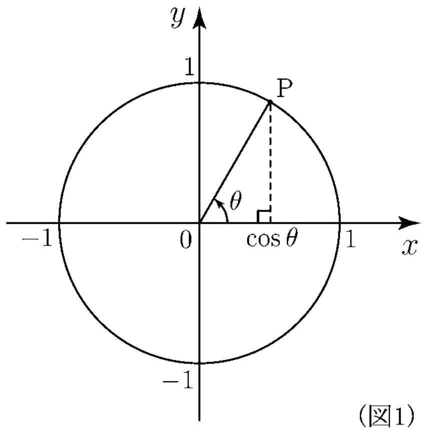
(3)　$\sin\theta = -\frac{1}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

< 三角方程式 2 >

17 ページで学んだように，単位円と角 θ を表す動径との交点を P とすると，

$$\boxed{\cos\theta = \text{点 P の x 座標}}$$

である (図 1)。



(図1)

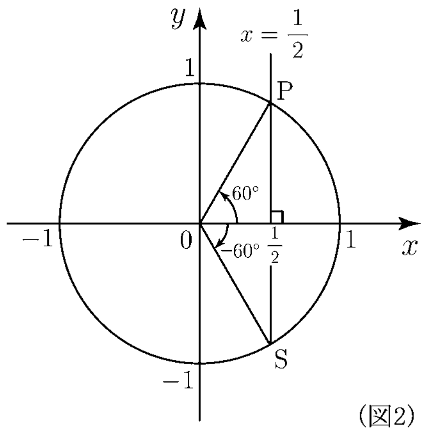
例題 1　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，x 座標が $\frac{1}{2}$ である直線 $\left(x = \frac{1}{2}\right)$ を引く。その直線と単位円との交点を P , S とする。x 軸からの角度は図 2 のようになる。

(答)　$\theta = 60^\circ$ または $\theta = -60^\circ$



(図2)

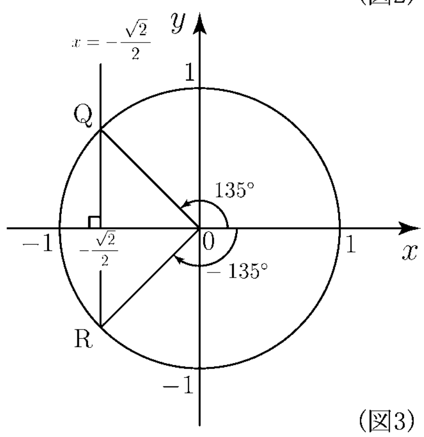
例題 2　$-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　単位円に直線 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を引き，単位円との交点を Q , R とすると図 3 のようになる。

(答)　$\theta = 135^\circ$ または $\theta = -135^\circ$



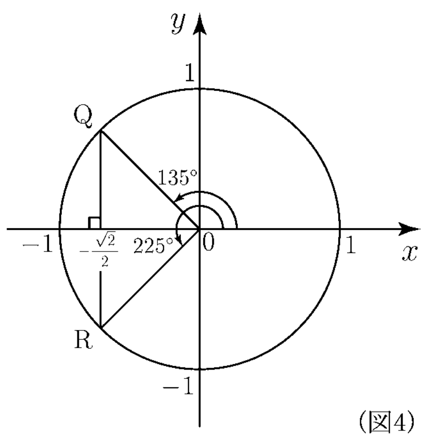
(図3)

例題 3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ の範囲で

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 より (答)　$\theta = 135^\circ$ または $\theta = 225^\circ$



(図4)

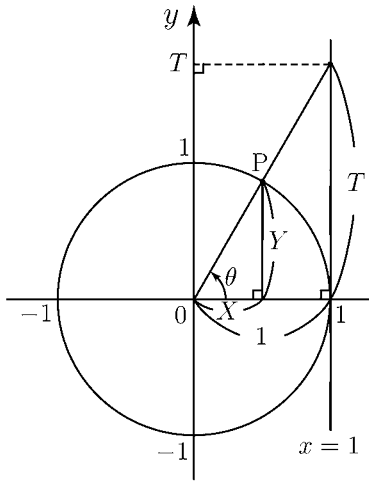
問　次式を満たす角度 θ を (　) 内の範囲で求めよ。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　$(-180^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

(3)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$(0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ)$

< 三角方程式 3 >



(図1)

単位円と角 θ を表す動径との交点を $\mathrm{P(X, Y)}$ とすると

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}$$

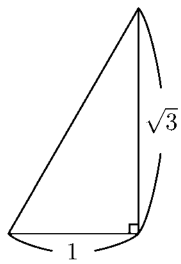
である。

問１　図 1 の場合に

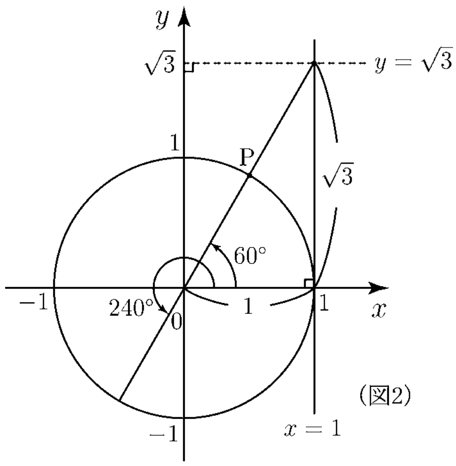
$$\boxed{\tan\theta = \mathrm{T}}$$

であることを示せ。

(証明)



(図3)



(図2)

例題１　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

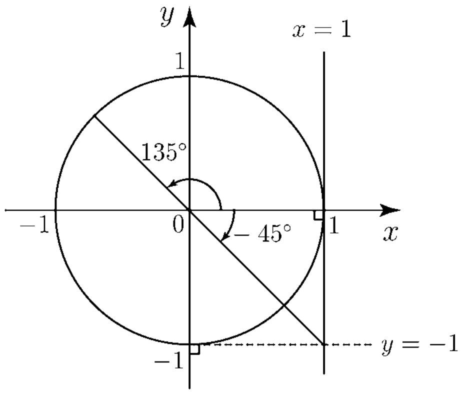
$$\tan\theta = \sqrt{3}$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　まず単位円を描き，y 軸上に $\sqrt{3}$ をとる。$\mathrm{y} = \sqrt{3}$ と $\mathrm{x} = 1$ との交点から原点に直線を引くと図 3 の直角三角形ができる。この直角三角形は斜辺の長さが 2 になるので内角が 30° , 60° , 90° の直角三角形になる。図 2 より

(答) $\theta = 60^\circ$ または $\theta = 240^\circ$

(注)　20 ページより $\tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$ であるから $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ である。



(図4)

例題２　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で

$$\tan\theta = -1$$

を満たす角度 θ を求めよ。

(解)　図 4 のように直線 $\mathrm{x} = 1$ と $\mathrm{y} = -1$ の交点から原点に直線を引く。図 4 より

(答) $\theta = -45^\circ$ または $\theta = 135^\circ$

問２　$-90^\circ \leqq \theta \leqq 270^\circ$ の範囲で次式を満たす角度 θ を求めよ。

(1)　$\tan\theta = 1$　　,　(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　,　(3)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$

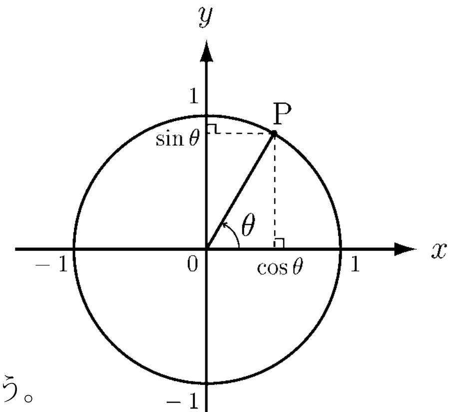
< 三角関数のグラフ 1 >

単位円と角 θ を表す動径との交点を
P とすると

$$\sin\theta = \text{点 P の y 座標}$$

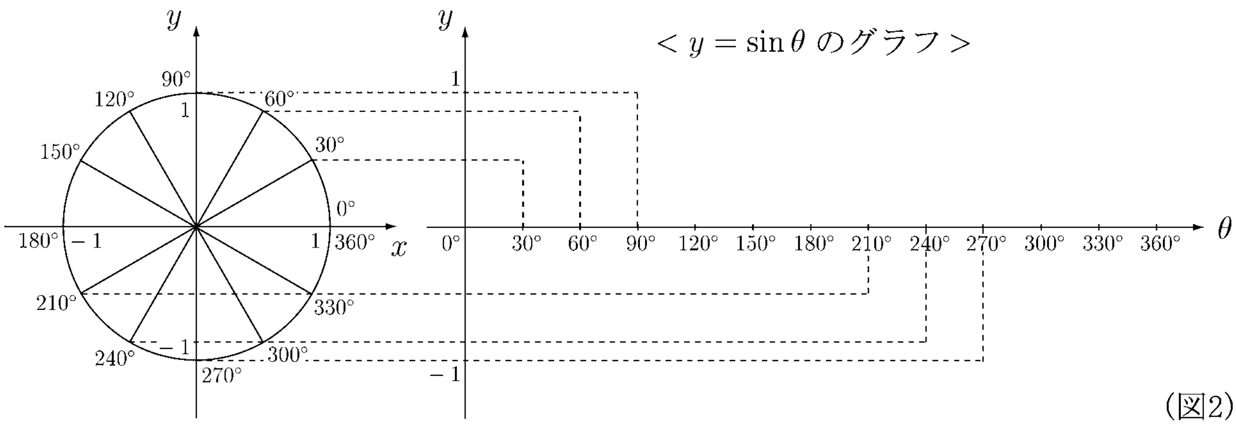
$$\cos\theta = \text{点 P の x 座標}$$

である。この性質を用いて $\sin\theta$ と $\cos\theta$ のグラフを描こう。



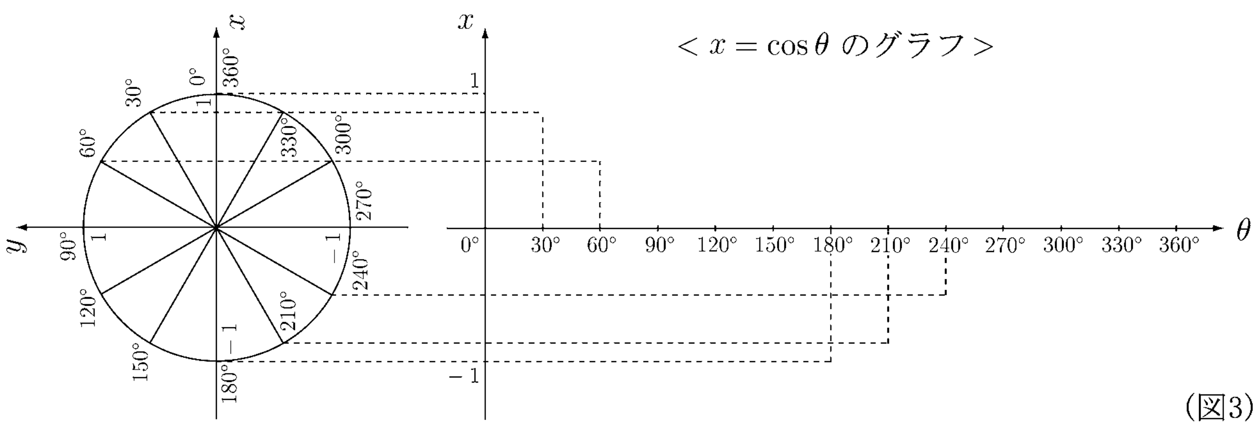
(図1)

問 1　図 2 に 30°，60°，90°，210°，240°，270° のときの $y = \sin\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $y = \sin\theta$ の通る点を点線で作図し，0° から 360° までの範囲で $y = \sin\theta$ のグラフを (図 2 に) 実線で描け。



(図2)

問 2　図 3 に 0°，30°，60°，180°，210°，240° のときの $x = \cos\theta$ の通る点が作図してある。他の角度について $x = \cos\theta$ の通る点を点線で作図し，0° から 360° までの範囲で $x = \cos\theta$ のグラフを (図 3 に) 実線で描け。



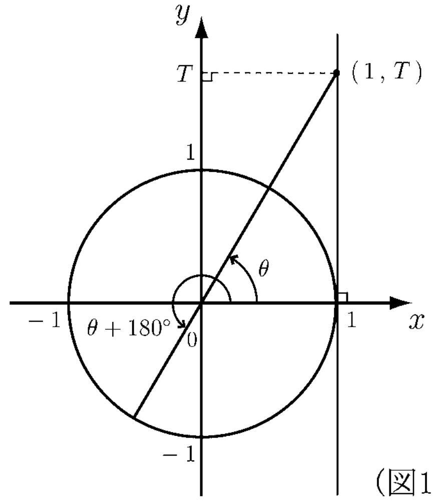
(図3)

< 三角関数のグラフ 2 >

図 1 のように角 θ を表す動径と直線 x = 1 との交点の座標を (1 , T) とすると，28 ページより

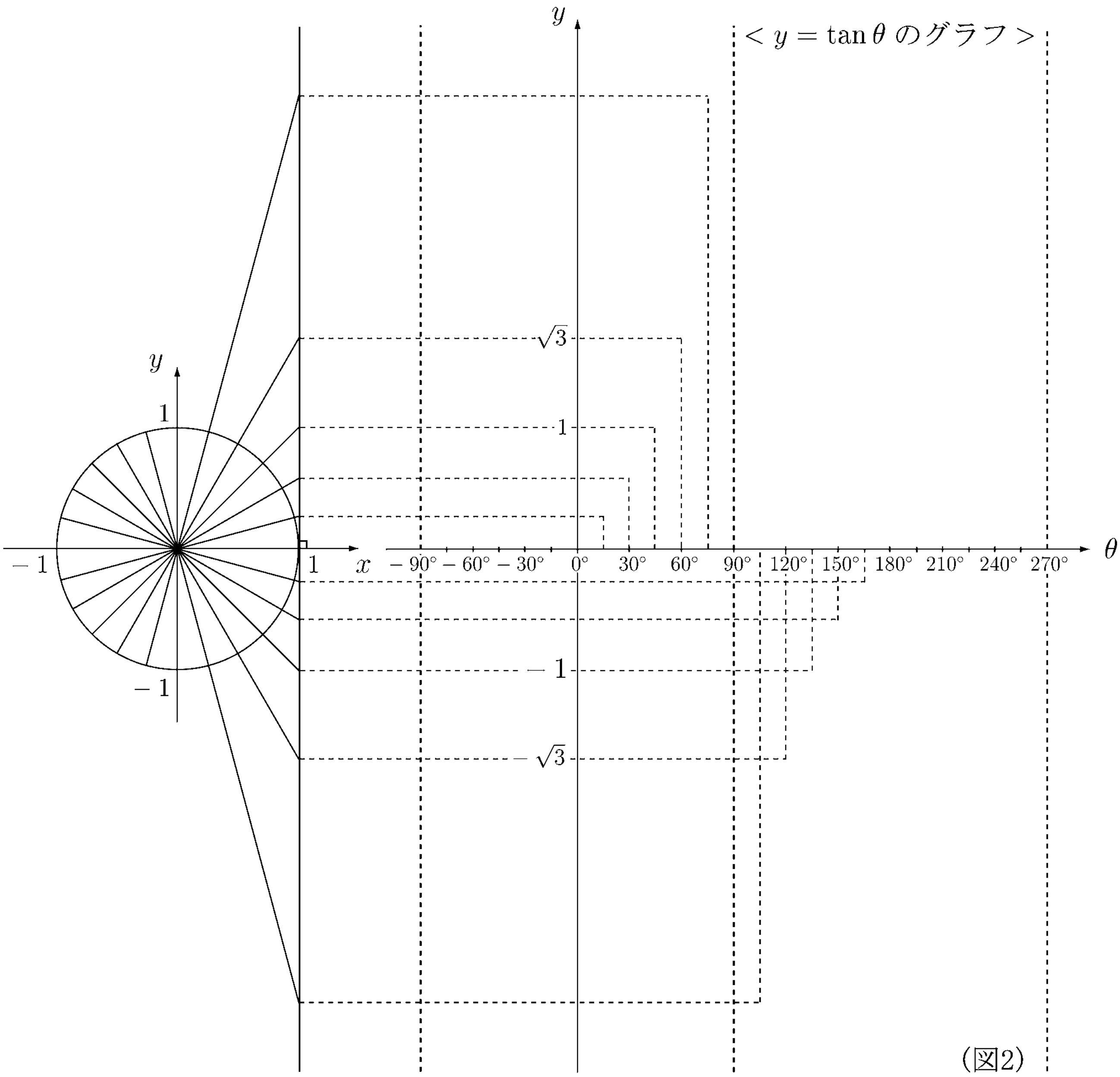
$$\boxed{\mathsf{T} = \tan\theta = \tan(\theta + 180^\circ)}$$

となる。この性質を用いて y = $\tan\theta$ のグラフを描こう。



(図1)

問 図 2 は 15° おきに角度を目もり，その一部について y = $\tan\theta$ の通る点を点線で作図してある。他の角度についても y = $\tan\theta$ の通る点を点線で作図し，グラフを −90° から 270° の範囲の実線で描け。

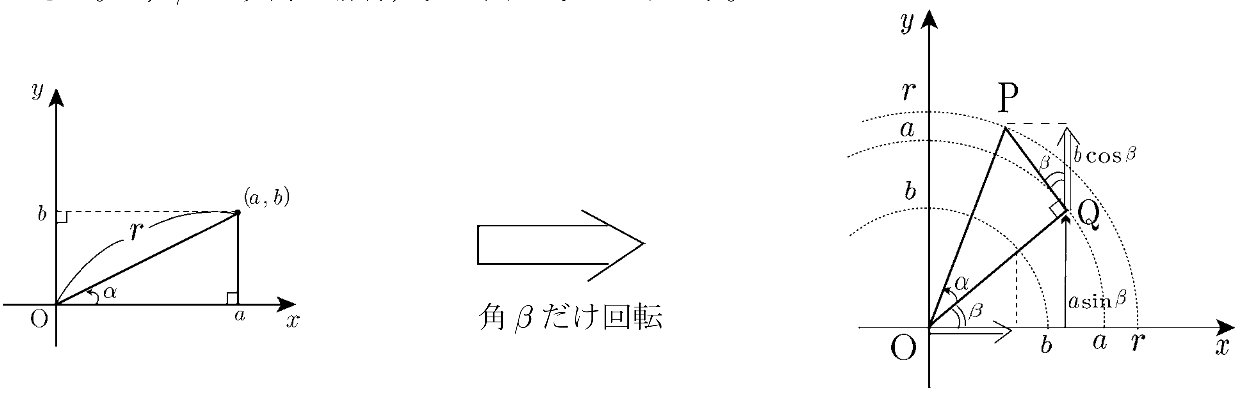


(図2)

(注) $\theta = \pm 90^\circ$, $\theta = 270^\circ$ のときは $\tan\theta$ の値は定義されない。

< 加法定理 1 >

$\sin(\alpha+\beta)$ や $\cos(\alpha+\beta)$ は $\sin\alpha$ ，$\cos\alpha$ ，$\sin\beta$ ，$\cos\beta$ を用いた式で表すこと ができる。α，β が鋭角の場合，次の図で考えてみよう。



左図の直角三角形を原点を中心にして角度 β だけ回転し，右図のように直角三角形 OPQ をかく。このとき点 P の y 座標は，$r\sin(\alpha+\beta)$ とも書けるし，$a\sin\beta+b\cos\beta$ とも書けるので

$$r\sin(\alpha+\beta)=b\cos\beta+a\sin\beta\cdots\cdots\cdots(1)$$

となる。ここで

$$\frac{a}{r}=\cos\alpha\ ,\quad \frac{b}{r}=\sin\alpha\ ,\quad r=\sqrt{a^2+b^2}$$

であるから，(1) の両辺を r でわると

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。

問 上の右図において，点 P の x 座標が，$r\cos(\alpha+\beta)$ とも，$a\cos\beta-b\sin\beta$ とも書けることを用いて

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots\cdots(3)$$

となることを示せ。

(2) 式，(3) 式は，α,β が一般の角の場合にも成り立つ。(2) 式を**サインの加法定理**
(3) 式を**コサインの加法定理**という。

< 加法定理 2 >

前ページよりサインとコサインの加法定理は

$$\boxed{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}}$$

である。さらに 24 ページの結果より

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta \quad , \quad \cos(-\beta) = \cos\beta$$

より

$$\begin{aligned} \sin(\alpha-\beta) &= \sin\big(\alpha+(-\beta)\big) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

が成り立つ。

問 1　上と同様にして次式が成り立つことを示せ。

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

例　$\sin(15^\circ) = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos(105^\circ) = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

問 2　次式の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ$

(2) $\sin 105^\circ$

(3) $\sin 165^\circ$

(4) $\cos 15^\circ$

(5) $\cos 75^\circ$

(6) $\cos 165^\circ$

< 加法定理 3 >

例 $\tan 75^\circ = \dfrac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \dfrac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}$

$$= \frac{\frac{\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}}{\frac{\cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cos 30^\circ}} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

問 1 上の例を参考にして，次式が成り立つことを示せ。

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad \cdots \quad (\ \ )$$

問 2 ( ) 式と，$\tan(-\beta) = -\tan\beta$ を用いて次式を示せ。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

問 3 次の値を求めよ。

(1)$\tan 105^\circ$

(2)$\tan 15^\circ$

< 加法定理の応用 1 >

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \quad \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \quad \tan\alpha\tan\beta}$$

(複合同順)　　(加法定理)

例
1. $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta\cos 2\pi + \cos\theta\sin 2\pi = (\sin\theta) \times 1 + (\cos\theta) \times 0 = \sin\theta$
2. $\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta) = \sin 0\cos\theta - \cos 0\sin\theta = 0 \times \cos\theta - 1 \times \sin\theta = -\sin\theta$
3. $\tan(\theta + \pi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\pi}{1 - \tan\theta\tan\pi} = \dfrac{(\tan\theta) + 0}{1 - (\tan\theta) \times 0} = \tan\theta$

問 1　加法定理を用いて次式を展開せよ。 (途中式も書くこと)

(1) $\cos(\theta + 2\pi) =$

(2) $\tan(\theta + 2\pi) =$

(3) $\cos(-\theta) =$

(4) $\tan(-\theta) =$

(5) $\sin(\theta + \pi) =$

(6) $\cos(\theta + \pi) =$

(7) $\sin(\pi - \theta) =$

(8) $\cos(\pi - \theta) =$

(9) $\tan(\pi - \theta) =$

(10) $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) =$

(11) $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) =$

(12) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) =$

(13) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) =$

問 2　加法定理で $\beta = \alpha$ とおくことにより， 次式を $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ だけで表せ。

(1) $\sin(2\alpha) =$

(2) $\cos(2\alpha) =$

(3) $\tan(2\alpha) =$

(注) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ を用いると $\cos(2\alpha)$ は， $\cos\alpha$ だけ， または $\sin\alpha$ だけで表すことができる。

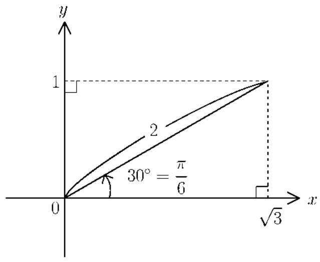
< 加法定理の応用 2 >

例１ $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$

$$=2\left((\sin\theta)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(\cos\theta)\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

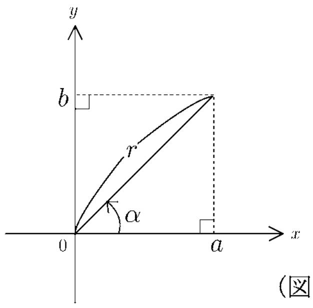


（図１）

一般に定数 a, b と角度 α が
図２の場合に

$$\boxed{\mathrm{a}\sin\theta+\mathrm{b}\cos\theta=\mathrm{r}\sin(\theta+\alpha)}$$

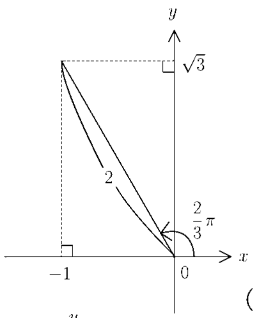
が成り立つ。ここで $\mathrm{r}=\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$, $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}}=\cos\alpha$, $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{r}}=\sin\alpha$ である。



（図２）

例２
図３より

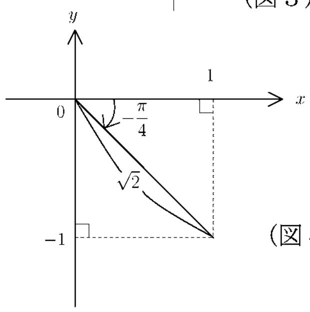
$$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$



（図３）

例３
図４より

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$



（図４）

問　次式を $\mathrm{r}\sin(\theta+\alpha)$ の形にせよ。

(1) $\sin\theta+\cos\theta$

$=$

(2) $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$

$=$

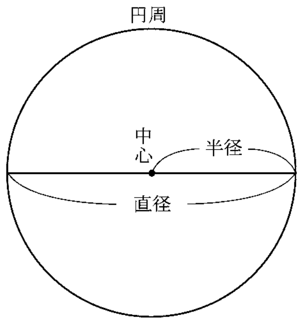
(3) $\cos\theta-\sin\theta$

$=$

(4) $-4\cos\theta-4\sqrt{3}\sin\theta$

$=$

< 円周率 >



古代から円の円周と直径の長さの比が一定であることは知られていた。それは大きな円と小さな円は相似だから

$$\frac{\text{大きな円の円周}}{\text{大きな円の直径}} = \frac{\text{小さな円の円周}}{\text{小さな円の直径}}$$

が成り立つからである。この比を**円周率**という。すなわち

$$\text{円周率} = \frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径の長さ}} = \frac{\text{円周の長さ}}{2 \times \text{半径の長さ}}$$

となる。ギリシャの数学者アルキメデス (BC 267　BC 212) は円に内接する正多角形の辺の長さを計算して，円周率が 約 3.14 であることを示した。その後さらに円周率を正確に求める計算が行われ，現在ではコンピュータを使って 10 億桁まで知られている。円周率が不規則な無限小数 (= 無理数) であることがわかったのは 18 世紀の終り (約 200 年前) である。また円周率をギリシャ語の円周率 $(\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\eta\varsigma)$ の頭文字をとって π としたのは 18 世紀の始めであった。π の小数点以下 20 桁までは

$$\text{円周率} \quad \pi = 3.14159265358979323846\cdots$$

である。これを江戸時代の人は「身一つ世一つ生くに無意味，曰くなく御文や読む」と覚えたそうである。今後，円周率は常に π を用いる。

例　半径 5cm の円周の長さを求めたい。円周の長さを ` とおくと

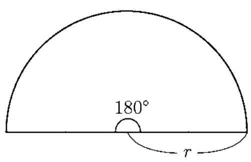
$$\pi = \frac{`}{2 \times 5} = \frac{`}{10} \qquad \text{より} \qquad \underline{(\text{答})\ \ ` = 10\pi\ (\text{cm})}$$

問 1　次の半径の円周を求めよ。

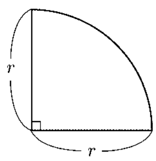
(1)　半径 2cm　　　(2)　半径 r (単位不要)

問 2　次の長さを求めよ。(単位不要)

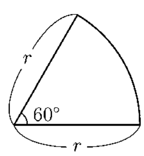
(1)　半径 r の半円の弧の長さ



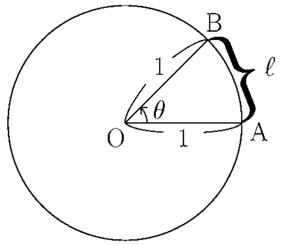
(2)　半径 r の $\dfrac{1}{4}$ 円の弧の長さ



(3)　半径 r, 中心角 60° の弧の長さ



< 弧度法 1 >



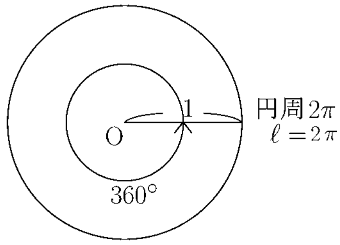
右図のように，角度 θ を，半径 1 の円の

弧 AB の長さ ` で表す方法を**弧度法**という。

単位をラジアンで表し，

$\theta =$ ` （ラジアン）

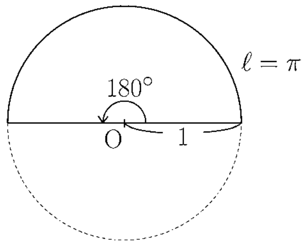
と記す。



例 (1) $\theta = 360^\circ$ のとき，半径 1 の円周の長さは 2π だから

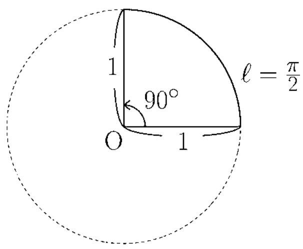
$360^\circ = 2\pi$ （ラジアン）

である。(π は円周率 $\fallingdotseq 3.14$)



(2) $\theta = 180^\circ$ のとき，半径 1 の半円の孤の長さは π だから

$180^\circ = \pi$ （ラジアン）



(3) $\theta = 90^\circ$ のとき，半径 1 の円周の $\dfrac{1}{4}$ の長さは $\dfrac{\pi}{2}$ だから

$90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$ （ラジアン）

以上の例から，1 （ラジアン）は弧の長さが 1 に対する角度 θ で，

$$1\ （ラジアン）= \frac{180^\circ}{\pi} \fallingdotseq 57.3^\circ$$

である。

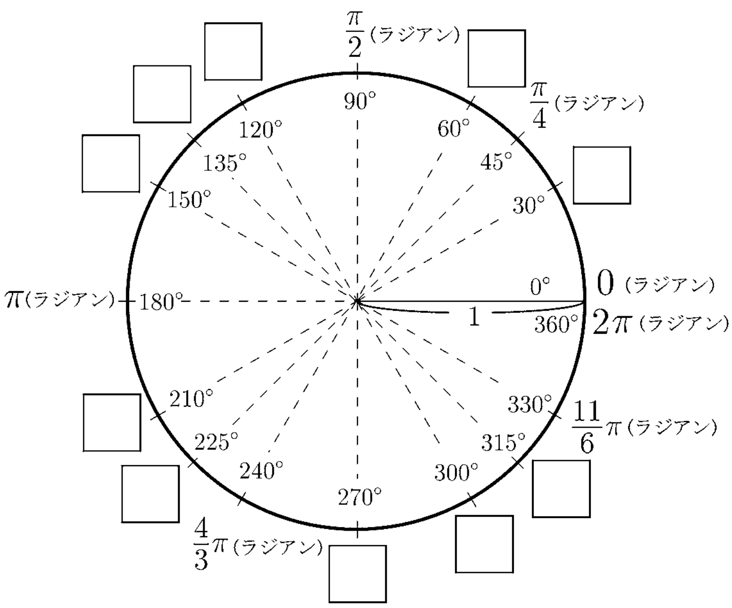
（注） 360°，180°，90° 等の通常の角度を示す記法を**度数法**という。

問 次の表を完成せよ。

度数法	0°			60°			135°	150°			225°			300°	315°	330°	
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$			π	$\frac{7}{6}\pi$		$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$				2π

< 弧度法 2 >

問 1　右図は半径 1 の円の内部に度数法による角度が記されている。この円周の外の $\boxed{\quad}$ 内に弧度法による角度を記せ。(ただし単位ラジアンは省略してよい)



例　0° から 360° 以外の一般角も弧度法によって表される。

(1)　$420^\circ = 360^\circ + 60^\circ = 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ (ラジアン) $= \dfrac{7}{3}\pi$ (ラジアン)

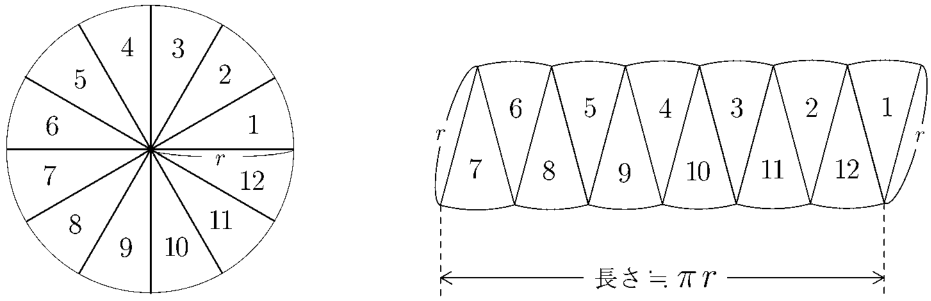
(2)　$-510^\circ = -360^\circ - 150^\circ = -2\pi - \dfrac{5}{6}\pi$ (ラジアン) $= -\dfrac{17}{6}\pi$ (ラジアン)

問 2　次の角度を弧度法で表せ。

(1)　540°　　(2)　－270°　　(3)　630°

(4)　－405°　　(5)　750°　　(6)　－855°

問 3　前ページおよび下の図をヒントに下の問に答えよ。(単位不要)



(1)　半径 r の円周の長さ ` を求めよ。　　　　` =

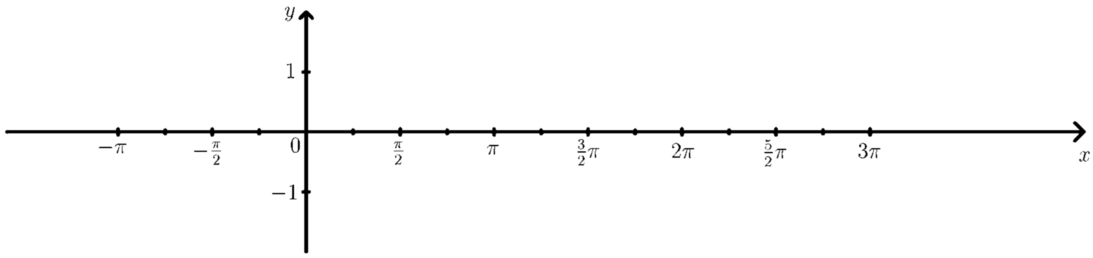
(2)　半径 r の円の面積 S を求めよ。　　　　S =

< 三角関数のグラフ >

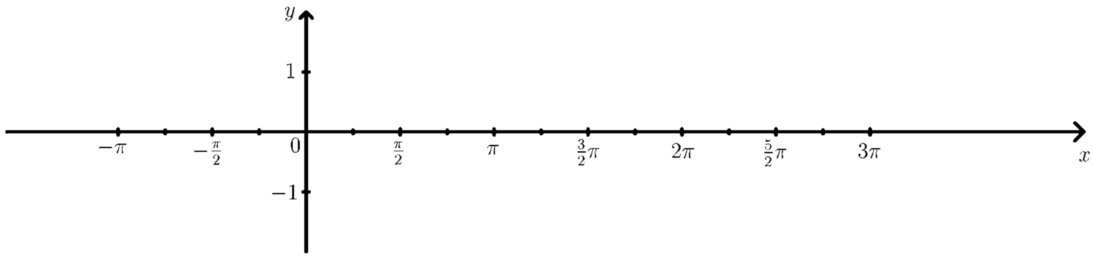
問　表を完成し，$y = \sin x$ と $y = \cos x$ および $y = \tan x$ のグラフを描け。

x																		
	度数法	$-180°$			$-45°$	$0°$		$90°$				$270°$	$315°$		$405°$		$495°$	
	弧度法		$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$			$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$			2π		$\frac{5}{2}\pi$		3π
$\sin x$																		
$\cos x$																		

(1) $y = \sin x$

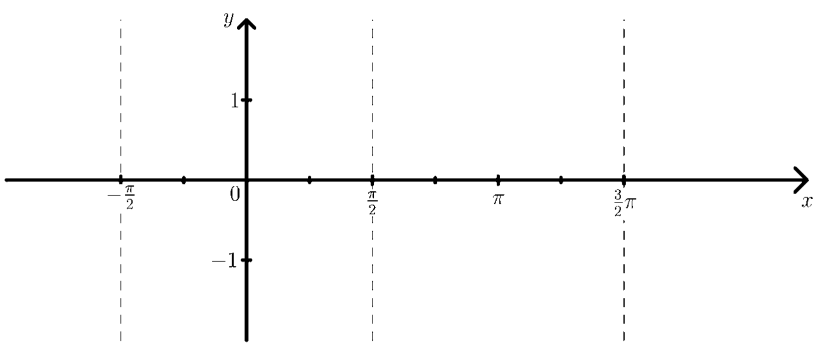


(2) $y = \cos x$



x																		
	度数法	$-90°$			$-30°$	$0°$	$30°$		$60°$		$120°$			$180°$		$225°$	$240°$	
	弧度法		$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$				$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$		$\frac{7}{6}\pi$			$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$																		

(3) $y = \tan x$



< 正弦波 1 >

定数 A，B，C に対し，正弦関数 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを **正弦波** という。

例　加法定理より

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2}$$

であるが $\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$，$\sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$ より

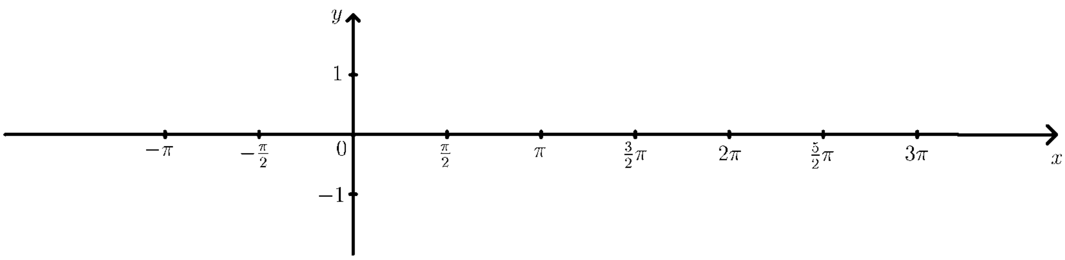
$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x}$$

となる。従って $y = \cos x$ のグラフも正弦波である。前ページの $y = \sin x$ と $y = \cos x$ のグラフを比べてほしい。$y = \cos x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものである。このようなとき「$\cos x$ のグラフは $\sin x$ のグラフより **位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れている**」という。あるいは「$\sin x$ のグラフは $\cos x$ のグラフより **位相が $\frac{\pi}{2}$ だけ進んでいる**」という。

一般の正弦波関数 $y = A\sin(Bx + C)$ において，(　　) の中の部分（この場合は $Bx + C$）を **位相** という。

問　次の表を完成し，$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフを描け。

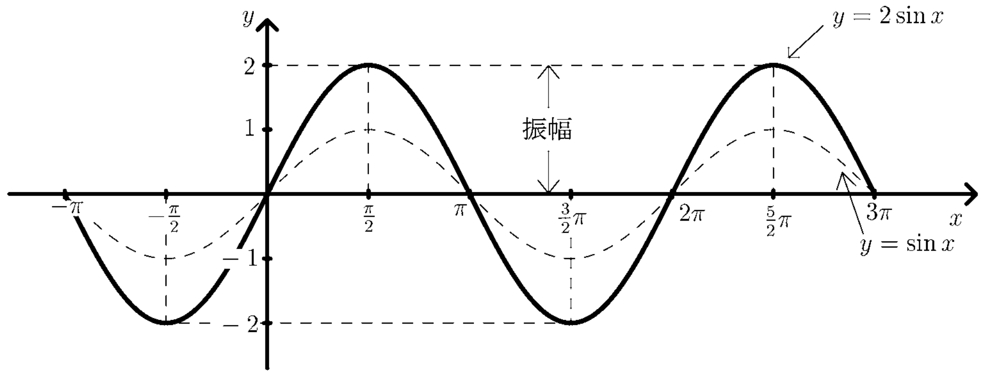
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$									
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$									



< 正弦波 2 >

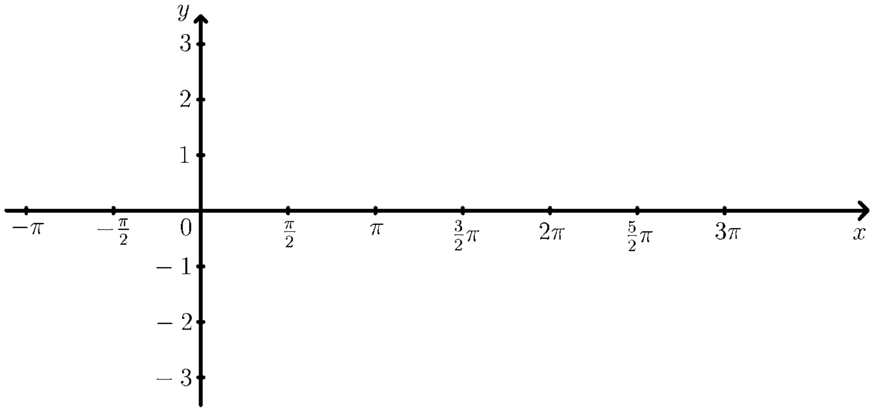
例　$y = 2\sin x$ のグラフを描きたい。まず以下の表を作り，
それを元にグラフを描く。

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$2\sin x$	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0



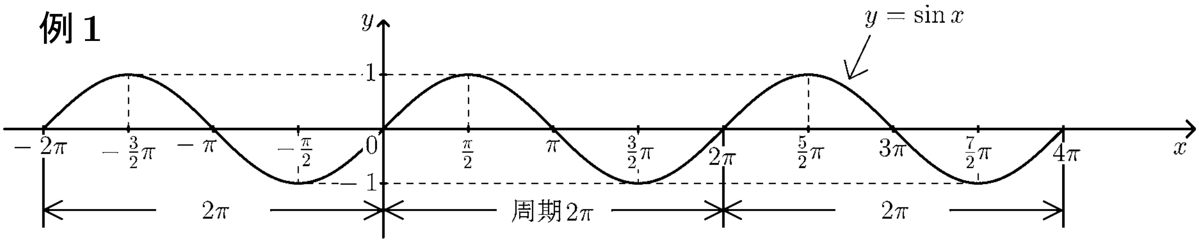
このグラフでは実線が $y = 2\sin x$ のグラフであり，点線が $y = \sin x$ のグラフである。このグラフを見れば分かるが，$y = 2\sin x$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍したものである。このグラフの最大値は 2 であり，最小値は -2 である。
このような場合に「この正弦波の**振幅は 2**」という。
一般の正弦波の場合に，x 軸からの距離の最大値を**振幅**という。

問　$y = -3\sin x$ のグラフを描き，その振幅を求めよ。



< 正弦波 3 >

例 1

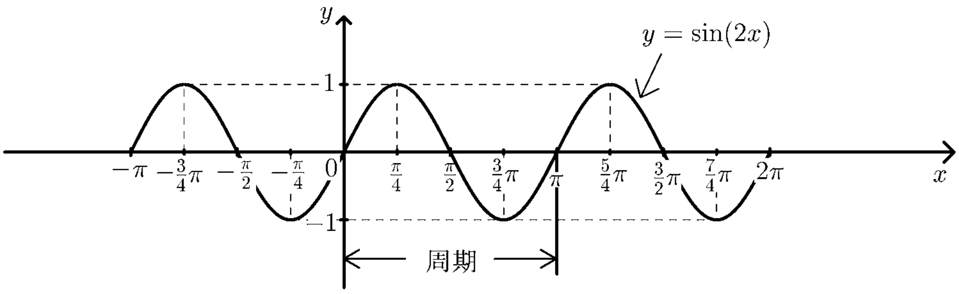


このグラフは $\mathsf{y} = \sin \mathsf{x}$ のグラフである。この正弦波は 2π ごとに同じ波形をくり返している。このような関数を**周期関数**といい，一つの波形の（x 軸方向の）長さを**周期**という。

$\mathsf{y} = \sin \mathsf{x}$ の周期は 2π である。

例 2 $\mathsf{y} = \sin(2\mathsf{x})$ のグラフを，次の表を元にして描く。

x	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$2x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(2x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

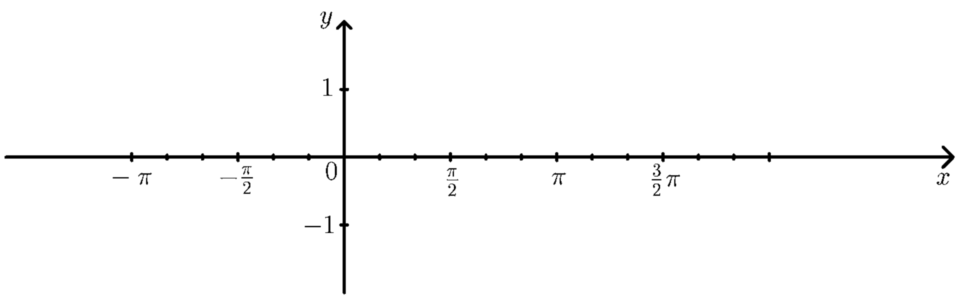


このグラフは π ごとに同じ波形を繰り返しているので，

$\mathsf{y} = \sin(2\mathsf{x})$ の周期は π である。

問 次の表を完成し，$\mathsf{y} = \sin(3\mathsf{x})$ のグラフを描き，その周期を求めよ。

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$													
$\sin(3x)$													



＜ 正弦波 4 ＞

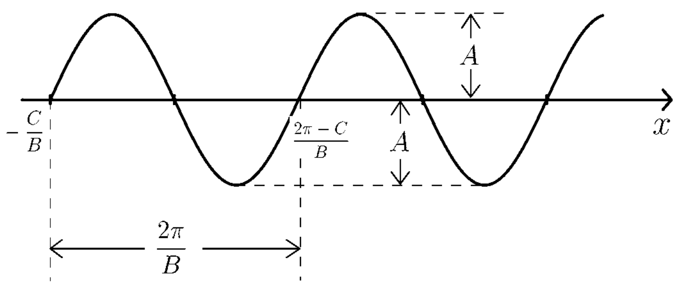
正定数 A，B，C に対して，正弦波 $y = A\sin(Bx + C)$ のグラフを考える。

$Bx + C = 0 \qquad x = -\dfrac{C}{B}$

$Bx + C = 2\pi \qquad x = \dfrac{2\pi - C}{B}$

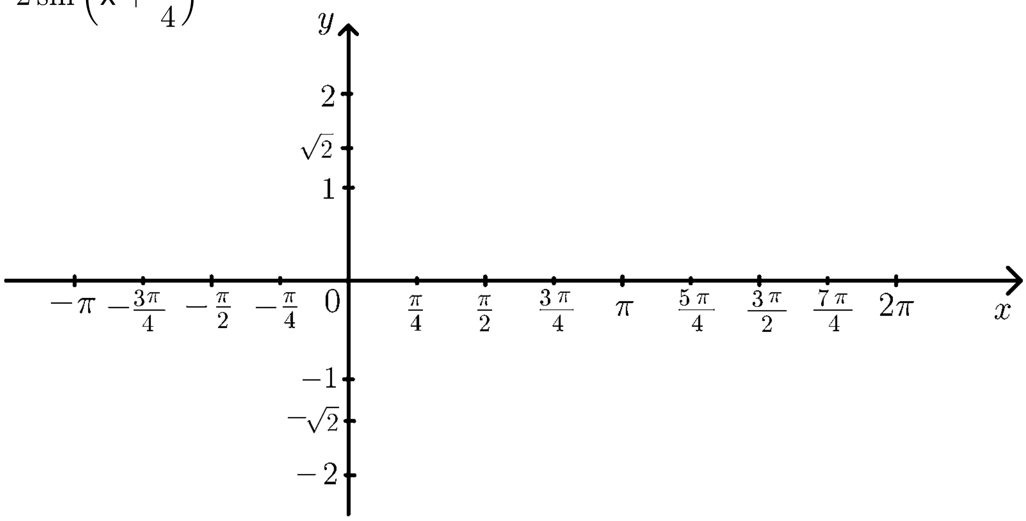
より，周期は $\dfrac{2\pi}{B}$ となる。

また振幅は A である。

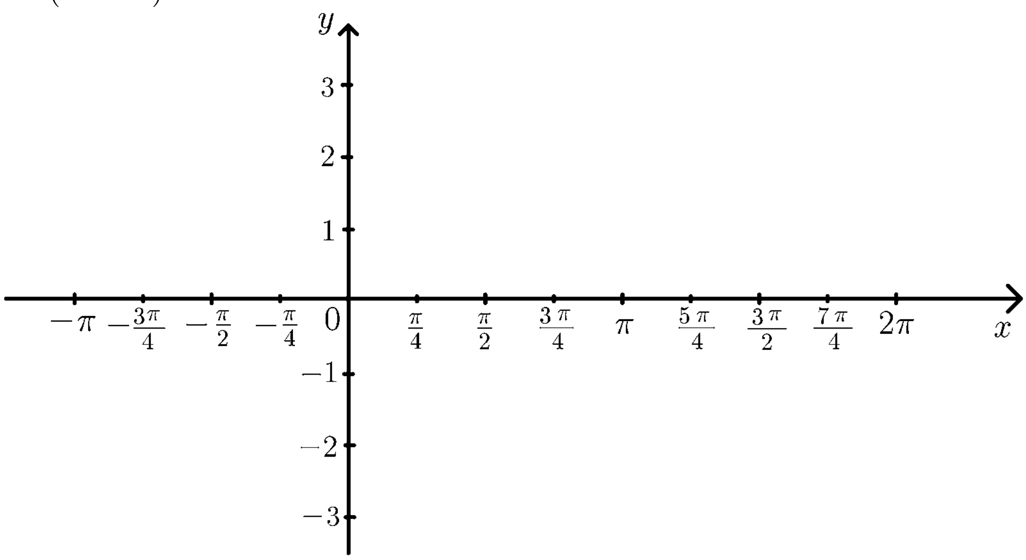


問 次の正弦波のグラフの概形を描き，周期と振幅を求めよ。

(1) $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



(2) $y = 3\sin(2x - \pi)$

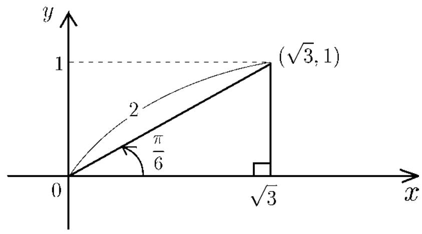


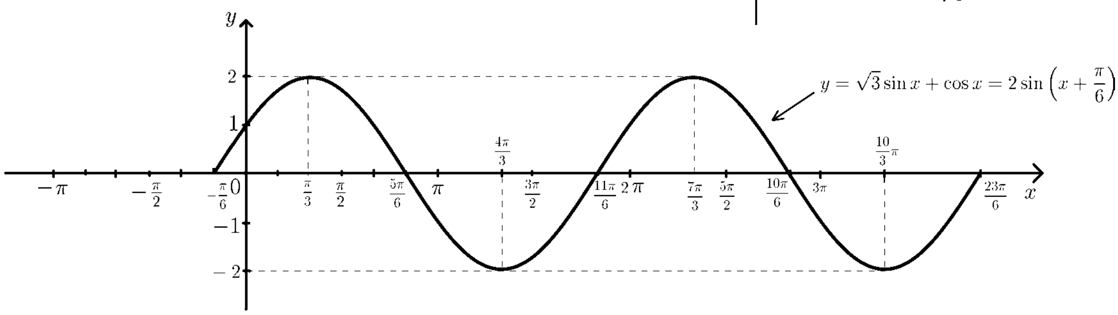
< 正弦波 5 >

例　$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ のグラフを描きたい。35 ページ例 1 より

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

と表されるので，グラフは下図のようになる。

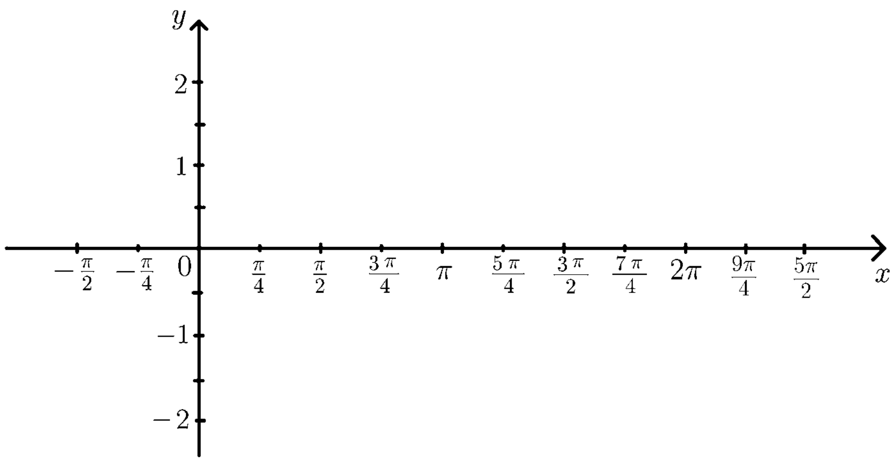




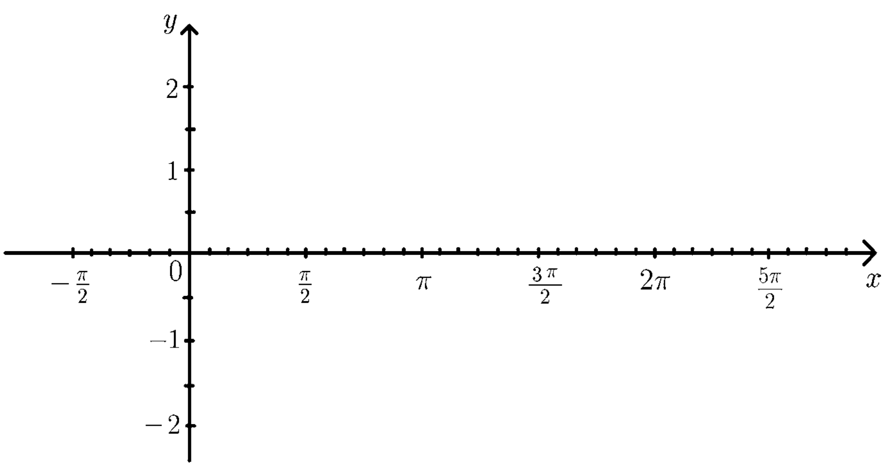
このグラフの周期は 2π であり，振幅は 2 である。

問　次の関数のグラフを描き，周期と振幅を求めよ。

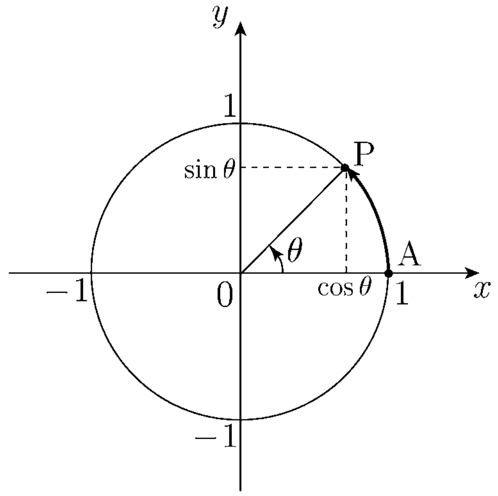
(1) $y = \sin x + \cos x$



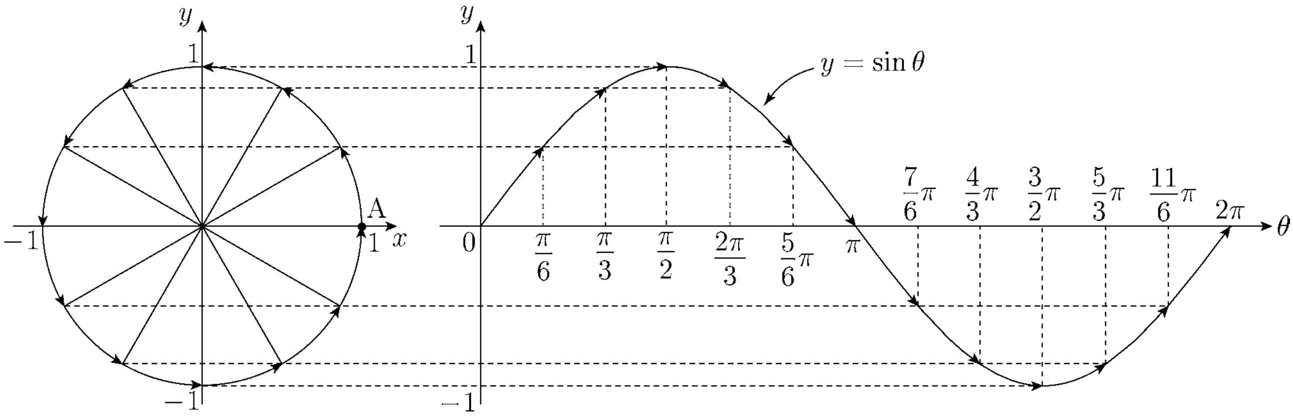
(2) $y = \sin(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$

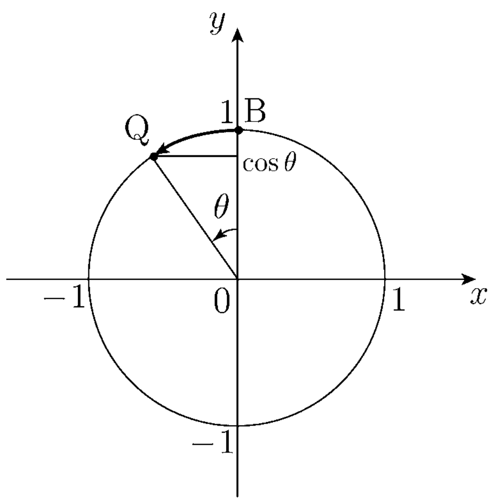


< 正弦波と回転 1 >

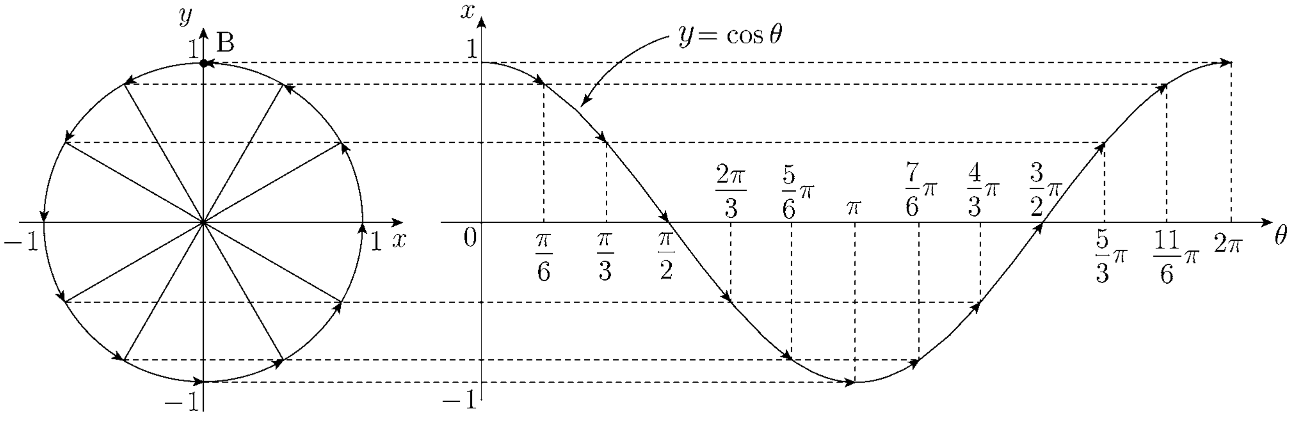


正弦波 y $= \sin\theta$ は，原点を中心として半径 1 の円周上を点 $\mathrm{A}(1,0)$ から出発して反時計回りに回転する動点 P の y 座標を表す。

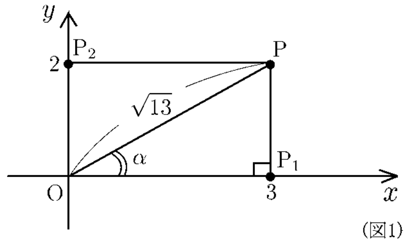




余弦関数 y $= \cos\theta = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ は，原点を中心として半径 1 の円周上を点 $\mathrm{B}(0,1)$ から出発して反時計回りに θ 回転した点 Q の y 座標を表す。



< 正弦波と回転 2 >



(図1)

例　$\mathrm{y} = 3\sin\theta + 2\cos\theta$ のグラフを描きたい，

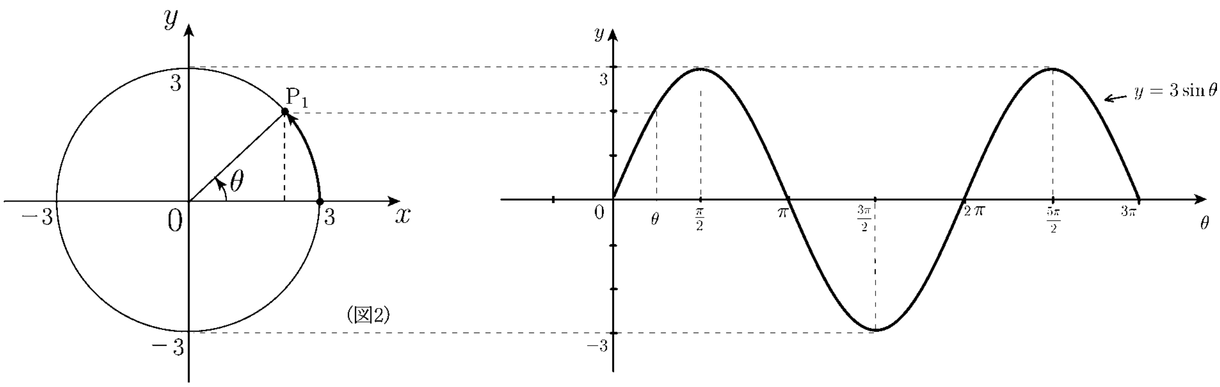
35 ページより

$$3\sin\theta + 2\cos\theta = \sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$$

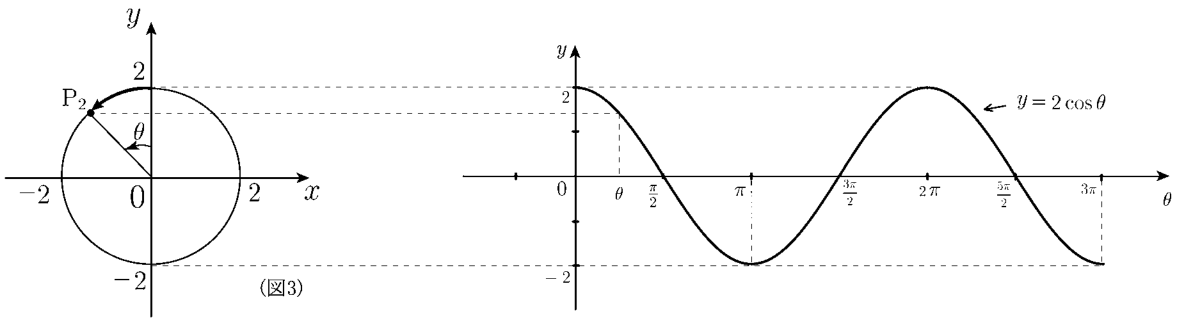
と表される。ここで $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$ ， $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$ $\left(\alpha \fallingdotseq 34^\circ = \dfrac{34}{180}\pi\right)$ である。(図 1)

このことは $\mathrm{y} = 3\sin\theta$ と $\mathrm{y} = 2\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ の 2 つの正弦波の和が 1 つの正弦波 $\mathrm{y} = \sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)$ になることを意味する。

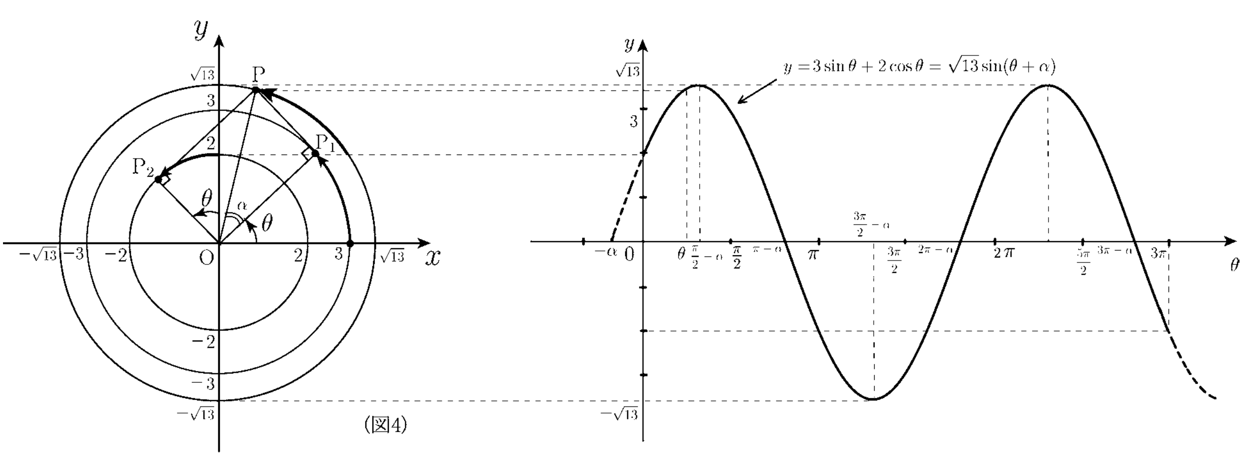
さらにこれは 2 つの回転 (図 2 の点 P_1 の回転と図 3 の点 P_2 の回転) の和が 1 つの回転 (図 4 の点 P の回転) になっていることを意味する。図 4 は図 1 の長方形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{PP}_2$ が O を中心として角度 θ だけ回転した状態の図である。



(図2)



(図3)



(図4)

(注) 図 4 は加法定理の証明 (31 ページ) と同じ図である。

＜ 解答 7 〜 11 ＞

＜ 7 ページ. 鈍角の三角比 2 ＞

問 1 の解答

(1) $r = 1$ のとき　$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $r = 2$ のとき　$P\left(-\sqrt{3}, 1\right)$

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

問 2 の解答

$\sin\theta = Y$　$\cos\theta = X$　$\tan\theta = \frac{Y}{X}$

問 3 の解答

(1)　$P\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$　$\tan 135^\circ = -1$

(2)　$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$　$\tan 45^\circ = 1$

(3)　$R\left(0, 1\right)$

$\sin 90^\circ = 1$　$\cos 90^\circ = 0$

＜ 8 ページ. 鈍角の三角比 3 ＞

問 1 の解答

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$　$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$　$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

問 2 の解答

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$　$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

問 3 の解答

(1) $\sin 110^\circ = 0.9397$　$\cos 110^\circ = -0.3420$
$\tan 110^\circ = -2.7475$

(2) $\sin 140^\circ = 0.6428$　$\cos 140^\circ = -0.7660$
$\tan 140^\circ = -0.8391$

(3) $\sin 165^\circ = 0.2588$　$\cos 165^\circ = -0.9659$
$\tan 165^\circ = -0.2679$

＜ 9 ページ. 三角関数表 ＞

問の解答

(1) $\sin 95^\circ = 0.9962$, $\cos 95^\circ = -0.0872$
$\tan 95^\circ = -11.4301$

(2) $\sin 127^\circ = 0.7986$, $\cos 127^\circ = -0.6018$
$\tan 127^\circ = -1.3270$

(3) $\sin 143^\circ = 0.6018$, $\cos 143^\circ = -0.7986$
$\tan 143^\circ = -0.7536$

(4) $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$
$\tan 180^\circ = 0$

＜ 10 ページ. 三角比と辺の長さ ＞

問 1 の解答

(1) $AB = 20\cos 25^\circ = 20 \times 0.9063 = 18.126$

$BC = 20\sin 25^\circ = 20 \times 0.4226 = 8.452$

(2) $DH = 10\cos 40^\circ = 10 \times 0.7660 = 7.660$

$EH = 10\sin 40^\circ = 10 \times 0.6428 = 6.428$

問 2 の解答

$AB = r\cos\theta$

$BC = r\sin\theta$

問 3 の解答

$EH = r\sin(180^\circ - \theta) = r\sin\theta$

$DH = r\cos(180^\circ - \theta) = -r\cos\theta$

＜ 11 ページ. 正弦定理 1 ＞

問の解答

(1) $A = 70^\circ$

$$\frac{a}{\sin 70^\circ} = 2R$$

$a = 2R\sin 70^\circ = 1.8794R$

(2) $A = 90^\circ$

$$\frac{a}{\sin 90^\circ} = 2R$$

$a = 2R$

(3) $A = 120^\circ$

$$\frac{a}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$a = 2R \times \sin 120^\circ = 2R \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}R$$

＜ 解答 12 ～ 17 ＞

＜ 12 ページ. 正弦定理 2 ＞

問 1 の解答

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ} \qquad b = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \times 8$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 8 = 4\sqrt{6}$$

問 2 の解答

$$\frac{c}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ} \qquad c = \frac{2\sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \sqrt{6}$$

問 3 の解答

(1) $\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{10}{\sin 45^\circ} \qquad a = \dfrac{2\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \times 10$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 10 = 5\sqrt{6}$$

(2) $2R = \dfrac{5\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{5\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\sqrt{2} \qquad R = 5\sqrt{2}$

＜ 13 ページ. 正弦定理の応用 ＞

問 1 の解答

$A + B + C = 180^\circ$ より $C = 54^\circ$

$$\frac{AC}{\sin 70^\circ} = \frac{100}{\sin 54^\circ} \qquad AC = \frac{100\sin 70^\circ}{\sin 54^\circ}$$
$$= \frac{100 \times 0.94}{0.8} = 117.5(\mathrm{m})$$

問 2 の解答

(1) 60°

(2) $\dfrac{BH}{\sin 45^\circ} = \dfrac{200}{\sin 60^\circ} \qquad BH = \dfrac{200\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \dfrac{200\sqrt{6}}{3}$

(3) $\tan 30^\circ = \dfrac{CH}{BH} \qquad CH = BH \times \tan 30^\circ = \dfrac{200\sqrt{2}}{3}$

＜ 14 ページ. 余弦定理 1 ＞

問の解答

$HC = b\sin A$

$BH = c - b\cos A$

より $\triangle BCH$ に三平方の定理を適用すると

$BC^2 = CH^2 + HB^2$

$$a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$$
$$= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos A + b^2\cos^2 A$$
$$= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bc\cos A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

＜ 15 ページ. 余弦定理 2 ＞

問 1 の解答

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

問 2 の解答

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

問 3 の解答

(1) $a^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ = 2$

$a = \sqrt{2}$

(2) $b^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3\cos 45^\circ = 5$

$b = \sqrt{5}$

(3) $c^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1\cos 150^\circ = 7$

$c = \sqrt{7}$

(4) $b^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{6}\cos 135^\circ = 15$

$b = \sqrt{15}$

＜ 16 ページ. 余弦定理 3 ＞

問 1 の解答

$BC^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \times 9 \times 10 \times \cos 63^\circ = 100$

(答)$BC = 10(\mathrm{m})$

問 2 の解答

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

問 3 の解答

(1) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{9 + 2 - 5}{2 \times 3 \times \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(答)$A = 45^\circ$

(2) $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{9 + 12 - 39}{2 \times 3 \times 2\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(答)$B = 150^\circ$

＜ 17 ページ. 三角関数 1 ＞

問の解答

$\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$

$\sin 270^\circ = -1$, $\cos 270^\circ = 0$

$\sin 360^\circ = 0$, $\cos 360^\circ = 1$, $\tan 360^\circ = 0$

＜ 解答 18 ～ 19 ＞

＜ 18 ページ. 三角関数 2 ＞

問 1 の解答

$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 45^\circ = 1$
$P'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 135^\circ = -1$
$P''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cos 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 225^\circ = 1$
$P'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\cos 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin 315^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan 315^\circ = -1$

問 2 の解答

$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$P'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$P''\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$	$\tan 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$P'''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	$\cos 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$	$\tan 330^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

＜ 19 ページ. 三角関数 3 ＞

問 1 の解答

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$
$P'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$	$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$
$P''\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$	$\sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 240^\circ = \sqrt{3}$
$P'''\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\cos 300^\circ = \frac{1}{2}$	$\sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 300^\circ = -\sqrt{3}$

問 2 の解答

(1) $P'(-0.6428,\ 0.7660)$

$P''(-0.6428,\ -0.7660)$

$P'''(0.6428,\ -0.7660)$

(2) $\cos 130^\circ = -0.6428$　　$\sin 130^\circ = 0.7660$

$\cos 230^\circ = -0.6428$　　$\sin 230^\circ = -0.7660$

$\cos 310^\circ = 0.6428$　　$\sin 310^\circ = -0.7660$

(3) $\tan 130^\circ = -1.1918$　　$\tan 230^\circ = 1.1918$　　$\tan 310^\circ = -1.1918$

< 解答 20 〜 24 >

< 20 ページ. 三角関数 4 >

問 1 の解答

(1) $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$

$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

(2) $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

$\tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$

$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$

問 2 の解答

$\cos 20^\circ = 0.9397$	$\sin 20^\circ = 0.3420$	$\tan 20^\circ = 0.3640$
$\cos 160^\circ = -0.9397$	$\sin 160^\circ = 0.3420$	$\tan 160^\circ = -0.3640$
$\cos 200^\circ = -0.9397$	$\sin 200^\circ = -0.3420$	$\tan 200^\circ = 0.3640$
$\cos 340^\circ = 0.9397$	$\sin 340^\circ = -0.3420$	$\tan 340^\circ = -0.3640$

< 21 ページ. 三角関数の相互関係 >

問 1 の解答

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

問 2 の解答

$$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

問 3 の解答

θ	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
sin θ	+	+	−	−
cos θ	+	−	−	+
tan θ	+	−	+	−

問 4 の解答

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ よって $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$

< 22 ページ. 平面座標の三角表示 >

問の解答

(1) $P(-\sqrt{3},\ 1)$

(2) $P(-2\sqrt{2},\ -2\sqrt{2})$

(3) $P(3,\ -3\sqrt{3})$

(4) $P(-6.428,\ 7.660)$

< 23 ページ. 一般角 >

問の解答

(1) $\sin 460^\circ = \sin 100^\circ$

(2) $\cos(-70^\circ) = \cos 290^\circ$

(3) $\tan 500^\circ = \tan 140^\circ$

(4) $\sin(-200^\circ) = \sin 160^\circ$

(5) $\cos 650^\circ = \cos 290^\circ$

(6) $\tan 860^\circ = \tan 140^\circ$

< 24 ページ. 一般角の三角関数 >

問 1 の解答

$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$	$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta$
$\cos(\theta - 360^\circ) = \cos\theta$	$\sin(\theta - 360^\circ) = \sin\theta$
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$
$\cos(\theta + 180^\circ) = -\cos\theta$	$\sin(\theta + 180^\circ) = -\sin\theta$
$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan\theta$

$\tan(\theta - 360^\circ) = \tan\theta$

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$

$\tan(\theta + 180^\circ) = \tan\theta$

$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

問 2 の解答

$\sin 420^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 450^\circ = 0$ $\tan 495^\circ = -1$

$\sin(-45^\circ) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(-90^\circ) = 0$ $\tan(-120^\circ) = \sqrt{3}$

問 3 の解答

$\sin 380^\circ = 0.3420$
$\cos 400^\circ = 0.7760$
$\tan 510^\circ = -0.5774$

$\sin(-40^\circ) = -0.6428$
$\cos(-100^\circ) = -0.1736$
$\tan(-50^\circ) = -1.1918$

< 解答 25 ～ 29 >

< 25 ページ. 三角関数の値 >

問 1 の解答

角度 θ	$-90°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

角度 θ	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$	$390°$	$405°$	$420°$	$450°$
$\sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

問 2 の解答

$\sin(-50^\circ) = -0.7660$　　$\cos(-40^\circ) = 0.7660$　　$\tan(-20^\circ) = -0.3640$

$\sin 130^\circ = 0.7660$　　$\cos 140^\circ = -0.7660$　　$\tan 160^\circ = -0.3640$

$\sin 200^\circ = -0.3420$　　$\cos 190^\circ = -0.9848$　　$\tan 220^\circ = 0.8391$

$\sin 280^\circ = -0.9848$　　$\cos 290^\circ = 0.3420$　　$\tan 310^\circ = -1.1918$

$\sin 370^\circ = 0.1736$　　$\cos 380^\circ = 0.9397$　　$\tan 410^\circ = 1.1918$

< 26 ページ. 三角方程式 1 >

問の解答

(1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$(0^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 360^\circ)$

(答) $\theta = 45^\circ, \theta = 135^\circ$

(2) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$(-180^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 180^\circ)$

(答) $\theta = -60^\circ, \theta = -120^\circ$

(3) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$　　$(0^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 360^\circ)$

(答) $\theta = 210^\circ, \theta = 330^\circ$

< 27 ページ. 三角方程式 2 >

問の解答

(1) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$(-180^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 180^\circ)$

(答) $\theta = -30^\circ, \theta = 30^\circ$

(2) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$　　$(-180^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 180^\circ)$

(答) $\theta = -120^\circ, \theta = 120^\circ$

(3) $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$　　$(0^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 360^\circ)$

(答) $\theta = 45^\circ, \theta = 315^\circ$

< 28 ページ. 三角方程式 3>

問 1 の解答

三角形の相似より

$Y : X = T : 1$

$\frac{Y}{X} = \frac{T}{1} = T$

よって $\tan\theta = \frac{Y}{X} = T$

問 2 解答

(1) $\tan\theta = 1$　　$(-90^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 270^\circ)$

(答) $\theta = 45^\circ, \theta = 225^\circ$

(2) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$　　$(-90^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 270^\circ)$

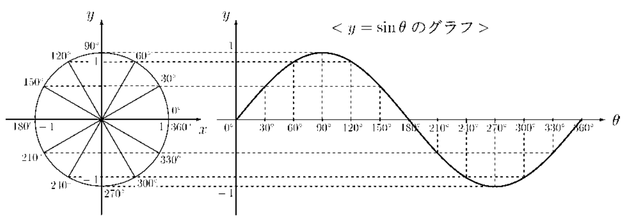
(答) $\theta = 30^\circ, \theta = 210^\circ$

(3) $\tan\theta = -\sqrt{3}$　　$(-90^\circ\ 5\ \theta\ 5\ 270^\circ)$

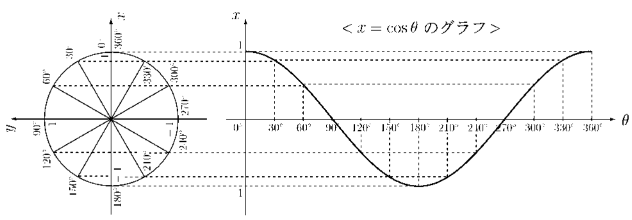
(答) $\theta = -60^\circ, \theta = 120^\circ$

< 29 ページ. 三角関数のグラフ 1 >

問 1 の解答



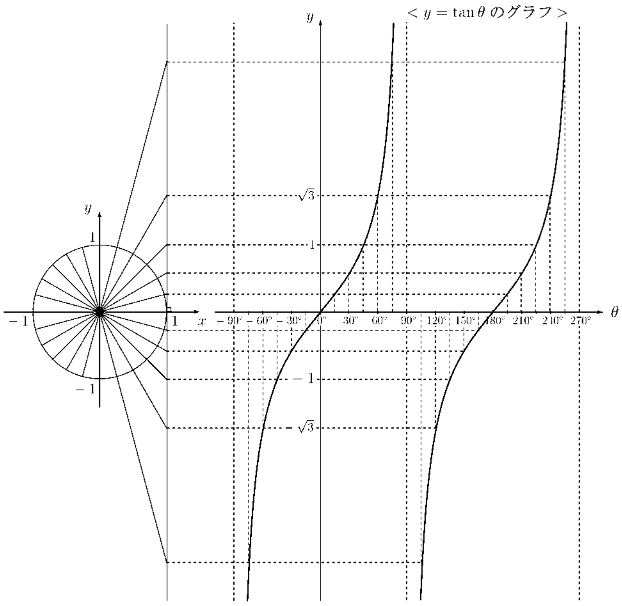
問 2 の解答



< 解答 30 ～ 32 >

< 30 ページ. 三角関数のグラフ 2>

問の解答



< 31 ページ. 加法定理 1 >

問の解答

点 P の x 座標が $r\cos(\alpha+\beta)$ とも,$a\cos\beta - b\sin\beta$ とも言えるので

$$r\cos(\alpha+\beta) = a\cos\beta - b\sin\beta \quad \cdots ①$$

である。 $\dfrac{a}{r} = \cos\alpha$, $\dfrac{b}{r} = \sin\alpha$ より①の両辺を r で割ると

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \frac{a}{r}\cos\beta - \frac{b}{r}\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

である。(証明終了)

< 32 ページ. 加法定理 2 >

問 1 の解答

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) \\ &= \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\{-\sin\beta\} \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

問 2 の解答

(1) $\sin 75^\circ = \sin 45^\circ\cos 30^\circ + \cos 45^\circ\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\sin 105^\circ = \sin 60^\circ\cos 45^\circ + \cos 60^\circ\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\sin 165^\circ = \sin 120^\circ\cos 45^\circ + \cos 120^\circ\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\cos 15^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ + \sin 45^\circ\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos 75^\circ = \cos 45^\circ\cos 30^\circ - \sin 45^\circ\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(6) $\cos 165^\circ = \cos 120^\circ\cos 45^\circ - \sin 120^\circ\sin 45^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

< 解答 33 〜 36 >

< 33 ページ. 加法定理 3>

問 1 の解答

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$
$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

問 2 の解答

$$\tan(\alpha+(-\beta)) = \frac{\sin(\alpha+(-\beta))}{\cos(\alpha+(-\beta))}$$
$$= \frac{\sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta)}{\cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)}$$
$$= \frac{\frac{\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)}{\cos\alpha\cos(-\beta)}}{\frac{\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)}{\cos\alpha\cos(-\beta)}}$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

問 3 の解答

(1) $$\tan 105^\circ = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3}$$
$$= -2-\sqrt{3}$$

(2) $$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan(-30^\circ)}{1 - \tan 40^\circ \tan(-30^\circ)}$$
$$= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\times(-\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$
$$= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{3-1} = 2-\sqrt{3}$$

< 34 ページ. 加法定理の応用 1>

問 1 の解答

(1) $\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta\cos 2\pi - \sin\theta\sin 2\pi = \cos\theta$

(2) $\tan(\theta+2\pi) = \dfrac{\tan\theta + \tan 2\pi}{1-\tan\theta\tan 2\pi} = \tan\theta$

(3) $\cos(-\theta) = \cos(0-\theta) = \cos 0\cos\theta - \sin 0\sin\theta = \cos\theta$

(4) $\tan(-\theta) = \tan(0-\theta) = \dfrac{\tan 0 - \tan\theta}{1+\tan 0\tan\theta} = -\tan\theta$

(5) $\sin(\theta+\pi) = \sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi = -\sin\theta$

(6) $\cos(\theta+\pi) = \cos\theta\cos\pi - \sin\theta\sin\pi = -\cos\theta$

(7) $\sin(\pi-\theta) = \sin\pi\cos\theta - \cos\pi\sin\theta = \sin\theta$

(8) $\cos(\pi-\theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta = -\cos\theta$

(9) $\tan(\pi-\theta) = \dfrac{\tan\pi - \tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta} = -\tan\theta$

(10) $\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2} = \cos\theta$

(11) $\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\theta$

(12) $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}\sin\theta = \cos\theta$

(13) $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta = \sin\theta$

問 2 の解答

(1) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

(3) $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

< 35 ページ. 加法定理の応用 2>

問 の解答

(1) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

(2) $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = 2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

(3) $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta+\frac{3\pi}{4})$

(4) $$-4\cos\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta = 8\sin(\theta+\frac{7\pi}{6})$$
$$= 8\sin(\theta-\frac{5\pi}{6})$$

< 36 ページ. 円周率 >

問 1 の解答

(1) ` $= 4\pi$ (cm)　　(2) ` $= 2\pi r$

問 2 の解答

(1) πr　　(2) $\frac{\pi}{2}r$　　(3) $\frac{\pi}{3}r$

＜ 解答 37 〜 39 ＞

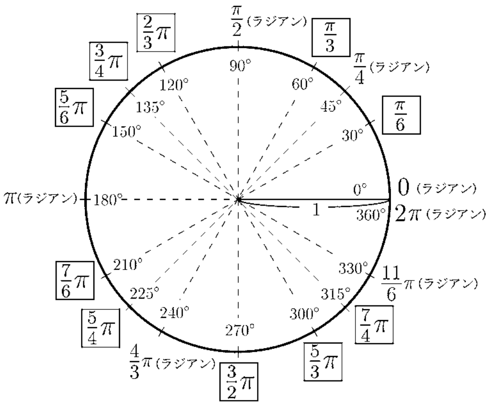
＜ 37 ページ. 弧度法 1 ＞

問の解答

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

＜ 38 ページ. 弧度法 2 ＞

問 1 の解答



問 2 の解答

(1) 3π　(2) $-\frac{3}{2}\pi$　(3) $\frac{7}{2}\pi$

(4) $-\frac{9}{4}\pi$　(5) $\frac{25}{6}\pi$　(6) $-\frac{19}{4}\pi$

問 3 の解答

(1) ` = 2πr

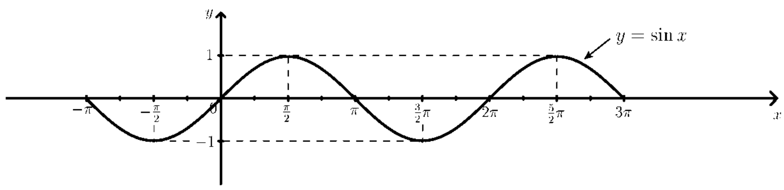
(2) $S = \pi r^2$

＜ 39 ページ. 三角関数のグラフ ＞

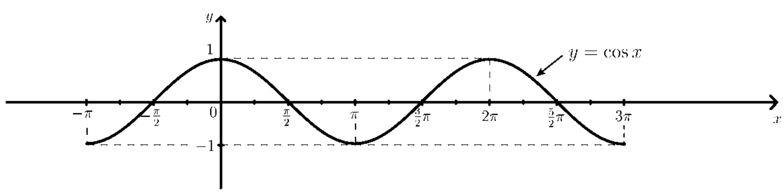
問の解答

x	度数法	−180°	−135°	− 90°	− 45°	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°	405°	450°	495°	540°
	弧度法	$-\pi$	$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{11}{4}\pi$	3π
$\sin x$		0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos x$		-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

(1) $y = \sin x$



(2) $y = \cos x$



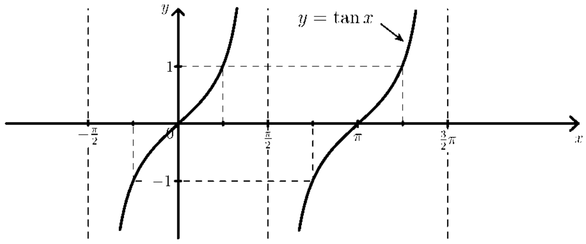
x	度数法	−90°	−60°	−45°	−30°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
	弧度法	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$\tan x$		╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	╳

< 解答 39 〜 42 >

< 39 ページ. 三角関数のグラフ >

問の解答

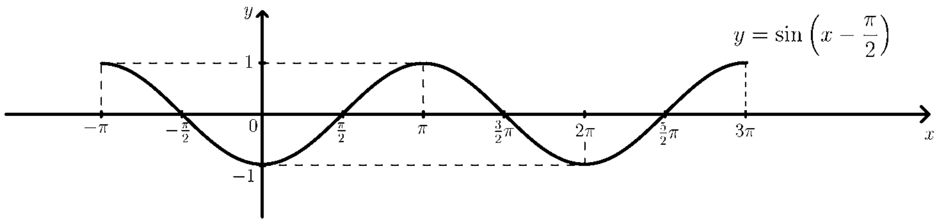
(3) y = tan x



<40 ページ. 正弦波 1 >

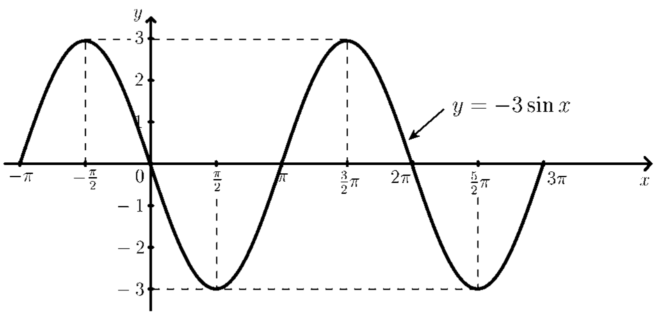
問の解答

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
$\sin x$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



< 41 ページ. 正弦波 2 >

問の解答

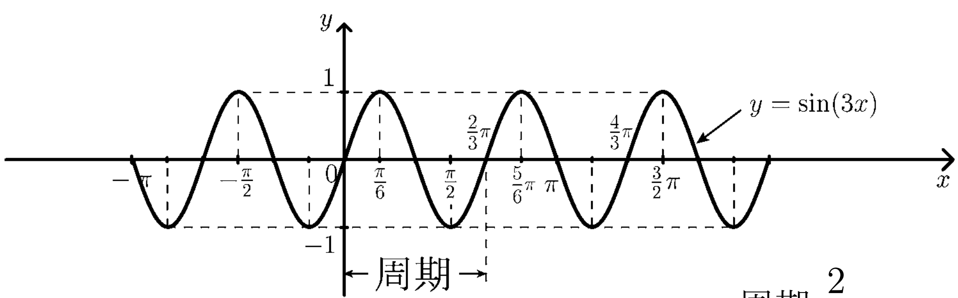


振幅 3

< 42 ページ. 正弦波 3 >

問の解答

x	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
$3x$	-2π	$-\frac{3}{2}\pi$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π	$\frac{7}{2}\pi$	4π
$\sin(3x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



周期 $\dfrac{2}{3}\pi$

< 解答 43 ～ 44 >

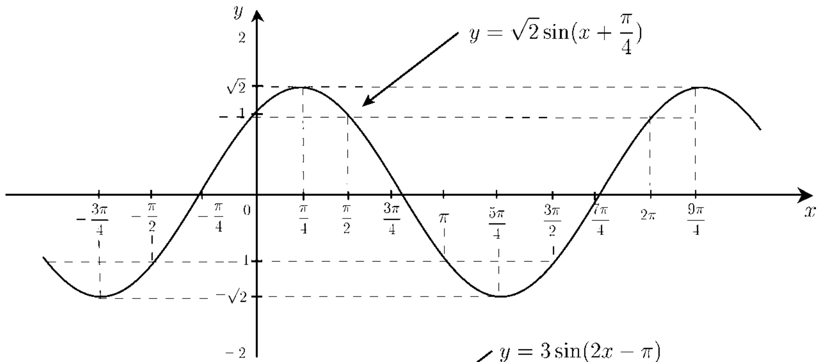
< 43 ページ. 正弦波 4 >

問の解答

(1) $y = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

<u>周期 2π</u>

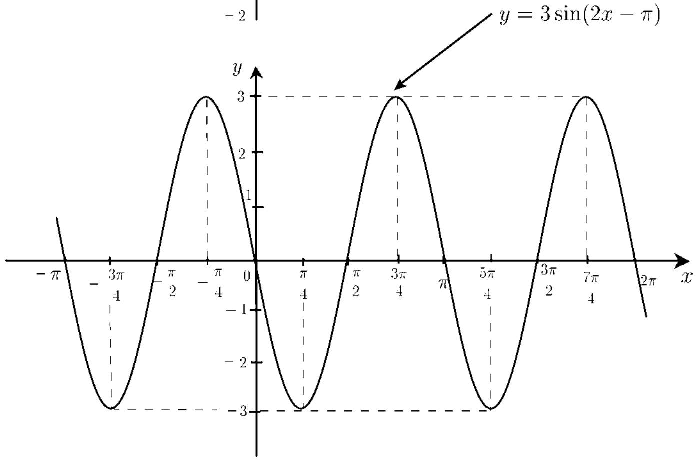
<u>振幅 $\sqrt{2}$</u>



(1) $y = 3\sin(2x - \pi)$

<u>周期 π</u>

<u>振幅 3</u>



< 44 ページ. 正弦波 5 >

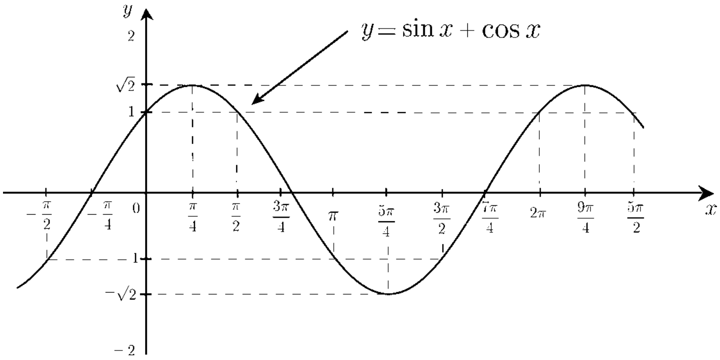
問の解答

(1) $y = \sin x + \cos x$

$= \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$

<u>周期 2π</u>

<u>振幅 $\sqrt{2}$</u>



(2) $y = \sin(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$

$= 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

<u>周期 π</u>

<u>振幅 2</u>