大学数学への道

基礎数学

シリーズ 4

TEXclub

# 『ベクトル』が よくわからないときに開く本

改訂版

例題で式の計算がよくわかる！

内容

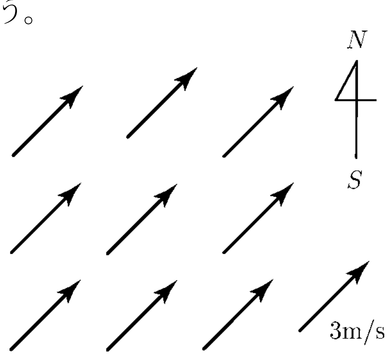
- ★ 平面のベクトル
- ★ 空間のベクトル
- ★ 内積
- ★ 外積
- ★ 2次・3次の行列式

井上昌昭 著

高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# < スカラーとベクトル >

長さ，質量，温度などは，ある単位を基準に 1 つの実数で表すことができる。このような量を**スカラー**（scalar）という。しかし風の速度のように，大きさ（速さ）だけでなく，その方向を考えなければならないものがある。天気図などで風を表すときは，風の方向を ↗，↘ のような矢印で表す。このように線分の片方の端に矢印をつけたものを**有向線分**という。

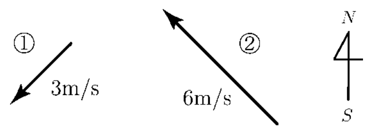



**例**　「南西の風 3m/s」と言えば，その地域の各点で南西の方角から秒速 3m の風が吹くことを意味する。このことを有向線分を用いて右図のように描くことができる。

（注）実際の天気図では 1 つの地域の風を 1 本の有向線分で表す。同じ方向と同じ長さをもった有向線分をたくさん描くことはない。

**問 1**　右図の有向線分①、②が表す風を例のような「○○の風○ m/s」の形で表せ。

①　　　　　　　②




風を有向線分で表す場合に，同じ方向と同じ大きさ（＝長さ＝風の速さ）を持つ有向線分は同じ風を表す。このように有向線分について，位置を考えないで，方向と大きさ（＝長さ）だけを考えるとき，これを**ベクトル**（vector）という。

(注)　有向線分をベクトルとみなす場合もある。「1 点に働く力」は有向線分で表されるが，位置を無視することはできないのでベクトルとはいえない。しかしこれもベクトルとみなす場合がある。

スカラー ： 1 次元の量
ベクトル ： 2 次元 · 3 次元の量

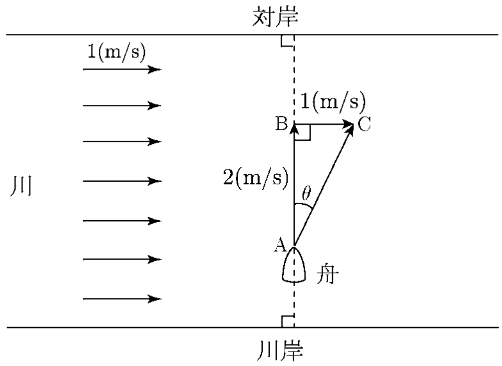
**問 2**　次の量はスカラーであるかベクトルであるか答えよ。

(1) 面積　　(2) 体積　　(3) 時間

(4) 湿度　　(5) 海流の速度　　(6) 重力

## < 速度の合成 >

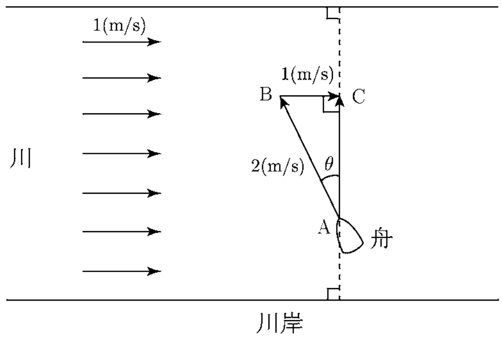
**例 1**　静水中を 2m/s の速さで進む舟が，流速 1m/s の川を，一方の川岸から対岸へ向かって進む。もし静水中であれば一秒間に A 地点から B 地点まで進むはずであるが，川の流れのため，実際は A 地点から C 地点に向かって角度 $\theta$ だけ流される。




　この角度 $\theta$ を正確に求めるためには、AB の長さを 2(=舟の速さ)，BC の長さを 1(=川の流速) とした直角三角形 ABC を作ると，三平方の定理より　AC= $\sqrt{5}$ となるから，

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \fallingdotseq 0.4472 \quad \text{より} \quad \theta \fallingdotseq 26.6^\circ$$

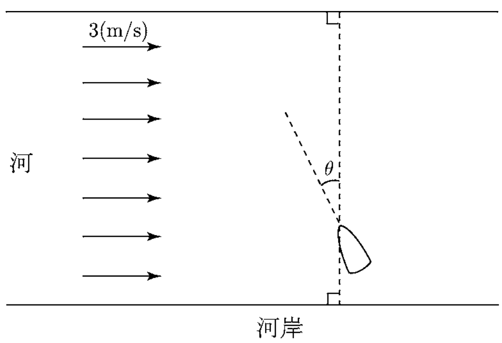
**例 2**　例 1 と同じ場合に，この川を川岸に対し垂直にわたりたい。このとき，舟のへさきを川に垂直な方向から角度 $\theta$ だけ上流へ傾けて進ませる必要がある。




　例 1 と同様に，舟の速度を有向線分 AB(長さ 2)，川の速度を有向線分 BC(長さ 1) として AC が川岸に対し垂直方向になるようにすると，直角三角形 ABC ができる。図より

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{だから} \quad \theta = 30^\circ$$

**問**　静水中を 5m/s で走る船がある。この船で，流れの速さが 3m/s の河を河岸に垂直にわたりたい。このために，船の進行方向を河岸に対し角度 $\theta$ だけ上流に傾けて走らせる必要がある。このとき $\sin\theta$ の値を求めよ。



## < ベクトルの表記 >

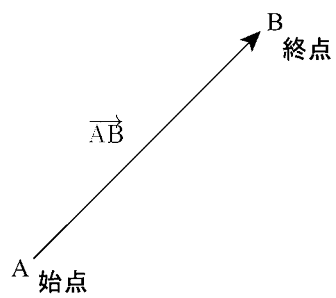
速度や力などの場合は，その大きさ（強さ）だけでなく，その方向（向き）をあわせて考える必要がある。このような場合は方向を有向線分で示し，その大きさは有向線分の長さで表す。

川の流れなどで，場所によって速度が変らないときは，一本の有向線分で流れの速度を表すことができる。このように，有向線分で，向きと大きさだけを考え，位置を問題にしないとき，これを**ベクトル** (*vector*) という。

点 A から点 B までの有向線分 AB で表されるベクトルを

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

と書き，ベクトル AB と読む。このとき A をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の**始点**といい，B を**終点**という。ベクトルは $\overrightarrow{a}$ のような記号で表したり，太字で $\boldsymbol{a}$ と表したりする（本書では $\boldsymbol{a}$ と書くことにする）。



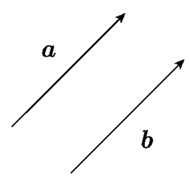

ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について，向きが同じで，大きさが等しいとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**等しい**といい，

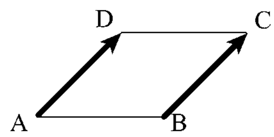
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

と書く。右図の平行四辺形 ABCD では

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

である。



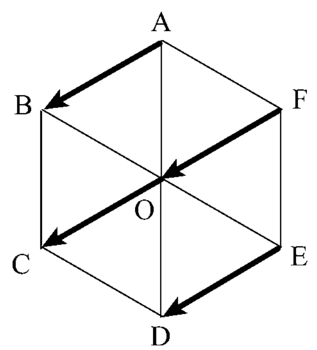




**例**　右図の正六角形 ABCDEF の中心を O とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{ED}}$$

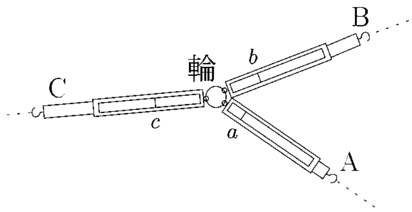
である。

**問**　右の正六角形で，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ に等しいベクトルを 3 つ書け。

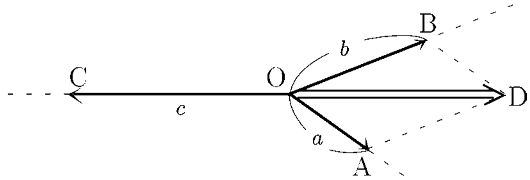


## < 力の合成 >

**例**　机の上に白紙を置き, その上に針金で作った輪を置いて, 3 本のばね秤 A, B, C をひっかける。A, B, C を適当に引っ張って輪が静止したとき, それぞれのばねの目盛り $a$, $b$, $c$ を読む。又, それぞれのばねの方向を白紙の上に記録する。

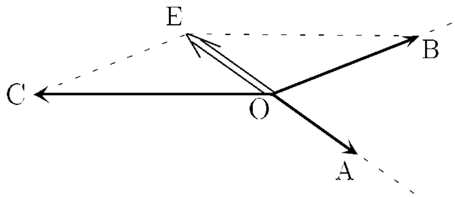



輪の中心を O とし, それぞれのばねの方向にその目盛りの長さだけ有向線分をひき, その有向線分の先を A, B, C とする。

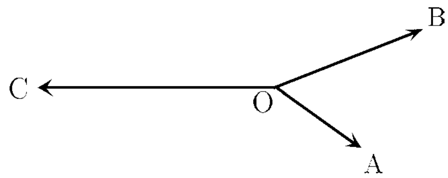



次に OA,OB を 2 辺とする平行四辺形 OADB を作り、対角線 OD をひく。すると, 有向線分 OD と有向線分 OC は方向が同じ (有向線分の向きは逆) で, 長さも等しい。それぞれのばねを引く力を有向線分 ($\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$) で表すと, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ との合力が $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とつりあっていることがわかる。

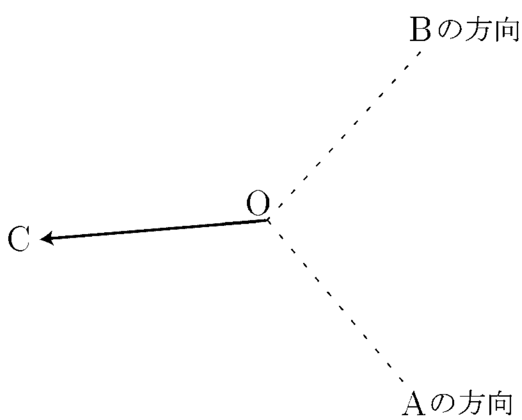
同様にして OB, OC を 2 辺とする平行四辺形 OBEC を作り, 対角線 OE をひくと, 有向線分 OE と OA は方向が同じ (向きが逆) で, 長さも等しい。つまり $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の合力が $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ であり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とつりあっている。




**問 1**　右図に $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ との合力 $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を作図せよ。



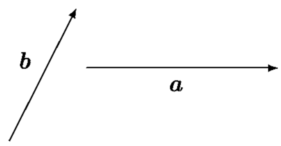

**問 2**　ばねの方向と, C の目盛りだけは記録したが, A, B の目盛りを記録し忘れたので $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の有向線分の長さがわからない。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ がつりあうように, 右図に有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を作図せよ。



# ＜平面のベクトル１＞

　２ページでやった川の速度と船の速度の合成速度を求める方法や，４ページでやった２つの力の合力を求める方法は，ベクトルとして同じ概念である。

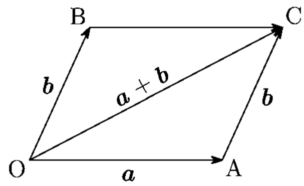
２つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が与えられているとする。




　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，終点を A, B とし，OA，OB を２辺とする平行四辺形 OACB を作るとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が決まる。これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**和**といい，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

と書く。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が２つの力であれば $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ はその合力を表す。また，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が２つの速度であれば，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ はその合成速度を表す。




　ここで，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

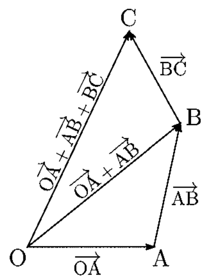
$$\boxed{\overrightarrow{\boxed{\mathrm{O}}\mathrm{A}}+\overrightarrow{\mathrm{A}\boxed{\mathrm{C}}}=\overrightarrow{\boxed{\mathrm{OC}}}}$$

が成り立つ。O から出発して A に行くベクトルと，A から出発して C に行くベクトルとの和は，途中の中継点 A を略して最後の到着点 C に行くベクトルになる。

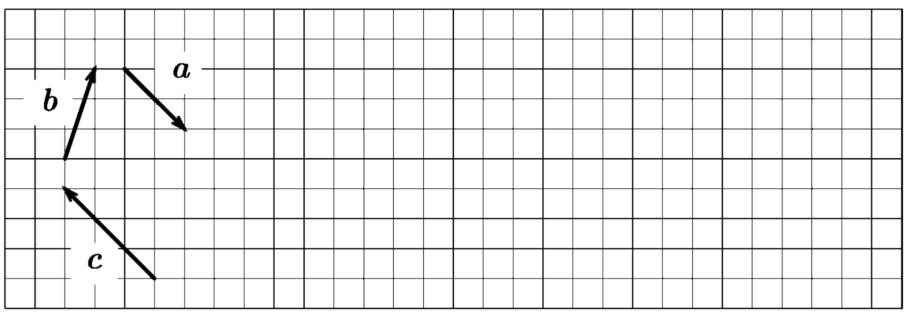
同様にして，４点 O, A, B, C に対し

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つ。




**問**　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が下図の場合に，
　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ を作図せよ。

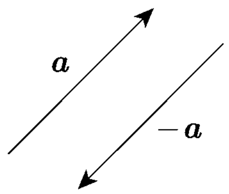


## ＜平面のベクトル 2 ＞

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は，始点 A と終点 B が一致する場合にもベクトルと考える。これを**零ベクトル**といい，$\mathbf{0}$ で表す。つまり

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \mathbf{0}$$

零ベクトルの大きさは 0 で，その向きは考えないものとする。
ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，大きさが同じで向きが反対であるベクトルを，$\boldsymbol{a}$ の**逆ベクトル**といい，$-\boldsymbol{a}$ で表す。
$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき，$-\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ である。



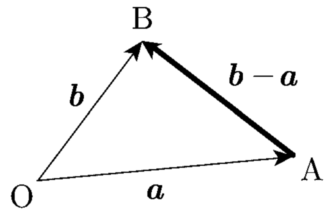

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AO}}$$

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

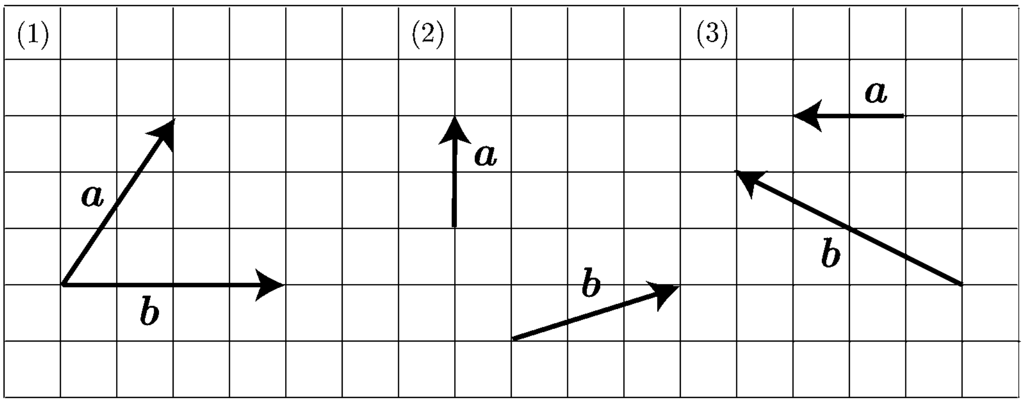
だから $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ の**差**といい，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$$



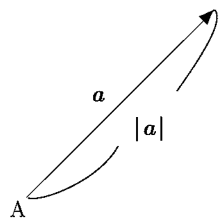

と表す。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ をベクトルの差として $\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と表す場合には「終点 (B)－ 始点 (A)」と覚えておくとよい。

**問**　$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ が次のように与えられている場合に $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ を図示せよ。



# ＜ 平面のベクトル 3 ＞

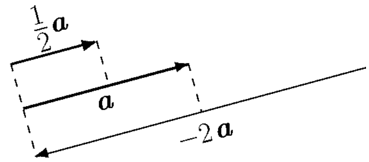
ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを $|\boldsymbol{a}|$ で表す。$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のときは，$|\boldsymbol{a}|$ は線分 AB の長さである。




大きさが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という。
$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}$ と正数 $k$ に対して

(1) $k\boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{a}$ と向きが同じで大きさが $k$ 倍のベクトル

(2) $-k\boldsymbol{a}$ は，$\boldsymbol{a}$ と向きが逆で大きさが $k$ 倍のベクトル

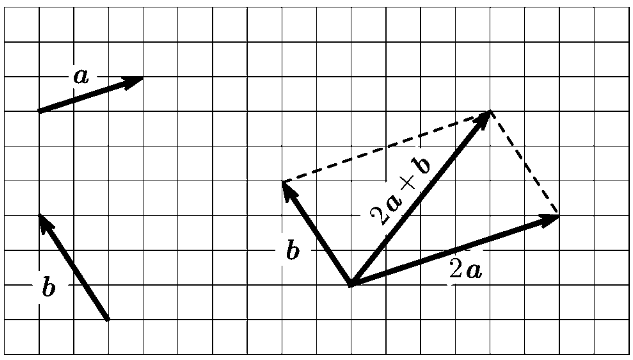



と定める。このようなベクトルを $\boldsymbol{a}$ の**実数倍**という。

**例**　ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ が右図の様に与えられているとき

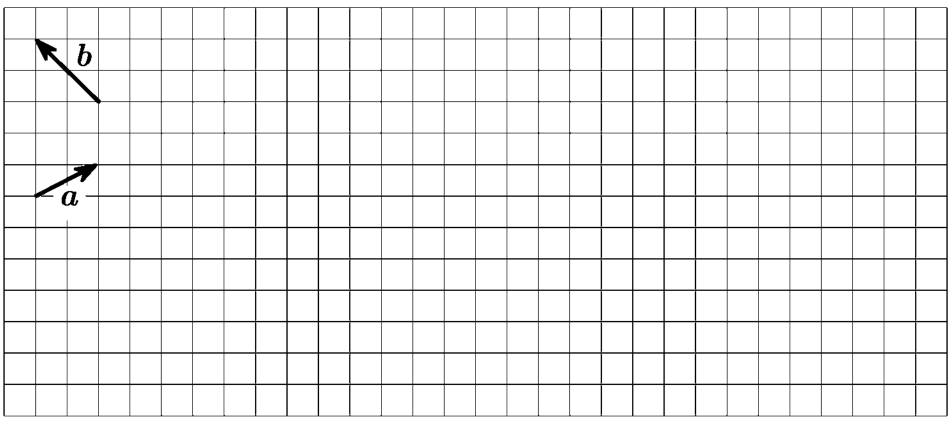
$$2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

を図示すると，右の様になる。

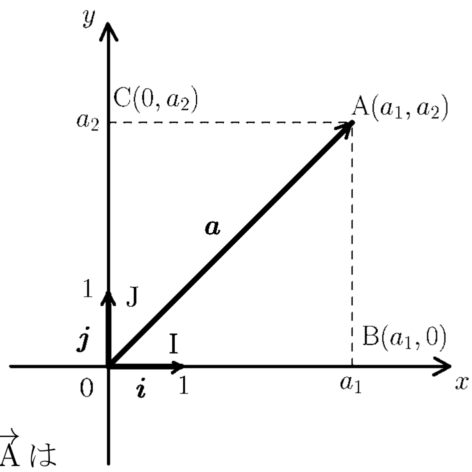



**問**　ベクトル $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ が下の図の様に与えられているとき，次のベクトルを図示せよ。

(1) $-2\boldsymbol{a}$　, (2) $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{b}$　, (3) $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$　, (4) $\boldsymbol{a} + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{b}$



## < 平面ベクトルの成分 1 >




O を原点とする座標平面上の 2 点 I(1, 0), J(0, 1) に対して,

$$\boldsymbol{i} = \overrightarrow{\mathrm{OI}} \quad , \ \boldsymbol{j} = \overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

を**基本ベクトル**という。
平面上の任意の点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$ に対し，2 点 $\mathrm{B}(a_1,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ a_2)$ をとると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = a_1\boldsymbol{i}$ , $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = a_2\boldsymbol{j}$ だから，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$$

と表すことが出来る。この $a_1$, $a_2$ を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい，$a_1$ を $x$ 成分，$a_2$ を $y$ 成分という。このとき $\boldsymbol{a}$ を成分を使って

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

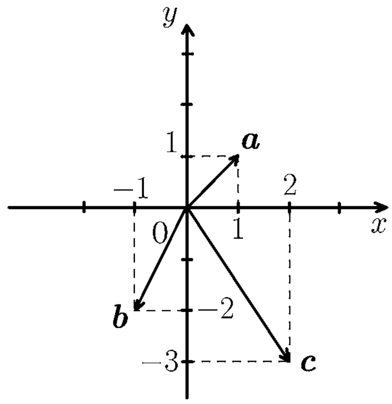
と表す。(このように成分を縦に並べる表し方を縦ベクトル表示といい，$\boldsymbol{a} = (a_1,\ a_2)$ の様に横に並べる現し方を横ベクトル表示という。本書では，縦ベクトル表示を使う。)

**例 1**　$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cdots\cdots$ 零ベクトル

**例 2**　2 点 A(2, 3), B(4, −1) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を成分で表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

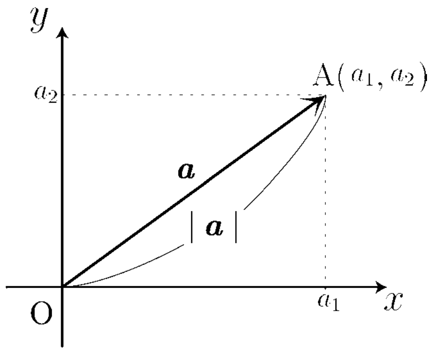
**問**　右図のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を成分で表せ。



# < 平面ベクトルの成分 2 >

右図のように $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は，
線分 OA の長さと一致するから

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ のとき} \quad |\boldsymbol{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}$$



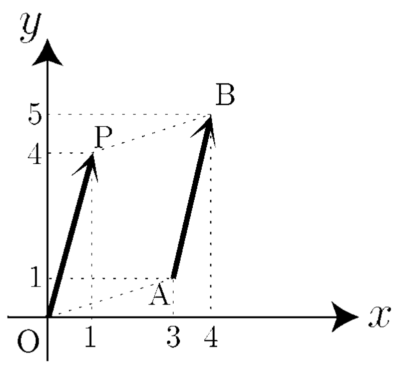

**例題**　2 点 A(3,1)，B(4,5) が与えられたとき，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

(解)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を右図のように
$x$ 軸方向に $-3$
$y$ 軸方向に $-1$
だけ平行移動するとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に
なるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$




(別解)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$　$\cdots$ (終点 − 始点)

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**問**　次の 2 点 A，B に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(1)　A (3, 1)，　B (4, 5)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2)　A (1, −1)，　B (−2, 3)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

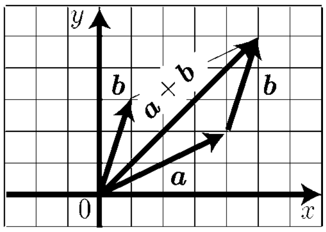
(3)　A$(a_1, a_2)$ ，　B$(b_1, b_2)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$　　　　　　　　　　　　，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

# ＜平面ベクトルの成分 3 ＞

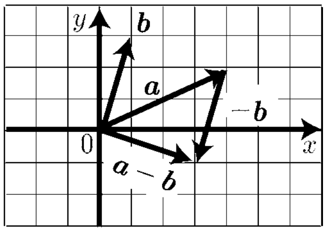
**例題** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ，(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ ，(3) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}$ ，(4) $2\boldsymbol{b}$



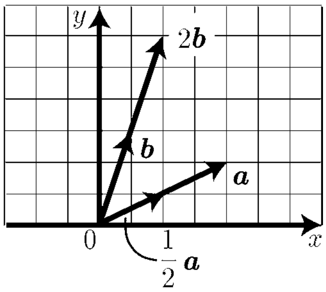

(解)　(1) 右図より

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$




(2) 右図より

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$
$$=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$




(3) 右図より

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(4) 右図より

$$2\boldsymbol{b}=2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

**問 1** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

($k$ は定数)

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=$

(3) $k\boldsymbol{a}=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=$

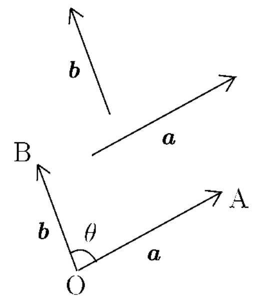
**問 2** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-3\\-12\end{pmatrix}$ のとき，次のベクトルの成分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}=$　　　　(2) $-\boldsymbol{b}=$

(3) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=$　　　　(4) $\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{b}=$

# < 平面ベクトルの内積 1 >

　$\boldsymbol{0}$ でない2つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点を同じ点 O にもっていき，終点をそれぞれ A，B とするとき，$\angle$AOB の大きさ $\theta$ は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ によってきまる。この角 $\theta$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角という。




ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角が $\theta$ のとき

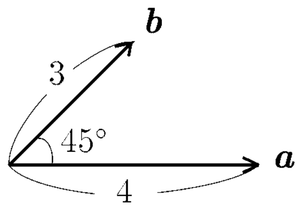
$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

を，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の**内積**といい，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で表す。すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta} \quad \text{(内積の定義)}$$

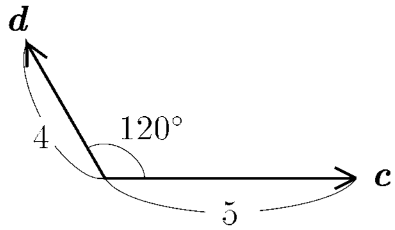
**例** (1) $|\boldsymbol{a}|=4$ ，$|\boldsymbol{b}|=3$ で
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のつくる角が $45^\circ$ のとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4\times3\times\cos45^\circ$$
$$=4\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$$




(2) $|\boldsymbol{c}|=5$ ，$|\boldsymbol{d}|=4$ で
$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ のつくる角が $120^\circ$ のとき

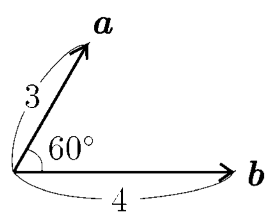
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=5\times4\times\cos120^\circ$$
$$=5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-10$$

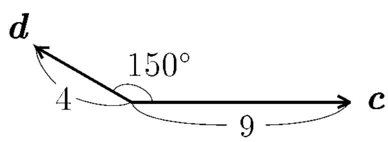



**問**　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ が右図の場合に
内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}$ を求めよ。

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=$



# ＜ 平面ベクトルの内積 2 ＞

内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ で，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ のときは，2 つのベクトルは一致するので
間の角 $\theta=0^\circ$ より $\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ だから

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2 \text{ つまり，} |\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$$

また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角が $90^\circ$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は **垂直** であるといい，
$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ と書く。$\cos 90^\circ=0$ であるから，次が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0} \text{ のとき} \\ \qquad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \end{array}}$$

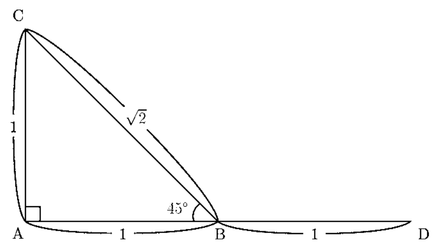
(ベクトルの垂直と内積)

**例**　右図の直角二等辺三角形において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\times1\times\cos 90^\circ=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 45^\circ=1$$

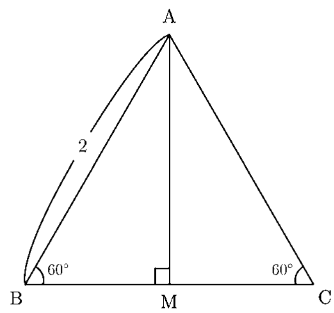
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=1\times\sqrt{2}\times\cos 135^\circ=-1$$




**問**　右図のように一辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。
辺 BC の中点を M とするとき，次の内積の値を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=$




(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}}=$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}}=$

## ＜平面ベクトルの内積の成分表示 1＞

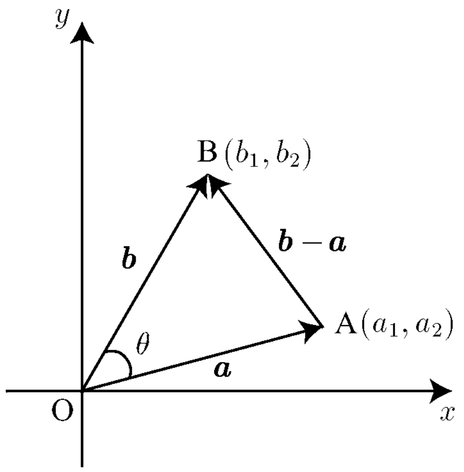
座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2)$，$\mathrm{B}(b_1, b_2)$ と原点 O に対し，2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

である。一方 $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2 \times \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

であるから




$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

となる。

**問 1**　$(*)$ 式の右辺を $a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

**問 2**　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると，内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

となる。問 1 の結果を使って，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$ についての簡単な式で表せ。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$$

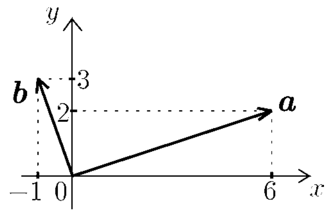
# ＜平面ベクトルの内積の成分表示 2 ＞

前ページの結果より

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ のとき } \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

である。

**例 1**　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ のとき　内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は




$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 6 \times (-1) + 2 \times 3 = 0$$

であるから, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は垂直 $(\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b})$ である。

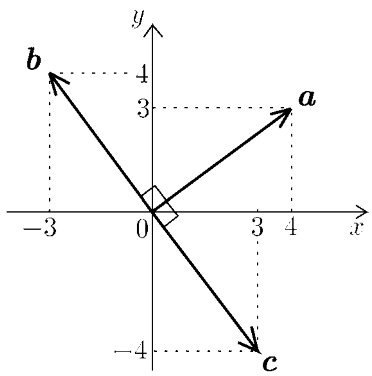
**問 1**　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が以下の場合に内積を求め, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直である場合は　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$　と書け。

(1)　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$

(2)　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$

(3)　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =$

**例 2**　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$




のとき

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = 0$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 4 \times 3 + 3 \times (-4) = 0$$

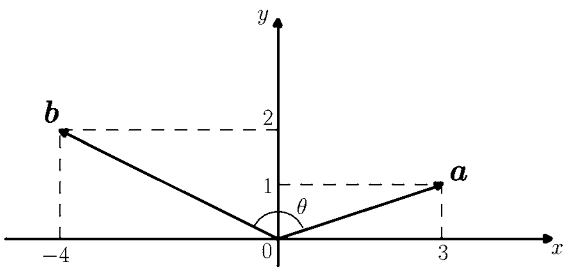
より　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$　である。

**問 2**　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と垂直なベクトルの例を 2 つあげよ。

## ＜ 平面ベクトルのなす角 ＞

**例**　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ のなす角 $\theta$ を求めたい。内積の定義から

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\times\cos\theta$$




より

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{3\times(-4)+1\times 2}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{(-4)^2+2^2}}=\frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ だから $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ $(=135^\circ)$ である。

**問 1**　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のなす角 $\theta$ を求めたい。上の例にならって，$\cos\theta$ の値を $a_1, a_2, b_1, b_2$ で表せ。

$\cos\theta=$

**問 2**　以下の場合に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 $\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ を求めよ。

(1) $|\boldsymbol{a}|=1$ , $|\boldsymbol{b}|=2$ , $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}$

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\end{pmatrix}$

# ＜ 平面のベクトルと平行四辺形の面積 ＞

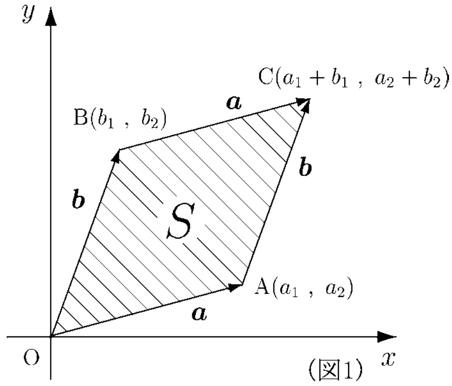
2 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \ , \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して原点 O(0 , 0) と 3 点

$\mathrm{A}(a_1 \ , \ a_2)$ , $\mathrm{B}(b_1 \ , \ b_2)$ , $\mathrm{C}(a_1+b_1 \ , \ a_2+b_2)$

をとると、四角形 OACB は平行四辺形となる。
これを 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ , $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形ということにする。この面積 $S$ を求めたい。



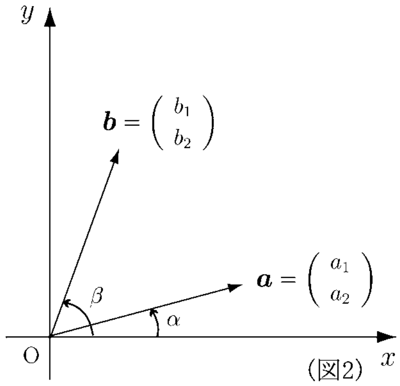
(図1)

**問 1**　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が図 2 のような位置関係にあるとする。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形の面積 $S$ は図 3 より $S = |\boldsymbol{a}| \times h$ である。

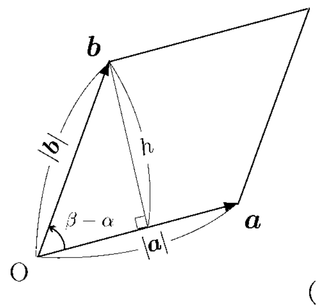
(1)　$h$ を $|\boldsymbol{b}|$ と $\beta - \alpha$ で表せ。

(2)　$S$ を $|\boldsymbol{a}|$, $|\boldsymbol{b}|$ および $\beta - \alpha$ で表せ。

(3)　$a_1 = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha$, $a_2 = |\boldsymbol{a}|\sin\alpha$, $b_1 = |\boldsymbol{b}|\cos\beta$, $b_2 = |\boldsymbol{b}|\sin\beta$ とサインの加法定理を用いて, $S$ を $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ だけで表せ。

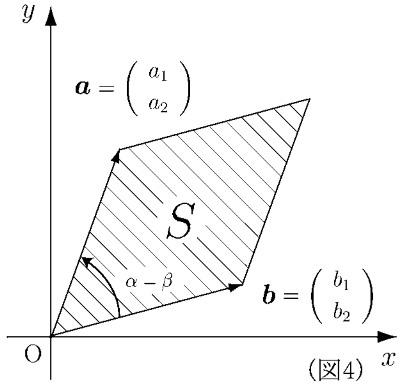


(図2)



(図3)

**問 2**　ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ が図 4 のような位置関係にあるとする。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によってできる平行四辺形の面積 $S$ を $a_1$ , $a_2$ , $b_1$ , $b_2$ だけで表せ。



(図4)

## < 2次の行列式 >

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し，$a_1b_2 - a_2b_1$ の値を

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ という記号で表し，2 次の**行列式**という。

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1} \quad \text{(2 次の行列式)}$$

**例**　$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$ ,　　$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 6 - 7 \times 3 = 9$

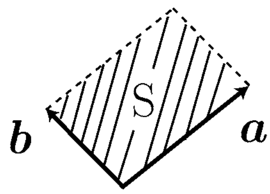
**問 1**　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対し，行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ の値は次のことを意味する。

[ I ]　$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 1 のような位置関係である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平方四辺形の面積を S とすると

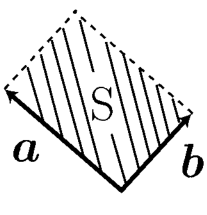
$$\boxed{\mathrm{S} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$




(図1)

[ II ]　$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} < 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 2 のような位置関係である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平方四辺形の面積を S とすると

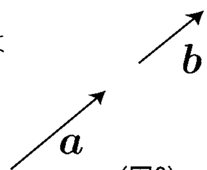
$$\boxed{\mathrm{S} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}}$$



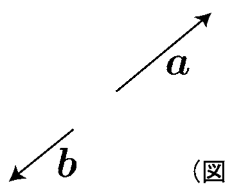

(図2)

[ III ]　$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0}$ のとき $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は図 3 または図 4 のような位置関係である。つまり

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**平行** である。




(図3)

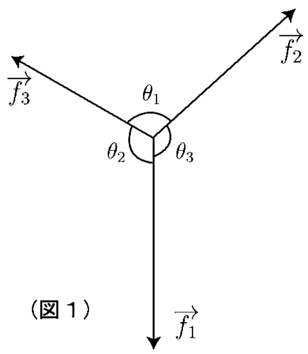



(図4)

**問 2**　[III] $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ のとき $\frac{b_1}{a_1} = k$ として，$\boldsymbol{b}$ を $k$ と $\boldsymbol{a}$ で表せ。(ただし $a_1 \neq 0$ とする)

# < 平面ベクトルの問題 >

**問1**




（図１）

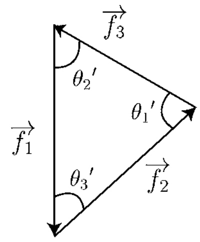
図１のように１点に力 $\overrightarrow{f_1}$ , $\overrightarrow{f_2}$ , $\overrightarrow{f_3}$ が働いてつり合っているとき

$$\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{0}$$

である。図１の $\theta_1$ , $\theta_2$ , $\theta_3$ に対し

$$\frac{|\overrightarrow{f_1}|}{\sin\theta_1} = \frac{|\overrightarrow{f_2}|}{\sin\theta_2} = \frac{|\overrightarrow{f_3}|}{\sin\theta_3}$$

が成りたつことを示せ。　(ヒント $\cdots$ 右図)




**問2**　座標平面の２点 A( 3 , 1 ) ， B( $-2$ , 1 ) に対し , 次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分と大きさを求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$ 　　　　　　　　　　　　, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| =$

(2) 原点 O ( 0 , 0 ) と２点 A , B に対し $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる点 C の座標を求めよ。

C ( 　　, 　　)

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の大きさを求めよ。

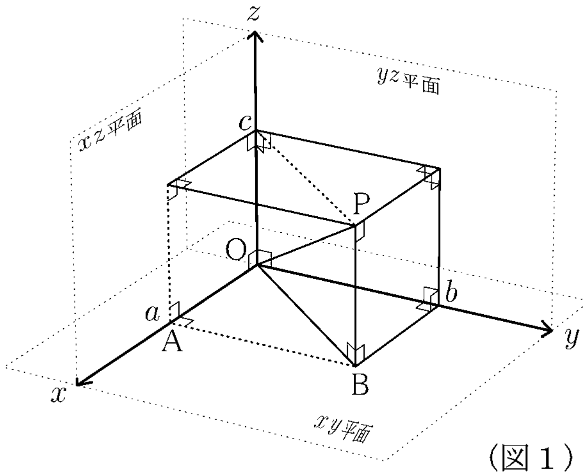
$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| =$ 　　　　　　　　　　　　, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| =$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} =$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 $\theta$ を求めよ。

# ＜空間座標＞



(図１)

**例**　座標空間上に原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ と 3 点 A，B，P が図 1 のような位置にあるとき，A，B，P の座標は

$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$

$\mathrm{B}(a,\ b,\ 0)$

$\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$

と表される。 $a,\ b,\ c$ が正のとき，
各線分の長さ (各点の距離) は

$\mathrm{OA}=a$　，　$\mathrm{AB}=b$　，　$\mathrm{BP}=c$　，　$\mathrm{OB}=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OB}^2+\mathrm{BP}^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

となる。

**問 1**　この例で，点 $\mathrm{C}(a,\ 0,\ c)$ ，$\mathrm{D}(0,\ b,\ c)$ の位置を図 1 内に表示し，
以下の線分の長さを求めよ。

AC ＝　　　　　　，CD ＝　　　　　　，AD ＝

**問 2**　図 2 の 4 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ , $\mathrm{A}(x_2,\ y_1,\ z_1)$ , $\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_1)$ , $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$
に対し，以下の線分の長さを求めよ。(ただし $x_1<x_2$ , $y_1<y_2$ , $z_1<z_2$ とする)

PA ＝　　　　，AB ＝　　　　，BQ ＝

PB ＝

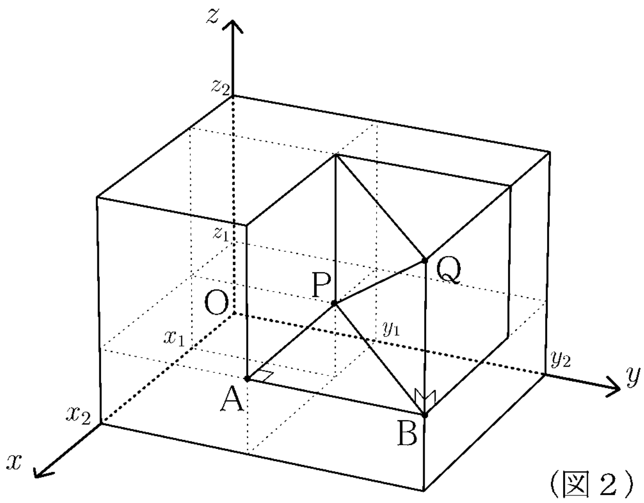
PQ ＝

**問 3**　点 $\mathrm{C}(x_2,\ y_1,\ z_2)$ , $\mathrm{D}(x_1,\ y_2,\ z_1)$
の位置を図 2 内に表示し，
以下の線分の長さを求めよ。

AC ＝

AD ＝

CD ＝



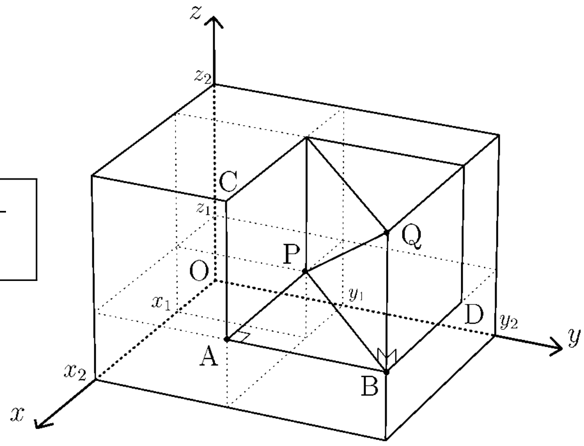
(図２)

# ＜ 空間座標と距離 ＞

**例**　前ページの結果より
2 点 $\mathrm{P}(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)$，$\mathrm{Q}(x_2\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の間の
距離 PQ(＝線分 PQ の長さ) は

$$\mathrm{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

である。




(注) この公式は

$$x_1 < x_2, \qquad y_1 < y_2, \qquad z_1 < z_2$$

の場合以外にも適用できる。

右図の点 $\mathrm{C}(x_2\,,\,y_1\,,\,z_2)$，$\mathrm{D}(x_1\,,\,y_2\,,\,z_1)$ の間の距離 CD は

$$\mathrm{CD} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

であり，$\sqrt{\ }$ の中の $(\bigcirc - \triangle)^2$ の中の $\bigcirc$ と $\triangle$ は入れ替えても 2 乗するので結果は変わらないからである。

**問 1**　点 $\mathrm{E}(x_1\,,\,y_1\,,\,z_2)$，$\mathrm{F}(x_1\,,\,y_2\,,\,z_2)$ の位置を右上図内に表示し，
点 $\mathrm{A}(x_2\,,\,y_1\,,\,z_1)$ と点 $\mathrm{B}(x_2\,,\,y_2\,,\,z_1)$ に対し，次の距離を求めよ。

BE =

AF =

**問 2**　原点 O(0 , 0 , 0) と点 $\mathrm{A}(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3)$，$\mathrm{B}(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$ に対し，

(1) 以下の距離を求めよ。

OA =　　　　　　　　　　　　　　　　，OB =

AB =

(2) 以下の式を計算し，できるだけ簡単にせよ。

$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2 =$

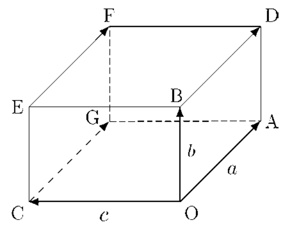
# ＜空間のベクトル 1＞

速度や力などのように，方向と大きさをもつベクトルは，平面上だけでなく空間においても同様に扱える。

**例 1** 右図の直方体の頂点を始点，終点とするベクトルのうちで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に等しいものは

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{EF}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{CG}}$$

である。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ である。




**問 1**　例 1 で，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に等しいものと $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に等しいものを全て書け。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=$

空間のベクトルについても，和・差，実数倍は平面のベクトルと同様である。

**例 2** 例 1 の直方体で

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

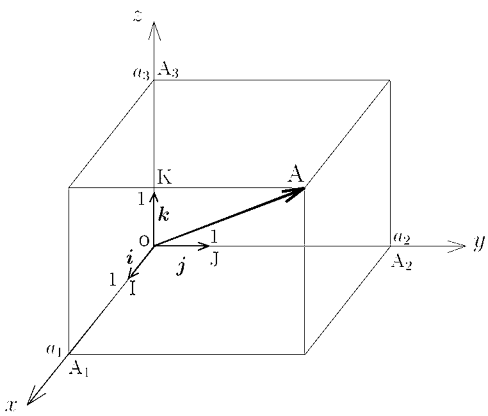
**問 2** 例 1 の直方体で $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}\ ,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{b}\ ,\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{c}$ とするとき，

次のベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=$　　　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=$　　　　(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=$　　　　(5) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}=$　　　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=$

## ＜ 空間のベクトル 2 ＞




点 O を原点とする空間における座標軸上の 3 点 $\mathrm{I}(1\,,0\,,0)\,,\mathrm{J}(0\,,1\,,0)\,,\mathrm{K}(0\,,0\,,1)$ に対し，

$$\boldsymbol{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}\,,\quad \boldsymbol{j}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}\,,\quad \boldsymbol{k}=\overrightarrow{\mathrm{OK}}$$

を**基本ベクトル**という。

空間における任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ の始点を原点にもっていき，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる点 A の座標が $(a_1\,,a_2\,,a_3)$ のとき，$\mathrm{A}_1(a_1\,,0\,,0)\,,\mathrm{A}_2(0\,,a_2\,,0)\,,\mathrm{A}_3(0\,,0\,,a_3)$ とおくと，

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=a_1\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=a_2\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=a_3\boldsymbol{k}$ より

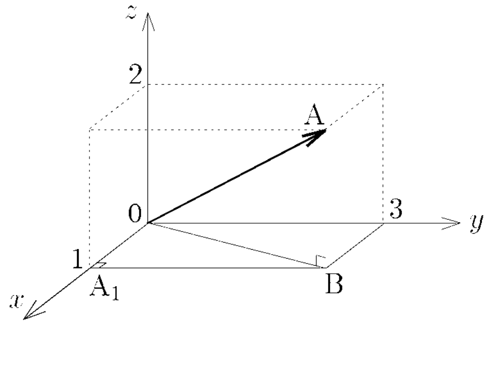
$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

と表される。この $a_1\,,a_2\,,a_3$ を $\boldsymbol{a}$ の**成分**といい，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ と表す。

とくに $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ である。

**問 1**　上図で、$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ , $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ , $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ を成分で表せ。

**例**　A(1, 3, 2) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$




である。ここで，$\mathrm{A_1}(1,0,0)\,,\mathrm{B}(1,3,0)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2 &= \mathrm{OB}^2+\mathrm{AB}^2\\ &= (\mathrm{OA_1}^2+\mathrm{A_1B}^2)+\mathrm{AB}^2\\ &= 1^2+3^2+2^2=14\end{aligned}$$

より，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{14}$ である。

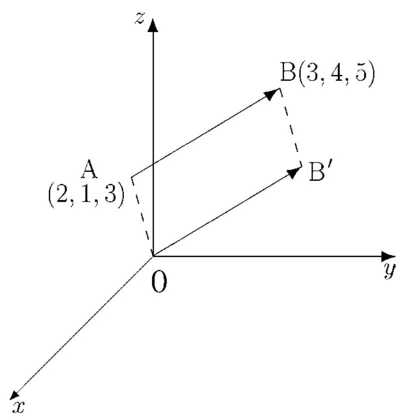
**問 2**　$\boldsymbol{a}$ の成分が以下の場合に，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$　　　　(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{a}|=$　　　　$|\boldsymbol{a}|=$

# < 空間のベクトル 3 >

**例** 空間座標上の 2 点 A(2,1,3)，B(3,4,5) に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めたい。
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を平行移動し，始点を原点 O にもっていくとすると，点 A が原点 O に移動するから




$x$ 軸方向に $-2$

$y$ 軸方向に $-1$

$z$ 軸方向に $-3$

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 B′ に (同様に) 平行移動して、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ となったとすると，B′ の座標は

$$\mathrm{B'}(3-2\,,\,4-1\,,\,5-3) = (1,3,2)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

（別解） 次のように計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**問** 空間の 2 点 A，B の座標が以下の場合に，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分を求めよ。

(1) A(5, 2, 3) , B(4, 1, 2)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

(2) A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ , B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$

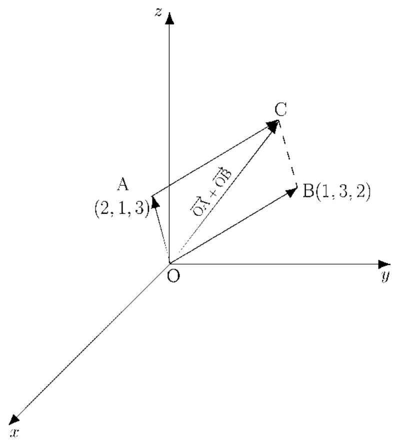
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} =$

# ＜ 空間のベクトル 4 ＞

**例**　空間の 2 点 A(2,1,3)，B(1,3,2) と原点 O に対し，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

の成分を求めたい。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を平行移動し，始点が点 A になるようにすると，点 O が点 A に移動するから，




$x$ 軸方向に $+2$

$y$ 軸方向に $+1$

$z$ 軸方向に $+3$

だけ平行移動したことになる。このとき点 B も点 C に同様に平行移動して，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となったとすると，点 C の座標は

$$\mathrm{C}(1+2, 3+1, 2+3)=(3,4,5)$$

となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の成分は

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

（別解）次の様に計算してもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1+3\\3+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

**問**　2 点 A，B の座標が次の様な場合に，以下のベクトルの成分を求めよ。

(1) A(5,2,3) , B(4,1,2)

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

(2) A$(a_1,a_2,a_3)$ , B$(b_1,b_2,b_3)$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=$

# ＜ 空間のベクトル 5 ＞

**問 1** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき前ページの結果から類推して，

次のベクトルの成分を求めよ。（ただし，$k$ は実数）

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} =$ (2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} =$ (3) $k\boldsymbol{a} =$

**例** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ のとき，$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ の成分は

$$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+0 \\ -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

23 ページの結果より，このベクトルの大きさは

$$|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}| = \sqrt{(-3)^2+6^2+5^2} = \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}$$

**問 2** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき次のベクトルの成分と大きさ

を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} =$ (2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} =$

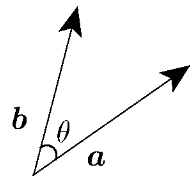
$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| =$ $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| =$

(3) $3\boldsymbol{a} =$ (4) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b} =$

$|3\boldsymbol{a}| =$ $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}| =$

# ＜空間ベクトルの内積 1 ＞

平面上のベクトルと同じように，空間の $\mathbf{0}$ でない 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ のつくる角 $\theta$ を定めることができる。($0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$)
そして，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を




$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

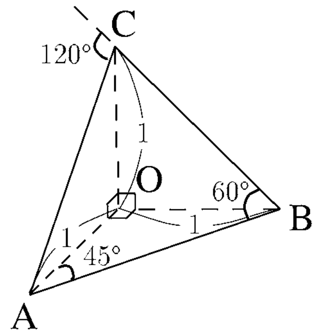
と定める。（どちらか一方が $\mathbf{0}$ のときは，内積は 0 とする。）

**例**　右図のような立体 OABC を考える。

ここで OA=OB=OC= 1,

OA⊥OB，OB⊥OC，OC⊥OA

とする。このとき

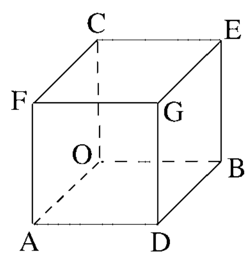



$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AO}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \times \cos 45^\circ = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{BA}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times \cos 60^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \times |\overrightarrow{\mathrm{CA}}| \times \cos 120^\circ = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

**問**　右の図は，1 辺の長さが 1 の立方体である。
このとき次の内積を求めよ。




(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}} =$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} =$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}} =$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}} =$

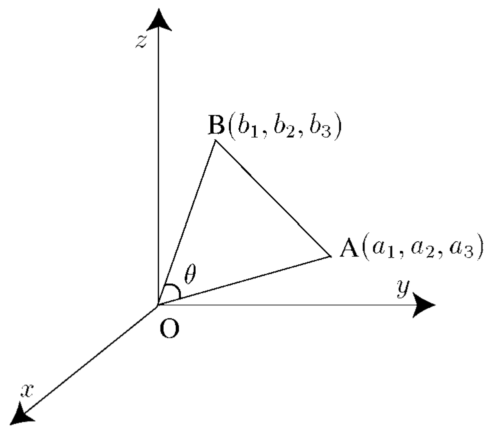
(5) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}} =$　　(6) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} =$

# ＜空間ベクトルの内積 2＞

空間の 2 点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathrm{B}(b_1, b_2, b_3)$ と原点 O に対し，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると，余弦定理より，

$$(*)\ \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \cos\theta = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\}$$

となる。




**問 1**　OA，OB，AB の長さの 2 乗を $a_1$，$a_2$，$a_3$，$b_1$，$b_2$，$b_3$ で表せ。

$\mathrm{OA}^2 =$ 　　　　　　　　　　, $\mathrm{OB}^2 =$

$\mathrm{AB}^2 =$

**問 2**　$(*)$ 式の右辺を $a_1$，$a_2$，$a_3$，$b_1$，$b_2$，$b_3$ についての簡単な式で表せ。

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} =$$

**問 3**　$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とすると、内積は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\,\boldsymbol{a}\,| \times |\,\boldsymbol{b}\,| \times \cos\theta = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos\theta$$

問 2 の結果を使って，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を $a_1$，$a_2$，$a_3$，$b_1$，$b_2$，$b_3$ についての簡単な式で表せ。

$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} =$

# < 空間ベクトルの内積 3 >

2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積は，前ページの結果より

$$\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \quad \text{（内積の成分表示）}$$

となる。

**例** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ のつくる角を $\theta$ とすれば，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta$$

より

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}|} = \frac{1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 2}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ だから，$\theta = 120^\circ$ となる。

**問** 以下の場合に，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる角 $\theta$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

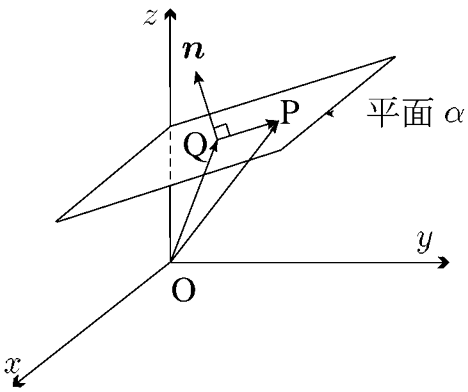
(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

# ＜平面の方程式＞

**例** 空間の点 Q$(3,4,5)$ を通り，ベクトル

$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}$ に垂直な平面を $\alpha$ とする。平面 $\alpha$ 上の任意の点 P$(x,y,z)$ に対し，$\boldsymbol{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ は直交するから $\boldsymbol{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ との内積は $\cos 90^\circ=0$ より




$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$$

となる。一方，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}$$

であるから、

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-3\\y-4\\z-5\end{pmatrix}=-4\times(x-3)+(-3)\times(y-4)+12\times(z-5)=0$$

これを整理すると，

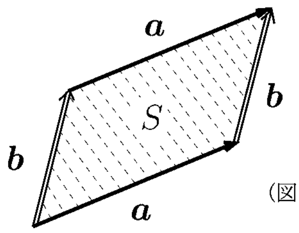
$$-4x-3y+12z-36=0 \qquad \text{(平面の方程式)}$$

となる。これが平面 $\alpha$ を表す方程式である。このとき $\boldsymbol{n}$ を平面 $\alpha$ の**法線ベクトル**という。

**問** ベクトル $\boldsymbol{n}$ と点 Q が以下の場合に，点 Q を通って $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式を求めよ。

(1) $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ ，Q$(2,-1,3)$ (2) $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ，Q$(q_1,q_2,q_3)$

# < 空間のベクトルと平行四辺形の面積 >

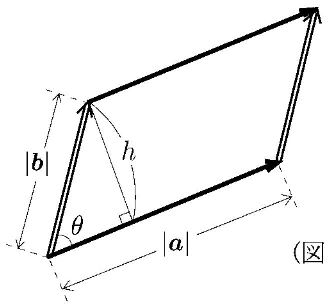


（図1）

空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積 $S$ は

$$S = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

で求められる。このことを以下の順で示せ。



（図2）

**問 1** 図 2 より $S = |\boldsymbol{a}|h$ である。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を $\theta$ とする。$S$ を $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ と $\theta$ で表せ。

**問 2** $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ と $|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \cos\theta = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積) であることを利用して，$S^2$ を $|\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2$ と $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$ を用いて表せ。

$S^2 =$

**問 3** $|\boldsymbol{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2$，$|\boldsymbol{b}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2$，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ であることを利用して，次式を示せ。

$$S^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

# ＜ 外積 1 ＞

空間のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して，

$$\boxed{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積)

を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**という。外積の大きさは

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{\left( \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)^2}$$

であるから，前ページの結果より，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の

つくる平行四辺形の面積 $S$ に等しい。

（注）　今後，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間に積の記号 $\times$ がある

場合は必ず外積を意味し，内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ と区別する。

**例**　$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき，外積は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 6 - 3 \times 5 \\ \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \\ 6 \\ \\ -3 \end{pmatrix}$$

であり，内積は $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 32$ である。

**問**　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が以下の場合に，外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

# ＜外積 2 ＞

**例 1** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき、前ページの例より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

であった。このとき

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \times 1 + 6 \times 2 + (-3) \times 3 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交している。すなわち $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{a}$ である。また

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-3) \times 4 + 6 \times 5 + (-3) \times 6 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}$ も直交している。すなわち $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{b}$ である。

**問 1** $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が以下の場合に，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ と $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

**例 2** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ のとき

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3$$

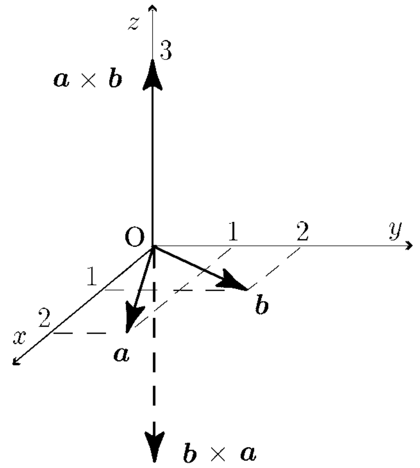
$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

より $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{a}$ は直交している。

**問 2** 例 2 の場合に，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$ を計算せよ。

# ＜外積 3＞

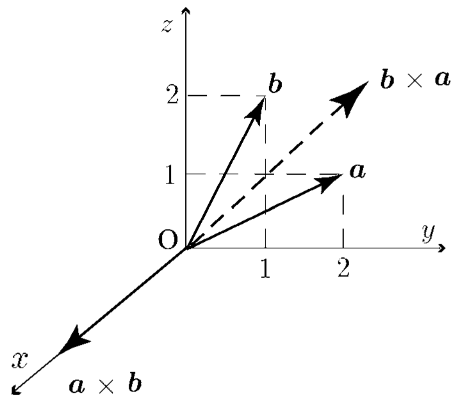
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ (および$\boldsymbol{b}$) と直交していて，その大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積に等しい。




**例 1** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ のとき，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$$

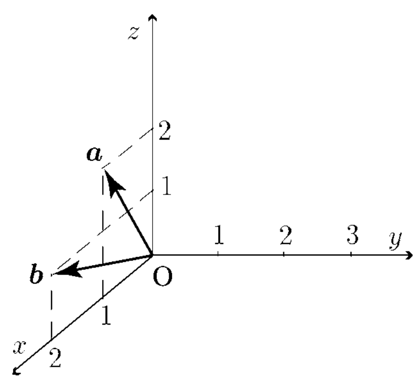
より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となる。




**例 2** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ のとき，

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}0&0\\2&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}\\[2ex]\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

より $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ となる。




**問** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ ，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ のとき，

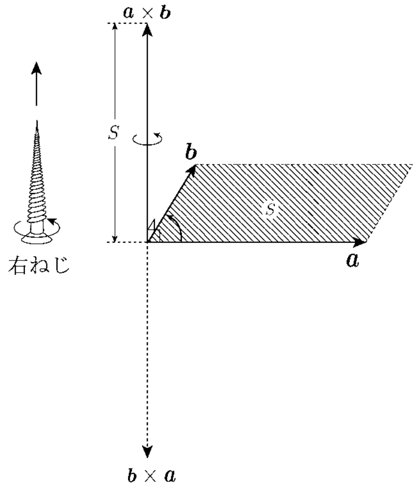
$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ の成分を求め，
右にを $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ を作図せよ。

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=$

# < 外積 4 >

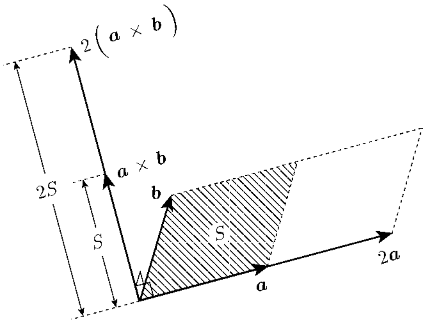
2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直なベクトルであり，大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のつくる平行四辺形の面積 $S$ に等しい。又 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に，向かって回転するときに，右ねじの進む方向である。従って $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ はその反対向きであり




$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \;=\; -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

が成り立つ。

**例 1**　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$ のとき




$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&0\\3&4\end{vmatrix}\\[4pt]\begin{vmatrix}3&4\\1&-1\end{vmatrix}\\[4pt]\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}$$ である。

次に $(2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$ を計算したい。右図から明らかに

$(2\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=2\begin{pmatrix}8\\-7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-14\\4\end{pmatrix}$ である。

**例 2**　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ のとき $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}2&2\\3&3\end{vmatrix}\\[4pt]\begin{vmatrix}3&3\\1&1\end{vmatrix}\\[4pt]\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$

**問**　$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$ のとき，次の外積の成分を求めよ。

(ただし $k$ は定数とする。)

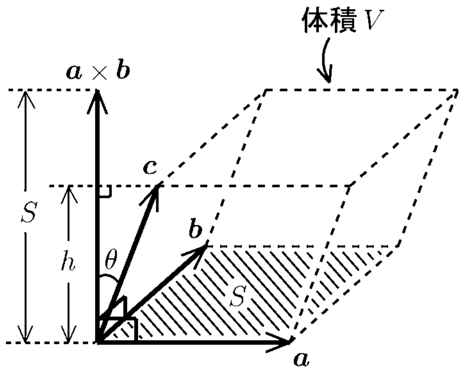
(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$　　，(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$　　，(3) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$　　，(4) $\boldsymbol{a}\times(3\boldsymbol{a})$

# ＜ 平行六面体の体積 ＞

**例** $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}4\\6\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$

であるとき，右図のような平行六面体の体積 $V$ を求めたい。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がつくる平行四辺形の面積を $S$ ，平行六面体の高さを $h$ とすると，

$$V = Sh \quad , \quad S = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$$




である。一方 , $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ のつくる角を $\theta$ とすると

$$h = |\boldsymbol{c}|\cos\theta$$

であるから、

$$V = Sh = |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\theta = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\text{と}\boldsymbol{c}\text{の内積})$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix}6 & 5\\0 & 1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}0 & 1\\4 & -2\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}4 & -2\\6 & 5\end{vmatrix} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-4\\32\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$= 6\times(-1)+(-4)\times3+32\times7 = 206$$

一般に $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積 $V$ は

$$\boxed{V = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \text{ の絶対値}}$$

**問** $\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{b}$ ，$\boldsymbol{c}$ が以下の場合に，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} =$

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} =$

# ＜３次の行列式＞

３つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ に対し $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との内積

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

を**スカラー三重積**という。

$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し，スカラー三重積

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right\}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

の値を記号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

で表し，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のつくる (3 次の) **行列式** という。

**例** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}=1\times5\times9+4\times8\times3+7\times2\times6-7\times5\times3-4\times2\times9-1\times6\times8=0$

**問** 次の行列式の値を求めよ。

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 10 \end{vmatrix}=$$

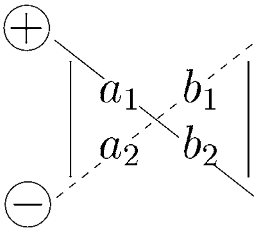
# ＜サラスの方法＞

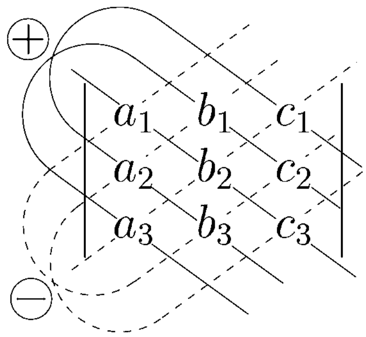
2 次や 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

の計算規則を覚えるためには、次のように考える。




この図で実線はプラスの項であり，点線はマイナスの項である。この方法を**サラスの方法**という。

**問**　次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

## < 行列式の性質 >

3 次の行列式について，定義から次の性質が導かれる。

1. (列展開) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

2. (行展開) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

3. (行と列を入れかえても同じ) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

4. (2 つの列 (または行) を入れかえると符号が逆になる。)

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. (1 つの列 (または行) を定数倍して別の列 (または行) に加えても同じ。)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1+ka_1 \\ a_2 & b_2 & c_2+ka_2 \\ a_3 & b_3 & c_3+ka_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+ka_3 & b_2+kb_3 & c_2+kc_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(注) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対して $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ より

4 は $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}$ と表される。

これから $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$ となる。同様にして $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ となる。

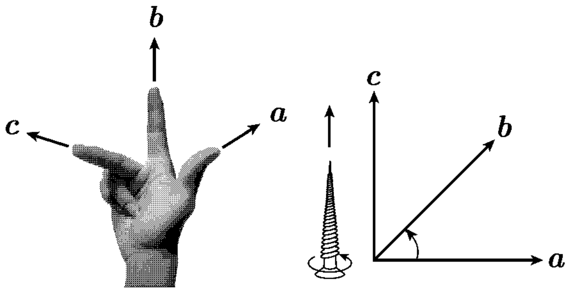
**例** 
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{ 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \right\} = 5$$

**問** 次の行列式の値を求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

（図1　右手系）




## < 右手系と左手系 >

3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図 1 のような位置関係にあるとき

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は**右手系**

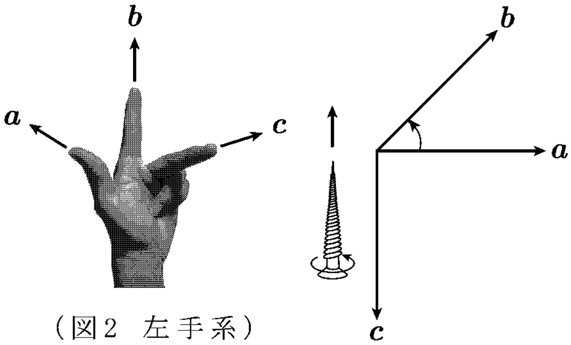
という。

また $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が図 2 のような位置関係にあるとき

$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は**左手系**

という。

(注) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば
$\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\}$ も右手系であり，
$\{\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\}$ も右手系である。




（図2　左手系）

35 ページの例の $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は右手系である。
この例の場合スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積になる。

この事と前のページのスカラー三重積の性質

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$

より以下の事がわかる。

| | | |
|---|---|---|
| $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系 | $\iff$ | $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$ |
| $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が左手系 | $\iff$ | $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$ |

(注 1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$ の場合は 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が同一平面上にある (次ページ参照)。この場合は右手系でも左手系でもない。

(注 2) $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系であれば $\{\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\}$ は左手系である。

**問** $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ が以下の場合に，スカラー三重積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ を計算し，$\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ が右手系か左手系かを判定せよ。

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$

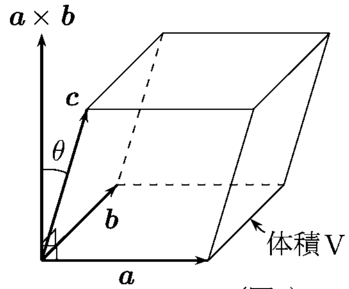
# ＜空間ベクトルと行列式＞

零ベクトルでない 3 つのベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ に対し、
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす角を $\theta$, スカラー三重積 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ の値を $D$ とすると

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}| \cos\theta}$$

となる。この $D$ の値によって 3 つのベクトルの位置関係がわかる。

（右手系）



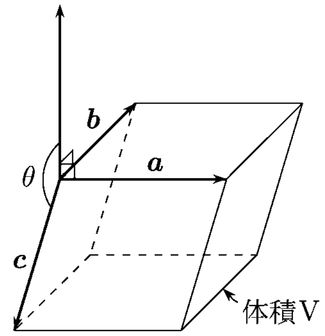

（図1）

[**1**] $\boxed{D > 0 \text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| > 0,\ |\boldsymbol{c}| > 0,\ \cos\theta > 0$ より $0° < \theta < 90°$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は右手系 (図 1) であり，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を $V$ とすると

$$V = D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

（左手系）




（図2）

[**2**] $\boxed{D < 0 \text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| > 0,\ |\boldsymbol{c}| > 0,\ \cos\theta < 0$ より $90° < \theta < 180°$

このとき $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ は左手系 (図 2) であり，$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ の作る平行六面体の体積を $V$ とすると

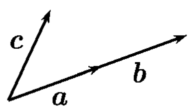
$$V = -D = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

[**3**] $\boxed{D = 0 \text{ のとき}}$ $|\boldsymbol{c}| > 0$ より $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 0$ かまたは $\cos\theta = 0$

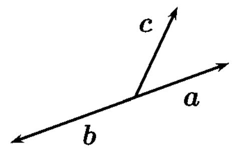
(1) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = 0$ のとき $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ (ゼロベクトル) である。
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形の面積は 0(ゼロ) だから
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行になる (図 3 または図 4)。すなわち

$$\boxed{\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}}$$

を満たす定数 $k$ が存在する。




（図3）

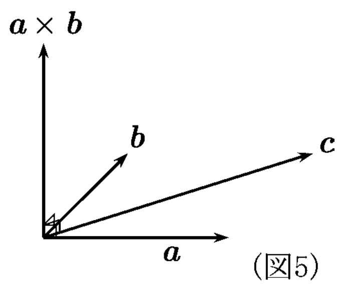



（図4）

(2) $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| \neq 0$ のとき $\cos\theta = 0$ より $\theta = 90°$
であるから $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平面上の
ベクトルであり

$$\boxed{\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}}$$

を満たす定数 $x,\ y$ が存在する。




（図5）

**問** 図 5 の場合 3 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}$ は同一平面上にあると言える。
図 3 と図 4 の場合はどうか。

(1) 図 3 の場合　　　　(2) 図 4 の場合

# ＜ 空間ベクトルの練習 1 ＞

**問 1**　ベクトル $\boldsymbol{A}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ ,  $\boldsymbol{B}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ に対し

(1) 次のベクトルを求めよ

$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=$ 　　　　　　　　　　, $-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=$

(2) 次の値を求めよ

$|\boldsymbol{A}|=$ 　　　　　　　　　　, $|4\boldsymbol{A}|=$

(3) ベクトル $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ の大きさと，その方向の単位ベクトルを求めよ

**問 2**　次のベクトルを求めよ ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ で表せ)

(1) 原点から点 $(2,\ -3,\ -1)$ に到るベクトル

(2) 原点から点 $(-3,\ 3,\ 4)$ に到るベクトル

(3) 点 $(2,\ -3,\ -1)$ から 点 $(-3,\ 3,\ 4)$ に到るベクトル

(4) 点 $(-3,\ 3,\ 4)$ から 点 $(2,\ -3,\ -1)$ に向く**大きさ 1** のベクトル

(5) 点 $(2,\ -3,\ -1)$ から 点 $(-3,\ 3,\ 4)$ に向く**大きさ 2** のベクトル

(6) 点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ から 点 $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ に到るベクトル

# ＜空間ベクトルの練習 2 ＞

**問 1**　ベクトル $\boldsymbol{A} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ に対し以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の 2 倍の長さのベクトルを求めよ。またそのベクトルの長さが 2 倍であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{A}$ の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の長さのベクトルを求めよ。またそのベクトルの長さが $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{A}$ と同じ向きをもち，長さが 1 であるベクトルを求めよ。

(4) $\boldsymbol{A}$ と同じ向きをもち，長さが $\sqrt{3}$ のベクトルを求めよ。

**問 2**　ベクトル $\boldsymbol{A}$ と角度 $\theta$ が以下の場合に，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ が $x$ 軸となす角と $\theta$ とする。

$\cos\theta =$　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(2) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ が $x$ 軸となす角と $\theta$ とする。

$\cos\theta =$　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(3) $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ が $y$ 軸となす角と $\theta$ とする。

$\cos\theta =$　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

# ＜ 空間ベクトルの練習 3 ＞

**問**　ベクトル $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ に対し，$\theta$ が以下の場合に $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を求めよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ が $x$ 軸となす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(2) $\boldsymbol{A}$ が $y$ 軸となす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(3) $\boldsymbol{A}$ が $z$ 軸となす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(4) $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ のなす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(5) $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$ のなす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

(6) $\boldsymbol{A}$ とベクトル $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ のなす角を $\theta$ とする。

$\cos\theta =$ 　　　　　　　　　　　　, $\sin\theta =$

# < 解答 1 〜 10 >

### < 1 ページ. スカラーとベクトル >

**問 1 の解答**

① 北東の風 3m/s　② 南東の風 6m/s

**問 2 の解答**

(1) スカラー　(2) スカラー　(3) スカラー

(4) スカラー　(5) ベクトル　(6) ベクトル

### < 2 ージ. 速度の合成 >

**問の解答**

$$\sin\theta = \frac{3}{5}$$

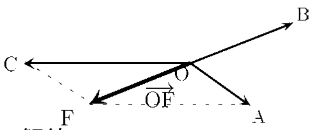
### < 3 ページ. ベクトルの表記 >

**問の解答**

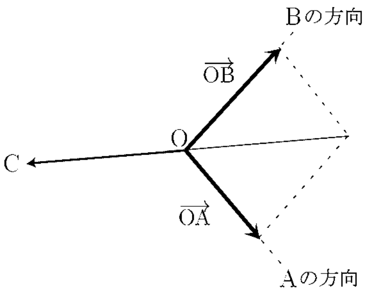
$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

### < 4 ページ. 力の合成 >

**問 1 の解答**

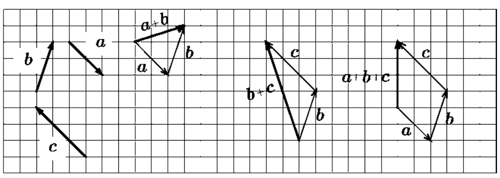



**問 2 の解答**



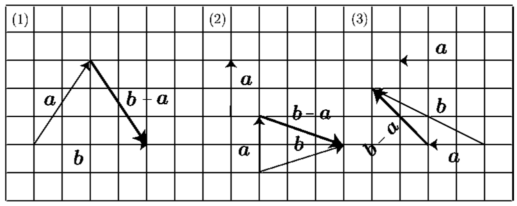

### < 5 ページ. 平面のベクトル 1 >

**問の解答**



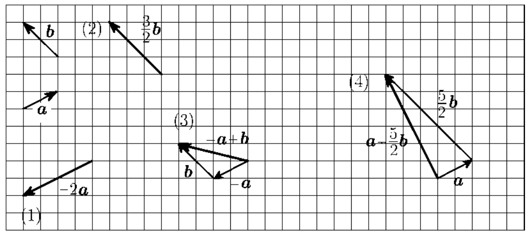
### < 6 ページ. 平面のベクトル 2 >

**問の解答**



### < 7 ページ. 平面のベクトル 3 >

**問の解答**



### < 8 ページ. 平面ベクトルの成分 1 >

**問の解答**

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### < 9 ページ. 平面ベクトルの成分 3 >

**問の解答**

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ , $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{17}$ ,

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$ ,

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ ,

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

### < 10 ページ. 平面ベクトルの成分 3 >

**問 1 の解答**

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ ,

(2) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ ,

(3) $k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$

**問 2 の解答**

(1) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,　(2) $-\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ ,

(3) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ ,　(4) $\boldsymbol{a} + \frac{2}{3}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

# < 解答 11 〜 17 >

### < 11 ページ. 平面ベクトルの内積 1 >
問の解答

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 4\times 3\times\cos 60^\circ = 6 \ ,$$
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d} = 9\times 4\times\cos 150^\circ = -18\sqrt{3}$$

### < 12 ページ. 平面ベクトルの内積 2 >
問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2$ ,　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$ ,

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$ ,

(5) $\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MC}} = -1$

### < 13 ページ. 平面ベクトルの内積の成分表示 1 >
問 1 の解答

$$\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{({a_1}^2+{a_2}^2)+({b_1}^2+{b_2}^2)-(b_1-a_1)^2-(b_2-a_2)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{{a_1}^2+{a_2}^2+{b_1}^2+{b_2}^2-({b_1}^2-2b_1a_1+{a_1}^2)-({b_2}^2-2b_2a_2+{a_2}^2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{2a_1b_1+2a_2b_2\right\}=a_1b_1+a_2b_2$$

問 2 の解答

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1+a_2b_2$$

### < 14 ページ. 平面ベクトルの内積の成分表示 2 >
問 1 の解答

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 23$ ,　(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ ,

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

問 2 の解答

$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ,　$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ など

### < 15 ページ. 平面ベクトルのなす角 >
問 1 の解答

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\ \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$$

問 2 の解答

(1) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(答) $\theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(答) $\theta = 45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$

(3) $\cos\theta = 0$　(答) $\theta = 90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$

### < 16 ページ. 平面のベクトルと平方四辺形の面積 >
問 1 の解答

(1) $h = |\boldsymbol{b}|\sin(\beta-\alpha)$

(2) $S = |\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\times\sin(\beta-\alpha)$

(3) $S = |\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)$
$$= |\boldsymbol{a}|\cos\alpha\times|\boldsymbol{b}|\sin\beta-|\boldsymbol{a}|\sin\alpha\times|\boldsymbol{b}|\cos\beta$$
$$= a_1b_2-a_2b_1$$

問 2 の解答

$$S = |\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\times\sin(\alpha-\beta)$$
$$= a_2b_1-a_1b_2$$

### < 17 ページ. 2 次の行列式 >
問 1 の解答

(1) $\begin{vmatrix}5&4\\2&3\end{vmatrix} = 5\times 3-2\times 4 = 7$ ,

(2) $\begin{vmatrix}3&-5\\-1&4\end{vmatrix} = 3\times 4-(-1)\times(-5) = 7$

問 2 の解答

$\dfrac{b_1}{a_1} = k$ より　$b_1 = ka_1$　$\cdots$ ①

一方 $a_1b_2-a_2b_1 = 0$ の両辺を $a_1$ で割ると

$b_2-\dfrac{a_2b_1}{a_1} = 0 \ \Leftrightarrow\ b_2 = \dfrac{b_1}{a_1}a_2 \ \Leftrightarrow\ b_2 = ka_2$　$\cdots$ ②

①, ②より

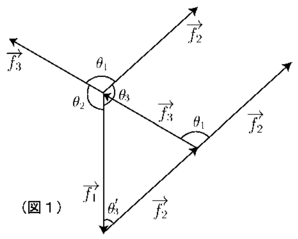
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = k\boldsymbol{a}$$

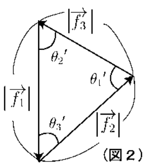
(答)　$\boldsymbol{b} = k\,\boldsymbol{a}$

# ＜解答 18 〜 19＞

### ＜ 18 ページ. 平面ベクトルの問題 ＞

### 問 1 の解答


(図１)


(図２)

$\theta_3' = 180° - \theta_3$

$\theta_1' = 180° - \theta_1$

$\theta_2' = 180° - \theta_2$

正弦定理より $\dfrac{\left|\overrightarrow{f_1}\right|}{\sin\theta_1'} = \dfrac{\left|\overrightarrow{f_2}\right|}{\sin\theta_2'} = \dfrac{\left|\overrightarrow{f_3}\right|}{\sin\theta_3'}$

一方 $\sin\theta_1' = \sin(180° - \theta_1) = \sin\theta_1$

$\sin\theta_2' = \sin(180° - \theta_2) = \sin\theta_2$

$\sin\theta_3' = \sin(180° - \theta_3) = \sin\theta_3$

よって $\dfrac{\left|\overrightarrow{f_1}\right|}{\sin\theta_1} = \dfrac{\left|\overrightarrow{f_2}\right|}{\sin\theta_2} = \dfrac{\left|\overrightarrow{f_3}\right|}{\sin\theta_3}$ (証明終)

### 問 2 の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\ -5,\ 0\ )$ , $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 5$

(2) C( 1, 2 )

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \sqrt{10}$ , $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \sqrt{5}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -5$

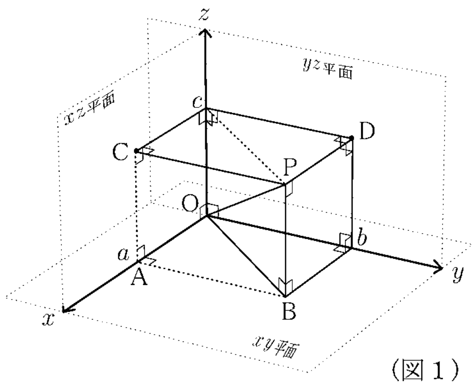
(5) $\theta = 135°$

### ＜ 19 ページ. 空間座標 ＞

### 問 1 の解答

AC= $c$ , CD= $\sqrt{a^2+b^2}$ ,

AD= $\sqrt{(\mathrm{AC})^2 + (\mathrm{CD})^2} = \sqrt{c^2+a^2+b^2}$
$\left(= \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$



(図１)

### 問 2 の解答

PA= $x_2 - x_1$ , AB= $y_2 - y_1$ , BQ= $z_2 - z_1$

PB= $\sqrt{(\mathrm{PA})^2 + (\mathrm{AB})^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

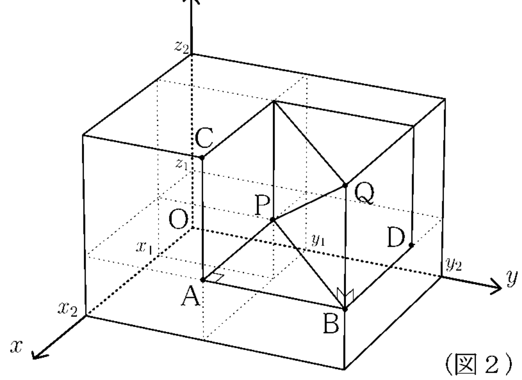
PQ= $\sqrt{(\mathrm{PB})^2 + (\mathrm{BQ})^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

### 問 3 の解答

AC= $z_2 - z_1$

AD= $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

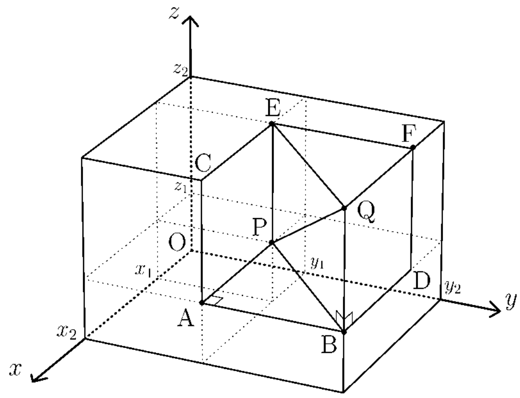
CD= $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$



(図２)

# ＜解答 20 〜 26 ＞

## ＜ 20 ページ. 空間座標と距離 ＞




### 問 1 の解答

$$\mathrm{BE}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$\mathrm{AF}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

### 問 2 の解答

(1) $\mathrm{OA}=\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}$ ,
$\mathrm{OB}=\sqrt{(b_1)^2+(b_2)^2+(b_3)^2}$
$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

(2)
$$\begin{aligned}\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2 &= {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\\ &\quad -\left\{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2\right\}\\ &= 2a_1b_1+2a_2b_2+2a_3b_3\end{aligned}$$

## ＜ 21 ページ. 空間のベクトル 1 ＞

### 問 1 の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{CE}}=\overrightarrow{\mathrm{GF}}$ ,
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

### 問 2 の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ , (2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ,

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ , (4) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ ,

(5) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}=\overrightarrow{\mathrm{EO}}=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ , (6) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\mathrm{EO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
$=-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$

## ＜ 22 ページ. 空間のベクトル 2 ＞

### 問 1 の解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\0\end{pmatrix}$ , $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\begin{pmatrix}0\\a_2\\0\end{pmatrix}$ ,

$\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\begin{pmatrix}0\\0\\a_3\end{pmatrix}$

### 問 2 の解答

(1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=\sqrt{49}=7$ ,

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

## ＜ 23 ページ. 空間のベクトル 3 ＞

### 問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ , (2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$

## ＜ 24 ページ. 空間のベクトル 4 ＞

### 問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$

$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}8\\2\\4\end{pmatrix}$　　$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}3a_1\\3a_2\\3a_3\end{pmatrix}$

## ＜ 25 ページ. 空間のベクトル 5 ＞

### 問 1 の解答

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$ , (3) $k\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\\ka_3\end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$ ,

### 問 2 の解答

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5$　　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=3$

(3) $3\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}9\\3\\6\end{pmatrix}$　　(4) $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$

$|3\boldsymbol{a}|=3\sqrt{14}$　　$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$

## ＜ 26 ページ. 空間ベクトルの内積 1 ＞

### 問の解答

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=0$ , (2) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=1$ ,

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=1$ , (4) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=-1$ ,

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}=1$ , (6) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}}=1$

# < 解答 27 ～ 29 >

**< 27 ページ. 空間ベクトルの内積 2 >**

**問 1 の解答**

$$\mathrm{OA}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2 + a_3^2 \quad , \ \mathrm{OB}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + b_3^2$$

$$\mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

**問 2 の解答**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2 - (b_3 - a_3)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 - ({b_1}^2 - 2b_1a_1 + a_1^2)\right. \\
&\quad \left. -({b_2}^2 - 2b_2a_2 + {a_2}^2) - ({b_3}^2 - 2b_3a_3 + {a_3}^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + {b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 - {b_1}^2 + 2b_1a_1 - a_1^2\right. \\
&\quad \left. -{b_2}^2 + 2b_2a_2 - {a_2}^2 - {b_3}^2 + 2b_3a_3 - {a_3}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\{2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3\} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3
\end{aligned}$$

**問 3 の解答**

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

**< 28 ページ. 空間ベクトルの内積 3 >**

**問の解答**

(1) $\cos\theta = \dfrac{4+2+15}{\sqrt{1+4+9}\,\sqrt{16+1+25}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より （答） $\theta = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{-4+0}{\sqrt{4+4}\,\sqrt{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より （答） $\theta = 135^\circ = \dfrac{3\pi}{4}$

(3) $\cos\theta = \dfrac{-1-1-1}{\sqrt{1+1+1}\,\sqrt{1+1+1}} = -1$ より （答） $\theta = 180^\circ = \pi$

**< 29 ページ. 平面の方程式 >**

**問の解答**

(1) $3(x-2) + 2(y+1) + z - 3 = 0$ （答） $3x + 2y + z - 7 = 0$

(2) $a(x - q_1) + b(y - q_2) + c(z - q_3) = 0$ （答） $ax + by + cz - aq_1 - bq_2 - cq_3 = 0$

# ＜解答 30 〜 34＞

## ＜ 30 ページ. 空間のベクトルと平行四辺形の面積 ＞

**問 1 の解答**

$$S = |\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \sin\theta$$

**問 2 の解答**

$$\begin{aligned} S^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2 \times \sin^2\theta = |\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2 \times (1-\cos^2\theta) \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2 - (|\boldsymbol{a}| \times |\boldsymbol{b}| \times \cos\theta)^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 \times |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \end{aligned}$$

**問 3 の解答**

$$\begin{aligned} S^2 &= ({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)\times({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2) \\ &\qquad - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \\ &= {a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_1}^2{b_3}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_3}^2 \\ &\quad +{a_3}^2{b_1}^2+{a_3}^2{b_2}^2+{a_3}^2{b_3}^2-({a_1}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2 \\ &\quad +{a_3}^2{b_3}^2+2a_1a_2b_1b_2+2a_1a_3b_1b_3+2a_2a_3b_2b_3) \\ &= {a_1}^2{b_2}^2-2a_1a_2b_1b_2+{a_2}^2{b_1}^2 \\ &\quad +{a_1}^2{b_3}^2-2a_1a_3b_1b_3+{a_3}^2{b_1}^2 \\ &\quad +{a_2}^2{b_3}^2-2a_2a_3b_2b_3+{a_3}^2{b_2}^2 \\ &= (a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2 \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

## ＜ 32 ページ. 外積 2 ＞

**問 1 の解答**

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = 1\times1+(-2)\times2+1\times3=0$
$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = 1\times1+(-2)\times3+1\times5=0$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ より

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = -2\times3+4\times2+(-2)\times1=0$
$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = -2\times1+4\times0+(-2)\times(-1)=0$

**問 2 の解答**

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (a_2b_3-a_3b_2)b_1+(a_3b_1-a_1b_3)b_2+(a_1b_2-a_2b_1)b_3 \\ &= a_2b_1b_3-a_3b_1b_2+a_3b_1b_2-a_1b_2b_3+a_1b_2b_3-a_2b_1b_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

## ＜ 31 ページ. 外積 1 ＞

**問の解答**

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\times2+2\times3+3\times4=20$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

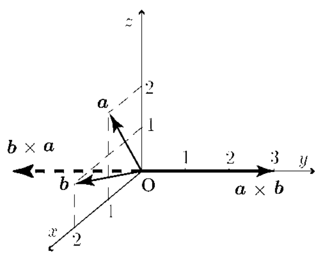
$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\times1+3\times(-1)+5\times0=-2$

## ＜ 33 ページ. 外積 3 ＞

**問の解答**

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$




## ＜ 34 ページ. 外積 4 ＞

**問の解答**

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,　(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$

(3) $(k\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2k \\ -11k \\ 5k \end{pmatrix}$ ,　(4) $\boldsymbol{a}\times 3\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$

# ＜ 解答 35 ～ 41 ＞

**＜ 35 ページ. 平行六面体の体積 ＞**
**問の解答**

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}6\\-1\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix}=27$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=0$

**＜ 36 ページ. 3 次の行列式 ＞**
**問の解答**

$$\begin{vmatrix}1&-2&10\\2&-1&10\\3&0&10\end{vmatrix}=1\times(-1)\times10+2\times0\times10$$
$$+3\times(-2)\times10-1\times0\times10$$
$$-2\times(-2)\times10-3\times(-1)\times10$$
$$=0$$

**＜ 37 ページ.3 次の行列式 ＞**
**問の解答**

(1) $\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}=-2$

(2) $\begin{vmatrix}3&2\\-1&-3\end{vmatrix}=-7$

(3) $\begin{vmatrix}2&0&4\\1&1&-1\\0&-2&3\end{vmatrix}=-6$

(4) $\begin{vmatrix}2&4&3\\1&-1&0\\3&2&1\end{vmatrix}=-21$

**＜ 38 ページ. 行列式の性質 ＞**
**問の解答**

(1) $\begin{vmatrix}3&1&4\\1&0&0\\2&-1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&0\\3&1&4\\2&-1&5\end{vmatrix}$

$=-1\times\begin{vmatrix}1&4\\-1&5\end{vmatrix}=-9$

(2) $\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&2&0\\3&-1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&2\\0&2&-1\\0&-1&3\end{vmatrix}$

$=-(-1)\times\begin{vmatrix}2&-1\\-1&3\end{vmatrix}=5$

**＜ 39 ページ. 右手系と左手系 ＞**
**問の解答**

(1) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}-2&3&1\\1&0&1\\0&1&4\end{vmatrix}=-9<0$

より $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は左手系

(2) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-1&1\\3&4&3\\0&1&5\end{vmatrix}=52>0$

より $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ は右手系

**＜ 40 ページ. 空間ベクトルと行列式 ＞**
**問の解答**

(1) （図 3 の場合） $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は同一平面上にある。

(2) （図 4 の場合） $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は同一平面上にある。

**＜ 41 ページ. 空間ベクトルの練習 1 ＞**
**問 1 の解答**

(1) $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=(8\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})+(-6\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$
$=2\boldsymbol{i}+15\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

$-4\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$
$=-16\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}+4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$
$=-12\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$

(2) $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{4^2+3^2+2^2}=\sqrt{16+9+4}=\sqrt{29}$
$|4\boldsymbol{A}|=4\sqrt{29}$

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,
$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\sqrt{4+36+1}=\sqrt{41}$ ,
単位ベクトルは $\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{\sqrt{41}}=\dfrac{2}{\sqrt{41}}\boldsymbol{i}+\dfrac{6}{\sqrt{41}}\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{\sqrt{41}}\boldsymbol{k}$

**問 2 の解答**

(1) $2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

(2) $-3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$

(3) $-5\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{25+36+25}}\Big(5\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}\Big)=\dfrac{5}{\sqrt{86}}\boldsymbol{i}-\dfrac{6}{\sqrt{86}}\boldsymbol{j}-\dfrac{5}{\sqrt{86}}\boldsymbol{k}$

(5) $|-5\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}|=\sqrt{25+36+25}=\sqrt{86}$

$\dfrac{2}{\sqrt{86}}\Big(-5\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}\Big)=\dfrac{-10}{\sqrt{86}}\boldsymbol{i}+\dfrac{12}{\sqrt{86}}\boldsymbol{j}+\dfrac{10}{\sqrt{86}}\boldsymbol{k}$

(6) $(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$

# ＜ 解答 42 〜 43 ＞

## ＜ 42 ページ. 空間ベクトルの練習 2＞

### 問 1 の解答

(1) $2\boldsymbol{A} = -6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}$ は $\boldsymbol{A}$ の 2 倍の長さである。

なぜならば

$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$

$|2\boldsymbol{A}| = \sqrt{36+16+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$ より

$|2\boldsymbol{A}| = 2 \times |\boldsymbol{A}|$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A} = -\frac{3}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} - \frac{4}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j} - 2\sqrt{2}\boldsymbol{k}$

は $\boldsymbol{A}$ の $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の長さである。なぜならば

$$\left|\frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+4+16}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{29}}{2} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{\sqrt{2}}$$

(3) $\frac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{29}} = -\frac{3}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j} - \frac{4}{\sqrt{29}}\boldsymbol{k}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\boldsymbol{A} = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{29}}\boldsymbol{k}$

### 問 2 の解答

(1)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{3}{\sqrt{9+25}\times 1} = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{34}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

(2)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{2}{\sqrt{4+9}\times 1} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

(3)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

## ＜ 43 ページ. 空間ベクトルの練習 3＞

### 問の解答

(1)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{i}|} = \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{4}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

(2)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{j}|} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{29}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{29}}$$

(3)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{k}|} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{16}{29}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$$

(4)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|} = \frac{4+9}{\sqrt{29}\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{13}{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

(5)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|} = \frac{4+16}{\sqrt{29}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{20}{29}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

(6)

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|} = \frac{9+16}{\sqrt{29}\times 5} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$