大学数学への道

基礎数学

シリーズ 5

TEXclub

『整関数の微分積分』がよくわからないときに開く本

改訂版

例題で式の計算がよくわかる！

内容

- ★ 整関数の微分
- ★ 関数の増減
- ★ 速度
- ★ 整関数の不定積分
- ★ 定積分
- ★ 面積

井上昌昭 著

高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

< 極限値 >

関数 $f(x)$ において，x が a 以外の値を取りながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づくことを，

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad f(x) \to \alpha$$

または

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

と表し，α を $x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という。a に近づく変数は x 以外でもよい。

例 1 $\displaystyle \lim_{x \to 5} \left(x^2 - 3x\right) = 10, \quad \lim_{x \to 1} \frac{3x}{x+1} = \frac{3}{2}, \quad \lim_{h \to 0} \frac{h+3}{2h+1} = 3$

例 2 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$

例 3 $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6+h) = 6$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{7x+3}{x+1} =$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} =$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} =$

(4) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} =$

< 関数の値 >

一般に y が x の関数であることを

$$y = f(x)$$

のような記号で表す。

例１ 関数 $y = x^2 + 5x - 4$ を $y = f(x)$ と表すと

$$f(x) = x^2 + 5x - 4 \qquad \left(\, f(\square) = \square^2 + 5 \times \square - 4 \,\right)$$

である。このとき $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ に対応する関数の値 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ は次のように求められる。

$$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 4 = 1 + 5 - 4 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 5 \times 2 - 4 = 4 + 10 - 4 = 10$$

$$f(3) = 2^3 + 5 \times 3 - 4 = 8 + 15 - 4 = 19$$

問１ $f(x)$ が以下の場合に関数 $f(x)$ のそれぞれの値を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(2) =$

(2) $f(x) = x^3 - 2x$, $f(1) =$, $f(2) =$, $f(3) =$

(3) $f(x) = 10$, $f(-3) =$, $f(0) =$, $f(3) =$

(4) $f(x) = (x^2 - 1)(x + 1)$, $f(0) =$, $f(1) =$, $f(5) =$

例２ $f(x) = x^2 + 3x$ のとき

$$f(1) = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad , \quad f(1 + h) = (1 + h)^2 + 3(1 + h)$$

$$f(a) = a^2 + 3a \quad , \quad f(a + h) = (a + h)^2 + 3(a + h)$$

問２ $f(x)$ が以下の場合に $f(a)$ および $f(a + h)$ を求めよ。ただし k は定数とする。

(1) $f(x) = x^3$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

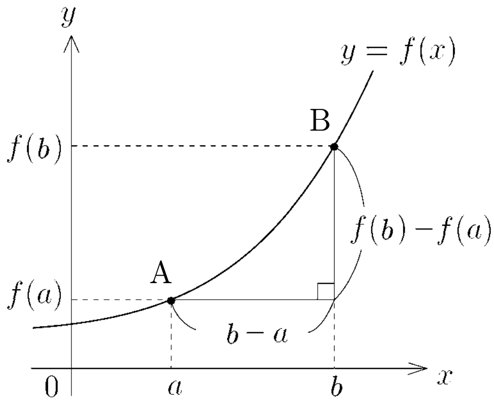
(2) $f(x) = x + 1$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

(3) $f(x) = 2x^2 - 5$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

(4) $f(x) = x^2 + 3x$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

(5) $f(x) = k$, $f(a) =$, $f(a + h) =$

< 平均変化率 >



関数 $y=f(x)$ において,
x の値が a から b まで変化するとき ,

x の変化量は　　$b-a$

y の変化量は　　$f(b)-f(a)$

である。このとき

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を, x の値が a から b まで変化するときの $f(x)$ の **平均変化率** という。

例　$f(x)=x^2$ に対し, x が 2 から 5 まで変わるときの平均変化率は

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{5^2-2^2}{5-2}=\frac{25-4}{3}=\frac{21}{3}=7$$

問 1　$f(x)$ が次の各場合に, x が 1 から 3 まで変わるときの
平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=4x$

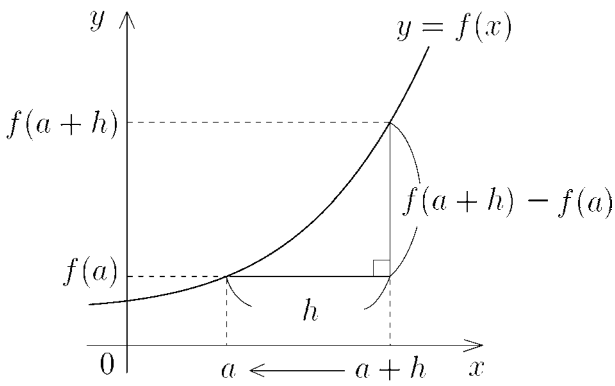
(2)　$f(x)=2x^2$

問 2　$f(x)$ が次の各場合に, x が a から b まで変わるときの
平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=4x$

(2)　$f(x)=x^2$

＜微分係数１＞



関数 $y = f(x)$ に対し，x の値が
a から $a+h$ に変わるときの
平均変化率

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を考える。

ここで x の増分 h をかぎりなく 0 に近づけたとき，平均変化率が，あるきまった数に近づくならば，その極限値を，関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における **微分係数** といい，$f'(a)$ で表す。

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \quad (x = a \text{ における微分係数})$$

例　$f(x) = 5x^2$　の $x = 3$ における微分係数 $f'(3)$ を求める

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(3+h)^2 - 5 \times 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{5(9 + 6h + h^2) - 5 \times 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{30h + 5h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (30 + 5h) = 30$$

問　$f(x)$ と a が以下の場合に $f'(a)$ を求めよ。

(1)　$f(x) = 4x$,　$a = 2$,　$f'(2) =$

(2)　$f(x) = 2x^2$,　$a = 1$,　$f'(1) =$

(3)　$f(x) = 10$,　$a = 5$,　$f'(5) =$

＜微分係数 2 ＞

例　関数 $f(x)=3x^2$ に対し，次の微分係数を求める。

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\times(1+h)^2-3\times 1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6+3h)=6$$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\times(2+h)^2-3\times 2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12h+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(12+3h)=12$$

以下同様に $f'(3)$，$f'(4)$ 等を求めたい。
そこで一般に $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めておく。

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\times(a+h)^2-3\times a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6ah+3h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(6a+3h)=6a$$

であるから，$f'(a)=6a$ より，$f'(3)=6\times 3=18$　$f'(4)=6\times 4=24$ 等が求まる。
このように，同じ関数のいくつかの微分係数は，ひとつひとつを計算しなくても，

$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ を求めておいて，
a に必要な値を代入することによって求められる。

問　関数 $f(x)=4x^2$ に対して，次の問を求めよ。

(1)　$f'(a)$ を求めよ。

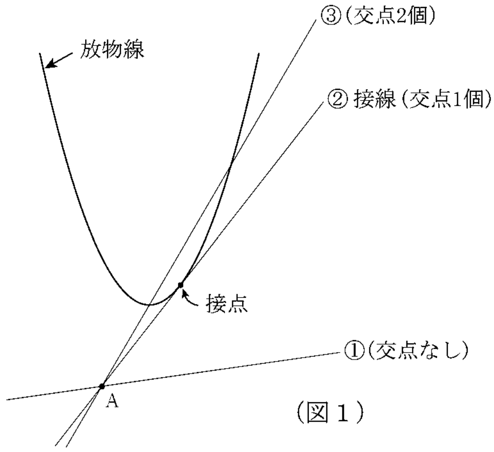
$f'(a)$ ＝

(2)　$f'(3), f'(0), f'(-1), f'(-5)$ を求めよ。

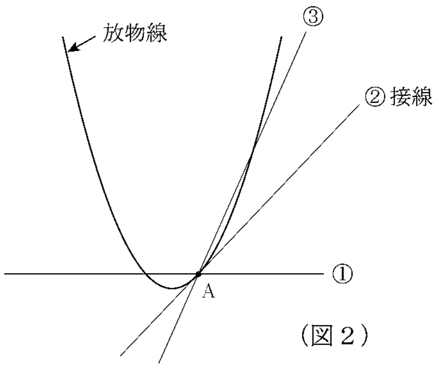
$f'(3)=$　　　　$f'(0)=$　　　　$f'(-1)=$　　　　$f'(-5)=$

＜接線＞

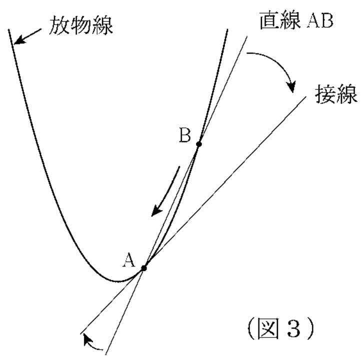
放物線の外側にある点Ａを通る直線は図１のように３通りある。放物線と直線との交点の個数で分類すると，
①:交点なし
②:交点は１個
③:交点は２個
となる。直線②を**接線**といい，そのときの交点を**接点**という。
図２のように点Ａが放物線上にあるときは，直線②が接線であり，点Ａが接点である。



(図１)



(図２)



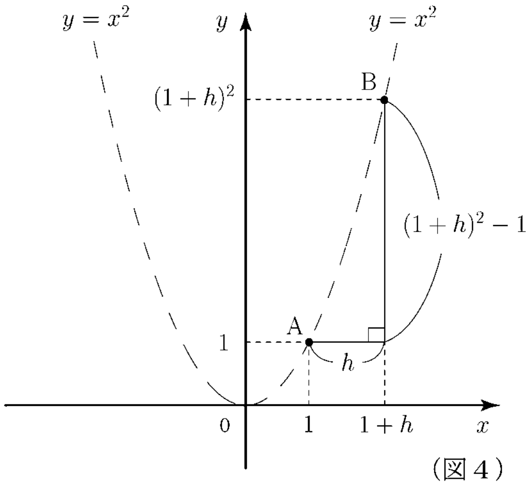
(図３)

図２の接線②を求めるためには，図３のように放物線上にＡ以外の点Ｂをとり，直線ABを引く。点Ｂを点Ａに近づけると直線ABは接線に近づく。

問　放物線 $y=x^2$ 上の点Ａ $(1\,,1)$ を接点とする接線を求めたい。小さい正数 h に対し，放物線上の点をＢ $(\,1+h\,,(1+h)^2\,)$ とする(図4)。

(1) 直線ABの傾きを h で表せ。(できるだけ簡単な式になおす。)

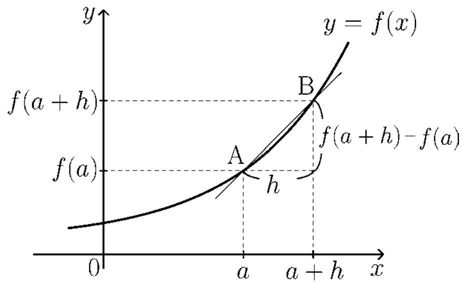
(2) $h=0.1$ のときのABの傾きを求めよ。



(図４)

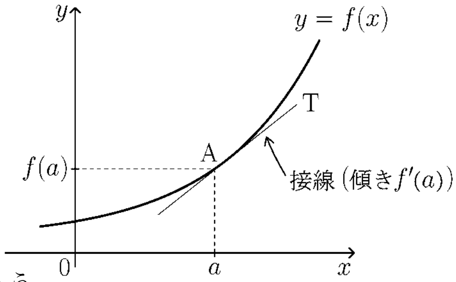
(3) h が限りなく 0 に近づくとき, AB の傾きは何に近づくか？

＜接線の傾き＞



微分係数の意味を関数のグラフについて考えてみる。
関数 $y=f(x)$ のグラフ上に，x 座標が，それぞれ，a , $a+h$ である２点 A , B をとると，$y=f(x)$ の $x=a$ から $x=a+h$ までの平均変化率 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ は，直線 AB の傾きを表す。ここで h を０に近づけると，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \longrightarrow f'(a) \quad (h\to 0 \text{ のとき})$$



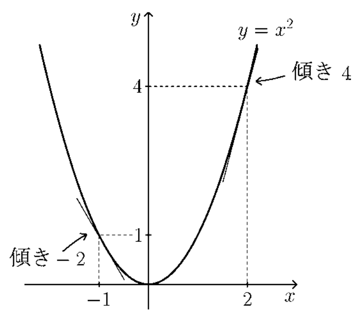
であるから，直線 AB は，傾きが $f'(a)$ であるような直線 AT に限りなく近づいていく。この直線 AT を点 A における曲線 $y=f(a)$ の**接線**といい，点 A を**接点**という。

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における **微分係数 $f'(a)$** は，この関数のグラフ上の点 $\big(a\ ,\ f(a)\big)$ における **接線の傾き** である。

例　関数 $f(x)=x^2$ の微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a \quad \text{であるから,}$$



点 (2 , 4) における接線の傾きは $f'(2)=2\times 2=4$
点 (−1 , 1) における接線の傾きは $f'(-1)=2\times(-1)=-2$
である。

問　関数 $f(x)=2x^2$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 微分係数 $f'(a)$ を求めよ。

$f'(a)=$

(2) 点 (3 , 18) における接線の傾きを求めよ。

＜ 導関数 1 ＞

例 1 関数 $f(x) = x^2 - 5x$ に対し，微分係数 $f'(a)$ は,

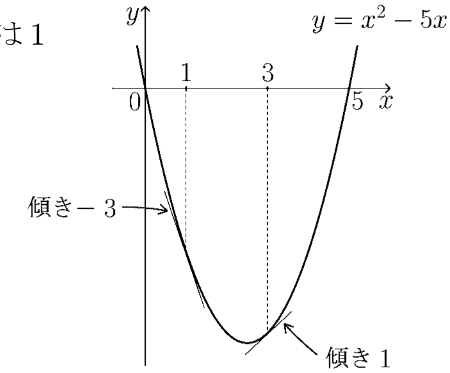
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\big((a+h)^2 - 5(a+h)\big) - (a^2 - 5a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a - 5 + h) = 2a - 5$$

となる。$f'(a) = 2a - 5$ は $x = a$ における接線の傾きを意味する。
たとえば

$f'(1) = 2 \times 1 - 5 = -3$ より $x = 1$ における接線の傾きは -3

$f'(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$ より $x = 3$ における接線の傾きは 1



である。$f'(a) = 2a - 5$ は，a をいろいろな値をとる変数とみれば，a の関数になっている。

そこで，$f'(a) = 2a - 5$ の a を x でおきかえた

$$f'(x) = 2x - 5$$

を，関数 $f(x) = x^2 - 5x$ の **導関数** という。

一般に関数 $f(x)$ に対して，$x = a$ における微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を a の関数とみて，a を x でおきかえた関数

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \qquad \big(f(x) \text{ の導関数}\big)$$

を，関数 $f(x)$ の **導関数** という。

例 2 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\big((x+h)^2 - 3(x+h) + 2\big) - (x^2 - 3x + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 3) = 2x - 3$$

問 $f(x) = x^2 - 5$ の導関数を求めよ。

< 導関数 2 >

関数 $y = f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を求めることを，関数 $f(x)$ を $\boldsymbol{x}$ **について微分する**，あるいは，単に**微分する**という。

例題　関数 $f(x) = x^3$ を微分せよ。

(解)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \ = \ 3x^2 \end{aligned}$$

問　次の関数を微分せよ。

(1) $f(x) = x$,　$f'(x) =$

(2) $f(x) = x^2$,　$f'(x) =$

(3) $f(x) = 1$,　$f'(x) =$

< パスカルの三角形 >

例 $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$

$$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$

$$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

問 1 次の展開式を求めたい。$\square$ の中に適当な数字を入れよ。

(1) $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$=\square\times a^4+\square\times a^3b+\square\times a^2b^2+\square\times ab^3+\square\times b^4$$

(2) $(a+b)^5=(a+b)\left(\square\times a^4+\square\times a^3b+\square\times a^2b^2+\square\times ab^3+\square\times b^4\right)$

$$=\square\times a^5+\square\times a^4b+\square\times a^3b^2+\square\times a^2b^3+\square\times ab^4+\square\times b^5$$

問 2 $(a+b)^n$ の展開式の係数だけを取り出すと，右のようになる。

$(a+b)^0=1$ ………… 1

$(a+b)^1=1\times a+1\times b$ ………… 1 1

$(a+b)^2=1\times a^2+2\times ab+1\times b^2$ ………… 1 2 1

$(a+b)^3=1\times a^3+3\times a^2b+3\times ab^2+1\times b^3$ ………… 1 3 3 1

$(a+b)^4=\square\times a^4+\square\times a^3b+\square\times a^2b^2+\square\times ab^3+\square\times b^4$ ………… $\square\ \square\ \square\ \square\ \square$

$(a+b)^5=\square\times a^5+\square\times a^4b+\square\times a^3b^2+\square\times a^2b^3+\square\times ab^4+\square\times b^5$ $\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square$

右のようにピラミッド状に並んだ数を**パスカルの三角形**という。
これは上の段の数字がわかると，下の段の数字がわかるようになっている。
この法則を発見し，$(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

$$(a+b)^6=\square\times a^6+\square\times a^5b+\square\times a^4b^2+\square\times a^3b^3+\square\times a^2b^4+\square\times ab^5+\square\times b^6$$

＜ 導関数 3 ＞

例 $f(x) = x^4$ を微分したい。4 乗の展開式

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

を使うと

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

問 1 $f(x) = x^5$ を微分せよ。

問 2 $f(x) = x^6$ を微分せよ。

＜ 導関数 4 ＞

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を y' や記号 $\dfrac{dy}{dx}$ で表すこともある。

例えば, $f(x)=x^2$ のとき, $f'(x)=2x$ だから,

$$y=x^2 \text{ の導関数は } y'=2x$$

と表すこともある。これを更に略して,

$$\boxed{\left(x^2\right)'=2x}$$

と記す。

問 1 表を完成し，右の $\boxed{}$ に適当な文字を入れよ。

y	x	x^2	x^3	x^4
y'		$2x$		

$\left(x\right)' = \boxed{}$

$\left(x^3\right)' = \boxed{}$

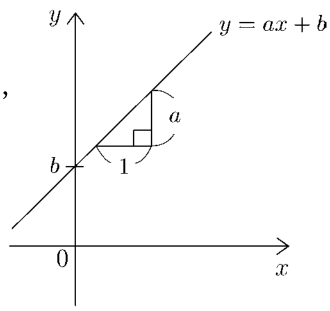
$\left(x^4\right)' = \boxed{}$

問 2 上の問から，一般に $y=x^n$ の導関数を類推せよ。

$\left(x^n\right)'=$

問 3 傾き a，切片 b の直線 $y=ax+b$ に対し，

導関数 y' を求めたい。$f(x)=ax+b$ とおくと,



$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} \end{aligned}$$

である。この計算を完成し，y' を求め,

y' は元の直線の何を意味するか答えよ。

(解) $y'=$

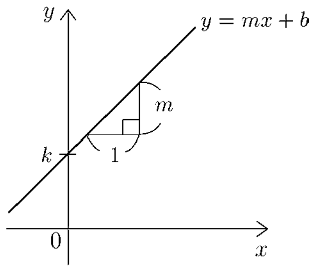
問 4 定数 k に対し, 定数関数 $y=k$ の導関数 y' を求めたい。

$f(x)=k$ とおいて $f'(x)$ を求めよ。

$$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

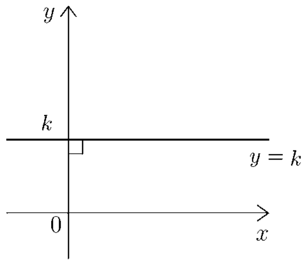
＜ 導関数 5 ＞

問 1 関数 $y = mx + k$ 　$(m$ と k は定数$)$
のグラフは，傾き m ，切片 k の直線を表す。
これを微分せよ。



(解)　$(mx + k)' =$

問 2 関数 $y = k$ 　$(k$ は定数$)$ のグラフは，
傾き 0 (ゼロ) の直線を表す。
これを微分せよ。



(解)　$(k)' =$

例 関数 $y = x^3$ の導関数は $y' = 3x^2$ である。つまり

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

である。これを利用して， $5x^3$ を微分する。

$$\left(5x^3\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^3 - 5x^3}{h} = \lim_{h \to 0} 5 \times \left\{ \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \right\}$$

$$= 5 \times \left(x^3\right)' = 5 \times 3x^2 = 15x^2$$

同様にして， $7x^3$ を微分する。

$$\underline{\left(7x^3\right)' = 7 \times \left(x^3\right)' = 7 \times 3x^2 = 21x^2}$$

問 3 $\left(x^3\right)' = 3x^2$ を利用して kx^3 $(k$ は定数$)$ を微分せよ。

(解)　$\left(kx^3\right)' =$

問 4 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を利用して，次の関数を微分せよ。

(1)　$\left(7x^4\right)' =$

(2)　$\left(5x^2\right)' =$

(3)　$\left(\dfrac{2}{3}x\right)' =$

< 導関数 6 >

例 $\left(x^2\right)' = 2x$，$\left(x^3\right)' = 3x^2$，すなわち

$$\left(x^2\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x$$

$$\left(x^3\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

を利用して $x^2 + x^3$ を微分する。

$$\begin{aligned}\left(x^2 + x^3\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\left\{(x+h)^2 + (x+h)^3\right\} - \left\{x^2 + x^3\right\}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} + \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right\} \\ &= \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 2x + 3x^2\end{aligned}$$

同様に

$$\underline{\left(x^2 - x^3\right)' = \left(x^2\right)' - \left(x^3\right)' = 2x - 3x^2}$$

問 1 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$(k)' = 0$ (k は定数) を利用して，次の関数を微分せよ。

(1) $\left(x^3 + 4\right)' =$

(2) $\left(x^4 - x^5\right)' =$

(3) $\left(x^2 - x + 3\right)' =$

(4) $\left(4x^2 + 5x^3 - 6x^4\right)' =$

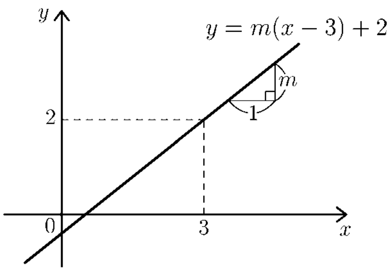
問 2 一般の関数 $f(x)$ と $g(x)$ および定数 k に対して，次の式を $f'(x)$ と $g'(x)$ と k の式で表せ。

(1) $\left\{k \times f(x)\right\}' =$

(2) $\left\{f(x) + g(x)\right\}' =$

(3) $\left\{f(x) - g(x)\right\}' =$

＜接線の方程式＞



例 1 m を定数とする関数

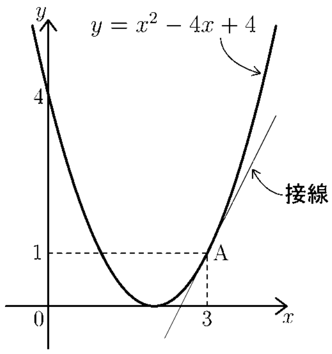
$$y=m(x-3)+2$$

は，$x=3$ のとき $y=2$ であるから，

点 $(3,2)$ を通り，傾き m の直線の方程式を意味する。

問 1 a,b,m を定数とする。**点 (a,b) を通り，傾き m の直線**の方程式を求めよ。

(答)



例 2 関数 $y=x^2-4x+4$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(3,1)$

における接線の方程式を求めたい。

$f(x)=x^2-4x+4$ とおくと，<u>接線の傾き m は</u>

<u>$x=3$ における微分係数 $f'(3)$ である。</u>

$$f'(x)=(x^2-4x+4)'=\underset{\underset{2x}{\parallel}}{\underline{(x^2)'}}-4\times\underset{\underset{1}{\parallel}}{\underline{(x)'}}+\underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{(4)'}}=2x-4$$

より

$$m=f'(3)=2\times3-4=2$$

となる。点 $\mathrm{A}(3,1)$ を通り傾き m の直線の方程式は $y=m(x-3)+1$ だから

$$y=m(x-3)+1=2(x-3)+1=2x-5$$

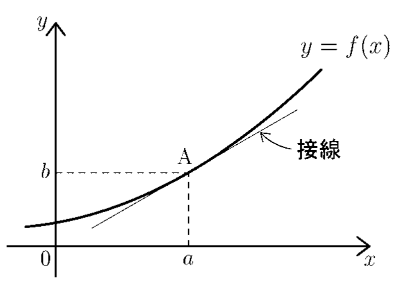
より，接線の方程式は <u>$y=2x-5$</u> となる。

問 2 $y=x^2+x$ 上の点 $\mathrm{A}(1,2)$ における接線の方程式を求めよ。

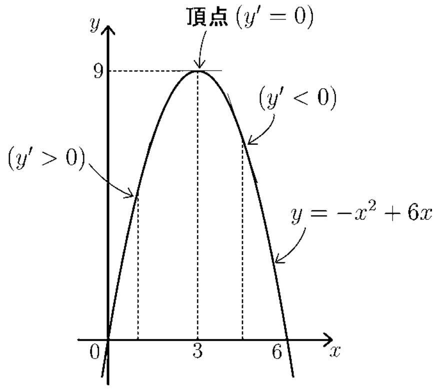
問 3 一般の関数 $y=f(x)$ のグラフ上の

点 $\mathrm{A}(a,b)$ における接線の傾きは $f'(a)$

である。接線の方程式を求めよ。



＜関数の増減 1＞



例 2 次関数 $y=-x^2+6x$ の導関数は

$$y'=-2x+6=-2(x-3)$$

となる。x の範囲によって y' のプラス，マイナスを場合分けする。

(1) $y'=0$ となる x の値は $\underline{x=3}$ である。
このとき，$x=3$ における接線の傾き y' は 0 (ゼロ) である。すなわち，2 次関数の頂点を意味する。
$x=3$ のとき $y=9$ より，頂点の座標は $(3,9)$ である。

(2) $y'>0$ となる x の範囲は $\underline{x<3}$ である。
このとき，接線の傾き y' はプラスであるから，グラフは右上がり ($\nearrow$) になる。y の値は (x の増加とともに) **増加**する。

(3) $y'<0$ となる x の範囲は $\underline{x>3}$ である。
このとき，接線の傾き y' はマイナスであるから，グラフは右下がり ($\searrow$) になる。y の値は (x の増加とともに) **減少**する。

以上 (1),(2),(3) をまとめて，右の表にした。
このような表を**増減表**という。増減表を作れば，グラフのだいたいの様子がわかる。
2 次関数の場合は，頂点の座標がわかる。
この場合の頂点の座標は $(3,9)$ である。

x	$x<3$	3	$3<x$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	9	$\searrow$

問 次の 2 次関数を微分し，増減表を作り，頂点の座標を求めよ。

(1) $y=-x^2+4x+3$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

頂点 (　　,　　)

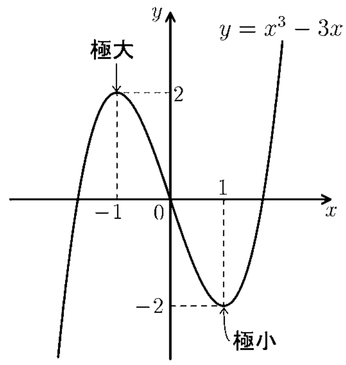
(2) $y=2x^2+4x-5$

$y'=$

x	$x<$		$<x$
y'		0	
y			

頂点 (　　,　　)

＜関数の増減 2 ＞



例 関数 $y = x^3 - 3x$ の導関数は

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

となる。この関数の増減表を以下のようにして作る。

(1) $y' = 0$ となる x の値は $x = \pm 1$ である。

そこで $x = 1$ と $x = -1$ で範囲を分ける。

(2) $x > 1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = 2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

(3) $-1 < x < 1$ のとき $y' < 0$
(たとえば $x = 0$ のとき $y' = -3 < 0$ であるから)

(4) $x < -1$ のとき $y' > 0$
(たとえば $x = -2$ のとき $y' = 12 - 3 = 9 > 0$ であるから)

$(-1 < x < 1)$
$(x < -1)$ $(1 < x)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

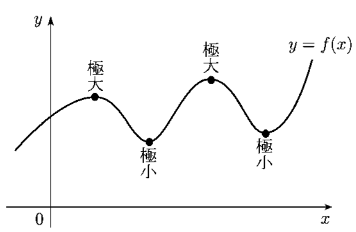
右の増減表で，x の範囲は省略した。このように書く時は常に右の方が x の値の大きい範囲であると約束することにする。この表をもとにグラフを描くと，上図のようになる。

(ア) $x = -1$ の近くでは，$x = -1$ のとき y は最大になる。
このような場合 **極大** といい $\underline{x = -1 \text{ のとき極大値 } y = 2}$ と書く。

(イ) $x = 1$ の近くでは，$x = 1$ のとき y は最小になる。
このような場合 **極小** といい $\underline{x = 1 \text{ のとき極小値 } y = -2}$ と書く。

(注 1) 極大値と極小値とをあわせて，**極値**という。

(注 2) 極大と極小は 1 個だけとは限らない。(右図参照)



問 次の関数を微分し，増減表を作り，極値を調べよ。

(1) $y = 12x - x^3$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$

$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$y' =$

x	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
y'		0		0	
y					

$x =$ 　　のとき　極大値 $y =$

$x =$ 　　のとき　極小値 $y =$

＜ 最大最小 1 ＞

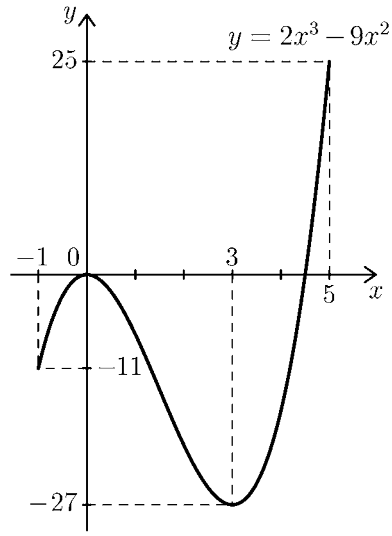
例題 次の関数の最大値と最小値を，指定された定義域 (x の範囲) 内で求めよ。

$$y = 2x^3 - 9x^2 \qquad \left(-1 \leqq x \leqq 5\right)$$

(解) $y' = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$

より $-1 \leqq x \leqq 5$ における増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\times$
y	-11	$\nearrow$	0	$\searrow$	-27	$\nearrow$	25



よって，この関数は

$\underline{x = 5 \text{ のとき，最大値 } y = 25}$ をとり，

$\underline{x = 3 \text{ のとき，最小値 } y = -27}$ をとる。

(注) $x = 0$ のとき，極大であるが最大ではない。
$x = 3$ のときは極小かつ最小になっている。
最大や最小は定義域によって違ってくる。

問 次の関数に対し，指定された定義域内で増減表を書き，最大値と最小値を求めよ。

$$y = -x^3 + 3x^2 - 1 \qquad \left(1 \leqq x \leqq 3\right)$$

(解)

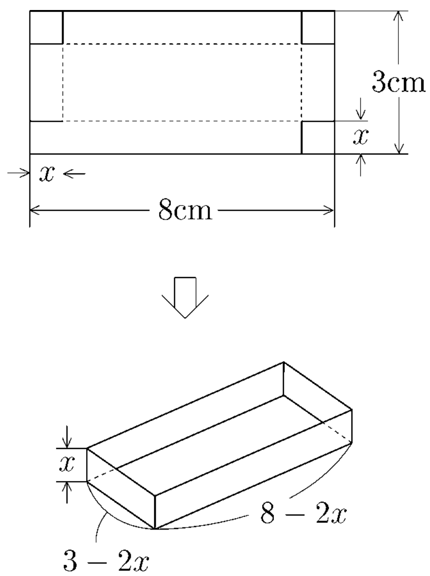
x	1		3
y'	$\times$		$\times$
y			

(答) $x =$ 　　　のとき最大値 $y =$ 　　　

$x =$ 　　　のとき最小値 $y =$ 　　　

＜ 最大最小 2 ＞

例題 たて 3cm , よこ 8cm の長方形のブリキの板の 4 角から，一辺 $x$cm の正方形を切り取り，右上図の点線のところを折り曲げて，右下図のようなふたのない容器を作る。容器の容積 $y$cm^3 を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？



(解) 容器のたては $3-2x$(cm), よこは $8-2x$(cm), 高さは x(cm) だから，容積 y(cm^3) は

$$y=(3-2x)(8-2x)x=4x^3-22x^2+24x$$

である。題意より $x>0$ でしかも $2x<3$ であるから，x の範囲は $0<x<\dfrac{3}{2}$ である。
この範囲内で増減表を作り，y の最大値を求める。y を微分すれば

$$y'=12x^2-44x+24=4(3x-2)(x-3)$$

でかつ，

$$x=\frac{2}{3} \text{ のとき}$$

$$y=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3-22\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+24\times\frac{2}{3}=\frac{200}{27}$$

より，増減表は右のようになる。よって

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{200}{27}$	$\searrow$	0

(答) $x=\dfrac{2}{3}$(cm) のとき，最大容積 $y=\dfrac{200}{27}$(cm^3) をとる。

問 一辺 6cm の正方形のブリキの板から，例題と同様にして，ふたのない容器を作るとき，容器の容積 y(cm^3) を最大にするには，切り取る正方形の一辺の長さ x を何 cm にすればよいか？
x の範囲を求め，その範囲内で増減表を作り，y の最大値を求めよ。

(解)

x	0	$\cdots$		$\cdots$	
y'			0		
y					

< 微分記号 >

関数 $y = f(x)$ の導関数の定義は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

である。導関数を

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

等の記号で表す (全て同じ意味である)。$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{df}{dx}$ 等の記号は，変数が x である関数の導関数 (x についての微分) であることを明記するためにある。
変数が x 以外の文字でも同じである。変数 t の関数 $y = f(t)$ の導関数を

$$y' = f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)$$

等の記号で表す。

例　$y = x^3 - 2x^2$ のとき　$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x$

$y = t^3 - 2t^2$ のとき　$\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t$

$S = r^3 - 2r^2$ のとき　$\dfrac{dS}{dr} = 3r^2 - 4r$

微分の公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は，変数が変わっても同様に使用できる。

問　次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$y = x^2 - x + 3$　　$\dfrac{dy}{dx} =$

(2)　$y = 4 - 9.8t$　　$\dfrac{dy}{dt} =$

(3)　$\ell = 3t^2 - 2t$　　$\dfrac{d\ell}{dt} =$

(4)　$S = \pi r^2$ (π は円周率)　　$\dfrac{dS}{dr} =$

(5)　$V = \dfrac{4}{3} \pi r^3$　　$\dfrac{dV}{dr} =$

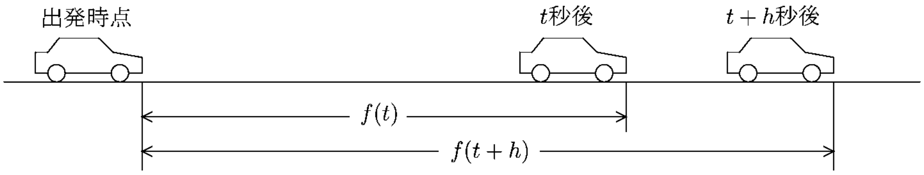
＜速度＞

平均の速度は移動距離を移動にかかった時間で割ったものである。

$$\boxed{\text{平均速度} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}}$$

車が 144 km を 2 時間で走れば平均速度は時速 72 km であるが，常にこのスピードで走るわけではない。信号があれば止まるし，72 (km/h) 以上の速度を出すこともある。実際に車に乗ってスピードメーターを見ると，スピードメーターで表示される速度は刻一刻と変わっている。 このようなスピードメーターで表示される各時刻の速度を「**瞬間の速度**」といい,「平均速度」と区別する。

「瞬間の速度」を直線の上を走る車の例で説明する。
出発時点から t 秒後までに走った距離を $f(t)$ とする。$t+h$ 秒後までには $f(t+h)$ だけ走ったことになる。



t 秒後から $t+h$ 秒後までの h 秒間の平均速度は $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$ である。
「瞬間」というのは「時間間隔がゼロ」という意味であるから，時間間隔 h を 0(ゼロ) に近づけたときの平均速度の極限で瞬間の速度を計算する。すなわち

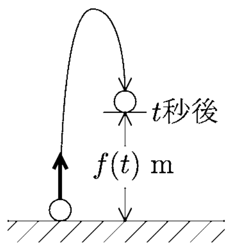
$$\boxed{t\text{ 秒後の瞬間の速度} = \lim_{h\to 0}(t\text{ 秒後から } t+h \text{ 秒後までの平均速度}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = f'(t)}$$

となる。この「瞬間の」というのを略して，単に「t 秒後の速度」という。

問 地上から初速 19.6 (m/s) で真上にボールを投げ上げた。
t 秒後の高さ $f(t)$ は (空気抵抗を考えないと)

$$f(t) = -4.9t^2 + 19.6t \quad \text{(m)}$$

となる。



(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$v(t) = f'(t) =$ 　　　　　　　　　(m/s)

(2) ボールが最高点に達するのは何秒後か。

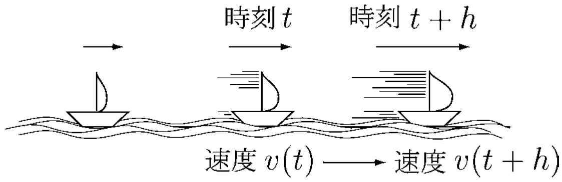
(3) 最高点の高さを求めよ。

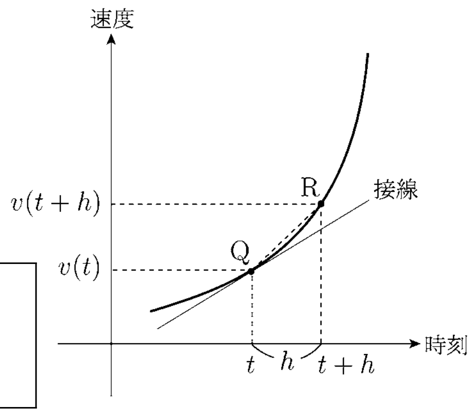
< 加速度 >

平均の加速度は速度の変化量を時間で割ったものである。

平均加速度 $= \dfrac{\text{速度の変化量}}{\text{時間}} = \dfrac{\text{最後の速度}-\text{最初の速度}}{\text{時間}}$

例　湖に浮かぶヨットが追い風を受けてまっすぐ進んでいるとする。風がしだいに強くなるとヨットの速度はどんどん速くなる。





時刻 t における速度 $v(t)$ のグラフが右図の場合

平均の加速度 $\left(\begin{array}{c}t\text{ から }t+h\text{ まで}\\ \text{の速度の上昇率}\end{array}\right) = \dfrac{v(t+h)-v(t)}{h} =$ 線分 QR の傾き

瞬間の加速度 $\left(\begin{array}{c}\text{時刻 }t\text{ での}\\ \text{速度の上昇率}\end{array}\right) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)$ ＝点 Q における接線の傾き

一般に時刻 t での速度が $v(t)$ のとき，

時刻 t での瞬間の加速度 $= \displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h} = v'(t)$

と定め，これを単に「**時刻 t での加速度**」と略す。

(注) 上の例は速度が上昇していく場合であり，加速度はプラスになる。逆に速度が減少していく場合は加速度はマイナスになる。

速度 ($velocity$) を通常 v で表し，加速度 ($accelaration$) を通常 a で表す。
時刻 t における位置を $x(t)$，速度を $v(t)$，加速度を $a(t)$ とすると

$v(t) = x'(t)$　$\cdots$　速度＝位置 $x(t)$ の導関数

$a(t) = v'(t)$　$\cdots$　加速度＝速度 $v(t)$ の導関数
$\quad\;\; = x''(t)$　$\cdots$　　　＝位置 $x(t)$ の 2 階導関数

である。

問　t 秒後の位置 $x(t)$ が以下の場合に速度 $v(t)$ と加速度 $a(t)$ を求めよ。

(1) $x(t) = 3t^2 - 4t + 5$

$v(t) =$

$a(t) =$

(2) $x(t) = 2t^3 + 4t^2 - 5t + 6$

$v(t) =$

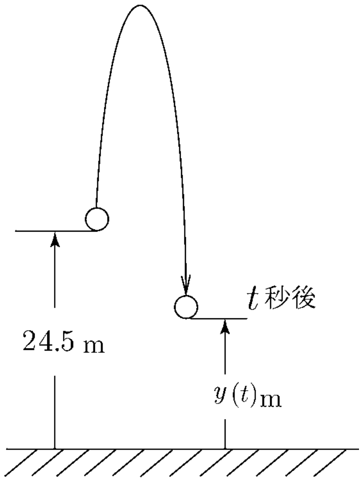
$a(t) =$

< 速度の応用 1 >

問 地上 24.5m から物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 19.6t + 24.5 \ (\mathrm{m})$$

となったとせよ。



(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

$v(t) = y'(t) =$

(2) 初速度 何 m/s で物体を投げ上げたか? $t = 0$ のときの v の値で答えよ。

$v(0) =$

(3) 何秒後に最も高くなるか? 速度が 0 ($v = 0$) のときの t の値で答えよ。

(4) 最高点は地上何 m か?

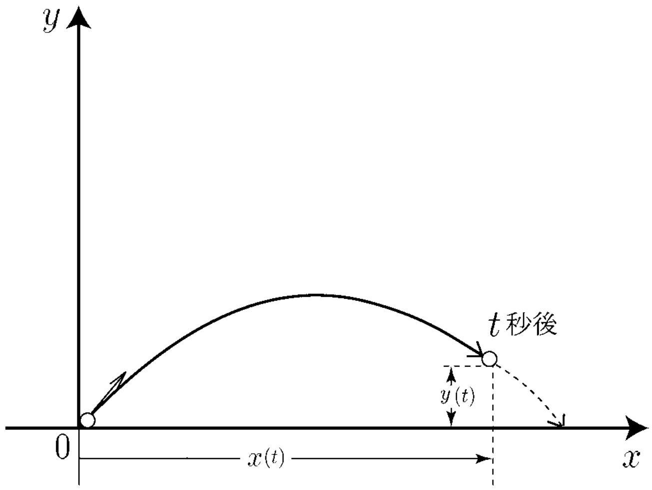
(5) 何秒後に地上に落下するか?

< 速度の応用 2 >

問 ボールを投げたとき t 秒後のボールの位置を座標平面の点として表すことにする。
t 秒後の水平距離を $x(t)$
t 秒後の垂直距離を $y(t)$
とする。今

$$\begin{cases} x(t) = 14.7t \\ y(t) = -4.9t^2 + 19.6t \end{cases}$$

の場合に次の問に答えよ。



(1) t 秒後の水平方向の速度 $v_x(t)$ を $x(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$

(2) t 秒後の垂直方向の速度 $v_y(t)$ を $y(t)$ を微分することにより求めよ。

$v_y(t) = y'(t) =$

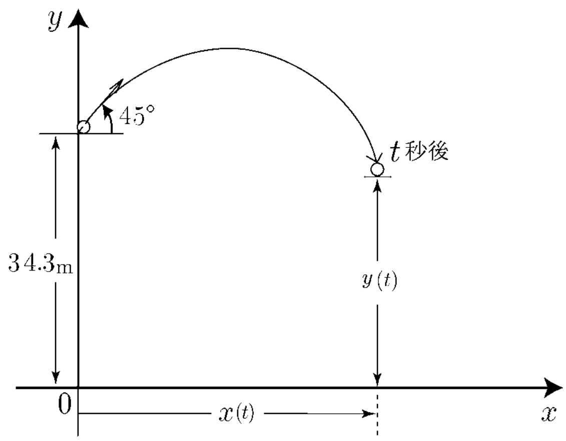
(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か?

(4) 最高点の高さを求めよ。

(5) 地上に落下するのは何秒後か?

(6) 落下したとき，投げた地点からの水平距離を求めよ。

< 速度の応用 3 >



問　地上 34.3m の高さから物体を
45° の角度で投げ上げた。
t 秒後の位置 $\big(x(t), y(t)\big)$ は

$$\begin{cases} x(t) = 29.4t & (\text{水平距離}) \\ y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 34.3 & (\text{垂直距離}) \end{cases}$$

であるとする。

(1) t 秒後の水平速度 $v_x(t)$，垂直速度 $v_y(t)$ を求めよ。

$v_x(t) = x'(t) =$ 　　　　　　　　　　　　　　, $v_y(t) = y'(t) =$

(2) 最高点に達するのは何秒後か？

(3) 最高点の高さとそのときの水平距離を求めよ。

高さ $=$

水平距離 $=$

(4) 地上に落下するのは何秒後か？

(5) 落下したときの水平距離を求めよ。

< 微分の応用 >

問 1　次の関数の極値を求め , グラフをかけ。

(1)　$y = x^3 - 3x^2 - 9x$

(2)　$y = x^2(2x - 3)$

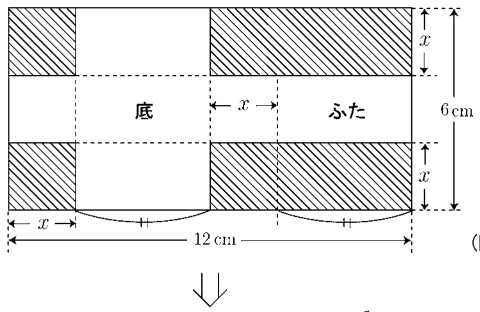
(3)　$y = x^2(x - 3)^2$

問 2　次の関数の (　) 内に示した範囲における最大値および最小値を求めよ。

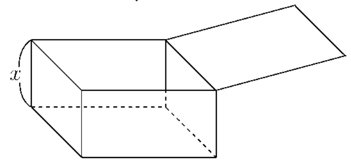
(1)　$y = -x^2 - 4x + 3$　　　$(-2 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$y = -x^3 + 3x^2 + 9x$　　$(-2 \leqq x \leqq 5)$

問 3　縦 6 cm , 横 12 cm の長方形のブリキの板から図 1 の斜線部分を切り取り , 点線のところを折り曲げて , 図 2 のような高さ x cm のふた付き容器を作る。



(図 1)



(図 2)

(1)　容器の容積を y cm^3 とする。y を x で表せ。

(2)　x が何 cm のとき y が最大になるか。

問 4　地上 78.4 m の高さから物体を真上に投げ上げた。t 秒後の高さ $y(t)$ は

$$y(t) = -4.9t^2 + 29.4t + 78.4 \quad (\mathrm{m})$$

となった。

(1)　t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2)　何秒後に最も高くなるか。またそのときの高さを求めよ。

(3)　何秒後に地上に落下するか。

< 原始関数 >

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ のとき，すなわち

$$F'(x) = f(x)$$

であるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

例 1

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

であるから $\dfrac{1}{3}x^3$ は x^2 の原始関数である。又，

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 1\right)' = x^2$$

より $\dfrac{1}{3}x^3 + 1$ も x^2 の原始関数である。さらに

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + 2\right)' = x^2$$

より $\dfrac{1}{3}x^3 + 2$ も x^2 の原始関数である。このように x^2 の原始関数は 1 つではないが，全て

$$\frac{1}{3}x^3 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

の形をしている。この形を原始関数の一般形ということにする。

例 2

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

より，x^3 の原始関数の一般形は

$$\frac{1}{4}x^4 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

である。

問　次の関数の原始関数の一般形を求めよ。

(1) x^4 の原始関数の一般形 =

(2) x^5 の原始関数の一般形 =

(3) x^6 の原始関数の一般形 =

＜ 不定積分 1 ＞

$F'(x) = f(x)$ のとき，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数の 1 つであり，その一般形は

$$F(x) + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

であった。これを $f(x)$ の**不定積分**といい，

$$\int f(x)dx$$

と書く。すなわち，

$$\boxed{F'(x) = f(x) \text{ のとき } \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である。記号 $\int$ はインテグラル ($integral$) と読む。

例 (1) $\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$ より $\displaystyle\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

(2) $\left(\dfrac{1}{4}x^4\right)' = x^3$ より $\displaystyle\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$

(注) 記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ は「微分すると $\boxed{}$ になる関数」という意味である。

問 1 前ページの問を参考にして，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^4 dx =$

(2) $\displaystyle\int x^5 dx =$

(3) $\displaystyle\int x^6 dx =$

問 2 例と問 1 から次の不定積分を類推せよ。(ただし n は正の整数)

$$\int x^n dx =$$

＜不定積分 2 ＞

前ページより n が正の整数のとき

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C}$$

が成り立つ。

また微分の性質より次の不定積分の性質がわかる。

$F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ のとき

1. $\displaystyle\int kf(x)dx = kF(x) + C$　　(k は定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x) + g(x)\}dx = F(x) + G(x) + C$
3. $\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}dx = F(x) - G(x) + C$

(不定積分の性質)

＜ 1 の証明＞　1 式右辺の関数を微分すると

$$(kF(x))' = k \times F'(x) = kf(x)$$

より $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数である。　(証明終)

問 1　上の不定積分の性質 2 を証明せよ。

例　(1) $\displaystyle\int 4x^2 dx = 4 \times \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{4}{3}x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int (3x^2 - 5x)dx = 3 \times \frac{1}{3}x^3 - 5 \times \frac{1}{2}x^2 + C = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + C$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int 6x^2 dx$　　(2) $\displaystyle\int (x^2 + x + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int (x^2 + 4x + 3)dx$　　(4) $\displaystyle\int (2x^2 - x - 1)dx$

< 不定積分 3 >

例 $\displaystyle\int(x-3)(x+2)dx=\int(x^2-x-6)dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x+C$

問 1 次の不定積分を求めよ。(ただし α，β は定数)

(1) $\displaystyle\int(x-2)^2dx$

(2) $\displaystyle\int(3x+1)^2dx$

(3) $\displaystyle\int(x-1)(x-2)dx$

(4) $\displaystyle\int(x+1)(x-3)dx$

(5) $\displaystyle\int(2-x)(x-3)dx$

(6) $\displaystyle\int(x-\alpha)(x-\beta)dx$

例題 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=x^2+2x \ , \quad F(2)=5$$

(解) $\displaystyle F(x)=\int(x^2+2x)dx=\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

$\displaystyle F(2)=\frac{1}{3}\times 2^3+2^2+C=5$

より $\displaystyle C=-\frac{5}{3}$ よって $\underline{\text{(答)}\ F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{5}{3}}$

問 2 次式を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

(1) $F'(x)=3$, $F(1)=2$

(2) $F'(x)=5x+4$, $F(2)=6$

(3) $F'(x)=2x^2-7x$, $F(4)=-5$

(4) $F'(x)=4x^3+6x^2+8x+5$, $F(0)=0$

< 不定積分 4 >

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し，積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。

変数 x を変数 t に換えれば，

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1　$\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$　より　$\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$　より　$\displaystyle\int 3t^2 dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$　より　$\displaystyle\int 3u^2 du = u^3 + C$

例 2　(1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int (4u^3 - 6u^2 + 5u)du = u^4 - 2u^3 + \frac{5}{2}u^2 + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int (6t^2 - 4t + 5)dt =$

(4) $\displaystyle\int (u - 1)(u - 2)du =$

(5) $\displaystyle\int (t + 3)^2 dt =$

< 不定積分の応用 1 >

例題　次の 2 条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

①$F'(t) = 3(t-1)^2$　　　②$F(1) = 0$

解　①より　$F(t) = \int 3(t-1)^2 dt = \int (3t^2 - 6t + 3)dt = t^3 - 3t^2 + 3t + C$

よって　$F(1) = 1 - 3 + 3 + C = C + 1$

②より　$F(1) = C + 1 = 0$　となり　$C = -1$

従って　$\underline{(答)\ F(t) = t^2 - 3t^2 + 3t - 1}$

問 1　次の 2 条件をともに満たす関数 $F(t)$ を求めよ。

(1)　①$F'(t) = 5$　　　②$F(0) = 8$

(2)　①$F'(t) = -4t + 6$　　　②$F(1) = 7$

問 2　次の 2 条件をともに満たす関数 $v(t)$ を求めよ。

①$v'(t) = -10$　　　②$v(0) = 20$

問 3　問 2 で求めた $v(t)$ に対し，次の 2 条件をともに満たす関数 $y(t)$ を求めよ。

①$y'(t) = v(t)$　　　②$y(0) = 25$

問 4　問 3 で求めた $y(t)$ に対し，増減表を作り，最大値を求めよ。

$t =$　　　のとき最大値 $y(t) =$

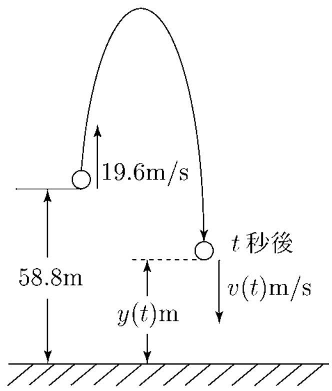
t			
y'			
y			

< 不定積分の応用 2 >

問 1 地上 58.8m の高さからボールを初速 19.6 m/s で真上に投げ上げた。t 秒後の高さを $y(t)$ m, t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると，物理的考察より

$$[1]\ y'(t) = v(t) \quad , \qquad [2]\ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。



(1) [2] 式と $v(0) = 19.6$ より t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) [1] 式と $y(0) = 58.8$ より t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) 関数 $y(t)$ の増減表を作れ。

t			
y'			
y			

(4) ボールが最高点に達するのは何秒後か。
またそのときの高さ $y(t)$ と速度 $v(t)$ を求めよ。

(5) 2 次方程式 $y(t) = 0$ の解を求めよ。 $t =$

(6) 地面に落下するのは何秒後か。

問 2 地上 44.1m の高さからボールを初速 39.2 m/s で真上に投げ上げた。
t 秒後の高さを $y(t)$ m，t 秒後の速度を $v(t)$ m/s とすると，物理的考察より

$$[1]\ y'(t) = v(t) \quad , \qquad [2]\ v'(t) = -9.8$$

が成り立つ。

(1) t 秒後の速度 $v(t)$ を求めよ。

(2) t 秒後の高さ $y(t)$ を求めよ。

(3) ボールが最高点に達するのは何秒後か。またそのときの高さを求めよ。

(4) 地面に落下するのは何秒後か。

< 定積分 1 >

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき

$$F'(x) = f(x) \qquad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

となる。今 , 与えられた定数 a , b に対し $F(b) - F(a)$ の値は原始関数 $F(x)$ の選び方によらない。

例 $F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$F(b) - F(a) = b^3 - a^3 \qquad \cdots\cdots (1)$$

となる。

$G(x) = x^3 + C$ (C は定数) も $f(x) = 3x^2$ の原始関数であり

$$G(b) - G(a) = (b^3 + C) - (a^3 + C) = b^3 - a^3 \qquad \cdots\cdots (2)$$

となる。(1) と (2) の値は一致する。

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき , 与えられた定数 a , b に対し , $F(b) - F(a)$ の値を $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい , 記号

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。すなわち

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{のとき} \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

(不定積分) (定積分)

である。なお $F(b) - F(a)$ のことを $\Big[\, F(x) \,\Big]_a^b$ と書くことがある。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[\, F(x) \,\Big]_a^b = F(b) - F(a)} \qquad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

と表す。

例 2 $\displaystyle\int_a^b 3x^2 dx = \Big[\, x^3 \,\Big]_a^b = b^3 - a^3$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_a^b 2x dx$ (2) $\displaystyle\int_a^b 4x^3 dx$

< 定積分 2 >

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C} \quad \text{のとき} \quad \boxed{\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

(不定積分)　　　　　　　　　　(定積分)

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ において，a を**下端**，b を**上端** とよぶ。また，この定積分を求めることを $f(x)$ を $\boldsymbol{a}$ **から** $\boldsymbol{b}$ **まで積分する** という。

例 (1) $\displaystyle\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$ 　より

$$\int_4^5 x^2dx = \Big[\,\frac{1}{3}x^3\Big]_4^5 = \frac{1}{3}\times 5^3 - \frac{1}{3}\times 4^3 = \frac{61}{3}$$

(2) $\displaystyle\int (x^3 - 6x + 5)dx = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x + C$ 　より

$$\int_1^2 (x^3 - 6x + 5)dx = \Big[\,\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 5x\Big]_1^2$$

$$= \frac{16}{4} - 12 + 10 - (\frac{1}{4} - 3 + 5) = 2 - (2 + \frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_4^9 1dx$ 　　　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 xdx$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2dx$ 　　　　(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3dx$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 + x)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 + 3x^2 - 5x)dx$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x + 1)(x - 2)dx$

(8) $\displaystyle\int_a^b (x - a)(x - b)dx$

＜ 定積分 3 ＞

定積分の定義より次の性質が導かれる。

[1] $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k は定数)	
[2] $\displaystyle\int_a^b \Big\{\ f(x)+g(x)\ \Big\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$	
[3] $\displaystyle\int_a^b \Big\{\ f(x)-g(x)\ \Big\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$	(定積分の性質)
[4] $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$, [5] $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	
[6] $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	

＜ [1] の証明＞ $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$ とすれば $\displaystyle\int kf(x)dx = kF(x)+C$ より

$$\int_a^b kf(x)dx = \Big[\ kF(x)\ \Big]_a^b = kF(b)-kF(a) = k\Big\{\ F(b)-F(a)\ \Big\} = k\times\int_a^b f(x)dx$$

＜ [6] の証明＞ $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$ とすれば

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b + \Big[\ F(x)\ \Big]_b^c = \Big\{\ F(b)-F(a)\ \Big\} + \Big\{\ F(c)-F(b)\ \Big\}$$

$$= F(c)-F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

問 1 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$, $\displaystyle\int g(x)dx = G(x)+C$ とおいて上の性質 [2] を証明せよ。

問 2 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x)+C$ とおいて上の性質 [5] を証明せよ。

問 3 次の定積分を求めよ。ただし k は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_1^3 kx^2dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3x)dx + \int_0^1 (x^2-3x)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} (x^2+x+4)dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^2+2x)dx + \int_0^1 (x^2+2x)dx + \int_1^3 (x^2+2x)dx$

(5) $\displaystyle\int_1^3 (x^2-x)dx + \int_3^1 (x^2-x)dx$

< 定積分 4 >

$F'(x) = f(x)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$F'(t) = f(t)$ より $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \Big[\ F(t)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$

のように定積分の値は変わらない。従って次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt \qquad \boxed{\int_a^b f(\square)d\square = \int_a^b f(\bigcirc)d\bigcirc}$$

例 (1) $\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \Big[\ \frac{1}{5}x^5\ \Big]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4 dt = \Big[\ \frac{1}{5}t^5\ \Big]_1^3 = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_0^R 4\pi r^2 dr = \Big[\ \frac{4\pi}{3}r^3\ \Big]_0^R = \frac{4\pi}{3} \times R^3 - \frac{4\pi}{3} \times 0^3 = \frac{4\pi}{3}R^3$

(4) $\displaystyle\int_a^x (t^2 + t)dt = \Big[\ \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\ \Big]_a^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 9.8t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^2 t(t-2)dt$

(4) $\displaystyle\int_1^4 (t-1)(4-t)dt$

(5) $\displaystyle\int_1^x (t^2 + t)dt$

(6) $\displaystyle\int_a^x (6t^2 - 4t)dt$

＜ 定積分 5 ＞

関数 $f(t)$ と定数 a に対して , $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は x の値を決めると , その値が定まるから , x の関数である。 $F'(t) = f(t)$ とすると ,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

両辺の関数を x について微分すれば次の等式が得られる。

$$(*)\quad \boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)} \qquad \text{(ただし } a \text{ は定数)}$$

例 1　定数 a に対し

$$\int_a^x (t^2+t)dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は x の関数である。両辺を x で微分すると , a は定数だから

$$\frac{d}{dx}\int_a^x (t^2+t)dt = x^2 + x$$

となる。

問 1　次式を計算せよ。ただし a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_1^x (2t+3)dt =$　　　　　　　　　　, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x (2t+3)dt =$

(2) $\displaystyle\int_0^x (6t^2+4t+5)dt =$　　　　　　　　　　, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (6t^2+4t+5)dt =$

(3) $\displaystyle\int_a^x (5t^2-6t)dt =$　　　　　　　　　　, $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x (5t^2-6t)dt =$

上の (∗) 式で変数 x と t を入れ変えても同様な式が成り立つ。

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^t f(x)dx = f(t)} \qquad \text{(ただし } a \text{ は定数)}$$

例 2　定数 a に対し

$$\int_a^t (x^2+x)dx = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$$

は t の関数である。両辺を t で微分すると , a は定数だから

$$\frac{d}{dt}\int_a^t (x^2+x)dx = t^2 + t$$

となる。

問 2　定数 a に対し , 次式を計算せよ。

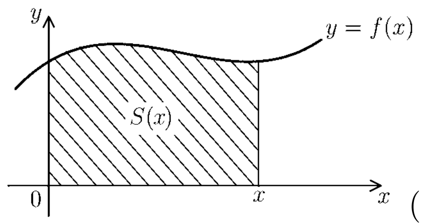
$\displaystyle\int_a^t (6x^2+8x)dx =$　　　　　　　　　　$\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^t (6x^2+8x)dx =$

＜ 面積関数 ＞

正の値をとる関数 $f(x)$ に対して,
図 1 斜線部分の面積を $S(x)$
とおくと

$$\boxed{S'(x) = f(x)}$$

が成り立つ。



(図 1)

＜ 証明の概略 ＞

導関数の定義より

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$

である。$S(x+h) - S(x)$ は図 2 の斜線部分の面積であり h が小さいときは図 3 の長方形の面積で近似できる。すなわち

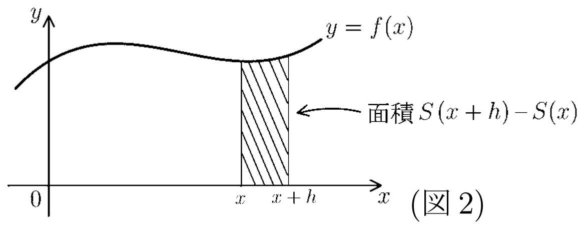
$$S(x+h) - S(x) \fallingdotseq f(x)h$$

より

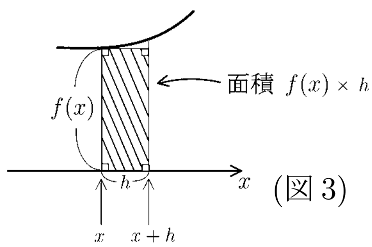
$$h \fallingdotseq 0 \text{ のとき } \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \fallingdotseq f(x)$$

よって

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x) \qquad \text{(証明の概略終)}$$



(図 2)



(図 3)

正の値をとる関数 $f(x)$ に対して, 図 4 の斜線部分の面積 S は, 図 1 の関数 $S(x)$ を用いると, 図 5, 6 より

$$S = S(b) - S(a)$$

と表される。一方 $S'(x) = f(x)$ だから

$$\int f(x)dx = S(x) + C$$

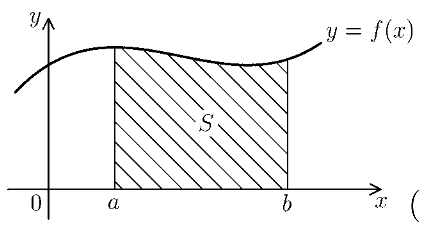
より

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[S(x)\Big]_a^b = S(b) - S(a)$$

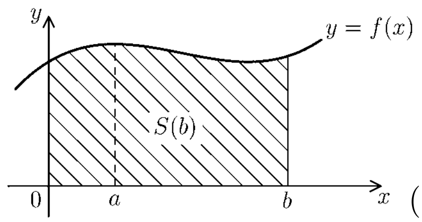
である。従って面積 S は定積分

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

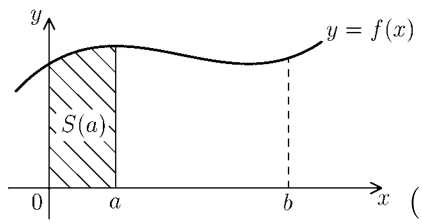
で求められる。



(図 4)

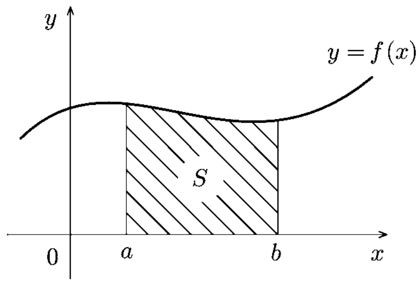


(図 5)



(図 6)

＜ 面積 1 ＞

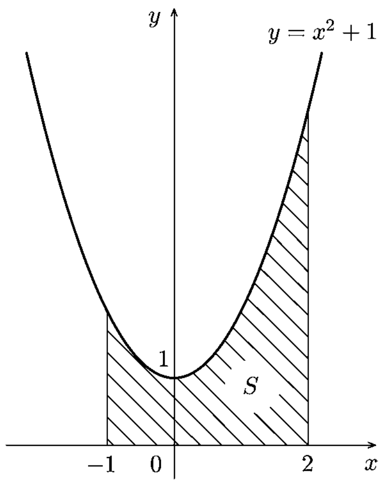


$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

で求められる。

(注) a と b は負の数でもよい。



例 放物線 $y=x^2+1$ と x 軸および 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}$$

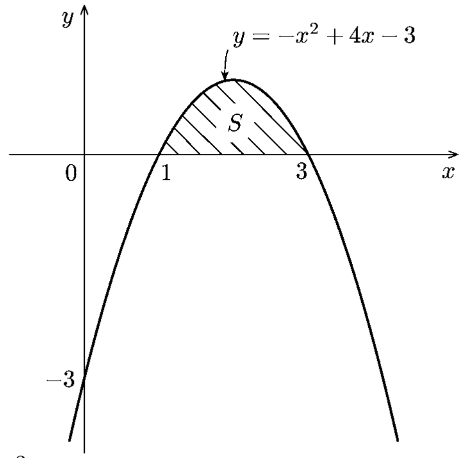
$$=\left(\frac{1}{3}\times 2^3+2\right)-\left\{\frac{1}{3}\times(-1)^3-1\right\}=6$$

問 次の放物線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ ， 2 直線 $x=-3$，$x=3$

(2) 放物線 $y=(x+1)^2$ ， 2 直線 $x=0$，$x=2$

< 面積 2 >



例題 放物線 $y=-x^2+4x-3$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(解) この放物線と x 軸との交点は

$$-x^2+4x-3=0$$

を解いて $x=1,\ 3$ である。

$$1 \leqq x \leqq 3 \quad \text{では} \quad -x^2+4x-3 \geqq 0$$

であるから求める面積 S は

$$S=\int_1^3(-x^2+4x-3)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\times 3^3+2\times 3^2-3\times 3\right)-\left(-\frac{1}{3}\times 1^3+2\times 1^2-3\times 1\right)=\frac{4}{3}$$

問 次の放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

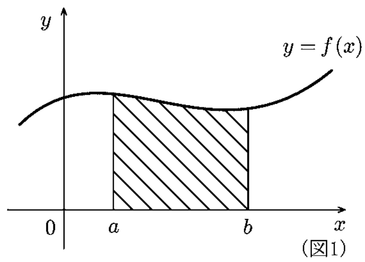
(1) $y=-x^2+1$

(2) $y=-x^2+4x$

(3) $y=-(x-2)(x-3)$

(4) $y=-x^2+2x+8$

＜ 面積 3 ＞



(図1)

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれた部分の面積を表す。

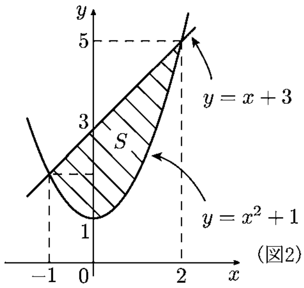
例 直線 $y = x + 3$ と放物線 $y = x^2 + 1$ とで囲まれた部分の面積 S を求めたい。
直線と放物線の交点を求めるためには連立方程式

$$\begin{cases} y = x + 3 & \cdots ① \\ y = x^2 + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

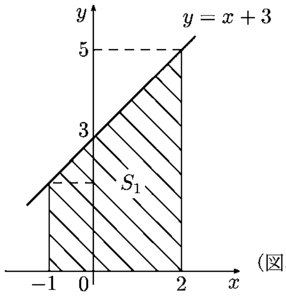
を解けばよい。② − ①より

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \Rightarrow\ x = -1,\ x = 2$$

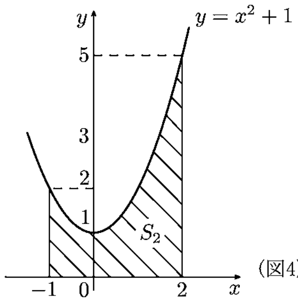
より交点の x 座標 $x = -1$ と $x = 2$ が求まり，グラフは図 2 のようになる。図 3，図 4 の斜線部分の面積 S_1，S_2 を考えると，以下のように計算できる。



(図2)



(図3)



(図4)

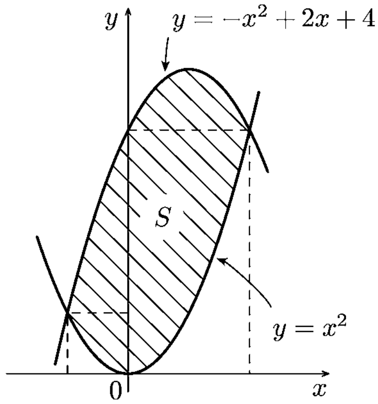
$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2} (x + 3)dx - \int_{-1}^{2} (x^2 + 1)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left\{(x + 3) - (x^2 + 1)\right\} dx = \int_{-1}^{2} \left\{-x^2 + x + 2\right\} dx$$

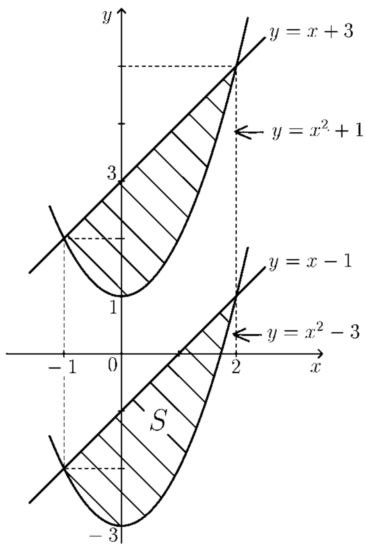
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{2}$$

問 放物線 $y = -x^2 + 2x + 4$ と $y = x^2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。



＜ 面積 4 ＞

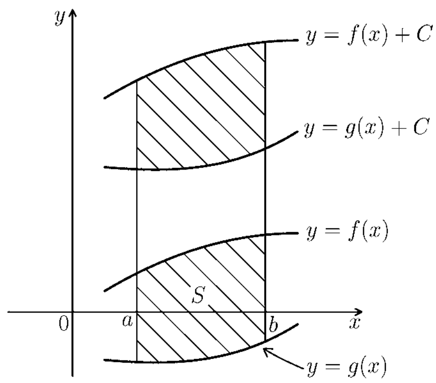


例 直線 $y=x-1$ と放物線 $y=x^2-3$ とで囲まれる部分の面積 S を求める。直線と放物線をともに y 軸方向に 4 だけ平行移動させると，$y=x-1$ は $y=x+3$ に $y=x^2-3$ は $y=x^2+1$ に移る。S は $y=x+3$ と $y=x^2+1$ とで囲まれる部分の面積と等しいから前ページの例より

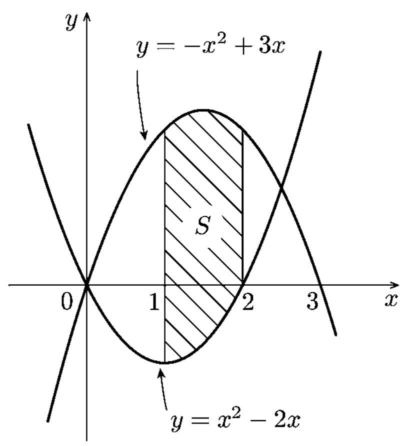
$$S=\int_{-1}^{2}\left\{(x+3)-(x^2+1)\right\}dx=\frac{9}{2}$$

(注) $S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left\{(x-1)-(x^2-3)\right\}dx$

としても求まる。



問 1 右図のように曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と曲線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれる部分の面積 S を $f(x)$ と $g(x)$ に関する積分で表せ。
(ただし，$g(x)<f(x)$ とする)



問 2 2 つの放物線 $y=-x^2+3x$，$y=x^2-2x$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

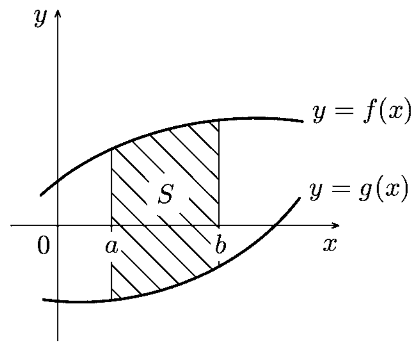
問 3 2 つの放物線 $y=x^2-3$，$y=-x^2+4x-1$ と 2 直線 $x=1$，$x=2$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

＜ 面積 5 ＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x) \leqq f(x)$ であるとき，2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$\boxed{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$

である。



例題 次の部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-2x$ と x 軸で囲まれる部分。

(2) 放物線 $y=x^2-1$ と直線 $y=x+1$ で囲まれる部分。

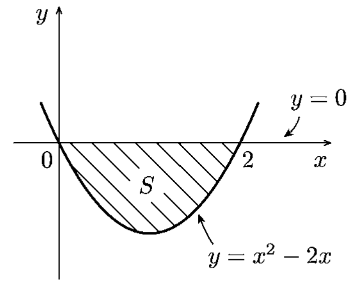
(解)

(1) 放物線と x 軸との交点の x 座標は

$$x=0 \quad , \quad x=2$$

x 軸は直線 $y=0$ であるから求める面積は

$$S=\int_0^2 \left\{0-\left(x^2-2x\right)\right\}dx=\int_0^2 \left(-x^2+2x\right)dx=\frac{4}{3}$$



(2) 放物線と直線の交点の x 座標は次の方程式の解である。

$$x^2-1=x+1$$

よって

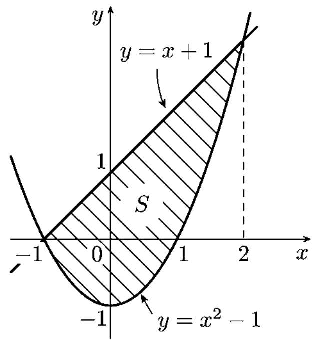
$$x^2-x-2=0$$

これを解いて

$$x=-1 \quad , \quad x=2$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲では直線が放物線より上側にあるから求める面積は

$$S=\int_{-1}^2 \left\{(x+1)-(x^2-1)\right\}dx=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2)dx=\frac{9}{2}$$



問 1 次の放物線と x 軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=(x-1)(x-2)$　　　　(2) $y=x^2+3x$

問 2 次の放物線と直線で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$，直線 $y=-x+6$　　(2) 放物線 $y=-x^2+3$，直線 $y=2x$

＜積分の問題＞

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(-2)dx$ (2) $\int(3x-2)dx$

(3) $\int 3(x-2)dx$ (4) $\int(x^3-1)dx$

(5) $\int(1-t+t^2)dt$ (6) $\int(x+2)(x-1)dx$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^1(2x-3)dx$ (2) $\int_1^2(x^2-x)dx$

(3) $\int_0^1 t(t-2)dt$ (4) $\int_1^3(x-1)(x-3)dx$

3 次の２つの曲線または直線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=2x+3,\quad y=x^2$

(2) $y=2x-1,\quad y=x^2-3x+5$

(3) $y=x^2-5x,\quad y=2-2x^2$

(4) $y=2x^2-6x+4,\quad y=-3x^2+9x-6$

4 次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=(x-3)(x+2)$

(2) $y=-x^2+3x$

＜解答 1 ～ 6 ＞

＜ 1 ページ. 極限値 ＞

解答

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{7x+3}{x+1}=\frac{14+3}{2+1}=\frac{17}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{3}{4}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+1)=4$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2-16}{h}=\lim_{h\to 0}(8+h)=8$

＜ 2 ページ. 関数の値 ＞

問 1 の解答

(1) $f(0)=5$,　$f(1)=3$,　$f(2)=3$

(2) $f(1)=-1$,　$f(2)=4$,　$f(3)=21$

(3) $f(-3)=10$,　$f(0)=10$,　$f(3)=10$

(4) $f(0)=-1$,　$f(1)=0$,　$f(5)=144$

問 2 の解答

(1) $f(a)=a^3$,　$f(a+h)=(a+h)^3$

(2) $f(a)=a+1$,　$f(a+h)=a+h+1$

(3) $f(a)=2a^2-5$,　$f(a+h)=2(a+h)^2-5$

(4) $f(a)=a^2+3a$,　$f(a+h)=(a+h)^2+3(a+h)$

(5) $f(a)=k$,　$f(a+h)=k$

＜ 3 ページ. 平均変化率 ＞

問 1 の解答

(1) $f(x)=4x$,　$\displaystyle\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{12-4}{2}=4$

(2) $f(x)=2x^2$,　$\displaystyle\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{18-2}{2}=8$

問 2 の解答

(1) $f(x)=4x$,　$\displaystyle\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{4b-4a}{b-a}=4$

(2) $f(x)=x^2$,　$\displaystyle\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$

＜ 4 ページ. 微分係数 1 ＞

解答

(1) $f(x)=4x$,　$a=2$

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(2+h)-4\times 2}{h}=\lim_{h\to 0}4=4$$

(2) $f(x)=2x^2$,　$a=1$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2\times 1^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+2h+h^2)-2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+2h)=4$$

(3) $f(x)=10$,　$a=5$

$$f'(5)=\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$

$$==\lim_{h\to 0}\frac{10-10}{h}=0$$

＜ 5 ページ. 微分係数 2 ＞

解答

(1) $\displaystyle f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4(a+h)^2-4a^2}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(a^2+2ah+h^2)-4a^2}{h}=\lim_{h\to 0}(8a+4h)=8a$$

(2) $f'(3)=8\times 3=24$,　$f'(0)=0$

$f'(-1)=8\times(-1)=-8$,　$f'(-5)=8\times(-5)=-40$

＜ 6 ページ. 接線 ＞

問の解答

(1) 直線 AB の傾き $\displaystyle=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h$

(2) $h=0.1$ のとき

AB の傾き $=2+h=2.1$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}$ AB の傾き $\displaystyle=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$

＜ 解答 7 〜 12 ＞

＜ 7 ページ. 接線の傾き ＞

解答

(1) $f'(a)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\dfrac{2(a+h)^2-2a^2}{h}=4a$

(2) $f'(3)=4\times 3=12$

＜ 8 ページ. 導関数 1 ＞

解答

$f(x)=x^2-5$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-5-(x^2-5)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-5-x^2+5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

＜ 9 ページ. 導関数 2 ＞

解答

(1) $f(x)=x$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

(2) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$$

(3) $f(x)=1$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0$$

＜ 10 ページ. パスカルの三角形 ＞

問 1 の解答

(1) $(a+b)^4=(a+b)(a+b)^3=(a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

$$=\boxed{1}\times a^4+\boxed{4}\times a^3b+\boxed{6}\times a^2b^2+\boxed{4}\times ab^3+\boxed{1}\times b^4$$

(2) $(a\ +\ b)^5=(a\ +\ b)\left(\boxed{1}\times a^4+\boxed{4}\times a^3b+\boxed{6}\times a^2b^2+\boxed{4}\times ab^3+\boxed{1}\times b^4\right)$

$$=\boxed{1}\times a^5+\boxed{5}\times a^4b+\boxed{10}\times a^3b^2+\boxed{10}\times a^2b^3+\boxed{5}\times ab^4+\boxed{1}\times b^5$$

問 2 の解答

$(a+b)^0=1$ ……………… 1

$(a+b)^1=1\times a+1\times b$ ……………… 1　1

$(a+b)^2=1\times a^2+2\times ab+1\times b^2$ ……………… 1　2　1

$(a+b)^3=1\times a^3+3\times a^2b+3\times ab^2+1\times b^3$ ……………… 1　3　3　1

$(a+b)^4=\boxed{1}\times a^4+\boxed{4}\times a^3b+\boxed{6}\times a^2b^2+\boxed{4}\times ab^3+\boxed{1}\times b^4$ ……… $\boxed{1}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{4}\ \boxed{1}$

$(a+b)^5=\boxed{1}\times a^5+\boxed{5}\times a^4b+\boxed{10}\times a^3b^2+\boxed{10}\times a^2b^3+\boxed{5}\times ab^4+\boxed{1}\times b^5$ $\boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{5}\ \boxed{1}$

$(a+b)^6=\boxed{1}\times a^6+\boxed{6}\times a^5b+\boxed{15}\times a^4b^2+\boxed{20}\times a^3b^3+\boxed{15}\times a^2b^4+\boxed{6}\times ab^5+\boxed{1}\times b^6$

＜ 11 ページ. 導関数 3 ＞

問 1 の解答

$f(x)=x^5$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^4+h^5-x^5}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(5x^4+10x^3h+10x^2h^2+5xh^3+h^4)=5x^4$$

問 2 の解答

$f(x)=x^6$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^6-x^6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^6+6x^5h+15x^4h^2+20x^3h^3+15x^2h^4+6xh^5+h^6-x^6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(6x^5+15x^4h+20x^3h^2+15x^2h^3+6xh^4+h^5)=6x^5$$

＜ 12 ページ. 導関数 4 ＞

問 1 の解答

y	x	x^2	x^3	x^4
y'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$

$(x)'=\boxed{1}$

$(x^3)'=\boxed{3x^2}$

$(x^4)'=\boxed{4x^3}$

問 2 の解答

$(x^n)'=nx^{n-1}$

問 3 の解答

(解)　$y'=a$　　　傾き

問 4 の解答

(解)　$y'=f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0$$

< 解答 13 〜 18 >

< 13 ページ. 導関数 5 >

問 1 の解答

(解) $(mx+k)'=m$

問 2 の解答

(解) $(k)'=0$

問 3 の解答

(解) $\left(kx^3\right)'=3kx^2$

問 4 の解答

(1) $\left(7x^4\right)'=28x^3$ (2) $\left(5x^2\right)'=10x$

(3) $\left(\dfrac{2}{3}x\right)'=\dfrac{2}{3}$

< 14 ページ. 導関数 6 >

問 1 の解答

(1) $\left(x^3+4\right)'=3x^2$

(2) $\left(x^4-x^5\right)'=4x^3-5x^4$

(3) $\left(x^2-x+3\right)'=2x-1$

(4) $\left(4x^2+5x^3-6x^4\right)'=8x+15x^2-24x^3$

問 2 の解答

(1) $\left\{k\times f(x)\right\}'=kf'(x)$

(2) $\left\{f(x)+g(x)\right\}'=f'(x)+g'(x)$

(3) $\left\{f(x)-g(x)\right\}'=f'(x)-g'(x)$

< 15 ページ. 接線の方程式 >

問 1 の解答

(答) $y=m(x-a)+b$

問 2 の解答

$y'=2x+1$ 傾き $x=1$ のとき $y'=3$

$y=3(x-1)+2=3x-1$

問 3 の解答

$y=f'(a)(x-a)+b$

< 16 ページ. 関数の増減 1 >

解答

(1) $y=-x^2+4x+3$

$y'=-2x+4$

x	$x<2$	2	$2<x$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	7	↘

頂点 (2 , 7)

(2) $y=2x^2+4x-5$

$y'=4x+4$

x	$x<-1$	-1	$-1<x$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-7	↗

頂点 (-1 , -7)

< 17 ページ. 関数の増減 2 >

解答

(1) $y=12x-x^3$

$y'=12-3x^2=3(4-x^2)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-16	↗	16	↘

$x=\ 2$ のとき 極大値 $y=16$

$x=-2$ のとき 極小値 $y=-16$

(2) $y=x^3-6x^2+9x$

$y'=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗

$x=1$ のとき 極大値 $y=4$

$x=3$ のとき 極小値 $y=0$

< 18 ページ. 最大最小 1 >

解答

$y=-x^3+3x^2-1 \quad (1\leqq x\leqq 3)$

(解) $y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'	╳	$+$	0	$-$	╳
y	1	↗	3	↘	-1

(答) $x=\ 2$ のとき最大値 $y=\ 3$

$x=\ 3$ のとき最小値 $y=\ -1$

＜解答 19 ～ 25＞

＜ 19 ページ. 最大最小 2 ＞

問の解答

$$\begin{aligned} y &= (6-2x)^2x \\ &= (4x^2-24x+36)x \\ &= 4x^3-24x^2+36x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= 12x^2-48x+36 \\ &= 12(x^2-4x+3) \\ &= 12(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$6-2x>0$ より x の範囲は $0<x<3$ である。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$
y	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

$x=1$ (cm)　のとき最大容積 $y=16$ (cm^3)

＜ 20 ページ. 微分記号 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2x-1$

(2) $\dfrac{dy}{dt}=-9.8$

(3) $\dfrac{d\ell}{dt}=6t-2$

(4) $\dfrac{dS}{dr}=2\pi r$

(5) $\dfrac{dV}{dr}=4\pi r^2$

＜ 21 ページ. 速度 ＞

問の解答

(1) $v(t)=f'(t)=-9.8t+19.6$　(m/s)

(2) $v(t)=0 \quad \Rightarrow \quad t=2$

(答) 2 秒後

t	$\cdots$	2	$\cdots$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	19.6	$\searrow$

(3) 最高点は　19.6 (m)

＜ 22 ページ. 加速度 ＞

問の解答

(1) $x(t)=3t^2-4t+5$

$v(t)=6t-4$

$a(t)=6$

(2) $x(t)=2t^3+4t^2-5t+6$

$v(t)=6t^2+8t-5$

$a(t)=12t+8$

＜ 23 ページ. 速度の応用 1 ＞

問の解答

(1) $v(t)=y'(t)=-9.8t+19.6$　(m/s)

(2) $v(0)=19.6$　(m/s)

(3) $v(t)=-9.8t+19.6=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=2$　(答) 2 秒後

(4) $y(2)=44.1$　(m)

(5) $y(t)=-4.9t^2+19.6t+24.5=0$

$\Downarrow \quad \div 4.9$

$-t^2+4t+5=0$

$\Downarrow$

$t^2-4t-5=(t-5)(t+1)=0$　(答) 5 秒後

＜ 24 ページ. 速度の応用 2 ＞

問の解答

(1) $v_x(t)=x'(t)=14.7$

(2) $v_y(t)=y'(t)=-9.8t+19.6$

(3) $v_y(t)=-9.8t+19.6=0 \quad \Rightarrow \quad t=2$　(答) 2 秒後

(4) $y(2)=19.6$　(答) 19.6(m)

(5) $y(t)=-4.9t^2+19.6t=0$

$-4.9t(t-4)=0$　(答) 4 秒後

(6) $x(4)=14.7\times 4=58.8$　(答) 58.8(m)

＜ 25 ページ. 速度の応用 3 ＞

問の解答

(1) $v_x(t)=x'(t)=29.4$

$v_y(t)=y'(t)=-9.8t+29.4$

(2) $v_y(t)=-9.8t+29.4=0 \quad \Rightarrow \quad t=3$　(答) 3 秒後

(3) 高さ $=y(3)=78.4$　(答) 78.4m

水平距離 $=x(3)=88.2$　(答) 88.2m

(4) $y(t)=-4.9t^2+29.4t+34.3=0$

$\Downarrow \quad \div(-4.9)$

$t^2-6t-7=0$

$\Downarrow$

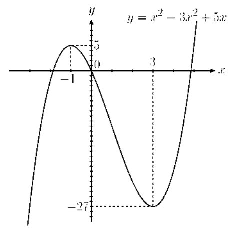
$(t-7)(t+1)=0$　(答) 7 秒後

(5) $x(7)=29.4\times 7=205.8$　(答) 205.8m

＜解答 26 ～ 28＞

＜ 26 ページ. 微分の応用 ＞

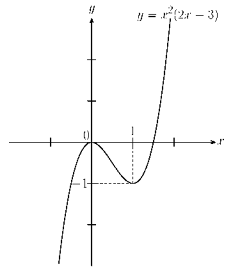
問 1 の解答



(1) $x = -1$ のとき極大値 $y = 5$

$x = 3$ 　のとき極小値 $y = -27$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$



(2) $x = 0$ のとき極大値 $y = 0$

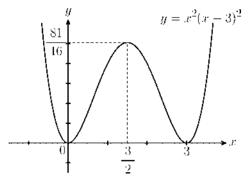
$x = 1$ のとき極小値 $y = -1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

(3) $x = \dfrac{3}{2}$ 　のとき極大値 $y = \dfrac{81}{16}$

$x = 0,\ 3$ のとき極小値 $y = 0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{16}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



問 2 の解答

(1) $x = -2$ のとき最大値 $y = 7$

$x = 1$ 　のとき最小値 $y = -2$

x	-2	$\cdots$	1
y'	0	$-$	$-$
y	7	$\searrow$	-2

(2) $x = 3$ 　　のとき最大値 $y = 27$

$x = -1,\ 5$ のとき最小値 $y = -5$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	5
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27	$\searrow$	-5

問 3 の解答

(1) $y = x(6-2x)(6-x) = 2x^3 - 18x^2 + 36x$

(2) $y' = 6x^2 - 36x + 36 = 6\left\{(x-3)^2 - 3\right\}$

(答) $x = 3 - \sqrt{3}$ (cm)

x	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$12\sqrt{3}$	$\searrow$	0

問 4 の解答

(1) $v(t) = -9.8t + 29.4$

(2) $v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3$

$y(3) = 122.5$

(答) 3 秒後，高さ 122.5m

(3) $y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4.9t^2 + 29.4t + 78.4 = 0$

$$\Downarrow \ \div(-4.9)$$

$$(t-8)(t+2) = 0$$

(答) 8 秒後

＜ 27 ページ. 原始関数 ＞

問の解答

(1) x^4 の原始関数の一般形 $= \dfrac{1}{5}x^5 + C$

(2) x^5 の原始関数の一般形 $= \dfrac{1}{6}x^6 + C$

(3) x^6 の原始関数の一般形 $= \dfrac{1}{7}x^7 + C$

＜ 28 ページ. 不定積分 1 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$

(2) $\displaystyle\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

(3) $\displaystyle\int x^6 dx = \frac{1}{7}x^7 + C$

問 2 の解答

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

＜ 解答 29 〜 30 ＞

＜ 29 ページ. 不定積分 2 ＞

問 1 の解答

2 式の右辺の関数を微分すると

$$(F(x)+G(x))' = (F(x))' + (G(x))' = f(x) + g(x)$$

より、 $F(x)+G(x)$ は $f(x)+g(x)$ の原始関数である。

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int 6x^2 dx = 2x^3 + C$

(2) $\displaystyle\int (x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$

(3) $\displaystyle\int (x^2+4x+3)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + C$

(4) $\displaystyle\int (2x^2-x-1)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

＜ 30 ページ. 不定積分 3 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int (x-2)^3 dx = \int (x^2-4x+4)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$

(2) $\displaystyle\int (3x+1)^2 dx = \int (9x^2+6x+1)dx = 3x^3 + 3x^2 + x + C$

(3) $\displaystyle\int (x-1)(x-2)dx = \int (x^2-3x+2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

(4) $\displaystyle\int (x+1)(x-3)dx = \int (x^2-2x-3)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$

(5) $\displaystyle\int (2-x)(x-3)dx = \int (-x^2+5x-6)dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + C$

(6) $\displaystyle\int (x-\alpha)(x-\beta)dx = \int \left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\alpha+\beta}{2}x^2 + \alpha\beta x + C$

問 2 の解答

(1) $F(x) = 3x + C$

$F(1) = 3 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = -1$

(答) $F(x) = 3x - 1$

(2) $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 4x + C$

$$F(2) = \frac{5}{2} \times 4 + 4 \times 2 + C$$
$$= 18 + C = 6 \quad \Rightarrow \quad C = -12$$

(答) $F(x) = \dfrac{5}{2}x^2 + 4x - 12$

(3) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + C$

$$F(4) = \frac{2}{3} \times 64 - \frac{7}{2} \times 16 + C$$
$$= \frac{128-167}{3} + C = -5 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{25}{3}$$

(答) $F(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{25}{3}$

(4) $F(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x + C$

$F(0) = C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

(答) $F(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

＜解答 31 〜 34＞

＜ 31 ページ. 不定積分 4 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int(10-9.8t)dt = 10t-4.9t^2+C$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 + C$

(3) $\displaystyle\int(6t^2-4t+5)dt = 2t^3-2t^2+5t+C$

(4) $\displaystyle\int(u-1)(u-2)dt = \int(u^2-3u+2)du$

$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 2u + C$$

(5) $\displaystyle\int(t+3)^2 dt = \int(t^2+6t+9)dt = \frac{1}{3}t^3+3t^2+9t+C$

＜ 32 ページ. 不定積分の応用 1 ＞

問 1 の解答

(1) $F(t)=5t+C \quad \Rightarrow \quad C=8$ 　　(答) $F(t)=5t+8$

(2) $F(t)=-2t^2+6t+C$

$F(1)=-2+6+C=4+C=7 \quad \Rightarrow \quad C=3$

(答) $F(t)=-2t^2+6t+3$

問 2 の解答

$v(t)=-10t+C$

$v(0)=C=20$ 　　(答) $v(t)=-10t+20$

問 3 の解答

$y'(t)=-10t+20$

$y(t)=-5t^2+20t+C$

$y(0)=C=25$ 　　(答) $y(t)=-5t^2+20t+25$

問 4 の解答

$y'(t)=v(t)=-10t+20=-10(t-2)$

$t=2 \quad \Rightarrow \quad y(2)=-5\times4+20\times2+25=45$

(答) $t=2$ のとき最大値 $y(t)=45$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	−
y	↗	45	↘

＜ 33 ページ. 不定積分の応用 2 ＞

問 1 の解答

(1) $v(t)=-9.8t+19.6$

(2) $y(t)=\displaystyle\int(-9.8t+19.6)dt$

$=-4.9t^2+19.6t+C$ 　　(答) $y(t)=-4.9t^2+19.6t+58.8$

(3) $y'(t)=v(t)$

$=-9.8t+19.6$

$=-9.8(t-2)$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	−
y	↗	78.4	↘

(4) (3) の増減表より、2 秒後に最高点に達する。

そのときの高さ y は 78.4m 、速度 v は 0(m/s) 。

(5) $-4.9t^2+19.6t+58.8=0$

$t^2-4t-12=0$

$(t-6)(t+2)=0$ 　　$t=6,\ -2$

(6) 6 秒後

問 2 の解答

(1) $v(t)=-9.8t+39.2$

(2) $y(t)=-4.9t^2+39.2t+44.1$

(3) ボールが最高点に達するのは $v(t)=0$ を満たすときである。

すなわち、(1) の式

$$v(t)=-9.8t+39.2=-9.8(t-4)=0$$

となるときであり、これを満たすのは $t=4$ のときである。

よって、ボールが最高点に達するのは 4 秒後である。

また、そのときの高さは

$$y(4)=-4.9\times16+39.2\times4+44.1=122.5\text{m}$$

となる。

(4) $y(t)=-4.9t^2+39.2t+44.1=0$

$t^2-8t-9=0$

$(t-9)(t+1)=0$ 　　(答) 9 秒後

＜ 34 ページ. 定積分 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_a^b 2x dx = \left[x^2\right]_a^b = b^2-a^2$

(2) $\displaystyle\int_a^b 4x^3 dx = \left[x^4\right]_a^b = b^4-a^4$

< 解答 35 〜 37 >

< 35 ページ. 定積分 2 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_4^9 1dx = [x]_4^9 = 5$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2 = \frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^1 = 3$

(4) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2 = 0$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3 + x^2 + x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$

(6) $\displaystyle\int_0^4 (x^3 + 3x^2 - 5x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_0^4 = 88$

(7) $$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx &= \int_{-1}^2 (x^2 - x - 2)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right) dx$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+b}{2}x^2 + abx\right]_a^b \\ &= \left(\frac{b^3}{3} - \frac{a+b}{2}b^2 + ab^2\right) - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a+b}{2}a^2 + a^2b\right) \\ &= \frac{1}{6}\left\{2b^3 - 3ab^2 - 3b^3 + 6ab^2 - (2a^3 - 3a^3 - 3a^2b + 6a^2b)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left\{-b^3 + 3ab^2 - \left(-a^3 + 3a^2b\right)\right\} \\ &= \frac{1}{6}\left(a-b\right)^3\end{aligned}$$

< 36 ページ. 定積分 3 >

問 1 の解答

$\displaystyle\int (f(x) - g(x))\, dx = F(x) + G(x) + c$ より、

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - F(a) - G(b) \\ &= \{F(b) - F(a)\} + \{G(b) - G(a)\} \\ &= [F(x)]_a^b + [G(x)]_a^b \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

問 2 の解答

$$\begin{aligned}\int_b^a f(x)dx &= [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) \\ &= -\left([F(x)]_a^b\right) = -\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

問 3 の解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 kx^2dx = k\int_1^3 x^2dx = k\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{26}{3}k$

(2) $$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2 + 3x)dx + \int_0^1 (x^2 - 3x)dx &= \int_0^1 \left\{(x^2 + 3x) + (x^2 - 3x)\right\} dx \\ &= \int_0^1 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{-1} \left(x^2 + x + 4\right) dx = 0$

(4) $$\begin{aligned}&\int_{-1}^0 \left(x^2 + 2x\right) dx + \int_0^1 \left(x^2 + 2x\right) dx + \int_1^3 \left(x^2 + 2x\right) dx \\ &= \int_{-1}^3 \left(x^2 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^3 = \frac{52}{3}\end{aligned}$$

(5) $\displaystyle\int_1^3 \left(x^2 - x\right) dx + \int_3^1 \left(x^2 - x\right) dx = \int_1^1 \left(x^2 - x\right) dx = 0$

< 37 ページ. 定積分 4 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 9.8t)dt = \left[4t - 4.9t^2\right]_1^3 = -31.2$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi rdr = \left[\pi r^2\right]_0^R = \pi R^2$

(3) $\displaystyle\int_0^2 t(t-2)dt = \int_0^2 (t^2 - 2t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}$

(4) $$\begin{aligned}\int_1^4 (t-1)(4-t)dt &= \int_1^4 (-t^2 + 5t - 4)dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - 4t\right]_1^4 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned}\int_1^x \left(t^2 + t\right) dt &= \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_1^x \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{5}{6}\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int_a^x \left(6t^2 - 4t\right) dt &= \left[2t^3 - 2t^2\right]_a^x \\ &= 2x^3 - 2x^2 - 2a^3 + 2a^2\end{aligned}$$

＜解答 38 〜 43 ＞

＜ 38 ページ. 定積分 5 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int_1^x (2t+3)dt = \left[t^2+3t\right]_1^x = x^2+3x-4$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^x (2t+3)dt = \frac{d}{dx}(x^2+3x-4) = 2x+3$

(2) $\displaystyle\int_0^x (6t^2+4t+5)dt = \left[2t^3+2t^2+5t\right]_0^x = 2x^3+2x^2+5x$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (6t^2+4t+5)dt = \frac{d}{dx}(2x^3+3x^2+5x) = 6x^2+4x+5$

(3) $\displaystyle\int_a^x (5t^2-6t)dt = \left[\frac{5}{3}t^3-3t^2\right]_a^x = \frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{5}{3}a^3+3a^2$

$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (5t^2-6t)dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{3}x^3-3x^2-\frac{5}{3}a^3+3a^2\right)$

$= 5x^2-6x$

問 2 の解答

$\displaystyle\int_a^t (6x^2+8x)dx = \left[2x^3+4x^2\right]_a^t = 2t^3+4t^2-2a^3-4a^2$

$\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^t (6x^2+8x)dx = \frac{d}{dt}(2t^3+4t^2-2a^3-4a^2) = 6t^2+8t$

＜ 40 ページ. 面積 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle S = \int_{-3}^3 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^3 = \frac{27}{3}-\left(-\frac{27}{3}\right) = 18$

(2) $\displaystyle S = \int_0^2 (x+1)^2dx = \int_0^2 (x^2+2x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2$

$\displaystyle = \frac{8}{3}+4+2 = \frac{8+18}{3} = \frac{26}{3}$

＜ 41 ページ. 面積 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle S = \int_{-1}^1 (-x^2+1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$

(2) $\displaystyle S = \int_0^4 (-x^2+4x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}$

(3) $\displaystyle S = \int_2^3 \{-(x-2)(x-3)\}dx = \int_2^3 \{-x^2+5x-6\}$

$\displaystyle = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3 = \frac{1}{6}$

(4) $y = -x^2+2x+8 = -(x-4)(x+2)$

$\displaystyle S = \int_{-2}^4 (-x^2+2x+8)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^4 = 36$

＜ 42 ページ. 面積 3 ＞

問の解答

$$\begin{cases} y = -x^2+2x+4 & \cdots ① \\ y = x^2 & \cdots ② \end{cases}$$

① = ② より

$x^2 = -x^2+2x+4 \Rightarrow 2x^2-2x-4 = 0$

$\Rightarrow x^2-x-2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 2$

$\displaystyle S = \int_{-1}^2 (-x^2+2x+4)dx - \int_{-1}^2 x^2dx$

$\displaystyle = \int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^2$

$= 9$

＜ 43 ページ. 面積 4 ＞

問 1 の解答

$\displaystyle S = \int_a^b \{f(x)+C\}dx - \int_a^b \{g(x)+C\}dx$

$\displaystyle = \int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

問 2 の解答

$\displaystyle S = \int_1^2 \{(-x^2+3x)-(x^2-2x)\}dx$

$\displaystyle = \int_1^2 \{-2x^2+5x\}dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_1^2$

$\displaystyle = \frac{17}{6}$

問 3 の解答

$\displaystyle S = \int_1^2 \{(-x^2+4x-1)-(x^2-3)\}dx = \int_1^2 (-2x^2+4x+2)dx$

$\displaystyle = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x\right]_1^2$

$\displaystyle = \frac{10}{3}$

＜解答 44 〜 45 ＞

＜ 44 ページ. 面積 5 ＞

問 1 の解答

(1) $S = \int_1^2 \Big\{ -(x-1)(x-2) \Big\} dx = \int_1^2 (-x^2+3x-2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 = \frac{1}{6}$

(2) $S = \int_{-3}^0 (-x^2-3x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 = \frac{9}{2}$

問 2 の解答

(1) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x+6$ との

交点の x 座標は

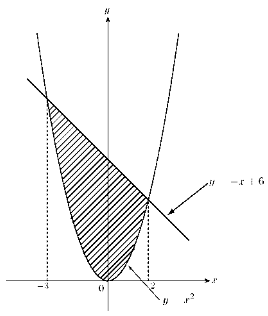
$x^2 = -x+6 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$

より $x = 2,\ -3$

$S = \int_{-3}^2 (-x+6-x^2)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{-3}^2$

$= \frac{125}{6}$



(2) 放物線 $y = -x^2+3$ と直線 $y = 2x$ との

交点の x 座標は

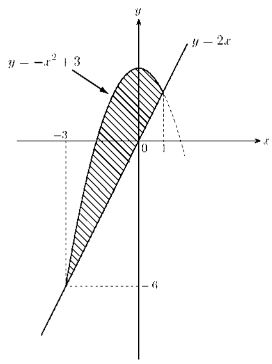
$-x^2+3 = 2x \Rightarrow -(x-1)(x+3) = 0$

より $x = 1,\quad -3$

$S = \int_{-3}^1 (-x^2+3-2x)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1$

$= \frac{32}{3}$



＜ 45 ページ. 積分の問題 ＞

問 1 の解答

(1) $\int (-2)dx = -2x + C$

(2) $\int (3x-2)dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$

(3) $\int 3(x-2)dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$

(4) $\int (x^2-1)dx = \frac{x^4}{4} - x + C$

(5) $\int (1-t+t^2)dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$

(6) $\int (x+2)(x-1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$

問 2 の解答

(1) $\int_0^1 (2x-3)dx = -2$

(2) $\int_1^2 (x^2-x)dx = \frac{5}{6}$

(3) $\int_0^1 t(t-2)dt = -\frac{2}{3}$

(4) $\int_1^3 (x-1)(x-3)dx = -\frac{4}{3}$

問 3 の解答

(1) $\int_{-1}^3 (2x+3-x^2)dx = \frac{32}{3}$

(2) $\int_2^3 \Big\{ 2x-1-(x^2-3x+5) \Big\} dx = \frac{1}{6}$

(3) $\int_{-\frac{1}{3}}^2 \Big\{ 2-2x^2-(x^2-5x) \Big\} dx = \frac{343}{54}$

(4) $\int_1^2 \Big\{ -3x^2+9x-6-(2x^2-6x+4) \Big\} dx = \frac{5}{6}$

問 4 の解答

(1) $-\int_{-2}^3 (x-3)(x+2)dx = \frac{125}{6}$

(2) $\int_0^3 (-x^2+3x)dx = \frac{9}{2}$