大学数学への道

TEXclub

基礎数学

シリーズ 7

『積分』が よくわからないときに開く本

改訂版

例題で式の計算がよくわかる！

内容

- ★ 初等関数の積分
- ★ 定積分
- ★ 置換積分
- ★ 部分積分
- ★ 面積

井上昌昭 著

高知工科大学
KOCHI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

< 不定積分 1 >

x の関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数，すなわち $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ があれば，それを $f(x)$ の**原始関数**という。$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数のとき，任意の定数 C に対して

$$\Big(F(x) + C\Big)' \;=\; F'(x) \;=\; f(x)$$

であるから，$F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数である。従って $f(x)$ の原始関数は無数にあるが，いずれも $F(x) + C$ の形で書き表される。

$$F(x)+C \qquad\qquad (C \text{は任意定数})$$

この表示を $f(x)$ の**不定積分** といい，$\displaystyle\int \boldsymbol{f(x)dx}$ で表す。

$$\boxed{F'(x) \;=\; f(x) \quad \text{のとき} \qquad \int f(x)dx = F(x) + C} \qquad\qquad (\text{不定積分})$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する** といい，上の定数 C を **積分定数** と呼ぶ。またこのとき $f(x)$ を **被積分関数** といい，x を **積分変数** という。

例　$\displaystyle\left(\frac{1}{4}x^4\right)' \;=\; x^3 \qquad \Rightarrow \qquad \int x^3 dx \;=\; \frac{1}{4}x^4 + C$

問　次の左の導関数を求め，右の不定積分を求めよ。　(ただし $\alpha \neq -1$)

(1)　$\displaystyle\Big(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big)' =$　　　　$\Rightarrow \quad \displaystyle\int x^{\alpha} dx =$

(2)　$\Big(\log|x|\Big)' =$　　　　$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{1}{x} dx =$

(3)　$(\sin x)' =$　　　　$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \cos x dx =$

(4)　$(-\cos x)' =$　　　　$\Rightarrow \quad \displaystyle\int \sin x dx =$

(5)　$(e^x)' =$　　　　$\Rightarrow \quad \displaystyle\int e^x dx =$

< 不定積分 2 >

< x^α の不定積分 >

$\alpha \neq -1$ のとき $$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

$\alpha = -1$ のとき $$\int x^{-1} dx = \log|x| + C$$

例 1 $$\int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

例 2 $$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

(注) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5}$ のように書くことがある。

同様にして $\displaystyle\int \frac{1}{f(x)}dx$ を $\displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^6 dx$

(2) $\displaystyle\int x^{\frac{1}{4}} dx$

(3) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{2}} dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3}$

(5) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

＜ 不定積分 3 ＞

不定積分について，次の公式が成り立つ。ただし両辺の積分定数の違いは無視している。

1. $\displaystyle\int kf(x)dx \;=\; k\int f(x)dx$ 　　(k は 0 でない定数)
2. $\displaystyle\int \{f(x)+g(x)\}\,dx \;=\; \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\displaystyle\int \{f(x)-g(x)\}\,dx \;=\; \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(定数倍，和 · 差の不定積分)

例

$$\int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2}dx = \int \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{1}{x^2}dx = x - 3\log|x| - \frac{2}{x} + C$$

(注) この例のように，積分定数は最後にまとめて C で表す。
また $\displaystyle\int 1dx$ は 1 を省略して $\displaystyle\int dx$ と書くことがある。

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+1}{x^3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{x^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

＜ 不定積分 4 ＞

問 1　左の導関数と右の不定積分を求めよ。 (ただし $a>0,\ a\neq 1$)

(1) $(\tan x)' =$　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} =$

(2) $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' =$　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

(3) $(\sin^{-1} x)' =$　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

(4) $(\tan^{-1} x)' =$　　　$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx =$

例 1　$$\int \frac{\cos^3 x + 3}{\cos^2 x}dx = \int \cos x dx + 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sin x + 3\tan x + C$$

例 2　$$\int \tan^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$$

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (4\sin x - 3\cos x)dx$　　　(2) $\displaystyle\int \frac{3\cos^3 x - 1}{\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int (2-\tan x)\cos x dx$　　　(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x - 1}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}dx$　　　(6) $\displaystyle\int (1+\tan^2 x)\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　　(8) $\displaystyle\int \frac{5}{1+x^2}dx$

＜ 積分記号 ＞

$$\frac{d}{dx}\Big(F(x)\Big) = f(x) \quad \text{のとき} \quad \int f(x)dx = F(x) + C$$

である。ここで微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ は変数 x に関する微分を意味し，積分記号 $\displaystyle\int \boxed{}\, dx$ の dx は変数 x に関する積分を意味する。
変数 x を変数 t に換えれば,

$$\frac{d}{dt}\Big(F(t)\Big) = f(t) \quad \text{のとき} \quad \int f(t)dt = F(t) + C$$

のようになる。

例 1　$\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$　より　$\displaystyle\int 3x^2 dx = x^3 + C$

$\dfrac{d}{dt}\left(t^3\right) = 3t^2$　より　$\displaystyle\int 3t^2 dt = t^3 + C$

$\dfrac{d}{du}\left(u^3\right) = 3u^2$　より　$\displaystyle\int 3u^2 du = u^3 + C$

例 2　(1) $\displaystyle\int \left(t^2 - 4t + 3\right) dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + C$

(2) $\displaystyle\int \sin u du = -\cos u + C$

(3) $\displaystyle\int 2\pi r dr = \pi r^2 + C$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int (10 - 9.8t)dt =$

(2) $\displaystyle\int 4\pi r^2 dr =$

(3) $\displaystyle\int e^u du =$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{y} dy =$

(5) $\displaystyle\int \cos u du =$

＜置換積分法 1＞

$\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ であるとき，$F(x)$ と $g(x)$ の合成関数 $F\big(g(x)\big)$ の導関数は

$$\Big\{F\big(g(x)\big)\Big\}' = F'\big(g(x)\big) \times g'(x) = f\big(g(x)\big) \times g'(x)$$

であった。よって

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + C \cdots ①$$

ここで $g(x) = u$ とおくと　$g'(x) = \dfrac{du}{dx}$ より

①の左辺 $\displaystyle = \int f(u)\frac{du}{dx}dx$

①の右辺 $\displaystyle = F(u) + C = \int f(u)du$

よって

$$\boxed{\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)\frac{du}{dx}dx = \int f(u)du} \quad \big(\text{ただし}\quad u = g(x)\big)$$

すなわち x の積分が u の積分になった。これを**置換積分**という。

例　$\displaystyle\int \cos(3x+2)dx$ を求めたい。$u = 3x + 2$ とおく。

$$\frac{du}{dx} = (3x+2)' = 3$$

より

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)dx &= \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\times 3dx = \frac{1}{3}\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx \\ &= \frac{1}{3}\int \cos(u)du = \frac{1}{3}\sin(u) + C = \underline{\frac{1}{3}\sin(3x+2) + C}\end{aligned}$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(4x-3)dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx$

< 置換積分法 2 >

例 前ページの例で

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\times 3dx$$

と変形した。これは $\displaystyle\int \cos(3x+2)\times 3dx = \int \cos(u)\times \frac{du}{dx}dx \quad (u=3x+2)$
の形にするためである。

一般に定数 $a, b\,(a \neq 0)$ に対し $ax+b=u$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = (ax+b)' = a$ より

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int \cos(ax+b)\times a\,dx = \frac{1}{a}\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx$$
$$= \frac{1}{a}\int \cos(u)du = \frac{1}{a}\sin(u) + C = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

問1 定数 $a,\ b,\ n\ (a \neq 0, n \neq -1)$ に対して次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin u\,du$ (1)′ $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx$

(2) $\displaystyle\int e^u du$ (2)′ $\displaystyle\int e^{ax+b}dx$

(3) $\displaystyle\int u^n du$ (3)′ $\displaystyle\int (ax+b)^n dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{u}du$ (4)′ $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx$

問2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(-3x+2)dx$ (2) $\displaystyle\int \sin(4x-5)dx$

(3) $\displaystyle\int e^{4x-3}dx$ (4) $\displaystyle\int (5x-3)^6 dx$

(5) $\displaystyle\int (3x-2)^{10} dx$ (6) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}dx$

< 置換積分法 3 >

例 1 $\displaystyle\int \sqrt{5x-2}dx$ を求めたい。$u=5x-2$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=5$ より

$$\int \sqrt{5x-2}dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{5x-2}\times 5dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{5}\times\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{1}{5}\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= \frac{2}{15}(5x-2)\sqrt{5x-2}+C$$

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{(7x-5)^3}dx$ を求めたい。$u=7x-5$ とすると $\dfrac{du}{dx}=7$ より

$$\int \frac{1}{(7x-5)^3}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{(7x-5)^3}\times 7dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{u^3}\frac{du}{dx}dx = \frac{1}{7}\int u^{-3}du$$

$$= \frac{1}{7}\times\frac{1}{-3+1}u^{-3+1}+C = -\frac{1}{14}u^{-2}+C = -\frac{1}{14u^2}+C$$

$$= -\frac{1}{14(7x-5)^2}+C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-3)^4}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

< 置換積分法 4 >

例1 $\displaystyle\int x^2 e^{x^3}\,dx$ を求めたい。$u = x^3$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 3x^2$ より

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3} \times (3x^2)dx = \frac{1}{3}\int e^u \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{3}\int e^u du$$

$$= \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

例2 $\displaystyle\int x\cos(x^2+1)dx$ を求めたい。$u = x^2 + 1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ より

$$\int x\cos(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2+1) \times (2x)dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos(u)du = \frac{1}{2}\sin(u) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2+1) + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4+1}dx$

(2) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+2)dx$

(3) $\displaystyle\int x\sin(x^2+3)dx$

(4) $\displaystyle\int x(x^2+1)^5 dx$

＜置換積分法 5＞

例 1　$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}dx$ を求めたい。$u = x^2+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = 2x$ より

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} \times (2x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{1}{2}\log\left|x^2+1\right| + C$$

$(x^2+1>0$ だから$)$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

例 2　$\displaystyle\int \tan x dx$ を求めたい。$u = \cos x$ とおくと $\dfrac{du}{dx} = -\sin x$ より

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x} \times (-\sin x)dx = -\int \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx}dx$$

$$= -\int \frac{1}{u}du = -\log|u| + C = -\log|\cos x| + C$$

問　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+4}dx$

(3) $\displaystyle\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

＜置換積分法 6＞

例 1 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} x + C$

例 2 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx$ を求めたい。 $u = 3x+4$ とおくと

$\displaystyle\frac{du}{dx} = 3$ より

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(3x+4)^2+1} \times 3dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\ \frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{3}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{3}\tan^{-1}(3x+4) + C$$

例 3 $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+4)^2+25}dx$ を求めたい。 $3x+4 = 5u$ とおくと

$\displaystyle u = \frac{1}{5}(3x+4)$, $\displaystyle\frac{du}{dx} = \frac{3}{5}$ より

$$\int \frac{1}{(3x+4)^2+25}dx = \frac{5}{3}\int \frac{1}{(3x+4)^2+25} \times \frac{3}{5}dx = \frac{5}{3}\int \frac{1}{(5u)^2+25} \times \frac{du}{dx}dx$$

$$= \frac{1}{15}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{1}{15}\tan^{-1}(u) + C = \frac{1}{15}\tan^{-1}\left(\frac{3x+4}{5}\right) + C$$

問 次の不定積分を求めよ。ただし a , b , r は定数で , $a \neq 0$, $r \neq 0$ とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2+r^2}dx$

＜不定積分の練習 1 ＞

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{2x}dx$

(2) $\displaystyle\int e^{2x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int \cos(4x)dx$

(4) $\displaystyle\int \cos(4x+3)dx$

(5) $\displaystyle\int \sin(3x)dx$

(6) $\displaystyle\int \sin(3x-5)dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x)}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5x)^2+1}$

(9) $\displaystyle\int (7x-5)^3dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x-1)^3}$

(11) $\displaystyle\int \sqrt{5x+1}\,dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+3}$

(13) $\displaystyle\int x\cos(x^2+3)dx$

(14) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$

＜ 分数関数の積分 ＞

例 $\displaystyle\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}dx$ を求めたい。この被積分関数 $\dfrac{1}{(x+3)(x+5)}$ は $\dfrac{A}{x+3}$ と $\dfrac{B}{x+5}$ (A と B は定数) の形の和として表すことができる。すなわち

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5}$$

とおいて右辺を通分すると

$$\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+5} = \frac{A(x+5)+B(x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A+3B)}{(x+3)(x+5)}$$

となる。この最後の式の分子が 1 になるように A と B を決めれば良い。つまり

$$1 = (A+B)x + (5A+3B)$$

より

$$A+B=0 \qquad \cdots ①$$

$$5A+3B=1 \qquad \cdots ②$$

であればよい。① , ② より $A=\dfrac{1}{2}$ ， $B=-\dfrac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{(x+3)(x+5)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+3} - \frac{\frac{1}{2}}{x+5} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\}$$

と表される。よって求める積分は

$$\int \frac{1}{(x+3)(x+5)}\,dx = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right\} dx = \frac{1}{2}\left\{ \log|x+3| - \log|x+5| \right\} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+3}{x+5}\right| + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-3)(x+4)}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)(3x+4)}\,dx$

＜ 部分積分法 1 ＞

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

が成り立つ。これから

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

である。この両辺を積分すると

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx} \qquad (\text{部分積分})$$

が成り立つ。これを **部分積分** の公式という。

例 $\displaystyle \int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int (x)'\sin x\,dx$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

(注) 部分積分の公式 $\displaystyle \int f \times g'\,dx = f \times g - \int f' \times g\,dx$ を

$$\boxed{\int \text{左} \times \text{右}\,dx = \text{左} \times (\text{右の積分}) - \int (\text{左の微分}) \times (\text{右の積分})\,dx}$$

と覚えると使いやすくなる。

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int x\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle \int xe^x\,dx$

(3) $\displaystyle \int x\cos(2x)\,dx$

(4) $\displaystyle \int x\sin(2x)\,dx$

(5) $\displaystyle \int xe^{3x}\,dx$

＜ 部分積分法 2 ＞

前ページ (注) の式で左右を逆にしても正しい。すなわち

$$\boxed{\int \text{左} \times \text{右}\ dx = (\text{左の積分}) \times \text{右} - \int (\text{左の積分}) \times (\text{右の微分})\ dx}$$

例 1
$$\int \log x\,dx = \int 1 \times (\log x)\,dx = x \times (\log x) - \int x \times (\log x)'\,dx$$
$$= x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + C$$

(注 1)　$\log x$ は微分すると $\dfrac{1}{x}$ となり簡単になる。

問 1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

例 2
$$\int x^2\cos x\,dx = \int x^2(\sin x)'\,dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x\,dx$$
$$= x^2\sin x + \int 2x(\cos x)'\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\,dx$$
$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

(注 2)　この例 2 は被積分関数が $x^2\cos x$ であり，この x^2 を消すために部分積分を 2 回使っている。

問 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

< 三角関数の不定積分 >

三角関数の不定積分は三角関数の性質を使って，簡単な不定積分に直してから積分する。
特に次の公式はよく使う。

1. 半角の公式

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

2. 積を和に直す公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

これらの公式は，右辺を加法定理により展開すると左辺が得られる。

例 (1) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}\{1+\cos(2x)\}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(2x)\cos x\,dx = \int \frac{1}{2}\{\sin(3x)+\sin x\}\,dx$

$$= -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x + C$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin^2 x dx =$

(2) $\displaystyle\int \cos(3x)\cos(2x)dx =$

(3) $\displaystyle\int \sin(4x)\sin x dx =$

(4) $\displaystyle\int \sin(4x)\cos(3x)dx =$

(5) $\displaystyle\int \cos^2(3x)dx =$

(6) $\displaystyle\int \sin^2(4x)dx =$

＜ 不定積分の検証 ＞

不定積分 $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ が正しいかどうかを調べるには，右辺を微分して $F'(x) = f(x)$ となっているかどうかを調べればよい。

例 1　$\displaystyle\int x^2(x^3+1)^4dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると合成関数の微分法より

$$\left(\frac{1}{15}(x^3+1)^5\right)' = \frac{1}{15}\big((x^3+1)^5\big)' = \frac{1}{15}\times 5(x^3+1)^4 \times (x^3+1)'$$
$$= \frac{1}{3}\times(x^3+1)^4\times 3x^2 = x^2(x^3+1)^4$$

より**正しい**。

例 2　$\displaystyle\int \tan x dx = \log(\cos x) + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると

$$\big(\log(\cos x)\big)' = \frac{1}{\cos x}\times(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}\times(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

より**正しくない**。

例 3　$\displaystyle\int (2x+1)\sin x dx = -(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

が正しいかどうか検証する。右辺を微分すると (積の微分法より)

$$\big(-(2x+1)\cos x + 2\sin x\big)' = -(2x+1)'\times\cos x - (2x+1)\times(\cos x)' + 2\times(\sin x)'$$
$$= -2\cos x - (2x+1)\times(-\sin x) + 2\cos x = (2x+1)\sin x$$

より**正しい**。

問　次の式の右辺を微分することにより次の不定積分が正しいかどうか判定せよ。

(1) $\displaystyle\int x^3(x^4-1)^3dx = \frac{1}{4}(x^4-1)^4 + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\log|x^2-1| + C$

(3) $\displaystyle\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$

< 不定積分の練習 2 >

問 1　次の不定積分を求めよ

(1) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

(3) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

(5) $\displaystyle\int xe^x dx$

(6) $\displaystyle\int x\cos x dx$

(7) $\displaystyle\int \log x\,dx$

(8) $\displaystyle\int x^3 \log x\,dx$

(9) $\displaystyle\int x^2e^x dx$

問 2　次の不定積分が正しいかどうか判定せよ

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

< 和の記号 Σ >

数列の和を表すのに，記号 Σ を使って次のように表す。

$$a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_n = \sum_{k=j}^{n} a_k$$

例 1 ① $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$, ② $\displaystyle\sum_{k=2}^{4} k^3 = 2^3 + 3^3 + 4^4$

③ $\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 100^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2$, ④ $\displaystyle 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$

問 1 次の和を記号 Σ を使って表せ。

(1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$　　(2) $2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + (n-1)^2$

(3) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$　　(4) $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} + \cdots + \dfrac{n}{n}$

記号 Σ の定義から次の公式が得られる。

① $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, ② $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, ③ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, ④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(略証) ①は明らか。②は等差数列の和の公式。③は $(n+1)^3 - 1^3 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3$
$= 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ と①，②の結果から導かれる。④は
$(n+4)^4 - 1^4 = \sum_{k=1}^{n}(k+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$
と①，②，③の結果から導かれる。

例 2 $\displaystyle 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2 = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$

例 3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$

問 2 次の和を求めよ。

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2$

< 定積分の定義 >

関数 $f(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ で定義されているものとする。この区間 $I = [a\ ,\ b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のように $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ をとって n 個の区間

$$[x_0\ ,\ x_1],\ [x_1\ ,\ x_2],\ [x_2\ ,\ x_3],\ [x_{n-1}\ ,\ x_n]$$

に分ける。これを区間 $[a\ ,\ b]$ の **分割** という。各区間 $I_k = [x_{k-1}\ ,\ x_k]$ から任意の値 ξ_k をとる。ξ_k を小区間 I_k の**代表値**と呼ぶ。この分割と関数 $f(x)$ に対し，次の和

$$R = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

を作る。この和を **リーマン和** という。R 自体は I の分割の仕方と代表のとり方によって異なるが，分割の個数 n を限りなく大きくし，

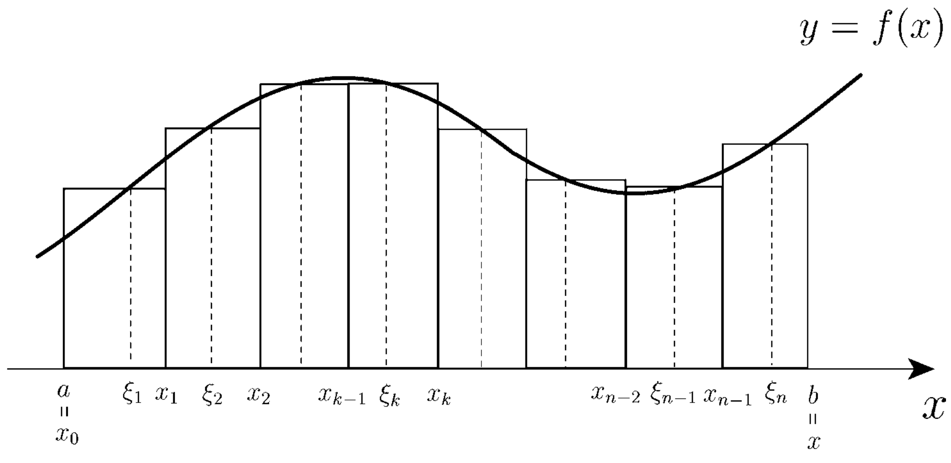
$$\text{分割の最大幅} = \max_{1 \leqq k \leqq n} (x_k - x_{k-1})$$

を限りなく小さくしたとき，常に (どんな分割であっても，どんな代表値のとり方をしても) 一定の極限値に R が近づくならば，$f(x)$ は $[a\ ,\ b]$ で**積分可能**であるといい，この極限を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と書く。

(注) $f(x) > 0$ の場合，R は右図の長方形の集まりの面積を表す。さらに $f(x)$ が積分可能なとき極限値 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた部分の面積を表す。



< 積分可能性 >

定理 　$f(x)$ が $[a\ ,\ b]$ で連続であれば，積分可能である

実は連続でなくても不連続点が有限個の場合や，$f(x)$ が単調関数
である場合は積分可能である。積分可能であるための必要十分条件は

$$\lambda = \max_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1})\ ,\ m_k = \min\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}\ ,\ M_k = \max\{f(x) : x_{k-1} \leqq x \leqq x_k\}$$

とおくとき

$$\boxed{\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) \times (x_k - x_{k-1}) = 0}$$

となることである。

例　(積分可能でない例)

関数 $f(x)$ は区間 $[0\ ,\ 1]$ で定義され，x が有理数のときは $f(x) = 0$, x が無理数のとき
は $f(x) = 1$ と定める。有理数はどんなに小さな区間にも無限個存在する。そこで ξ_k を
有理数とすれば，リーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \times (x_k - x_{k-1}) = 0 \cdots ①$$

となる。一方無理数もどんなに小さな区間にも無限個存在する。
そこで ξ_k を無理数とすればリーマン和は

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 1 \times (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1 - 0 = 1 \cdots ②$$

となる。リーマン和が代表値のとり方で 0 になったり 1 になったりするので，一定の極
限値には近づかない。従って積分可能ではない。

< 定積分の性質 >

区間 $[a\ ,\ b]$ における関数 $f(x)$ の定積分の定義は

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

であった。ここで $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ は $[a\ ,\ b]$ の分割であり，ξ_k $(x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k)$ は小区間 $[x_{k-1}\ ,\ x_k]$ の代表値である。この極限 lim は分割と代表値をどのように選んでも，分割の最大幅 $\max\limits_{1 \leqq k \leqq n}(x_k - x_{k-1})$ が 0 に近づく限り，一定の極限値に収束することを意味する。

この定積分の定義から，次の定積分の性質が導かれる。

< 定積分の性質 >

(1) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 　（k は定数）

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

(5) $a \leqq x \leqq b$ である x に対し常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \ \leqq\ \int_a^b g(x)dx$$

また，次式がなりたつように定積分の定義を拡張する。

(6) $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ 　, 　$\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

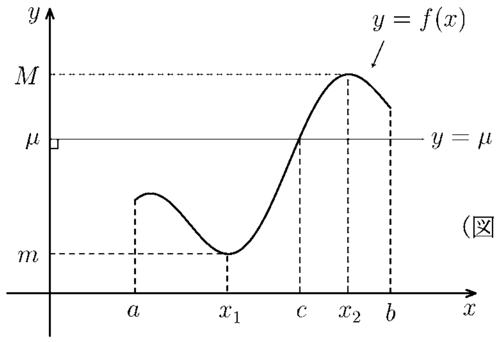
< 定積分の平均値の定理 >

[最大値の定理]

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続であるとき，
ある数 x_1 , x_2 $(a \leqq x_1 \leqq b$, $a \leqq x_2 \leqq b)$
が存在し，任意の $a \leqq x \leqq b$ に対し

$$f(x_1) \leqq f(x) \leqq f(x_2)$$

成り立つ。$f(x_2)$ を最大値，$f(x_1)$ を
最小値という。



(図1)

[中間値の定理]

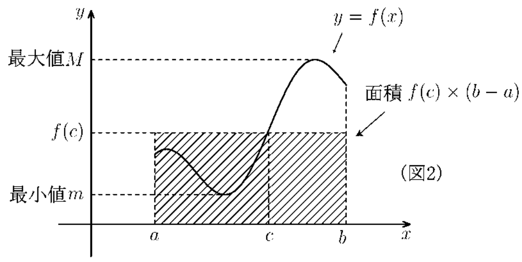
$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続とし，この範囲で $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする。
このとき $m \leqq \mu \leqq M$ である任意の数 μ に対し

$$f(c) = \mu$$

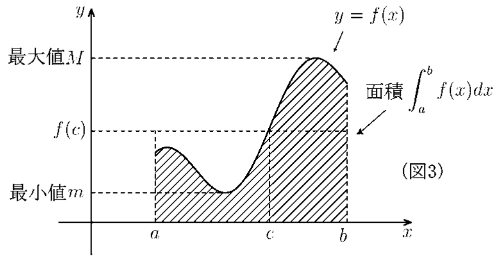
となる数 c が a と b の間にある。

[積分の平均値の定理]

> $f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で連続なとき
> $$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$
> となる数 c が a と b の間に存在する。



(図2)



(図3)

< 証明 >

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x)$ の最大値を M, 最小値
を m とすると

$$m \leqq f(x) \leqq M \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

である。定積分の定義から

$$\int_a^b m dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b M dx$$

がわかる。従って

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a) \quad \Rightarrow \quad m \leqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leqq M$$

となる。ここで $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とおくと、$m \leqq \mu \leqq M$ より中間値の定理から

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$

となる数 c が a と b の間に存在する。(証明終)

(注) 定積分の平均値の定理は

$$f(c) \times (b-a) = \int_a^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$$

とも書ける。$f(x) > 0$ のときは図 2 と図 3 の斜線部分の面積が等しいことを意味する。

＜微分積分学の基本定理＞

定理 1

任意の実数 a と連続関数 $f(x)$ に対し

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

とおくと　$S'(x) = f(x)$

証明は $S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left\{ \int_n^{x+h} f(x)dx - \int_h^x f(x)dx \right\}$ の極限を $h \to +0$ と $h \to -0$ の各場合にわけ，定積分の性質 (4) と定積分の平均値の定理を用いて，同じ極限値 $f(x)$ に近づくことを示せばよい。詳しい証明は研究課題とする。

定理 2

$f(x)$ が連続で，$F'(x) = f(x)$ であるとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

証明は定理 1 と「微分して 0(ゼロ) になる関数は定数」であることを用いる。詳しい証明は練習問題とする。

(注)　定理 1 と定理 2 をまとめて**微分積分学の基本定理**という。

問　定理 2 を証明せよ。

＜ 定積分の計算 1 ＞

前ページ定理 2 より，$f(x)$ が連続で，$\int f(x)dx = F(x) + C$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ。

(注) $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と略記する。

例 1 $\displaystyle\int_1^3 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{242}{5}$

例 2 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b = 2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}$

問 次の定積分の値を求めよ。ただし $n \neq -1$ である

(1) $\displaystyle\int_a^b x^n dx$

(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^x dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos x dx$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx$

(7) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$

(9) $\displaystyle\int_4^{10} dx$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3 dx$

(11) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx$

(12) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx$

(13) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx$

(14) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

< 定積分の計算 2 >

例 (1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x-4}{x^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[3\log|x| + \frac{4}{x}\right]_1^2$

$$= \left(3\log|2| + \frac{4}{2}\right) - \left(3\log|1| + \frac{4}{1}\right) = 3\log 2 - 2$$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^x = \frac{x}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^1 x^2dx + \int_1^4 x^2dx = \int_{-2}^4 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{64+8}{3} = 24$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3+x^4)dx + \int_0^1 (x^3+x^4)dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x\, dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x\, dx$

＜ 定積分の積分変数 ＞

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{のとき} \quad \int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

ここで変数 x が別の変数 (例えば t) に変わっても

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)}$$

のように定積分の値は変わらない。すなわち

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx}$$

例　(1) $\displaystyle\int_1^3 x^4\,dx = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(2) $\displaystyle\int_1^3 t^4\,dt = \left[\frac{1}{5}t^5\right]_{t=1}^{t=3} = \frac{1}{5} \times 3^5 - \frac{1}{5} \times 1^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 4\pi r^2\,dr = \left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_{r=1}^{r=2} = \frac{4}{3}\pi \times 8 - \frac{4}{3}\pi \times 1 = \frac{28}{3}\pi$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi 4\cos\theta\,d\theta = \Big[4\sin\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 4\sin\pi - 4\sin 0 = 0$

問　次の定積分の値を求めよ。(ただし $n \neq -1$)

(1) $\displaystyle\int_1^3 (4 - 10t)dt$

(2) $\displaystyle\int_0^R 2\pi r dr$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi \sin\theta d\theta$

(4) $\displaystyle\int_a^b u^n du$

(5) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{u}du$

＜ 定積分の置換積分法 1 ＞

例題 $\displaystyle\int_{-1}^{1}(5x+3)^3dx$ を求めよ。

(解) まず不定積分 $\displaystyle\int(5x+2)^3dx$ を求める。$u=5x+2$ と置くと $\dfrac{du}{dx}=5$ より

$$\int(5x+2)^3dx=\frac{1}{5}\int(5x+2)^3\times 5dx=\frac{1}{5}\int u^3\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{5}\int u^3du$$

$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{20}u^4+C=\frac{1}{20}(5x+2)^4+C$$

であるから

$$\int_{-1}^{1}(5x+2)^3dx=\left[\frac{1}{20}(5x+2)^4\right]_{-1}^{1}=\frac{7^4}{20}-\frac{(-3)^4}{20}=\frac{2401-81}{20}=116$$

(別解) $u=5x+2$ とおくと x と u の対応は

x	$-1\ \to\ 1$
u	$-3\ \to\ 7$

より

$$\int_{-1}^{1}(5x+2)^3dx=\frac{1}{5}\int_{x=-1}^{x=1}(5x+2)^3 5dx=\frac{1}{5}\int_{u=-3}^{u=7}u^3\frac{du}{dx}dx=\frac{1}{5}\int_{u=-3}^{u=7}u^3du$$

$$=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{4}u^4\right]_{u=-3}^{u=7}=\frac{1}{5}\left(\frac{7^4}{4}-\frac{(-3)^4}{4}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2401-81}{4}\right)=116$$

(注) 別解の方法を**定積分の置換積分法**という。

問 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)^4dx$$

＜ 定積分の置換積分法 2 ＞

例 前ページの例題の別解をさらに簡単にする方法がある。

$u = 5x + 2$ から $\dfrac{du}{dx} = 5$ である。この式を分数のように考えて，

形式的に

$$du = 5dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{dx = \frac{1}{5}du}$$

とおくと

x	$-1 \to 1$
u	$-3 \to 7$

より

$$\int_{x=-1}^{x=1} (5x+2)^3 dx = \int_{u=-3}^{u=7} u^3 \frac{1}{5} du = \left[\frac{1}{20}u^4\right]_{u=-3}^{u=7} = \frac{7^4}{20} - \frac{(-3)^4}{20} = 116$$

となる。このように計算してもよい。

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2x+1)^4 dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{2} (3x-1)^3 dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{4} \sqrt{2x+1} dx$

＜定積分の置換積分法 3＞

例 $\displaystyle\int_0^1 x^2(x^3+1)^4dx$ を求めたい。$u=x^3+1$ とおくと $\dfrac{du}{dx}=3x^2$

より形式的に $du=3x^2dx$ $\Rightarrow$ $\boxed{x^2dx=\dfrac{1}{3}du}$ とおく。

x	$0 \to 1$
u	$1 \to 2$

より

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^4dx=\int_{x=0}^{x=1}(x^3+1)^4x^2dx=\int_{u=1}^{u=2}u^4\frac{1}{3}du=\left[\frac{u^5}{15}\right]_{u=1}^{u=2}=\frac{2^5}{15}-\frac{1}{15}=\frac{31}{15}$$

問 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x^2+2)^3dx$

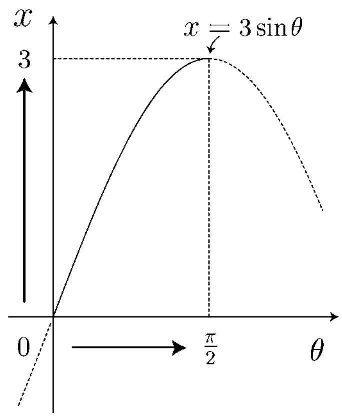
(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^3}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^2}{x^3+2}dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^{x^3+1}dx$

< 定積分の置換積分法 4 >

例題 $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を求めよ。



(解) $x = 3\sin\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = 3\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta$$

となる。x と θ の対応は

x	$0 \ \to \ 3$
θ	$0 \ \to \ \dfrac{\pi}{2}$

となる。また $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $\cos\theta \geqq 0$ より

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin\theta)^2} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$$

従って

$$\int_{x=0}^{x=3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)\,3\cos\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= 9\left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$$

(注) このような定積分は円の面積を求めるときに使う。

問 $a > 0$ とする。次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx =$

＜ 定積分の部分積分法 1 ＞

不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

から定積分の部分積分の公式

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx}$$

が得られる。

例 $\displaystyle\int_0^5 x(x-5)^2\,dx = \int_0^5 x \times \left\{\ \frac{(x-5)^3}{3}\ \right\}'dx$

$$= \left[x \times \frac{(x-5)^3}{3}\right]_0^5 - \int_0^5 (x)' \times \frac{(x-5)^3}{3}\,dx = 0 - 0 - \int_0^5 \frac{(x-5)^3}{3}\,dx$$

$$= -\left[\frac{(x-5)^4}{12}\right]_0^5 = -\left\{\ \frac{0^4}{12} - \frac{(-5)^4}{12}\ \right\} = -\frac{625}{12}$$

(注) 定積分の部分積分の公式を次のように覚えると使いやすい。

$$\int_a^b \text{左} \times \text{右}\ dx = \Big[\ (\text{左}) \times (\text{右の積分})\ \Big]_a^b - \int_a^b (\text{左の微分}) \times (\text{右の積分})\ dx$$

問 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^3\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx =$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx =$

(4) $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx =$

＜ 定積分の部分積分法 2 ＞

例 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\log x dx = \int_1^{\sqrt{e}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' \times \log x dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2} \times (\log x)' dx$

$\displaystyle = \frac{e}{2}\log\sqrt{e} - \frac{1}{2}\log 1 - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x}{2}dx = \frac{e}{4} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{e} x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{e} x^2\log x dx$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^3\log x dx$

(4) $\displaystyle\int_1^{e} \log x dx$

＜ 定積分の部分積分法 3 ＞

例 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\times(-\cos x)' dx = \Big[x^2\times(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times(-\cos x)dx$

$$= \left(-\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times(\sin x)' dx$$

$$= \Big[2x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)'\sin x dx = \pi\sin\frac{\pi}{2} - 0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x dx$$

$$= \pi + \Big[2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi + 2\cos\frac{\pi}{2} - 2\cos 0 = \pi - 2$$

問 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(2x) dx$

＜ 定積分の練習 1 ＞

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (3\sin x - 4\cos x)dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{3x^2-4x+1}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

(8) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{3x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2-1}$

(10) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \sin 2x\cos x dx$

(11) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

(12) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)dx$

(13) $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{3x-1}dx$

(14) $\displaystyle\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}dx$

< 定積分の練習 2 >

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(3x+1)^5}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{10} \sqrt{5x-1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^4}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{x^2+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$

(7) $\displaystyle\int_e^{e^2} \log x dx$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^x dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos x dx$

＜ 和の極限値 ＞

例 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2\times\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)\times\frac{1}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\times\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\left(2-\frac{1}{n}\right)}{6} = \frac{1\times 2}{6} = \frac{1}{3}$$

問 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\times\frac{1}{n}$

＜面積 1＞

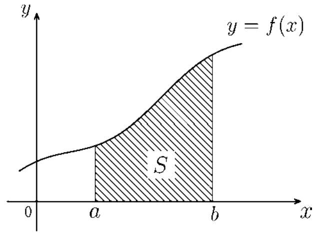
P.20 の定積分の定義 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \;=\; \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad (x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k)$

から次の定理が導かれる。

定理　連続関数 $f(x)$ が区間 $[\,a\,,\,b\,]$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき , 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分の面積を S とすると ,

$$(*)\quad \boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

である。

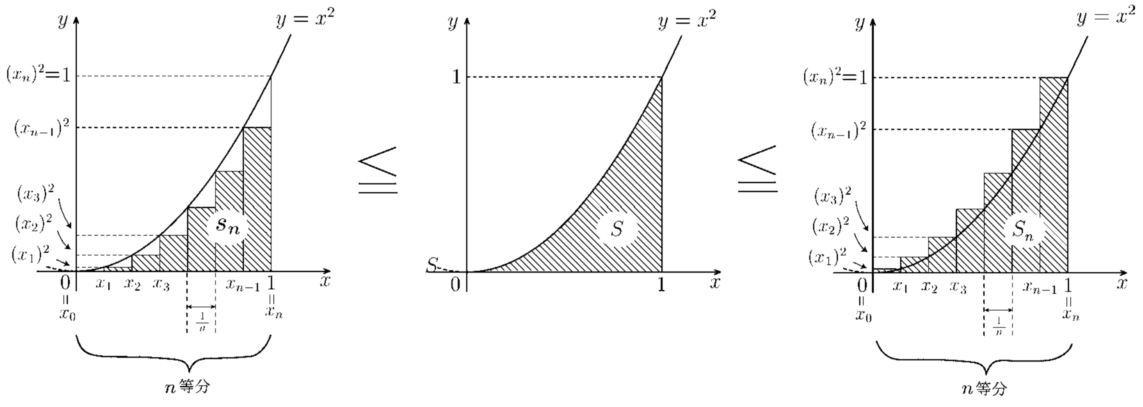


例　放物線 $y = x^2$ と x 軸および直線 $x = 1$ で囲まれる部分の面積 S について $(*)$ を確認する。区間 $[\,0\,,\,1\,]$ を n 等分する。k 番目の分点は $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n)$ である。代表値が $\xi_k = x_k$ の場合のリーマン和を

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (x_{k-1})^2(x_k - x_{k-1}) \qquad , \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2(x_k - x_{k-1})$$

とおくと図より

$$s_n \qquad \leqq \qquad S \qquad \leqq \qquad S_n$$



となる。従って　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n \;\leqq\; S \;\leqq\; \lim_{n\to\infty} S_n$　である。また

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

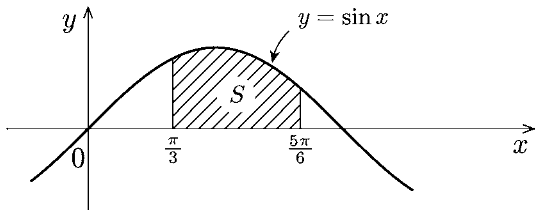
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) \times \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{n^3} = \frac{1}{3}$$

より　$S = \dfrac{1}{3}$　である。一方　$\displaystyle\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$　よって $(*)$ $\displaystyle S = \int_0^1 x^2dx$ が成り立つ。

＜ 面積 2 ＞

例 曲線 $y=\sin x$ と 2 直線 $x=\dfrac{\pi}{3}$ と $x=\dfrac{5\pi}{6}$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を求める。

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}\sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{6}\pi}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$



問 次の曲線と 2 直線および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1) $y=e^x$,　$x=0$, $x=1$

(2) $y=\sqrt{x}$,　$x=1$, $x=9$

(3) $y=\dfrac{1}{x^2}$,　$x=1$, $x=2$

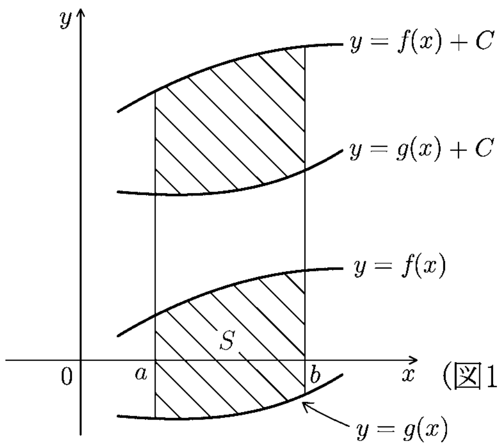
(4) $y=\dfrac{1}{x}$,　$x=1$, $x=2$

＜面積 3＞

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq g(x)$ である場合，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれる部分の面積 S は

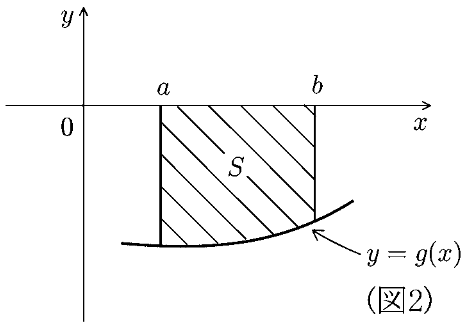
$$(*) \quad \boxed{S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx}$$

＜証明略＞



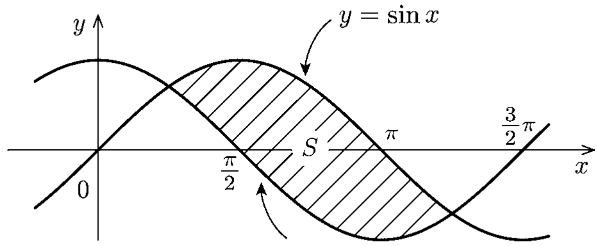
(図1)

問 1　$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $g(x)<0$ の場合，曲線 $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれる部分の面積 S を $g(x)$ に関する定積分で表せ。



(図2)

問 2　図 3 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図3)

問 3　次の曲線や直線で囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)　$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$

(2)　$y=\dfrac{1}{x}$，$y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

＜ 面積 4 ＞

例　半径 3 の円の面積 S を求めたい。原点を中心として半径 3 の円の方程式は

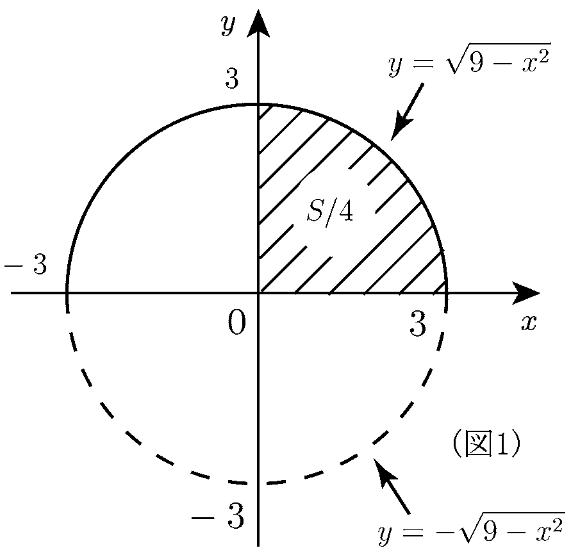
$$x^2 + y^2 = 9$$

である。y について解くと

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

である。これは円を上半円 $(y = \sqrt{9 - x^2})$ と下半円 $(y = -\sqrt{9 - x^2})$ に分けたものである。従って $\dfrac{1}{4}$ 円の面積は

$$\frac{S}{4} = \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$$

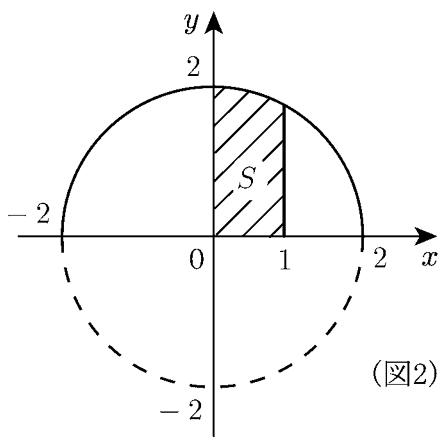


(図1)

である。31 ページ例題より $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{9\pi}{4}$ 。 よって (答) $\underline{S = 9\pi}$

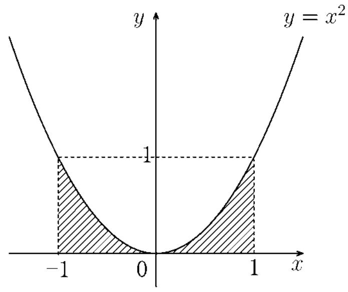
問1　半径 a の円の面積を求めよ。

問2　図 2 の斜線部分の面積 S を求めよ。



(図2)

＜ 偶関数・奇関数の定積分 ＞



例 1 $\displaystyle \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times (-1)^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(注) 定積分の幾何学的意味より、$\int_{-1}^{1} x^2 dx$ は右図斜線部分の面積を表す。$y = x^2$ は y 軸対象だから左右の面積が等しいので

$$\int_{-1}^{0} x^2 dx = \int_{0}^{1} x^2 dx$$

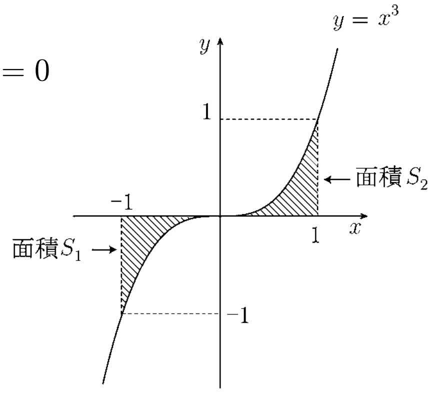
となるから

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = 2 \times \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

一般に $f(x) = x^{2n}$ (n は自然数) のときは $f(-x) = f(x)$ (y 軸対称) になる。
このような関数 $f(x)$ を**偶関数**といい、

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx} \quad \Big(f(x) \text{ は偶関数}\Big)$$

がなりたつ。



例 2 $\displaystyle \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times (-1)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

(注) 右図斜線部分の面積を S_1 と S_2 とおくと

$$\int_{-1}^{0} x^3 dx = -S_1, \quad \int_{0}^{1} x^3 dx = S_2$$

より

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = -S_1 + S_2$$

となる。一方 $y = x^3$ は原点対称だから $S_1 = S_2$ より

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

一般に $f(x) = x^{2n-1}$ (n は自然数) のときは $f(-x) = -f(x)$ (原点対称) になる。
このような関数 $f(x)$ を**奇関数**といい

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0} \quad \Big(f(x) \text{ は奇関数}\Big)$$

がなりたつ。

例 3 $\displaystyle \int_{-1}^{1} (x^3 + x^4)d = \int_{-1}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{1} x^4 dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^4 dx = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

問　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle \int_{-1}^{1} (x^3 + x^4 + x^5)dx =$

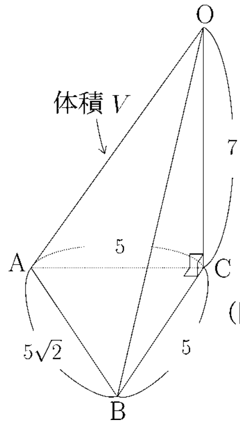
(2) $\displaystyle \int_{-1}^{1} (x + x^3 + x^6)dx =$

(3) $\displaystyle \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(4) $\displaystyle \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \tan x\right)dx =$

＜体積１＞

例　図１のような底面が（斜辺 $5\sqrt{2}$ の）直角二等辺三角形で高さが７の三角錐ＯＡＢＣの体積 V を求めたい。ＯＣを n 等分し、図２のような階段状の立体の体積 V_n で近似する。



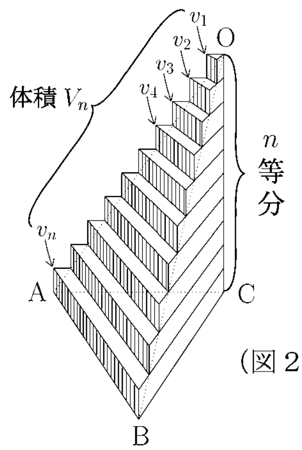
（図１）

この階段状の立体は厚さ $\dfrac{7}{n}$ の三角柱の集まりであり、その体積を上から順に

$$v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3\ ,\ \cdots\ ,\ v_n$$

とおくと、

$$V_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ \cdots\ + v_n$$



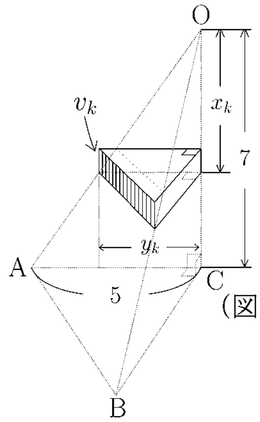
（図２）

となる。第 k 番目の三角柱の体積を v_k とする。図３のようにＯからの距離を x_k , 二等辺三角形の一辺の長さを y_k とおくと、

$$y_k = \frac{5}{7} \times x_k\ \ ,\ \ x_k = \frac{7}{n} \times k$$

であるから、図４より

$$v_k = \frac{1}{2} \times y_k \times y_k \times \frac{7}{n} = \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times k^2$$

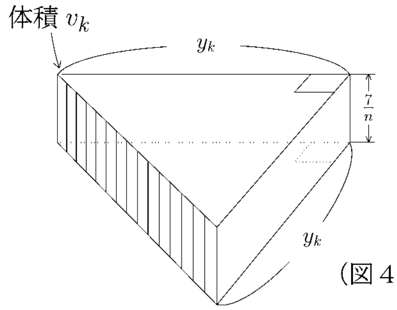


（図３）

となる。よって

$$\begin{aligned}
V_n &= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 1^2 + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times 2^2 + \ \cdots\ + \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times n^2 \\
&= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \left\{1^2 + 2^2 + \ \cdots\ + n^2\right\} \\
&= \frac{5^2 \times 7}{2n^3} \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
&= \frac{5^2 \times 7}{12} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

となる。



（図４）

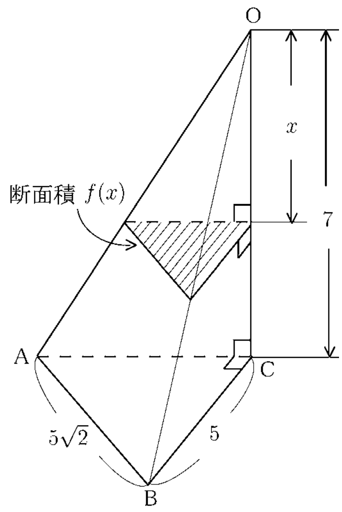
問　$n \to \infty$ として三角錐の体積 V を求めよ。

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n =$$

＜ 体積 2 ＞

前ページの三角錐の体積 V は以下のような方法で求めることができる。
右図のように頂点 O からの距離が x である水平面で切り取った断面の面積を $f(x)$ とおく。断面と底面は相似な三角形であり、相似比は $x:7$ であるから面積比は

$$\text{断面積}:\text{底面積} = x^2 : 7^2$$



となる。底面は直角二等辺三角形であるから

$$\text{底面積} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

従って　$f(x) : \dfrac{25}{2} = x^2 : 7^2$

より　$f(x) = \dfrac{25}{98}x^2$

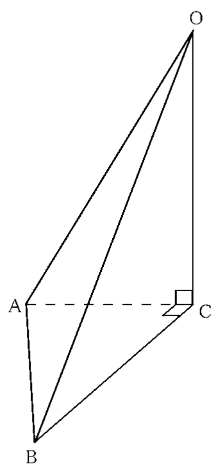
となる。三角錐 OABC はこの断面を $x=0$ から $x=7$ まで集めたものであるから

$$V = \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 \frac{25}{98}x^2dx = \left[\frac{25}{294}x^3\right]_0^7 = \frac{175}{6}$$

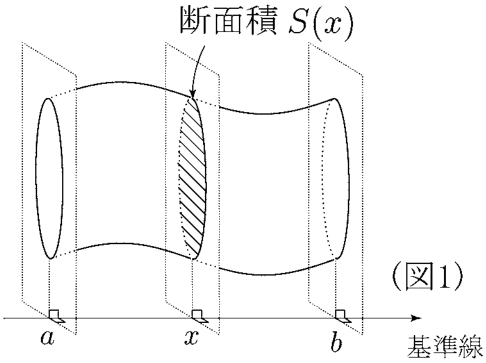
問　右図の三角錐 OABC は底面が

AC=3 ，BC=4 ，AB=5

の直角三角形で、高さが 6 (OC=6) の三角錐であるとする。三角錐 OABC の体積 V を求めよ。



< 体積 3 >

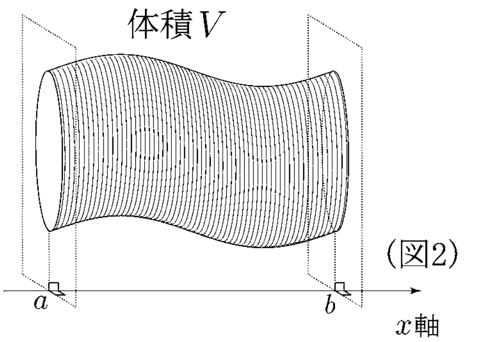


(図1)

一般にある立体が図 1 のように基準線に垂直な断面の集まりとみなせるとき、上の例と同様にして体積が求まる。基準線に目もりを入れ、x 軸と考える。図 2 の立体は図 1 の断面 (斜線部分) の集まりと考えられる。この断面積を $S(x)$ とおくと、図 2 の立体の体積 V は

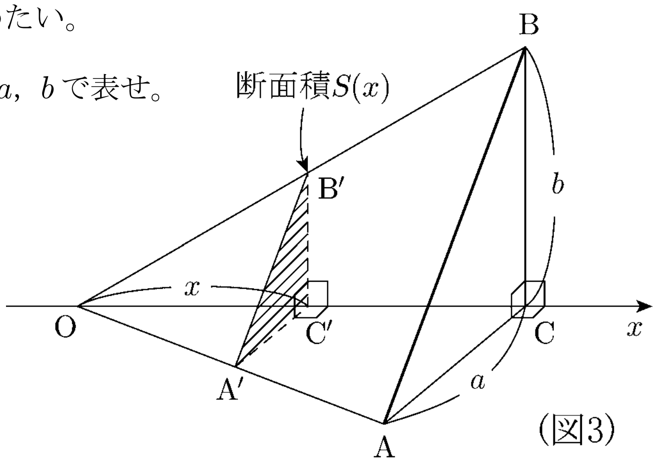
$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

で求められる。



(図2)

問 底面が直角三角形 ABC で，高さが h (= OC) である図 3 の三角錐 OABC の体積 V を求めたい。



(図3)

(1) $\mathrm{OC}' = x$ とする。$\mathrm{A'C'}$ と $\mathrm{B'C'}$ を x，h，a，b で表せ。

$\mathrm{A'C'} =$

$\mathrm{B'C'} =$

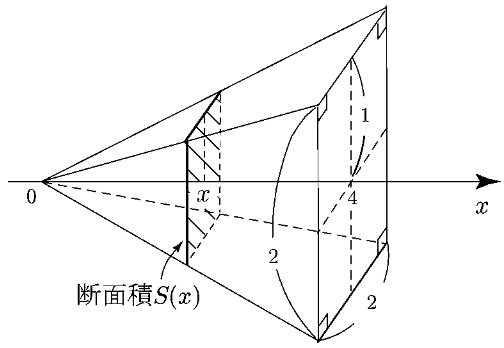
(2) 断面積 $S(x)$ を求めよ。

$S(x) =$

(3) 体積 V を求めよ。

< 体積 4 >

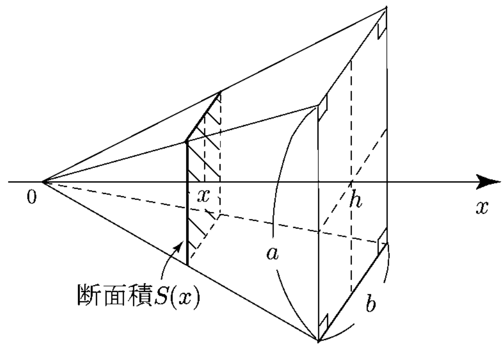
問 1 底面が一辺 2 の正方形で，高さが 4 の四角錐の体積 V を求めたい。右図の断面積 $S(x)$ と体積 V を求めよ。



$S(x) =$

$V =$

問 2 底面が縦 a，横 b の長方形で高さが h の四角錐の体積 V を求めたい。



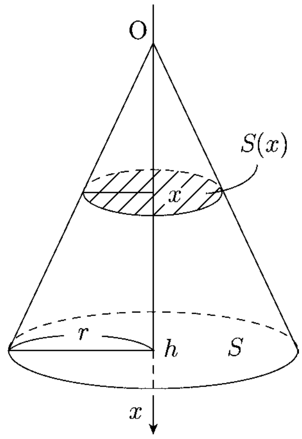
(1) 右図の断面積 $S(x)$ と体積 V を求めよ。

$S(x) =$

$V =$

(2) 底面積を S とする。$\dfrac{S(x)}{S}$ を求めよ。

問 3 底面が半径 r の円であり，高さが h の円錐がある。

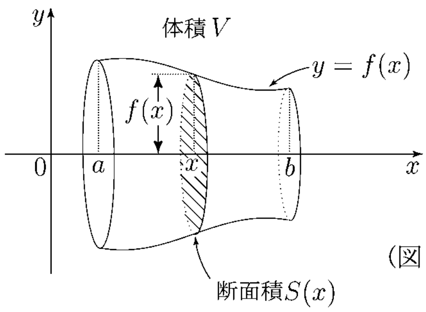


(1) 右図の断面積 $S(x)$ を r と h と x で表せ。

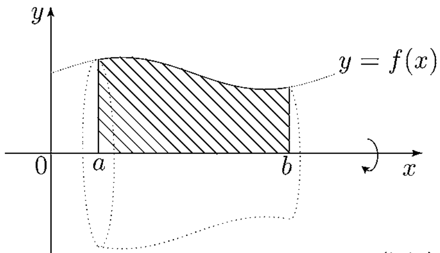
(2) 円錐の体積 V を求めよ。

(3) 底面積を S とする。$\dfrac{S(x)}{S}$ を求めよ。

＜体積 5＞



(図1)



(図2)

問 1　図 1 の立体は図 2 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた立体である。
このような立体を**回転体**という。

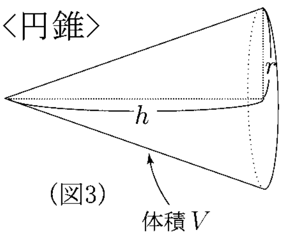
(1) 図 1 の斜線部分は半径 $f(x)$ の円である。この斜線部分の面積 $S(x)$ を $f(x)$ を用いて表せ。

$S(x) =$

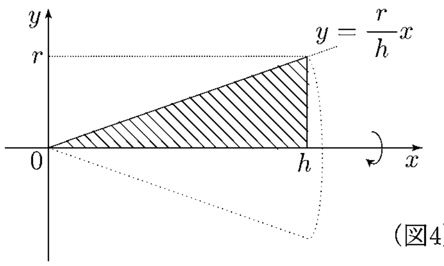
(2) 図 1 の回転体の体積 V を $f(x)$ を用いた積分の形で表せ。

$V =$

〈円錐〉



(図3)

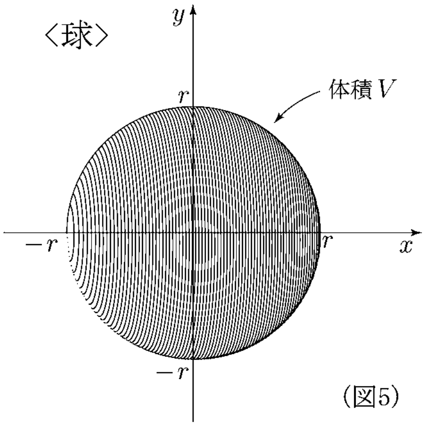


(図4)

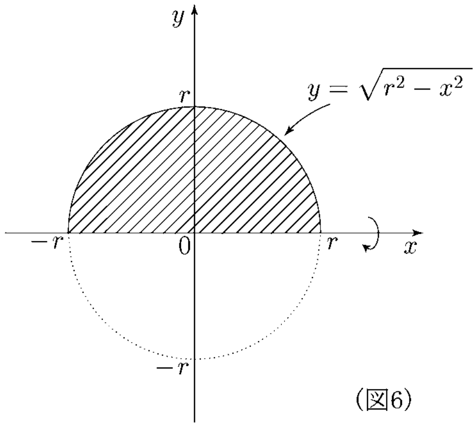
問 2　底面が半径 r の円であり，高さが h の円錐 (図 3) の体積 V を求めたい。
この円錐は図 4 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできたものである。積分の計算によって V を求めよ。

$V =$

〈球〉



(図5)



(図6)

問 3　半径 r の球 (図 5) の体積 V を求めたい。球は図 6 の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできた回転体である。積分の計算によって V を求めよ。

$V =$

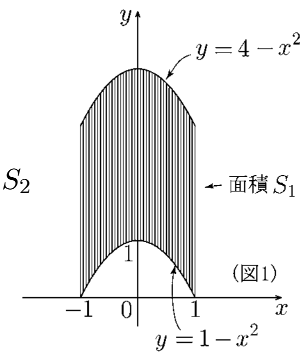
＜ 体積 6 ＞

[1]「線を集めると面になる」

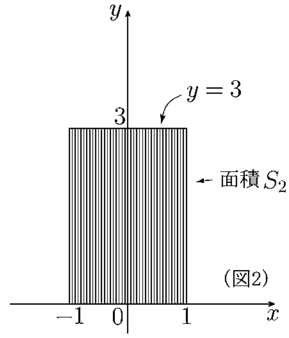
例 1 図 1 の面積 S_1 と図 2 の面積 S_2 は等しい。
なぜならば 40 ページより

$$S_1 = \int_{-1}^{1} \left\{ (4x - x^2) - (1 - x^2) \right\} dx = \int_{-1}^{1} 3dx = S_2$$

となるからである。一般に
「**線の長さ**を**積分する**と**面積**が求まる」。



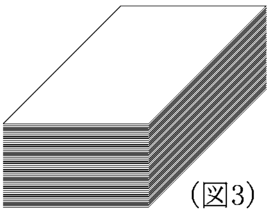
(図1)

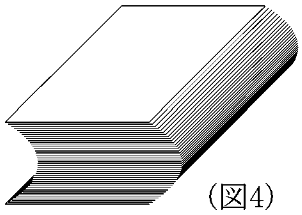


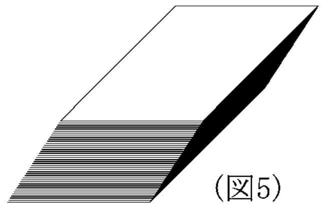
(図2)

[2]「面を集めると立体になる」

例 2 図 3 はトランプのような長方形のカードをまっすぐに重ねた立体であり，図 4 と図 5 はそれを横にずらした立体である。3 つの立体の体積は等しい。


(図3)

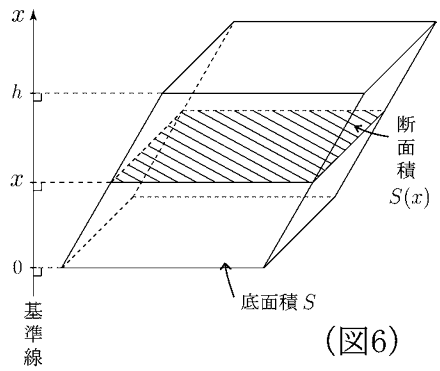

(図4)


(図5)

問 1 図 6 のような底面積 S で高さ h の平行六面体の体積 V を求めたい。底面に垂直な直線を基準線 (x 軸) にとる。x 軸の目盛りは底面からの高さとする。

(1) 高さ x である平面で切り取った断面の面積 $S(x)$ を求めよ。

(2) 平行六面体の体積 V を求めよ。



(図6)

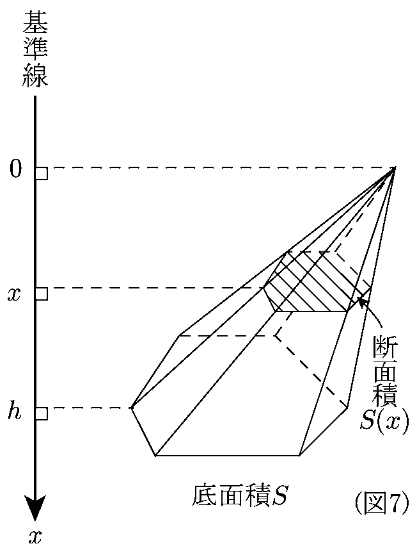
問 2 底面積が S で高さが h の角錐の体積 V を求めたい。頂点からの距離が x である底面に平行な平面で切った断面の面積を $S(x)$ とする。

(1) 円錐および角錐において $\frac{S(x)}{S}$ の比は高さ h と x によって決まる。46 ページ問 2，問 3 の結果を参考にして $\frac{S(x)}{S}$ の比を類推し，$S(x)$ を S と h と x で表せ。

$S(x) =$

(2) 角錐の体積 V を求めよ。

$V =$



(図7)

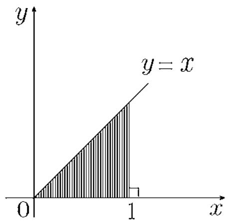
＜積もる方向＞

「塵(ちり)も積(つ)もれば山となる」とは「小さい物もたくさん集まれば山のように大きくなる」ことを意味する。「積分」とは「細かく分かれた物が“積(つ)もる”(たくさん集まる) こと」である。前のページで「“線”を集めると“面”になる」「“線の長さ”を積分すると“面積”が求まる」と書いたが“積(つ)もる方向”＝“積分する方向”は**集める物に対してして垂直でなければならならい。**

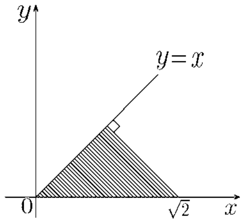
例 1 図 1 の縦線部分の面積 S は

$$S=\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}$$

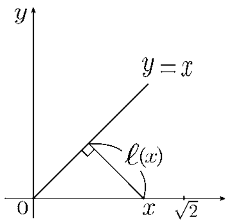
である。一方図 2 の斜線部分の面積は図 1 と同じ $\frac{1}{2}$ である。



(図 1)



(図 2)



(図 3)

図 3 の斜線の長さ $\ell(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ を 0 から $\sqrt{2}$ まで集めると図 2 の斜線部分になるが，

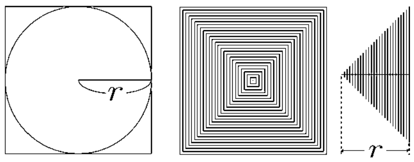
$$\int_0^{\sqrt{2}} \ell(x)dx=\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{2}}dx=\left[\frac{x^2}{2\sqrt{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

となって図 2 の斜線部分の面積と異なる。これは積分する方向 (x 軸) に対し，集まる線分 $\ell(x)$ が垂直でないからである。

例 2 半径 r の円に外接する正方形の面積を $S(r)$、周囲の長さを $\ell(r)$ とすると

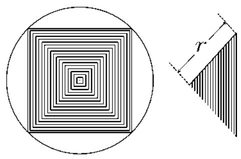
$$\int_0^r \ell(r)dr=S(r)$$

＜外接正方形の場合＞



周：$\ell(r)=8r$
面積：$S(r)=4r^2$

＜内接正方形の場合＞



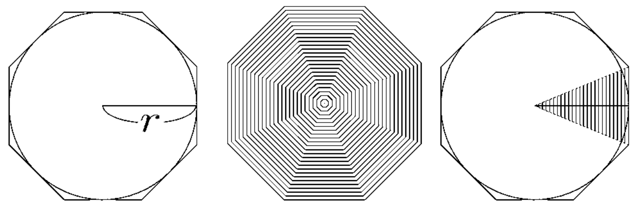
周：$\ell(r)=4\sqrt{2}r$
面積：$S(r)=2r^2$

の関係が成立している。
ところが内接正方形ではその関係が成立しない。それは集める線分が積分する方向 (半径方向) に対して垂直でないからである。

問 1 半径 r の円に外接する正多角形の面積を $S(r)$、周の長さを $\ell(r)$ とすると

$$\int_0^r \ell(r)dr=S(r)$$

の関係が成立していることを示せ。



問 2 半径 r の球に外接する立方体の体積を $V(r)$、表面積を $S(r)$ すると

$$\int_0^r S(r)dr=V(r)$$

の関係が成立することを示せ。

＜直線上の運動＞

x 軸上を動く点の時刻 t における位置を $x(t)$, 速度を $v(t)$ とすると
$x'(t) = v(t)$ より

$$\boxed{\int_a^b v(t)dt = x(b) - x(a)} \qquad (変位)$$

となる。この値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**変位**という。これに対し ,
速度 v の絶対値 $|v|$ ($v \geqq 0$ のとき $|v| = v$, $v < 0$ のとき $|v| = -v$) を**速さ**といい,

$$\boxed{\int_a^b |\, v(t) \,| dt} \qquad (道のり)$$

の値を時刻 $t = a$ から $t = b$ までの**道のり**という。

例題 $v(t) = 2 - t$ のとき次式の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^4 v(t)dt$ (2) $\displaystyle\int_0^4 |v(t)|dt$

(解) (1) $\displaystyle\int_0^4 v(t)dt = \int_0^4 (2-t)dt = \Big[\, 2t - \frac{t^2}{2} \,\Big]_0^4 = \Big(2 \times 4 - \frac{4^2}{2}\Big) - 0 = 0$

(2) $v(t) = 2 - t$ は $t = 2$ のときを境に＋ , －が入れかわる。
そこで積分範囲を 2 つにわけて

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^4 |2-t|dt = \int_0^2 |2-t|dt + \int_2^4 |2-t|dt$$

とする。

① $0 \leqq t \leqq 2$ のとき $2 - t \geqq 0$ より $|2-t| = 2-t$ だから

$$\int_0^2 |2-t|dt = \int_0^2 (2-t)dt = \Big[\, 2t - \frac{t^2}{2} \,\Big]_0^2 = 4 - \frac{4}{2} = 2$$

② $2 \leqq t \leqq 4$ のとき $2 - t \leqq 0$ より $|2-t| = -(2-t) = t-2$ だから

$$\int_2^4 |2-t|dt = \int_2^4 (t-2)dt = \Big[\, \frac{t^2}{2} - 2t \,\Big]_2^4 = \Big(\, \frac{16}{2} - 8 \,\Big) - \Big(\, \frac{4}{2} - 4 \,\Big) = 2$$

よって① , ②より

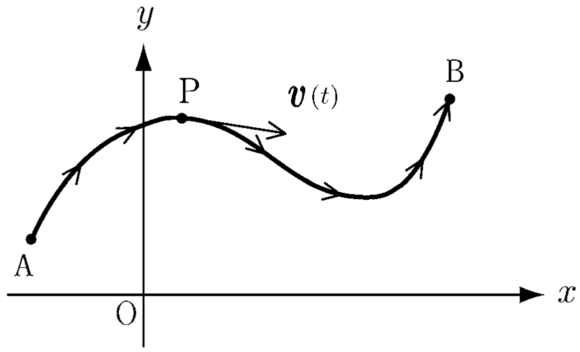
$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^2 |2-t|dt + \int_2^4 |2-t|dt = 2 + 2 = 4$$

(注) 「道のり」は動いた距離を表す。

問 次式の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2-t)dt$ (2) $\displaystyle\int_1^3 |2-t|dt$

＜平面上の運動＞



座標平面上を動く点Pの時刻 t における座標が $(x(t),\ y(t))$ であるとき，点Pの位置ベクトルを

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x(t),\ y(t))} \qquad \text{(位置)}$$

と表し，時刻 t における**位置**という。このベクトルの導関数を

$$\boxed{\boldsymbol{v}(t) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (x'(t),\ y'(t))} \qquad \text{(速度)}$$

で表し，時刻 t における**速度**という。また，速度の絶対値を

$$\boxed{|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}} \qquad \text{(速さ=速度の大きさ)}$$

で表し，**速さ**という。また，速度の導関数を

$$\boxed{\boldsymbol{a}(t) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (x''(t),\ y''(t))} \qquad \text{(加速度)}$$

で表し，時刻 t における**加速度**という。

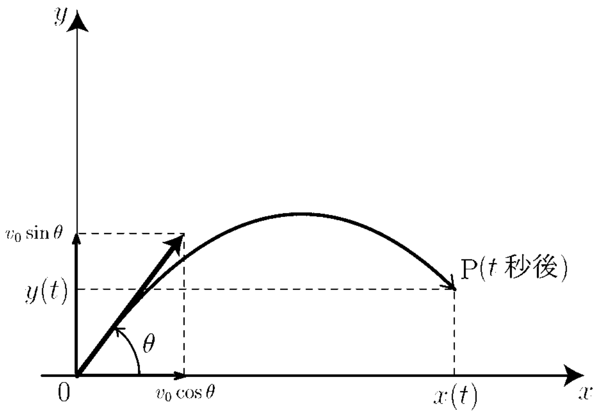
問 平面上を動く点Pの時刻 t における位置が $(x(t),\ y(t))$ であり，初期位置 ($t=0$ のときの位置) が $(x(t),\ y(t)) = (1,\ 2)$，初期速度 ($t=0$ のときの速度) が $\boldsymbol{v}(0) = (x'(0),\ y(0)) = (3,\ 4)$，時刻 t における加速度が $a(t) = (x''(t),\ y''(t)) = (0,\ 5)$ であるとする。

(1) $x'(t) = \displaystyle\int x''(t)dt$, $y'(t) = \displaystyle\int y''(t)dt$ と初期速度の条件より，時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t) = (x'(t),\ y'(t))$ と速さ $|\boldsymbol{v}(t)|$ を求めよ。

(2) $x(t) = \displaystyle\int x'(t)dt$, $y(t) = \displaystyle\int y'(t)dt$ と初期位置の条件より，時刻 t における位置 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

＜放物運動＞

例 地上から角度 θ 方向に速度 v_0 (m/s) で物体を飛ばした。t 秒後の水平距離を $x(t)$ (m)，高さを $y(t)$ (m) とする。このとき t 秒後の水平方向の速度は $x'(t)$, 水平方向の加速度は $x''(t)$ であり，垂直方向の速度は $y'(t)$, 垂直方向の加速度は $y''(t)$ である。



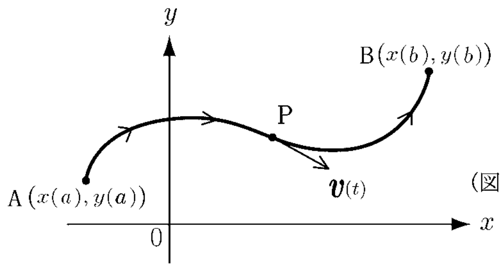
問 1 空気抵抗がないとすると，水平方向には力が働いていないので，水平方向の加速度は 0(m/s²) である。また条件より水平方向の初期速度は $v_0 \cos\theta$ (m/s) である。t 秒後の水平方向の速度 $x'(t)$ と水平距離 $x(t)$ を求めよ。

問 2 垂直方向には下向きに重力が働いているから，垂直方向の加速度は -9.8(m/s²) である。また条件より垂直方向の初期速度は $v_0 \sin\theta$ (m/s) である。t 秒後の垂直方向の速度 $y'(t)$ と高さ $y(t)$ を求めよ。

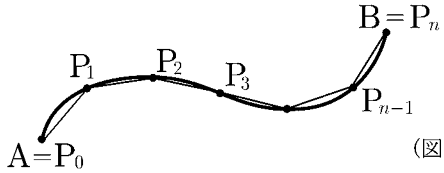
問 3 物体が地上に落ちるのは何秒後か？また，そのときの水平距離は何 m か？

問 4 物体が地上に落ちたときの水平距離が最も長いのは角度 θ が何度のときか？

< 道のり 1 >



(図1)



(図2)

平面上を動く点 P の時刻 t における座標が $(x(t),\ y(t))$ があるとき，この点が時刻 a(位置 A) から時刻 b(位置 B) までに動いた道のり ℓ は，速度を $\boldsymbol{v}(t) = (x'(t),\ y'(t))$ とすると

$$\boxed{\ell = \int_a^b |\boldsymbol{v}(t)|\,dt = \int_b^a \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}\,dt} \quad \text{(道のり)}$$

である。

< 証明のアイデア >

時間の範囲 $a \leqq t \leqq b$ を n 等分した分点を

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \qquad \left(t_k = a + k\Delta t\ ,\ \Delta t = \frac{b-a}{n}\right)$$

とおく。各時刻 t_k における位置を $\mathrm{P}_k(x(t_k), y(t_k))$ とし，$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots \mathrm{P}_n, = \mathrm{B}$ の各点を折れ線で結んで ℓ を近似する。折れ線の長さを ℓ_n(図 2) とすれば

$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k \qquad \left(\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k - y(t_{k-1}))^2}\right)$$

である。n が十分大きければ Δt は小さいので

$$\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\Delta t} \fallingdotseq x'(t_{k-1}) \qquad , \qquad \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t} \fallingdotseq y'(t_{k-1})$$

より

$$\ell_n \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\Delta t\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\Delta t\Big)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\Big)^2} \times \Delta t$$

と近似できる。そこで n を限りなく大きくすると ℓ_n は ℓ に近づくので

$$\begin{aligned}
\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\Big(x'(t_{k-1})\Big)^2 + \Big(y'(t_{k-1})\Big)^2}\,\Delta t \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\Big(x'(t_k)\Big)^2 + \Big(y'(t_k)\Big)^2}\,\Delta t \\
&= \int_a^b \sqrt{\Big(x'(t)\Big)^2 + \Big(y'(t)\Big)^2}\,dt
\end{aligned}$$

(注) ここで定積分の定義式

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\Delta t \qquad \left(t_k = a + k\Delta t\ ,\ \Delta t = \frac{b-a}{n}\right)$$

を用いた。

＜道のり 2＞

例題 平面上を動く点 P の時刻 t における速度が

$$\boldsymbol{v}(t)=\left(t\,,\,t\sqrt{t}\right)$$

であり，$t=0$ のときの位置は原点 $(0,0)$ とする。このとき

(1) 時刻 t における位置 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=4$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

(解) (1) $\boldsymbol{v}(t)=(x'(t)\,,\,y'(t))=\left(t\,,\,t\sqrt{t}\right)$ ，$(x(0)\,,\,y(0))=(0\,,\,0)$ より

$$x(t)-x(0)=\int_0^t x'(t)dt \quad\Rightarrow\quad x(t)=x(0)+\int_0^t x'(t)dt=0+\int_0^t tdt=\frac{1}{2}t^2$$

$$y(t)-y(0)=\int_0^t y'(t)dt \quad\Rightarrow\quad y(t)=y(0)+\int_0^t y'(t)dt=0+\int_0^t t\sqrt{t}dt=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}$$

(答) $(x(t)\,,\,y(t))=\left(\dfrac{1}{2}t^2\ ,\ \dfrac{2}{5}t^2\sqrt{t}\right)$

(2) 求める道のりは

$$\int_0^4|\boldsymbol{v}(t)|\,dt=\int_0^4\sqrt{(t)^2+\left(t\sqrt{t}\right)^2}dt=\int_0^4\sqrt{t^2+t^3}dt=\int_0^4 t\sqrt{1+t}dt$$

ここで $u=1+t$ とおくと $\dfrac{du}{dt}=1 \quad\Rightarrow\quad du=dt$ より

$$\int_0^4 t\sqrt{1+t}dt=\int_1^5(u-1)\sqrt{u}du=\left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u}-\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^5=\frac{20\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{15}$$

(答) $\displaystyle\int_0^4|\boldsymbol{v}(t)|\,dt=\frac{20\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{15}$

問 1 x 軸上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t)=(\cos t\,,\,0)$$

であり，$t=0$ のときの位置は原点とする。

(1) 時刻 t における位置 $(x(t),y(t))$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=\pi$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

問 2 平面上を動く点 P の時刻 t における速度が

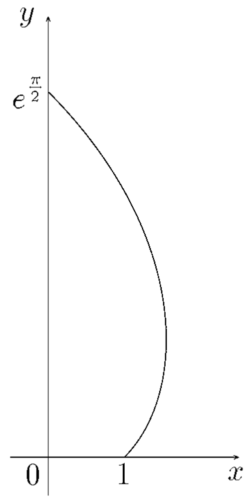
$$\boldsymbol{v}(t)=(-\sin t\,,\,\cos t)$$

であり，$t=0$ のときの位置は点 $(1\,,\,0)$ とする。

(1) 時刻 t における位置 $(x(t)\,,\,y(t))$ を求めよ。

(2) $t=0$ から $t=2\pi$ までの間にこの点 P が動いた道のりを求めよ。

＜道のり 3＞



例題 次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

$$x(t)=e^t\cos t\ ,\quad y(t)=e^t\sin t\qquad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

（解）$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t\ ,\ \dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t$

より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\left(e^t\right)^2(\cos t-\sin t)^2+\left(e^t\right)^2(\sin t+\cos t)^2$$

$$=\left(e^t\right)^2\left\{\cos^2 t-2\cos t\sin t+\sin t^2+\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t\right\}$$

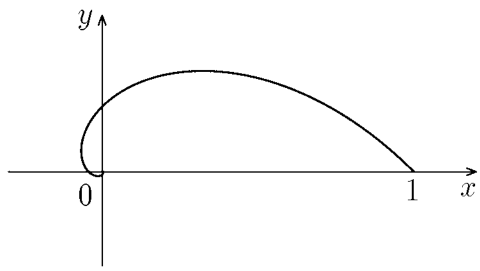
$$=2\left(e^t\right)^2$$

である。求める曲線の長さは点 $(x(t),y(t))$ の $t=0$ から $t=\frac{\pi}{2}$ までの道のりだから,

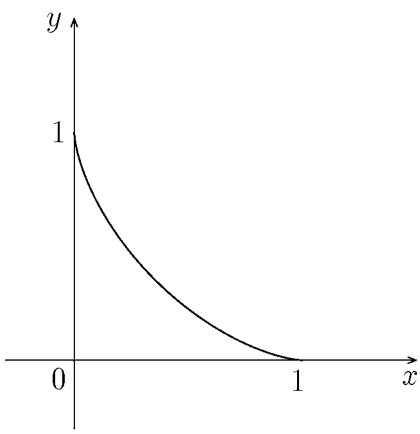
$$\ell=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(e^t\right)^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^tdt=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}$$

問 次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

(1) $x(t)=e^{-t}\cos t\ ,\quad y(t)=e^{-t}\sin t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$



(2) $x(t)=\cos^3 t\ ,\quad y(t)=\sin^3 t\quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$



＜ 定積分の応用問題 1 ＞

問 1　次の定積分の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin x+\cos x+\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

問 2　次の図形の面積を求めよ。

(1)　曲線 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ と x 軸および 2 直線 $x=1$ と $x=4$ で囲まれる部分

(2)　曲線 $y=x^3$ と直線 $y=x$ で囲まれる部分

(3)　2 曲線 $y=x^4$ と $y=\sqrt{x}$ で囲まれる部分

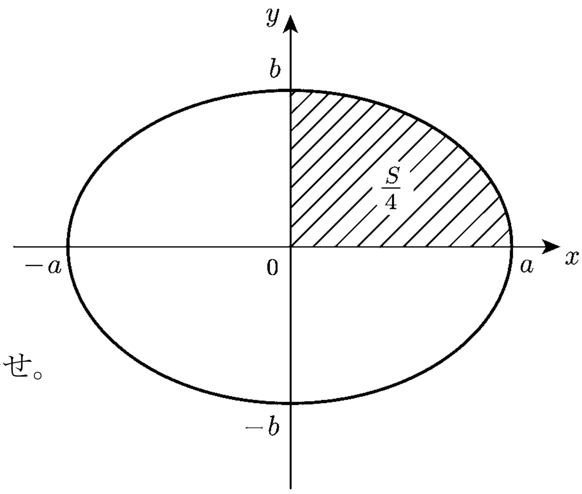
(4)　曲線 $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれる部分

< 定積分の応用問題 2 >

問 1 $a > b > 0$ である定数 a, b に対し,
右図の楕円の方程式は

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

である。



(1) 上半楕円の方程式を求めよ。

(2) 右図の斜線部分の面積 $\dfrac{S}{4}$ を積分の式で表せ。

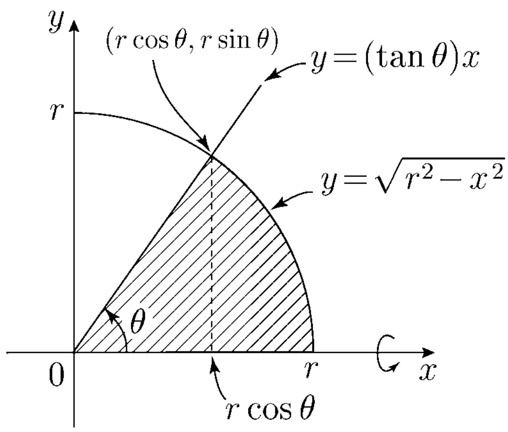
$\dfrac{S}{4} =$

(3) S を求めよ。

問 2 次の図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の内部 (ただし $a > 0$, $b > 0$ とする)

(2) 右図の斜線部分



< 定積分の応用問題 3 >

問 1　x 軸上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (\sin t\,,\ 0)$$

であり，$t = 0$ のときの位置は原点とする。

(1)　時刻 t における位置 $(x(t)\,,\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$t = 0$ から $t = 2\pi$ までの間に動いた距離 (道のり) を求めよ。

問 2　平面上を動く点 P の時刻 t における速度 $\boldsymbol{v}(t)$ が

$$\boldsymbol{v}(t) = (1\,,\ \sqrt{t})$$

であり $t = 0$ における位置は原点とする。

(1)　時刻 t における位置 $(x(t)\,,\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$t = 0$ から $t = 1$ までに動いた距離 (道のり) を求めよ。

問 3　次の曲線の長さ ℓ を求めよ。

(1)　$x(t) = 2t^3, \quad y(t) = 3t^2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2)　$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$

(ヒント)　$2 - 2\cos t = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

＜解答 1 ～ 7＞

＜ 1 ページ. 不定積分 1 ＞

問の解答

(1) $\left(\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$

(2) $\left(\log|x|\right)' = \dfrac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$

(3) $(\sin x)' = \cos x \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(4) $(-\cos x)' = \sin x \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(5) $(e^x)' = e^x \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

＜ 2 ページ. 不定積分 2 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{1}{7}x^7 + C$　(2) $\dfrac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$　(3) $2x^{\frac{1}{2}} + C$

(4) $\displaystyle\int x^{-3}dx = \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

(5) $\displaystyle\int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$

(6) $\displaystyle\int x^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$

＜ 3 ページ. 不定積分 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)dx = \log|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\displaystyle\int\left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right)dx = x + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3} + C$

(3) $\displaystyle\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$

(4) $\displaystyle\int\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)dx = x - 4\sqrt{x} + \log|x| + C$

＜ 4 ページ. 不定積分 4 ＞

問 1 の解答

(1) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(2) $\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$

$(= -\cot x + C)$

(3) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

(4) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x + C$

問 2 の解答

(1) $-4\cos x - 3\sin x + C$　(2) $3\sin x - \tan x + C$

(3) $2\sin x + \cos x + C$　(4) $-\tan x + C$

(5) $-\cot x - x + C$　(6) $\tan x + C$

(7) $3\sin^{-1} x + C$　(8) $5\tan x + C$

＜ 5 ページ. 積分記号 ＞

問の解答

(1) $10t - 4.9t^2 + C$　(2) $\dfrac{4}{3}\pi r^3 + C$

(3) $e^u + C$　(4) $\log|y| + C$

(5) $\sin u + C$

＜ 6 ページ. 置換積分法 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int \cos(4x-3)dx = \frac{1}{4}\sin(4x-3) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x+4)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x+4) + C$

＜ 7 ページ. 置換積分法 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int \sin u\, du = -\cos u + C$

(1)' $\displaystyle\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

(2) $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$

(2)' $\displaystyle\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

(3) $\displaystyle\int u^n du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$

(3)' $\displaystyle\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{(n+1)a}(ax+b)^{n+1} + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{u}du = \log|\,u\,| + C$

(4)' $\displaystyle\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\log|\,ax+b\,| + C$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int \cos(-3x+2)dx = -\frac{1}{3}\sin(-3x+2) + C$

(2) $\displaystyle\int \sin(4x-5)dx = -\frac{1}{4}\cos(4x-5) + C$

(3) $\displaystyle\int e^{4x-3}dx = \frac{1}{4}e^{4x-3} + C$

(4) $\displaystyle\int (5x-3)^6 dx = \frac{1}{35}(5x-3)^7 + C$

(5) $\displaystyle\int (3x-2)^{10} dx = \frac{1}{33}(3x-2)^{11} + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}dx = \frac{1}{4}\log|\,4x+3\,| + C$

＜解答 8 〜 13 ＞

＜ 8 ページ. 置換積分法 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int \sqrt{4x-3}\,dx = \frac{1}{6}(4x-3)\sqrt{4x-3} + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x-3)^4}dx = -\frac{1}{15(5x-3)^3} + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \sqrt{2x+1} + C$

＜ 9 ページ. 置換積分法 4 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int x^3 e^{x^4+1}dx = \frac{1}{4}e^{x^4+1} + C$

(2) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+2)dx = \frac{1}{3}\sin(x^3+2) + C$

(3) $\displaystyle\int x\sin(x^2+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+3) + C$

(4) $\displaystyle\int x(x^2+1)^5dx = \frac{1}{12}(x^2+1)^6 + C$

＜ 10 ページ. 置換積分法 5 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ \log|\,x^3+1\,| + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+4}dx = \frac{3}{2}\ \log(x^2+4) + C$

(3) $\displaystyle\int \cot x\ dx = \log|\ \sin x\,| + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|\,f(x)\,| + C$

＜ 11 ページ. 置換積分法 6 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+1}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+1) + C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}dx = \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)^2+r^2}dx = \frac{1}{ar}\tan^{-1}\left(\frac{ax+b}{r}\right) + C$

＜ 12 ページ. 不定積分の練習 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

(2) $\displaystyle\int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$

(3) $\displaystyle\int \cos(4x)dx = \frac{1}{4}\sin(4x) + C$

(4) $\displaystyle\int \cos(4x+3)dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + C$

(5) $\displaystyle\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

(6) $\displaystyle\int \sin(3x-5)dx = -\frac{1}{3}\cos(3x-5) + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(5x)}dx = \frac{1}{5}\tan(5x) + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(5x)^2+1}dx = \frac{1}{5}\tan^{-1}(5x) + C$

(9) $\displaystyle\int (7x-5)^3dx = \frac{1}{28}(7x-5)^4 + C$

(10) $\displaystyle\int \frac{dx}{(6x-1)^3} = -\frac{1}{12(6x-1)^2} + C$

(11) $\displaystyle\int \sqrt{5x+1}\,dx = \frac{2}{15}(5x+1)\sqrt{5x+1} + C$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\log|\,4x+3\,| + C$

(13) $\displaystyle\int x\cos(x^2+3)dx = \frac{1}{2}\sin(x^2+3) + C$

(14) $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$

(15) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

(16) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx = \log(2+\sin x) + C$

＜ 13 ページ. 分数関数の積分 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$

(2) $\displaystyle\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

(3) $\displaystyle\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$

(4) $\displaystyle\frac{1}{7}\log\left|\frac{x-3}{x+4}\right| + C$

(5) $\displaystyle\frac{1}{5}\log\left|\frac{2x+1}{3x+4}\right| + C$

＜解答 14 〜 18＞

＜ 14 ページ. 部分積分法 1 ＞

問の解答

(1) $-x\cos x+\sin x+C$

(2) xe^x-e^x+C

(3) $\dfrac{x}{2}\sin(2x)+\dfrac{1}{4}\cos(2x)+C$

(4) $-\dfrac{x}{2}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}\sin(2x)+C$

(5) $\dfrac{x}{3}e^{3x}-\dfrac{1}{9}e^{3x}+C$

＜ 15 ページ. 部分積分法 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\dfrac{x^2}{2}\log x-\dfrac{x^2}{4}+C$

(2) $\dfrac{x^3}{3}\log x-\dfrac{x^3}{9}+C$

問 2 の解答

(1) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

(2) $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

＜ 16 ページ. 三角関数の不定積分 ＞

問の解答

(1) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin(2x)+C$

(2) $\dfrac{1}{10}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin x+C$

(3) $\dfrac{1}{6}\sin(3x)-\dfrac{1}{10}\sin(5x)+C$

(4) $-\dfrac{1}{14}\cos(7x)-\dfrac{1}{2}\cos x+C$

(5) $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}\sin(6x)+C$

(6) $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{16}\sin(8x)+C$

＜ 17 ページ. 不定積分の検証 ＞

問の解答

(1) $\left\{\dfrac{1}{4}(x^4-1)^4\right\}'=4x^3(x^4-1)^3$ より正しくない (×)

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\log|x^2-1|\right)'=\dfrac{x}{x^2-1}$ より正しい (○)

(3) $(x^2e^x-2xe^x+2e^x)'=x^2e^x$ より正しい (○)

＜ 18 ページ. 不定積分の練習 2 ＞

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)}=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{3}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$

(3) $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(4) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)+C$

(5) $\displaystyle\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C$

(6) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C$

(7) $\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-\int 1\,dx=x\log x-x+C$

(8) $\displaystyle\int x^3\log x=\frac{1}{4}x^4\log x-\int\frac{1}{4}x^3dx=\frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{16}x^4+C$

(9) $\displaystyle\int x^2e^xdx=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-\left(2xe^x-\int 2e^xdx\right)$

$=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

問 2 の解答

(1) $(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x)'$

$=2x\sin x+x^2\cos x+2\cos x-2x\sin x-2\cos x$

$=x^2\cos x$　　より正しい。

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\right)'=\left(\dfrac{1}{2}\log|x-2|-\dfrac{1}{2}\log|x-2|\right)'$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

$=\dfrac{2}{x^2-4}$　　より正しくない。

< 解答 19 〜 25 >

< 19 ページ. 和の記号 $\sum$ >

問 1 の解答

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

(2) $2^2+3^2+4^2+\cdots+(n-1)^2=\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} k^2$

(3) $1+2+3+\cdots+n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$

(4) $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n}$

問 2 の解答

(1) $1+2+3+\cdots+1000=\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} k=\dfrac{1000\times 1001}{2}=500500$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k^2=\dfrac{1}{6}\times 20\times 21\times 41=2870$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k^3=\left(\dfrac{10\times 11}{2}\right)^2=3025$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\sum_{k=1}^{n-1} k=\dfrac{(n-1)n}{2}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1} k^2=\dfrac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}$

< 24 ページ. 微分積分学の基本定理 >

問の解答

$S(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)dx$ とおくと $S'(x)=f(x)$

$F'(x)=f(x)$ より

$\Big(F(x)-S(x)\Big)'=f(x)-f(x)=0$

微分して 0 になる関数は定数だけだから

$F(x)-S(x)=C$ (定数)

とおくと

$F(x)=S(x)+C$

よって

$$F(b)-F(a)=\Big\{S(b)+C\Big\}-\Big\{S(a)+C\Big\}$$

$$=S(b)-S(a)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx$$

(証明終)

< 25 ページ. 定積分の計算 1 >

問の解答

(1) $\displaystyle\int_a^b x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b=\frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}$

(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}dx=\Big[\log|x|\Big]_a^b=\log\left|\frac{b}{a}\right|$

(3) $\displaystyle\int_a^b dx=\Big[\ x\ \Big]_a^b=b-a$

(4) $\displaystyle\int_a^b e^x dx=\Big[\ e^x\ \Big]_a^b=e^b-e^a$

(5) $\displaystyle\int_a^b \cos x dx=\Big[\sin x\Big]_a^b=\sin b-\sin a$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_a^b=-\cos b+\cos a$

(7) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\cos^2 x}=\Big[\tan x\Big]_a^b=\tan b-\tan a$

(8) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\Big[\tan^{-1} x\Big]_a^b=\tan^{-1} b-\tan^{-1} a$

(9) $\displaystyle\int_4^{10} dx=\Big[\ x\ \Big]_4^{10}=6$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3 dx=\left[\ \frac{x^4}{4}\ \right]_{-1}^2=\frac{15}{4}$

(11) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^2}dx=\left[\ -\frac{1}{x}\ \right]_1^5=\frac{4}{5}$

(12) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\ \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ \right]_1^4=\frac{14}{3}$

(13) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}dx=\Big[\ \log|x|\ \Big]_1^e=1$

(14) $\displaystyle\int_0^2 e^x dx=\Big[\ e^x\ \Big]_0^2=e^2-1$

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1$

(18) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\Big[\tan^{-1} x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$

＜解答 26 ～ 29 ＞

＜ 26 ページ. 定積分の計算 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2-3x+1}{x^2}dx = \int_1^2 \left(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$\displaystyle= \left[2x - 3\log|\,x\,| - \frac{1}{x}\right]_1^2$

$\displaystyle= \left(4 - 3\log|\,2\,| - \frac{1}{2}\right) - \left(2 - 3\log|\,1\,| - 1\right) = \frac{5}{2} - 3\log 2$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x^3+x^4)dx + \int_0^1 (x^3+x^4)dx = \int_{-1}^1 (x^3+x^4)dx$

$\displaystyle= 2\int_0^1 x^4 dx = 2\left[\ \frac{x^5}{5}\ \right]_0^1 = \frac{2}{5}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = \int_1^2 \left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right\}dx = \left[\log\left|\ \frac{x}{x+1}\ \right|\ \right]_1^2$

$\displaystyle= \log\frac{2}{3} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{4}{3}$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2\pi)\right]_0^\pi$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin(2\pi) = \frac{1}{2}\pi$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2x)dx = \left[\ -\frac{1}{4}\cos(2x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle= -\frac{1}{4}\cos(\pi) + \frac{1}{4}\cos 0 = \frac{1}{2}$

＜ 27 ページ. 定積分の積分変数 ＞

問の解答

(1) $\left[4t - 5t^2\right]_1^3 = -32$

(2) $\left[\pi r^2\right]_0^R = \pi R^2$

(3) $\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = 2$

(4) $\displaystyle\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

(5) $\displaystyle\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^9 = \frac{52}{3}$

＜ 28 ページ. 定積分の置換積分法 1 ＞

問の解答

$u = 2x+1$　とおくと　$\dfrac{dy}{dx} = 2$

x	-1	$\to$	1
u	-1	$\to$	3

より

$\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)^4 dx = \frac{1}{2}\int_{x=-1}^{x=1}(2x+1)^4 2dx = \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{u=3} u^4\frac{du}{dx}dx$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\int_{u=-1}^{u=3} u^4 du = \frac{1}{2}\left[\ \frac{u^5}{5}\ \right]_{u=-1}^{u=3} = \frac{1}{2}\left(\frac{243}{5} - \frac{(-1)}{5}\right)$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\times\frac{244}{5} = \frac{122}{5}$

＜ 29 ページ. 定積分の置換積分法 2 ＞

問の解答

(1) $u = 2x+1$　とおくと

$\dfrac{du}{dx} = 2$　より　$dx = \dfrac{1}{2}du$　とおける。

積分区間は

x	-1	$\to$	1
u	-1	$\to$	3

と変わるので

$\displaystyle\int_{x=-1}^{x=1} (2x+1)^4 dx = \int_{u=-1}^{u=3} u^4\frac{1}{2}du = \left[\frac{1}{10}u^5\right]_{-1}^3$

$\displaystyle= \frac{1}{10}\left(3^5 - (-1)^5\right) = \frac{244}{10} = \frac{122}{5}$

(2) $u = 3x-1$　とおくと

$\dfrac{du}{dx} = 3$　より　$dx = \dfrac{1}{3}du$　とおける。

積分区間は

x	0	$\to$	2
u	-1	$\to$	5

と変わるので

$\displaystyle\int_{x=0}^{x=2} (3x-1)^3 dx = \int_{u=-1}^{u=5} u^3\frac{1}{3}du = \left[\frac{1}{12}u^4\right]_{-1}^5$

$\displaystyle= \frac{1}{12}\left(5^4 - (-1)^4\right) = 52$

(3) $u = 2x+1$　とおくと

$\dfrac{du}{dx} = 2$　より　$dx = \dfrac{1}{2}du$　とおける。

積分区間は

x	0	$\to$	4
u	1	$\to$	9

と変わるので

$\displaystyle\int_{x=0}^{x=4} \sqrt{2x+1}\,dx = \int_{u=1}^{u=9} \sqrt{u}\,\frac{1}{2}du = \left[\frac{1}{3}u\sqrt{u}\right]_1^9$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\left(9\sqrt{9} - 1\sqrt{1}\right) = \frac{26}{3}$

＜解答 30 〜 32＞

＜ 30 ページ. 定積分の置換積分法 3 ＞

問の解答

(1) $u = x^2 + 2$ 　とおくと

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{より} \quad xdx = \frac{1}{2}du$$

x	$0 \to 1$
u	$2 \to 3$

より

$$\int_{x=0}^{x=1} x(x^2+2)^3 dx = \int_{u=2}^{u=3} u^3 \frac{1}{2} du = \left[\frac{1}{8} u^4 \right]_{u=2}^{u=3}$$

$$= \frac{1}{8}(3^4 - 2^4) = \frac{65}{8}$$

(2) $u = x^2 + 1$ 　とおくと

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{より} \quad xdx = \frac{1}{2}du$$

x	$0 \to 2$
u	$1 \to 5$

より

$$\int_{x=0}^{x=2} \frac{x}{(x^2+1)^3} dx = \int_{u=1}^{u=5} \frac{1}{u^3} \times \frac{1}{2} du = \left[-\frac{1}{4} u^{-2} \right]_{u=1}^{u=5} = \frac{6}{25}$$

(3) $u = x^3 + 2$ 　とおくと

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \text{より} \quad x^2 dx = \frac{1}{3}du$$

x	$-1 \to 2$
u	$1 \to 10$

より

$$\int_{x=-1}^{x=2} \frac{x^2}{x^3+2} dx = \int_{u=1}^{u=10} \frac{1}{u} \times \frac{1}{3} du = \left[\frac{1}{3} \log|\, u\,| \right]_{u=1}^{u=10}$$

$$= \frac{1}{3} \log 10$$

(4) $u = x^3 + 1$ 　とおくと

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \quad \text{より} \quad x^2 dx = \frac{1}{3}du$$

x	$-1 \to 1$
u	$0 \to 2$

より

$$\int_{x=-1}^{x=1} x^2 e^{x^3+1} dx = \int_{u=0}^{u=2} e^u \frac{1}{3} du = \left[\frac{1}{3} e^u \right]_{u=0}^{u=2} = \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}$$

＜ 31 ページ. 定積分の置換積分法 4 ＞

問の解答

(1)
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}\, a\cos\theta \, d\theta$$

$(x = a\sin\theta$ とおく)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\theta) \right\} d\theta$$

$$= \left[\frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2$$

(2)
$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\, 2\cos\theta \, d\theta$$

$(x = 2\sin\theta$ とおく)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\cos^2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big\{ 2 + 2\cos(2\theta) \Big\} d\theta$$

$$= \Big[2\theta + \sin(2\theta) \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

＜ 32 ページ. 定積分の部分積分法 1 ＞

問の解答

(1)
$$\int_0^1 x(x-1)^3 \, dx = \left[x\frac{(x-1)^4}{4} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x-1)^4}{4} \, dx$$

$$= 0 - 0 - \left[\frac{(x-1)^5}{20} \right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

(2)
$$\int_0^{\pi} x\cos x \, dx = \Big[x\sin x \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= 0 - 0 + \Big[\cos x \Big]_0^{\pi} = -2$$

(3)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x \, dx = \Big[x(-\cos x) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \, dx$$

$$= 0 - 0 + \Big[\sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(4)
$$\int_0^1 xe^x \, dx = \Big[xe^x \Big]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - 0 - \Big[e^x \Big]_0^1 = 1$$

＜解答 33 〜 35 ＞

＜ 33 ページ. 定積分の部分積分法 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^e x\log x\ dx = \left[\ \frac{x^2}{2}\log x\ \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\ dx$

$\displaystyle = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\ \frac{x^2}{4}\ \right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\ dx$

$\displaystyle = \frac{e^3}{3} - 0 - \left[\ \frac{x^3}{9}\ \right]_1^e = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

(3) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x^3\log x\ dx = \left[\ \frac{x^4}{4}\log x\ \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^3}{4}\ dx$

$\displaystyle = \frac{e^2}{4}\log\sqrt{e} - 0 - \left[\ \frac{x^4}{16}\ \right]_1^{\sqrt{e}}$

$\displaystyle = \frac{e^2}{16} + \frac{1}{16}$

(4) $\displaystyle\int_1^e \log x\ dx = \int_1^e 1\times\log x\ dx$

$\displaystyle = \left[\ x\log x\ \right]_1^e - \int_1^e 1\ dx$

$\displaystyle = e - 0 - \left[\ x\ \right]_1^e = 1$

＜ 34 ページ. 定積分の部分積分法 3 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin\pi\ dx = \left[x^2(-\cos x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x(-\cos x)\ dx$

$\displaystyle = -\pi^2\cos\pi - 0 + \left[2x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x\ dx$

$\displaystyle = \pi^2 + 2\pi\sin\pi - 0 + \left[2\cos x\right]_0^\pi = \pi^2 - 4$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\ dx = \left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\ dx$

$\displaystyle = \frac{\pi^2}{4} - 0 + \left[2x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\ dx$

$\displaystyle = \frac{\pi^2}{4} + \pi\cos(\frac{\pi}{2}) - 0 + \left[2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi x^2\sin(2\pi)\ dx = \left[x^2\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\right]_{-\pi}^\pi - \int_{-\pi}^\pi 2x\times\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right)\ dx$

$\displaystyle = -\frac{\pi^2}{2}\cos(2\pi) + \frac{\pi}{2}\cos(-2\pi) + \int_{-\pi}^\pi x\cos(2x)\ dx$

$\displaystyle = \left[x\times\frac{\sin(2x)}{2}\right]_{-\pi}^\pi - \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin(2x)}{2}\ dx$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}\sin(2\pi) + \frac{\pi}{2}\sin(-2\pi) + \left[\frac{\cos(2x)}{4}\right]_{-\pi}^\pi$

$\displaystyle = \frac{\cos(2\pi)}{4} - \frac{\cos(-2\pi)}{4} = 0$

＜ 35 ページ. 定積分の練習 1 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\left[\ x\ \right]_{-1}^3 = 4$

(2) $\displaystyle\left[\ \log|x|\ \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\left[\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ \right]_0^1 = \frac{3}{4}$

(4) $\displaystyle\left[\ -3\cos x - 4\sin x\ \right]_0^\pi = 6$

(5) $\displaystyle\left[\ 3x - 4\log|x| - \frac{1}{x}\ \right]_1^2 = \frac{7}{2} - 4\log 2$

(6) $\displaystyle\left[\ 2\sqrt{x}\ \right]_1^9 = 4$

(7) $\displaystyle\left[\ \tan x\ \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \sqrt{3}$

(8) $\displaystyle\left[\ \frac{1}{3}\log|3x+1|\ \right]_0^2 = \frac{1}{3}\log 7$

(9) $\displaystyle\left[\ \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\ \right]_2^3 = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{2}\right)$

(10) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{2}\left\{\ \sin(3x) + \sin x\ \right\}\ dx$

$\displaystyle = \left[\ -\frac{1}{6}\cos(3x) - \frac{1}{2}\cos x\ \right]_0^\pi = \frac{4}{3}$

(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\ \right\}\ dx$

$\displaystyle = \left[\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

(12) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x)\ \right\}\ dx$

$\displaystyle = \left[\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin(4x)\ \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

(13) $\displaystyle\left[\ \frac{1}{3}e^{3x-1}\ \right]_{-2}^2 = \frac{1}{3}e^5 - \frac{1}{3}e^{-7}$

(14) $\displaystyle\left[\ -\frac{1}{2}e^{-x^2}\ \right]_{-1}^1 = 0$

＜解答 36 〜 40＞

＜ 36 ページ. 定積分の練習 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{u^5}\times\frac{1}{3}\,du = \Big[-\frac{1}{12}u^{-4}\Big]_1^4 = \frac{85}{1024}$

$(u = 3x+1$ とおく$)$

(2) $\displaystyle\int_4^{49} \sqrt{u}\times\frac{1}{5}\,du = \Big[\frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}\Big]_4^{49} = \frac{134}{3}$

$(u = 5x-1$ とおく$)$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{u^4}\times\frac{1}{3}\,du = \Big[-\frac{1}{9}u^{-3}\Big]_1^2 = \frac{7}{72}$

$(u = x^3+1$ とおく$)$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3}{u}\times\frac{1}{2}\,du = \Big[\frac{3}{2}\log|u|\Big]_1^2 = \frac{3}{2}\log 2$

$(u = x^2+1$ とおく$)$

(5) $\displaystyle\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$\displaystyle= \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1$

(6) $\displaystyle\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$\displaystyle= \pi\cos\pi - 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \pi$

(7) $\displaystyle\Big[x\log x\Big]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} 1\,dx$

$\displaystyle= e^2\log e^2 - e\log e - \Big[x\Big]_e^{e^2} = e^2$

(8) $\displaystyle\Big[xe^x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx = e^1 - e^{-1} - \Big[e^x\Big]_{-1}^{1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$

(9) $\displaystyle\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\sin x\,dx$

$\displaystyle= \pi^2\sin\pi - 0 + \Big[2x\cos x\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\cos x\,dx$

$\displaystyle= 2\pi\cos\pi - 0 - \Big[2\sin x\Big]_0^{\pi} = -2\pi$

＜ 37 ページ. 和の極限値 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^2\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^2\Big)\frac{1}{n^3}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\times\frac{1}{n^3}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{3}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)\frac{1}{n^2}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)^3\times\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^3\Big)\frac{1}{n^4}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{4}\times\frac{1}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^2 = \frac{1}{4}$

＜ 39 ページ. 面積 2 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_0^1 e^x dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e-1$

(2) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^9 = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2\Big(-\frac{1}{2}-(-1)\Big) = \frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \Big[\log|x|\Big]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2$

＜ 40 ページ. 面積 3 ＞

問 1 の解答

$$S = \int_a^b\{0-g(x)\}dx = -\int_a^b g(x)dx$$

問 2 の解答

$$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}(\sin x-\cos x)dx = \Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$= 2\sqrt{2}$

問 3 の解答

(1) $\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx = \Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}$

(2) $\displaystyle\int_1^4\Big(-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}-\frac{1}{x}\Big)dx = \Big[-\frac{x^2}{8}+\frac{5}{4}x-\log|x|\Big]_1^4$

$\displaystyle= \frac{15}{8}-\log 4$

＜ 解答 41 〜 46 ＞

＜ 41 ページ. 面積 4 ＞

問 1 の解答

求める面積を S とおくと

$$S/4 = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2\theta\ d\theta$$

$(x = a\sin\theta$ とおく$)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}\cos(2\theta) \right\} d\theta = \left[\frac{a^2}{2}\theta + \frac{a^2}{4}\sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}a^2$$

よって $S = \left(\frac{\pi}{4}a^2\right) \times 4 = \pi a^2$　　(答) $\underline{S = \pi a^2}$

問 2 の解答

$$S = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\ dx \qquad (x = 2\sin\theta \text{ とおく})$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\ 2\cos\theta\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \Big\{ 2 + 2\cos(2\theta) \Big\} d\theta = \Big[2\theta + \sin(2\theta) \Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

＜ 42 ページ. 偶関数・奇関数の定積分 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x^3 + x^4 + x^5\right) dx = 2\int_0^1 x^4\ dx = 2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(x + x^3 + x^6\right) dx = 2\int_0^1 x^6\ dx = 2\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{7}$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 2\big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \tan x\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$\displaystyle= 2\big[\tan x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2$

＜ 43 ページ. 体積 1 ＞

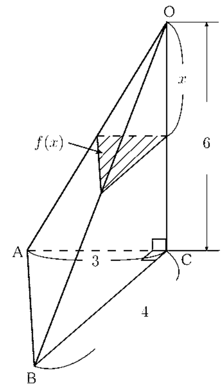
問の解答

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5^2 \times 7}{12}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{5^2 \times 7}{12} \times 2$$

$$= \frac{175}{6}$$

＜ 44 ページ. 体積 2 ＞



問の解答

$f(x) : \dfrac{1}{2} \times 3 \times 4 = x^2 : 6^2$

$f(x) = \dfrac{1}{6}x^2$

$$V = \int_0^6 f(x)\ dx = \int_0^6 \frac{1}{6}x^2\ dx = \left[\frac{1}{18}x^3\right]_0^6 = \frac{6^3}{18} = 12$$

＜ 45 ページ. 体積 3 ＞

問の解答

(1) $\mathrm{A'C'} = \dfrac{ax}{h}$　,　　$\mathrm{B'C'} = \dfrac{bx}{h}$

(2) $S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{A'C'} \times \mathrm{B'C'} = \dfrac{abx^2}{2h^2}$

(3) $V = \displaystyle\int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{abx^2}{2h^2}dx = \left[\frac{abx^3}{6h^2}\right]_0^h = \frac{abh}{6}$

＜ 46 ページ. 体積 4 ＞

問 1 の解答

$S(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

$$V = \int_0^4 S(x)\ dx = \int_0^4 \frac{x^2}{4}\ dx = \left[\frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{4^3}{12} = \frac{16}{3}$$

問 2 の解答

(1)　$S(x) = \left(\dfrac{ax}{h}\right) \times \left(\dfrac{bx}{h}\right) = \dfrac{abx^2}{h^2}$

$$V = \int_0^h S(x)\ dx = \int_0^h \frac{abx^2}{h^2}\ dx = \left[\frac{abx^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{abh}{3}$$

(2)　$S = ab$ より

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{\frac{abx^2}{h^2}}{ab} = \frac{x^2}{h^2}$$

問 3 の解答

(1) $S(x) = \pi \times \left(\dfrac{rx}{h}\right)^2 = \dfrac{\pi r^2 x^2}{h^2}$

(2) $V = \displaystyle\int_0^h S(x)\ dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}\ dx = \left[\frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$

(3) $S = \pi r^2$ より

$$\frac{S(x)}{S} = \frac{\frac{\pi r^2 x^2}{h^2}}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}$$

＜解答 47 〜 51 ＞

＜ 47 ページ. 体積 5 ＞

問 1 の解答

(1) $S(x) = \pi\{f(x)\}^2$ (2) $V = \displaystyle\int_a^b \pi\{f(x)\}^2\ dx$

問 2 の解答

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\ dx = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}\ dx = \left[\frac{\pi r^2 x^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

問 3 の解答

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left\{\sqrt{r^2 - x^2}\right\}^2\ dx$$
$$= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\ dx = \left[\pi r^2 x - \frac{\pi}{3}x^3\right]_{-r}^{r}$$
$$= \left(\pi r^3 - \frac{\pi}{3}r^3\right) - \left(-\pi r^3 + \frac{\pi}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

＜ 48 ページ. 体積 6 ＞

問 1 の解答

(1) $S(x) = S$ (2) $V = \displaystyle\int_0^h S(x)\ dx = Sh$

問 2 の解答

(1) $S(x) = \dfrac{x^2}{h^2}S$

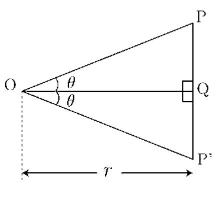
(2) $V = \displaystyle\int_0^h S(x)\ dx = \int_0^h \frac{Sx^2}{h^2}\ dx = \left[\frac{Sx^3}{3h^2}\right]_0^h = \frac{1}{3}Sh$

＜ 49 ページ. 積もる方向 ＞

問 1 の解答

半径 r の円に正 n 角形が外接しているとする。

正 n 角形は次の 2 等辺三角形 OPP' が n 個集まったものである。



ここで $\theta = \dfrac{2\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{n}$ （ラジアン）である。

△OPP' の面積を $s(r)$ とすると

$s(r) = r^2 \tan\theta$

である。

正 n 角形の面積を $S(r)$, 周の長さを $\ell(r)$ とすると

$S(r) = ns(r) = nr^2 \tan\theta$

$\ell(r) = n \times \mathrm{PP'} = n \times 2r\tan\theta = 2nr\tan\theta$

よって $\displaystyle\int_0^r \ell(r)dr = \int_0^r 2nr\tan\theta dr = nr^2\tan\theta = S(r)$

が成立する。

問 2 の解答

半径 r の球に外接する立方体の体積は $V(r) = (2r)^3 = 8r^3$

表面積は $S(r) = 6 \times (2r)^2 = 24r^2$ である。よって

$$\int_0^r S(r)dr = \int_0^r 24r^2 dr = 8r^3 = V(r)$$

が成立する。

＜ 50 ページ. 直線上の運動 ＞

問の解答

(1) $\displaystyle\int_1^3 (2-t)dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^3$

$$= \left(6 - \frac{9}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

(2) $\displaystyle\int_1^3 |2-t|dt = \int_1^2 |2-t|dt + \int_2^3 |2-t|dt$

$$= \int_1^2 (2-t)dt + \int_2^3 (t-2)dt$$
$$= \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_2^3$$
$$= \left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$$
$$= 1$$

＜ 51 ページ. 平面上の運動 ＞

問の解答

(1) $x''(t) = 0$ より $x'(t) = \displaystyle\int x''(t)dt = C$ （定数）

初期速度の条件より $x'(0) = 3$ よって $C = 3 \Rightarrow \underline{x'(t) = 3}$

$y''(t) = 5$ より $y'(t) = \displaystyle\int y''(t)dt = 5t + C$

初期速度の条件より $y'(0) = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow \underline{y'(t) = 5t + 4}$

よって時刻 t における速度は $\underline{v(t) = (3\ ,\ 5t+4)}$ であり ,

速さは $\underline{|\,v(t)\,| = \sqrt{3^2 + (5t+4)^2}\ =\ \sqrt{25t^2 + 40t + 25}}$

(2) $x(t) = \displaystyle\int x'(t)dt = \int 3t + C$

初期位置の条件より $x(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \underline{x(t) = 3t + 1}$

$y(t) = \displaystyle\int y'(t)dt = \int (5t+4)dt = \frac{5}{2}t^2 + 4t + C$

初期位置の条件より

$y(0) = 2 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \underline{y(t) = \dfrac{5}{2}t^2 + 4t + 2}$

よって時刻 t における位置は ,

$$\underline{\Big(\ x(t)\ ,\ y(t)\ \Big) = \left(\ 3t+1\ ,\ \frac{5}{2}t^2 + 4t + 2\ \right)}$$

＜ 解答 52 〜 55 ＞

＜ 52 ページ. 放物運動 ＞

問 1 の解答

$x''(t)=0$, $x'(0)=v_0\cos\theta$, $x(0)=0$ より

$\underline{x'(t)=v_0\cos\theta \quad (\mathrm{m/s})}$

$\underline{x(t)=(v_0\cos\theta)t \quad (\mathrm{m})}$

問 2 の解答

$y''(t)=-9.8$, $y'(0)=v_0\sin\theta$, $y(0)=0$ より

$\underline{y'(t)=-9.8t+v_0\sin\theta \quad (\mathrm{m/s})}$

$\underline{y(t)=-4.9t^2+(v_0\sin\theta)t \quad (\mathrm{m})}$

問 3 の解答

t 秒後に地上に落ちたとすると $y(t)=0$ より

$$-4.9t^2+(v_0\sin\theta)t=0 \quad \Rightarrow \quad t=0\ ,\ \frac{v_0\sin\theta}{4.9}$$

よって $\underline{\dfrac{v_0\sin\theta}{4.9}\text{ 秒後に落ちる。}}$ その時の水平距離は

$$x\left(\frac{v_0\sin\theta}{4.9}\right)=(v_0\cos\theta)\times\frac{v_0\sin\theta}{4.9}$$
$$\underline{=\frac{{v_0}^2}{4.9}\sin\theta\cos\theta \quad (\mathrm{m})}$$ である。

問 4 の解答

水平距離 $=\dfrac{{v_0}^2}{4.9}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{{v_0}^2}{9.8}\sin(2\theta)$ であり，

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲で $\sin(2\theta)$ が最大なのは

$\theta=45^\circ$ の時である。

$\underline{(\text{答})\quad \theta=45^\circ \text{ のとき}}$

＜ 54 ページ. 道のり 2 ＞

問 1 の解答

(1) $(\ x(t)\ ,\ y(t)\ )=(\ \sin t\ ,\ 0\ )$

(2) $$\int_0^{\pi}|v(t)|\ dt=\int_0^{\pi}|\cos t|\ dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\ dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos t)\ dt$$
$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2$$

問 2 の解答

(1) $(\ x(t)\ ,\ y(t)\ )=(\ \cos t\ ,\ \sin t\ )$

(2) $$\int_0^{2\pi}|v(t)|\ dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\ dt$$
$$=\int_0^{2\pi}1\ dt=2\pi$$

＜ 55 ページ. 道のり 3 ＞

問の解答

(1) $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t)^2+(-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)^2$$
$$=(e^{-t})^2\{2\cos^2 t+2\sin^2 t\}=2(e^{-t})^2$$

$$\ell=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(e^{-t})^2}\ dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^{-t}\ dt=\Big[-\sqrt{2}e^{-t}\Big]_0^{2\pi}$$
$$=-\sqrt{2}e^{-2\pi}+\sqrt{2}e^0=\sqrt{2}\Big(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\Big)$$

(2) $$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$
$$=(-3\sin t\cos^2 t)^2+(3\cos t\sin^2 t)^2$$
$$=9\sin^2 t\cos^2 t\{\cos^2 t+\sin^2 t\}$$
$$=9\sin^2 t\cos^2 t$$

$$\ell=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3|\sin t\cos t|\ dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\ dt=\Big[-\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{3}{4}\cos\pi+\frac{3}{4}\cos 0=\frac{3}{2}$$

< 解答 56 〜 57 >

< 56 ページ. 定積分の応用問題 1 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+x^2+x^3+x^4+x^5)dx = 2\int_0^1 (x^2+x^4)dx$

$\displaystyle= 2\Big[\ \frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\ \Big]_0^1 = 2\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{16}{15}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\Big(\sin x+\cos x+\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\Big)dx$

$\displaystyle= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}\Big)dx = 2\Big[\ \sin x+\tan x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle= 2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+1-0\Big) = \sqrt{2}+2$

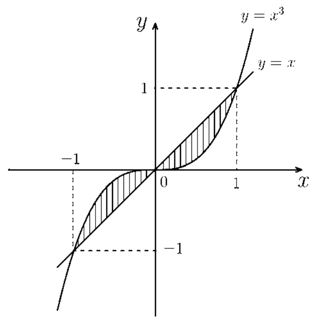
問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \Big[\ 2\sqrt{x}\ \Big]_1^4 = 2\sqrt{4}-2\sqrt{1} = 2$

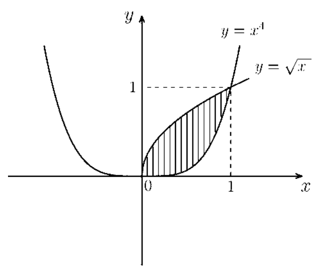
(2) $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_0^1(x-x^3)dx$

$\displaystyle= \Big[\ \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\ \Big]_{-1}^0+\Big[\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\ \Big]_0^1$

$\displaystyle= 0-\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Big)-0 = \frac{1}{2}$

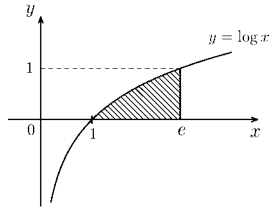


(3) $\displaystyle\int_0^1(\sqrt{x}-x^4)dx = \Big[\ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^5}{5}\ \Big]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{1}{5} = \frac{7}{15}$



(4) $\displaystyle\int_1^e \log x dx = \Big[\ x\log x\ \Big]_1^e-\int_1^e x\times\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle= e\log e-1\log 1-\Big[\ x\ \Big]_1^e = e-(e-1) = 1$



< 57 ページ. 定積分の応用問題 2 >

問 1 の解答

(1) $\displaystyle y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2}$

(2) $\displaystyle\frac{S}{4} = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$

(3) $x = a\sin\theta$ とおくと

$\displaystyle\frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$ より $dx = a\cos\theta d\theta$

積分範囲は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$ より

$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\ a\cos\theta d\theta$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}d\theta$

$\displaystyle= \frac{a^2}{2}\Big[\ \theta+\frac{1}{2}\sin(2\theta)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4}\pi$

$\displaystyle\frac{S}{4} = \frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{b}{a}\times\frac{a^2}{4}\pi$

$\displaystyle= \frac{ab}{4}\pi \quad\Rightarrow\quad \underline{S = \pi ab}$

問 2 の解答

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\pi\Big(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\Big)^2dx = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx$

$\displaystyle= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\Big[\ a^2x-\frac{x^3}{3}\ \Big]_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\times\frac{2a^3}{3} = \frac{4\pi}{3}ab^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{r\cos\theta}\pi(\tan^2\theta)x^2dx+\int_{r\cos\theta}^{r}\pi\Big(\sqrt{r^2-x^2}\Big)^2dx$

$\displaystyle= \Big(\pi\tan^2\theta\Big)\Big[\ \frac{x^3}{3}\ \Big]_0^{r\cos\theta}+\pi\Big[\ r^2x-\frac{x^3}{3}\ \Big]_{r\cos\theta}^{r}$

$\displaystyle= \pi\tan^2\theta\times\frac{r^3\cos^3\theta}{3}+\pi\Big\{\ \frac{2r^3}{3}-r^3\cos\theta+\frac{r^3\cos^3\theta}{3}\ \Big\}$

$\displaystyle= \frac{2}{3}\pi r^3(1-\cos\theta)$

＜ 解答 58 ＞

＜ 58 ページ. 定積分の応用問題 3 ＞

問 1 の解答

(1) $\Big(x(t) \ , \ y(t) \Big) = (\ 1 - \cos t \ , \ 0 \ )$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |v(t)| \ dt = \int_0^{2\pi} |\sin t| \ dt = \int_0^{\pi} \sin t \ dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) \ dt$

$$= \Big[-\cos t \Big]_0^{\pi} + \Big[\cos t \Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

問 2 の解答

(1) $\Big(x(t) \ , \ y(t) \Big) = \Big(\ t \ , \ \dfrac{2}{3} t\sqrt{t} \ \Big)$

(2) $\displaystyle\int_0^{1} |v(t)| \ dt = \int_0^{1} \sqrt{1+t} \ dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t} \right]_0^1$

$$= \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$$

問 3 の解答

(1) $\displaystyle\ell = \int_0^1 \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2} \ dt = \int_0^1 \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2} \ dt$

$$= \int_0^1 6t\sqrt{t^2+1} \ dt = \Big[2(t^2+1)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^1 = 2 \times 2^{\frac{3}{2}} - 2 = 4\sqrt{2} - 2$$

(2) $\displaystyle\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2 = (1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t$

$$= 2 - 2\cos t = 4\sin^2\big(\frac{t}{2}\big)$$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2} \ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\big(\frac{t}{2}\big)} \ dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\big(\frac{t}{2}\big) \ dt = \Big[-4\cos\big(\frac{t}{2}\big) \Big]_0^{2\pi} = -4\cos\pi + 4\cos 0 = 8$$