



高知工科大学
Kochi University of Technology

基礎数学ワークブック

(2005年度版)

番外編

「確率分布」

解答

< 8 ページ. 連続型確率分布 >

問の解答

$$E[X] = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x_2 - x_1} dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= \int_{x_1}^{x_2} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 \frac{1}{x_2 - x_1} dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^3 \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{(x_2 - x_1)^2}{12} \end{aligned}$$

< 17ページ. 条件付確率 1 >

問1の解答

A と B が独立であるから $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ より

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

問2の解答

A 君がはずれを引いたとき, 残りくじは99本で, 当たりくじは10本残っているから

$$P(B | \overline{A}) = \frac{10}{99}$$

問3の解答

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(B|A) \times P(A) + P(B|\overline{A}) \times P(\overline{A}) \\ &= \frac{9}{99} \times \frac{10}{100} + \frac{10}{99} \times \frac{90}{100} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

< 24 ページ. 復元抽出による標本調査 1 >

問の解答

$$y_k = x_k - \bar{x} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n -n\bar{x} = 0$$

より

$$\underline{\underline{(\text{答}) } y_n = -(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})}$$

< 30 ページ. 母平均の区間推定 2 >

問の解答

$\alpha = 2.58$ のとき

$$P\left(|\bar{x} - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{50}} \times 2.58\right) = \int_{-2.58}^{2.58} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2 \times 0.49506 = 0.99012$$

だから, $\bar{x} = 169.5$, $\sigma = 5.6$ を代入すると

$$|169.5 - \mu| \leq \frac{5.6}{\sqrt{50}} \times 2.58 \doteq 2.043$$

となる。従って (99.012% \doteq) 99% の信頼区間は

(答) $167.457 \leq \mu \leq 171.543$

< 32 ページ. 母平均の区間推定 4 >

問の解答

確率 $1 - \alpha = 0.995$ での信頼区間を求める。 $\alpha = 0.005$ のとき t 分布表より $t_{n-1}(\alpha) = t_9(0.005) = 3.690$ である。信頼区間は

$$169 - 3.69 \times \sqrt{\frac{6.25}{10}} \leq \mu \leq 169 + 3.69 \times \sqrt{\frac{6.25}{10}}$$

より

$$\underline{\underline{(答) 166.083 \leq \mu \leq 171.917}}$$

< 35 ページ. 母比率の区間推定 2 >

問の解答

$$\bar{X} = \frac{1500}{3000} = 0.5, \quad N = 100000, \quad n = 3000, \quad \alpha = 1.96$$

に対し

$$a = \frac{N - n}{(N - 1)n} + \frac{1}{\alpha^2} = 0.260632$$

$$b = \frac{N - n}{(N - 1)n} \times \frac{2\bar{X}}{\alpha^2} = 0.260632$$

$$c = \frac{\bar{X}^2}{\alpha^2} = 0.0650771$$

$$D = b^2 - 4ac = 0.0000842717$$

より

$$\frac{b - \sqrt{D}}{2a} = 0.482389, \quad \frac{b + \sqrt{D}}{2a} = 0.517611$$

だから

$$\underline{95\% \text{ の信頼区間は } 0.482389 \leq \mu \leq 0.517611}$$

$$\underline{\text{信頼区間の幅は } 0.517611 - 0.482389 = 0.035222}$$

< 36 ページ. 必要な標本の大きさ >

問の解答

例題と同様にして, $N = 200000$ $\alpha = 2.96$ のとき

$$\alpha \sqrt{\frac{N-n}{N-1} \times \frac{1}{n}} \leq 0.02$$

をみたすように n の範囲を求めると

$$n \geq \frac{N}{4 \times \left(\frac{2.96}{1.96}\right)^2 (N-1) + 1} = \frac{200000}{4 \times \left(\frac{2}{196}\right)^2 \times 199999 + 1} = 2372.53$$

であるから

(答) 2373 人以上抽出すればよい

(注) 信頼度 95%, 信頼区間の幅を 0.04 以下にするという条件でこの問題を考えると, N が大きくなっても抽出すべき人数 n はあまり変わらない。例えば

$$N = 2000000 \quad \text{のとき} \quad n \geq 2399$$

$$N = 20000000 \quad \text{のとき} \quad n \geq 2401$$

とすればよい。

< 37 ページ. ポアソン過程 >

問の解答

$$\begin{aligned}
 E[\xi] &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x \lambda e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ [-x e^{-\lambda x}]_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x} dx \right\}
 \end{aligned}$$

ここで $\lambda > 0$ より

$$\lim_{b \rightarrow \infty} [-x e^{-\lambda x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -b e^{-\lambda b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-b}{e^{\lambda b}} = 0$$

よって

$$\begin{aligned}
 E[\xi] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-\lambda x} dx \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^b \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right\} \\
 &= \frac{1}{\lambda}
 \end{aligned}$$

(証明終)

(注) $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{\lambda b}} = 0$ はロピタルの定理により

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{e^{\lambda b}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial b}(b)}{\frac{\partial}{\partial b}(e^{\lambda b})} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} = 0$$

となつて示される。

< 41 ページ. 乱歩の極限 >

問の解答

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(a < \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} < b \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{a}{\sqrt{t}} < \frac{S_{nt}}{\sqrt{nt}} < \frac{b}{\sqrt{t}} \right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} P \left(\frac{a}{\sqrt{t}} < \frac{S_m}{\sqrt{m}} < \frac{b}{\sqrt{t}} \right) && (nt = m \text{ とおく}) \\
 &= \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\frac{b}{\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) \text{ (中心極限定理より)} \\
 &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy && \left(x = \frac{y}{\sqrt{t}} \text{ とおく} \right) \\
 & && \text{(証明終)}
 \end{aligned}$$

< 42 ページ. ランダムウォークによるブラウン運動の構成 >

問の解答

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{2t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{2t^2} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \text{ より } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{証明終})$$

< 43 ページ. 確率密度の収束 1 >

問の解答

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial h} \{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(h^2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial h} \{f'(x+h) - f'(x-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(2h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) + f''(x-h)}{2} = f''(x) \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

< 45 ページ. ランダムウォークの族 >

問の解答

< (*1) の証明 >

$$\begin{aligned}
 & P\left(S_h^\tau(n+1) = jh\right) \\
 &= P\left(S_h^\tau(n+1) = jh, S_h^\tau(n) = jh\right) + P\left(S_h^\tau(n+1) = jh, S_h^\tau(n) = (j+1)h\right) \\
 &\quad + P\left(S_h^\tau(n+1) = jh, S_h^\tau(n) = (j-1)h\right) \\
 &= P\left(S_h^\tau(n+1) = jh \mid S_h^\tau(n) = jh\right)P\left(S_h^\tau(n) = jh\right) \\
 &\quad + P\left(S_h^\tau(n+1) = jh \mid S_h^\tau(n) = (j+1)h\right)P\left(S_h^\tau(n) = (j+1)h\right) \\
 &\quad + P\left(S_h^\tau(n+1) = jh \mid S_h^\tau(n) = (j-1)h\right)P\left(S_h^\tau(n) = (j-1)h\right) \\
 &= \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right)P\left(S_h^\tau(n) = jh\right) + \frac{\tau}{2h^2}P\left(S_h^\tau(n) = (j+1)h\right) + \frac{\tau}{2h^2}P\left(S_h^\tau(n) = (j-1)h\right)
 \end{aligned}$$

(証明終)

< (*2) の証明 >

$$\begin{aligned}
 u_j^{n+1} &= P\left(S_h^\tau(n+1) = jh\right)h^{-1} \\
 &= \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right)P\left(S_h^\tau(n) = jh\right)h^{-1} + \frac{\tau}{2h^2}P\left(S_h^\tau(n) = (j+1)h\right)h^{-1} \\
 &\quad + \frac{\tau}{2h^2}P\left(S_h^\tau(n) = (j-1)h\right)h^{-1} \\
 &= \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right)u_j^n + \frac{\tau}{2h^2}u_{j+1}^n + \frac{\tau}{2h^2}u_{j-1}^n
 \end{aligned}$$

より

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{\tau}{h^2} \left\{ -u_j^n + \frac{1}{2}u_{j+1}^n + \frac{1}{2}u_{j-1}^n \right\}$$

従って

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}$$

(証明終)

< 46 ページ. ジャンプ型マルコフ過程 >

問の解答

< (*3) の証明 > $\{S_h(n)\}$ と $\{N_h(t)\}$ は独立だから

$$\begin{aligned}
 P\left(S_h(N_h(t)) = jh\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_h(n) = jh, N_h(t) = n\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_h(n) = jh\right) \times P\left(N_h(t) = n\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(S_h(n) = jh\right) e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{\left(\frac{t}{h^2}\right)^n}{n!} \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

< (*4) の証明 >

$$\begin{aligned}
 &P\left(S_h(n+1) = jh\right) \\
 &= P\left(S_h(n+1) = jh, S_h(n) = (j+1)h\right) + P\left(S_h(n+1) = jh, S_h(n) = (j-1)h\right) \\
 &= P\left(S_h(n+1) = jh \mid S_h(n) = (j+1)h\right) P\left(S_h(n) = (j+1)h\right) \\
 &\quad + P\left(S_h(n+1) = jh \mid S_h(n) = (j-1)h\right) P\left(S_h(n) = (j-1)h\right) \\
 &= \frac{1}{2} P\left(S_h(n) = (j+1)h\right) + \frac{1}{2} P\left(S_h(n) = (j-1)h\right) \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

< 47ページ. ブラウン運動への収束 >

問の解答

(*5) を証明する

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}u_h(t, jh) &= \frac{d}{dt}P(S_h(N_h(t)) = jh)h^{-1} \\
 &= \frac{d}{dt} \left\{ P(S_h(0) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_h(n) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \right\} h^{-1} \\
 &= \left[-\frac{1}{h^2}P(S_h(0) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_h(n) = jh) \left\{ -\frac{1}{h^2}e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} + e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{1}{h^2} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^{n-1}}{(n-1)!} \right\} \right] h^{-1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} P(S_h(n) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_h(n) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^{n-1}}{(n-1)!} \right\} h^{-1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} P(S_h(n) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} P(S_h(n+1) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \right\} h^{-1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-P(S_h(n) = jh)e^{-\frac{t}{h^2}} \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2}P(S_h(n) = (j+1)h) + \frac{1}{2}P(S_h(n) = (j-1)h) \right\} e^{-\frac{t}{h^2}} \times \frac{(\frac{t}{h^2})^n}{n!} \right] h^{-1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[-P(S_h(N_h(t)) = jh) + \frac{1}{2}P(S_h(N_h(t)) = (j+1)h) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}P(S_h(N_h(t)) = (j-1)h) \right] h^{-1} \\
 &= \frac{1}{h^2} \left[-u_h(t, jh) + \frac{1}{2}u_h(t, (j+1)h) + \frac{1}{2}u_h(t, (j-1)h) \right] \\
 &= \frac{u_h(t, (j+1)h) - 2u_h(t, jh) + u_h(t, (j-1)h)}{2h^2}
 \end{aligned}$$

(証明終)

< 付録 3. 独立確率変数の和の分布 3 の解答 No.1 >

< 定理 4 の証明 >

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_1}} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2v_1}}, \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_2}} e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2v_2}}$$

$$(p_1 * p_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x-y)p_2(y)dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{v_1v_2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2v_1} - \frac{(y-m_2)^2}{2v_2}} dy$$

ここで $M = x - m_1$ とおいて指数部分を計算すると

$$\begin{aligned} & -\frac{(x-y-m_1)^2}{2v_1} - \frac{(y-m_2)^2}{2v_2} = -\frac{1}{2v_1v_2} \{v_2(M-y)^2 + v_1(y-m_2)^2\} \\ & = -\frac{1}{2v_1v_2} \{(v_1+v_2)y^2 - 2(v_1m_2 + v_2M)y + v_1m_2^2 + v_2M^2\} \\ & = -\frac{(v_1+v_2)}{2v_1v_2} \left[\left(y - \frac{v_1m_2 + v_2M}{v_1+v_2} \right)^2 - \left(\frac{v_1m_2 + v_2M}{v_1+v_2} \right)^2 + \frac{v_1m_2^2 + v_2M^2}{v_1+v_2} \right] \\ & = -\frac{(v_1+v_2)}{2v_1v_2} \left[\left(y - \frac{v_1m_2 + v_2M}{v_1+v_2} \right)^2 + \frac{v_1v_2(M-m_2)^2}{(v_1+v_2)^2} \right] \\ & = -\frac{(y-V)^2}{2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}} - \frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)} \quad \left(\text{ただし } V = \frac{v_1m_2 + v_2M}{v_1+v_2} \right) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} (p_1 * p_2)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}}} e^{-\frac{(y-V)^2}{2\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}}} dy \right)}_{\parallel 1} \times e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(v_1+v_2)}} e^{-\frac{(x-m_1-m_2)^2}{2(v_1+v_2)}} \end{aligned}$$

となる。これは平均 $m_1 + m_2$, 分散 $v_1 + v_2$ の正規分布密度である。

(証明終)

< 付録 3. 独立確率変数の和の分布 3 の解答 No.2 >

< 定理 6 の証明 >

$$p_{\alpha}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

に対し, $x > 0$ のとき

$$\begin{aligned} (p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy = \int_0^x p_{\alpha_1}(x-y)p_{\alpha_2}(y)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1}\beta^{\alpha_2}} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1}e^{-\frac{x-y}{\beta}} \cdot y^{\alpha_2-1}e^{-\frac{y}{\beta}}dy \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}dy \end{aligned}$$

ここで $y = xu$ とおくと

$$\begin{aligned} (p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) &= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha_1-1}(xu)^{\alpha_2-1}xdu \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} \times u^{\alpha_2-1}du}_{\parallel B(\alpha_1, \alpha_2)} \\ &= \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}} \times x^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}} \times \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\frac{x}{\beta}} = p_{\alpha_1+\alpha_2}(x) \end{aligned}$$

また $x < 0$ のとき $(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) = 0$ よつて $(p_{\alpha_1} * p_{\alpha_2})(x) = p_{\alpha_1+\alpha_2}(x)$

(証明終)

< 付録 8. チェビシエフの不等式 >

問の解答

$$P(X = x_n) = p_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad , \quad p_n \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 p_n < \infty \quad \text{のとき}$$

$\epsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P(|X| \geq \epsilon) &= \sum_{|x_n| \geq \epsilon} P(X = x_n) \\ &\leq \sum_{|x_n| \geq \epsilon} \frac{(x_n)^2}{\epsilon^2} p_n = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{|x_n| \geq \epsilon} (x_n)^2 p_n \\ &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 p_n = \frac{1}{\epsilon^2} E[X^2] \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$