高知工科大学

基礎数学ワークブック

(2001 年度版)

番外編 1

「確率」

解答

< 2 ページ. 順列 >

問 1 (1) ${}_{10}P_3 = 720$

(2) ${}_{6}P_4 = 360$

(3) $5! = 120$

(4) $6! = 720$

問 2 (1) ${}_{4}P_3 = 24$

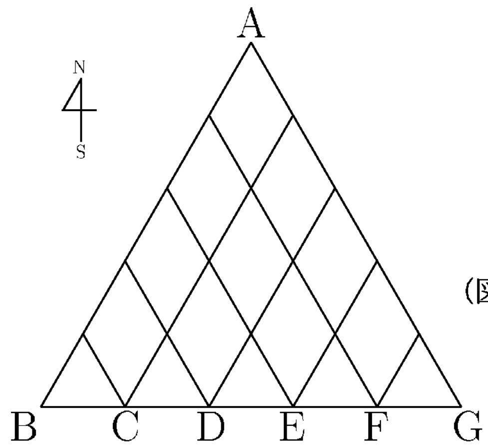
(2) $4^3 = 64$

＜ 3ページ. 組合せ ＞

問1　(1) $_{10}P_4 = 5040$

(2) $_{10}C_4 = 210$

問2



(図2)

$_5C_0$	$_5C_1$	$_5C_2$	$_5C_3$	$_5C_4$	$_5C_5$	
$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	$\|\|$	
1	5	10	10	5	1	(通り)

＜ 4 ページ. 二項定理 ＞

問 1　$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

問 2　$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

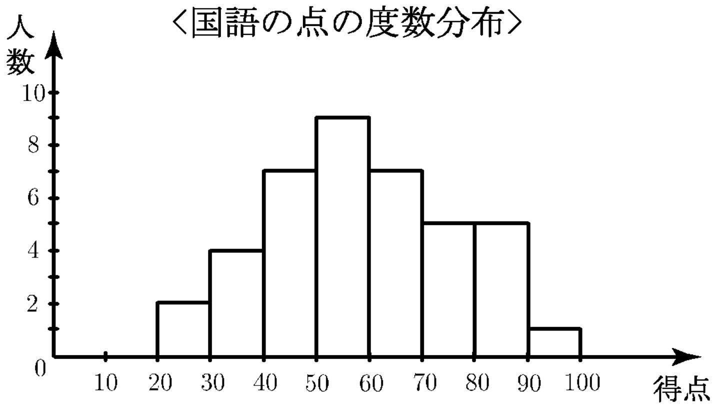
問 3　$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} + {}_nC_n = (1+1)^n = 2^n$$

＜ 5 ページ. 資料の整理 1 ＞

問 1 (1) $m = 6$, $v = 4$, $\sigma = 2$

(2) $m = 0$, $v = 1$, $\sigma = 1$

問 2



$m = 57.475$, $v = 288.949$, $\sigma = 16.9985$

＜ 6 ページ. 資料の整理 2 ＞

問

$$v = \frac{1}{N}\left\{(x_1 - m)^2 f_1 + (x_2 - m)^2 f_2 + \cdots + (x_n - m)^2 f_n\right\}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 f_k$$

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 f_k}$$

＜ 7ページ. 資料の標準化 ＞

問 (1) $\dfrac{6+7+7+6}{40} = 0.65 = 65\,\%$

(2) $\dfrac{40-2}{40} = 0.95 = 95\,\%$

＜ 8 ページ. 偏差値 ＞

問 1 A 君 55.75

B 君 55.05

C 君 55.35

問 2 (1) 77.5

(2) 57.5

(3) 47.5

(4) 27.5

< 9ページ.試行と事象 >

問 $n(U) = 6^3 = 216$

$n(A) = 6$

< 10 ページ. 有限事象の確率の定義 >

問 1 $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

問 2 $\dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$

< 11 ページ. 基本的な確率の計算 >

問 1 (1) $\dfrac{4^3}{10^3} = \dfrac{8}{125}$

(2) $\dfrac{{}_4P_3}{{}_{10}P_3} = \dfrac{1}{30}$

(3) $\dfrac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \dfrac{1}{30}$

＜ 12 ページ. 共通事象の確率 ＞

問 1 $P(A' \cap B \cap C) = \dfrac{4 \times 2 \times 2}{216} = \dfrac{2}{27}$

＜ 13 ページ. 独立試行 1 ＞

問 1 $$P(A \cap B) = \frac{4}{15}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

問 2 $$P(A \cap B) = \frac{3 \times 2}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{3 \times 6}{6^2} \times \frac{6 \times 2}{6^2} = \frac{1}{6}$$

< 14 ページ. 独立試行 2 >

問 $$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{6^4} = \frac{1}{54}$$

< 15 ページ. 反復試行 >

問 (1) $_5C_3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \times 5^2}{6^5} = \frac{125}{3888}$

(2) $_5C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$

< 16 ページ. 確率変数 >

問

表の回数 X	0	1	2	3	4	5	計
確 率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

$$P(2 \leqq X \leqq 4) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} = \frac{25}{32}$$

＜ 17 ページ. 期待値 ＞

問

X	0	100	200	300	400	500	計
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{32} + 100 \times \frac{5}{32} + 200 \times \frac{10}{32}$$

$$+300 \times \frac{10}{32} + 400 \times \frac{5}{32} + 500 \times \frac{1}{32} = 250$$

＜ 18 ページ. 確率変数の平均と分散 1 ＞

問

X	0	1	2	3	4	計
確率 p	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$$m = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{4}{16} + 2 \times \frac{6}{16} + 3 \times \frac{4}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = 2$$

$$v = (0-2)^2 \frac{1}{16} + (1-2)^2 \frac{4}{16} + (2-2)^2 \frac{6}{16} + (3-2)^2 \frac{4}{16} + (4-2)^2 \frac{1}{16} = 1$$

< 19ページ. 確率変数の平均と分散 2 >

問 $E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = am + b$

$$V[Y] = E\left[(Y - E[Y])^2\right] = E\left[(aX + b - (am + b))^2\right]$$

$$= E\left[a^2(X - m)^2\right] = a^2E\left[(X - m)^2\right] = a^2v$$

< 20 ページ. 独立確率変数 1 >

問 1

X	0	0	1	1	2	2	計
Y	0	1	0	1	0	1	
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

問 2

$X+Y$	0	1	2	3	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

< 21 ページ. 独立確率変数 2 >

問 $E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \dfrac{n}{6}$

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{5}{36}n$$

$<$ 22 ページ. 二項分布 $>$

問 (1) $\dfrac{1}{128}$

(2) $\dfrac{35}{128}$

(3) $\dfrac{7}{2}$

(4) $\dfrac{7}{4}$

＜ 23 ページ. 確率変数の標準化 ＞

問 (1) $m = 80 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{40}{3}$

$$\sigma = \sqrt{80 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \frac{10}{3}$$

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - \frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{10}X - 4$$

(2) $m = 100 \times \dfrac{1}{2} = 50$

$$\sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 5$$

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{X - 50}{5} = \frac{1}{5}X - 10$$

< 24 ページ. 質量と重心 1 >

問 $g = \dfrac{1}{M}\{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n\}$

< 25 ページ. 質量と重心 2 >

問 $g = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_a^b xf(x)dx$

< 26 ページ. 質量と重心 3 >

問 $M = \int_0^2 f(x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$

$$g = \frac{1}{M}\int_0^2 xf(x)dx = \frac{3}{4}\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = 1$$

＜ 27 ページ. 確率密度関数 1 ＞

問 (1) $\int_a^b kdx = k[x]_a^b = k(b-a) = 1$

より $k = \dfrac{1}{b-a}$

$$m = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b+a}{2}$$

(2) $\int_0^2 kx(2-x)dx = k\left[x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = \dfrac{4}{3}k = 1$

より $k = \dfrac{3}{4}$

$$m = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2-x)dx = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 1$$

< 28 ページ. 確率密度関数 2 >

問 (1) $v = \displaystyle\int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}dx$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{b+a}{2}x^2 + \frac{(b+a)^2}{4}x\right]_a^b$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

(2) $v = \displaystyle\int_0^2 (x-1)^2 \frac{3}{4}x(2-x)dx$

$$= \frac{3}{4}\left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{5}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$$

$$= 3\left(-\frac{2^3}{5} + 2^2 - \frac{10}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{5}$$

< 29 ページ.Bertrand の問題 >

問 (1) 直径 AB 上の点 (P)

(2) 円周上の点 (P)

＜ 30 ページ. 連続分布 1 ＞

問 $\dfrac{x_2 - x_1}{2}$

＜ 31 ページ. 連続分布 2 ＞

問 1 (1) 1

(2) $\dfrac{x_1+1}{2}$

(3) $\dfrac{1-x_1}{2}$

(4) 0

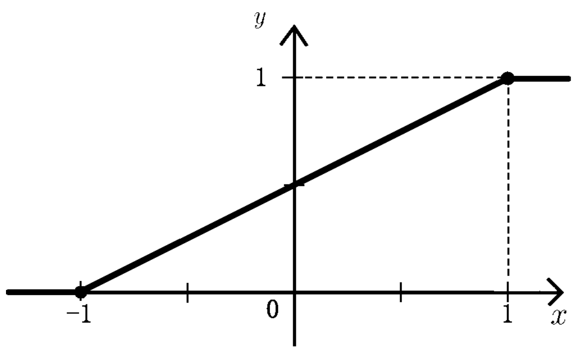
(5) 0

(6) $\dfrac{x_2-x_1}{2}$

問 2

$-1 < x < 1$ のとき

$F(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$



< 32 ページ. 連続分布 3 >

問 $m = 1$, $v = \dfrac{1}{5}$

$$P(1 < x < 2) = \int_1^2 \frac{3}{4}x(2-x)dx = \frac{3}{4}\left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

< 33 ページ. 連続分布 4 >

問 $m_Y = \dfrac{1}{\sqrt{v}}E[X] - \dfrac{m}{\sqrt{v}} = \dfrac{m-m}{\sqrt{v}} = 0$

$$v_Y = E[(Y-m_Y)^2] = E\left[\left(\frac{X-m}{\sqrt{v}}\right)^2\right] = \frac{1}{v}E[(X-m)^2] = \frac{v}{v} = 1$$

< 34 ページ. 連続分布 5 >

問 $P(a < X^* < b) = P(\sigma a + m < X < \sigma b + m) = \displaystyle\int_{\sigma a+m}^{\sigma b+m} p(x)dx$

$$= \int_a^b \sigma p(\sigma y + m)dy$$

密度関数 $\sigma p(\sigma x + m)$

< 35 ページ. 連続分布 6 >

問 $m = 1 \ , \ v = \dfrac{1}{5} \ , \ \sigma = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\sigma p(\sigma x + m) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x + 1\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}x\right) = \frac{3\sqrt{5}}{20}\left(1 - \frac{x^2}{5}\right)$$

$X = 0$ のとき $X^* = \dfrac{0-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\sqrt{5}$

$X = 2$ のとき $X^* = \dfrac{2-1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

$$p_*(x) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{5}}{20}(1 - \frac{x^2}{5}) : -\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5} \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad : \text{その他} \end{cases}$$

< 36 ページ. 正規分布 1 >

問 (1) 0.9500

(2) 0.15735

(3) 0.8185

＜ 37 ページ. 正規分布 2 ＞

問 1 (1) $P(0 \leqq X^* \leqq 1.5) = 0.4332$

(2) $P(1 \leqq X^* \leqq 3) = 0.15735$

(3) $P(-2 \leqq X^* \leqq 2) = 0.9544$

問 2 (1) $P(-1.96 \leqq X^* \leqq 1.96) = 0.95$

(2) $P(-2.58 \leqq X^* \leqq 2.58) = 0.99012$

＜38 ページ. 二項分布の正規近似＞

問 $(a-0.5)^* = \dfrac{10-\frac{1}{2}-\frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = -1.15$

$$(b+0.5)^* = \frac{20+\frac{1}{2}-\frac{40}{3}}{\frac{10}{3}} = 2.15$$

$$P(10 \leqq X \leqq 20) \fallingdotseq \int_{-1.15}^{2.15} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.4842 + 0.3749 = 0.8591$$

< 39 ページ. 中心極限定理 >

問 $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right| \leqq M\sqrt{\frac{v}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-nm}{n}}{\sqrt{\frac{v}{n}}}\right| \leqq M\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-nm}{\sqrt{nv}}\right| \leqq M\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(-M \leqq (X_1+X_2+\cdots+X_n)^* \leqq M\right)$$

$$= \int_{-M}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

＜ 40 ページ. 大数の法則 ＞

問 (1) $E[Y_k] = 0 \times P(Y_k = 0) + 1 \times P(Y_k = 1)$

$$= \int_a^b p(x)dx = (b-a)h$$

(2) n 回のうち a から b の範囲に止まる回数

(3) $E[Y_k] = (b-a)h$

(4) h